Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 3.

NOGLE BEMÆRKNINGER ANGAAENDE INTERPOLATION MED ÆQUIDISTANTE ARGUMENTER

AF

N. E. NØRLUND

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1922

1. Ved numeriske Regninger gør man ofte Brug af visse Interpolationsformler, der tjener til at beregne Værdierne af en Funktion, hvis successive Differenser er givne, eller til at beregne en saadan Funktions Differentialkvotienter og Integraler. Den vigtigste af disse er STIRLING's Interpolationsformel:

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1^2))}{(2s)!} \triangle^{2s} H(-s)$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \nabla \triangle^{2s+1} H(-s-1),$$

samt GAUSS' Formel og BESSEL's Formel, som slutter sig nær til denne, og som alle tre er et specielt Tilfælde af den almindelige Newton'ske Interpolationsformel. Disse Formler anvendes i Særdeleshed ved de astronomiske Ephemerideberegninger, samt naar det drejer sig om at konstruere en Tabel over en Funktion, som enten er exact given eller med Tilnærmelse bekendt ved en Række Iagttagelser, f. Ex. naar man vil beregne en Dødelighedstavle. Interpolationsformlerne afledes som Regel ved symbolske Methoder[1], altsaa uden egentligt Bevis, og ved Benyttelsen indskrænker man sig til at medtage et ringe Antal af Rækkens første Led, og opnaar derved i Almindelighed en god Approximation, naar blot Tabellens Interval er valgt tilstrækkelig

[1] Se f. Ex. Encyclopédie des Sciences mathématiques, tome I. vol. 4, p. 49—59.

lille. Men det kunde være af Interesse at vide i hvilke Tilfælde Rækken konvergerer. Svaret paa dette Spørgsmaal er ret overraskende, idet det, som vi skal se, kun er en meget speciel Klasse af Funktioner, som kan fremstilles ved de nævnte Rækker. I det store Flertal af de Tilfælde, hvor man anvender den Stirling'ske Interpolationsformel, er denne altsaa divergent. Dette hindrer dog ikke, at man med Fordel kan benytte den, idet den har en semikonvergent Karakter. Hvis man f. Ex. vil beregne en Logarithmetabel, saa vilde det være en altfor besværlig Sag at direkte beregne $\log z$ for alle Argumentværdier. Man nøjes med at bestemme $\log z$ for et ringe Antal Værdier af z og beregner derefter Logarithmens Værdi for de mellemliggende Argumentværdier ved Hjælp af Stirling's eller Gauss' Interpolationsformel. Denne Fremgangsmaade sparer megen Tid, og den giver en tilfredsstillende Nøjagtighed, naar Tabellens Interval er tilstrækkelig lille, saafremt man blot medtager nogle faa Led i Rækken. Men hvis man medtager et for stort Antal Led i Interpolationsrækken, saa faar man en ganske falsk Logarithmetabel.

Et andet bemærkelsesværdigt specielt Tilfælde af den Newton'ske Interpolationsformel faar man ved i en æquidistant Tabel at interpolere efter faldende Skraalinie. Man føres derved til en Række af Formen

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s (z-\omega)(z-2\omega)\cdots(z-s\omega). \tag{1}$$

Set fra et regneteknisk Synspunkt er denne Række mindre hensigtsmæssig end den Stirlingske, og den anvendes derfor ogsaa kun sjeldent. De første Led af Rækken giver nemlig en daarligere Approximation end de første Led af Stirlings Formel. Men kuriøst nok stiller Konvergensforholdene sig her langt gunstigere. Den Klasse af Funktioner, der kan fremstilles ved en Række af Formen (1), omfatter som et ganske specielt Tilfælde de Funktioner, der kan fremstilles ved Stirling's Formel. Man har her et interessant Exempel paa, hvor stor Forskel der er paa de Krav, som Mathematikeren og den praktiske Beregner stiller til de Rækker, de opererer med. Vi skal dog først i en senere Meddelelse indgaa paa en nærmere Omtale af Rækken (1) og her begrændse os til de tre førstnævnte Interpolationsrækker og navnlig undersøge under hvilke Forudsætninger disse konvergerer.

2. Lad os først betragte en Række af Formen

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s z (z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2) \tag{2}$$

hvor Koefficienterne a_s ikke afhænger af z. Hvis z er et helt Tal (inklusive 0), saa reducerer Rækken sig til et endeligt Antal Led. Vi skal nu vise følgende Sætning. Hvis Rækken (2) konvergerer for $z = z_0$, hvor z_0 ikke er et helt Tal, saa konvergerer den ligelig i ethvert endeligt Omraade af z-Planen. Dette følger let af det saakaldte Abel'ske Konvergenskriterium[1]. Sætter man nemlig

$$b_s = a_s z_0 (z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2) \cdots (z_0^2 - s^2),$$

$$u_s(z) = \frac{z(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2)}{z_0(z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2) \cdots (z_0^2 - s^2)},$$

saa har man

$$u_s(z) - u_{s+1}(z) = u_s(z) \frac{z^2 - z_0^2}{(s+1)^2 - z_0^2}.$$

Restleddet i Rækken (2) kan da skrives saaledes

[1] Bromwich: Theory of infinite series, London 1908, p. 205—7.

$$\sum_{s=n}^{s=m}{}' b_s u_s(z) = \sum_{s=n}^{s=m}{}' (u_s(z) - u_{s+1}(z)) \sum_{\nu=n}^{\nu=s}{}' b_\nu + u_{m+1}(z) \sum_{\nu=n}^{\nu=m}{}' b_\nu$$

$$= (z^2 - z_0^2) \sum_{s=n}^{s=m}{}' \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \sum_{\nu=n}^{\nu=s}{}' b_\nu + u_{m+1}(z) \sum_{\nu=n}^{\nu=m}{}' b_\nu. \quad (3)$$

For at se, hvorledes u_s forholder sig for meget store Værdier af s dividerer vi Tæller og Nævner i u_s med $(s!)^2$; vi faar da

$$u_s(z) = \frac{z\left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)}{z_0\left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)}. \quad (4)$$

Af dette Udtryk følger umiddelbart at, naar s vokser ud over enhver Grændse, saa konvergerer $u_s(z)$ ligelig mod en Grændseværdi, saafremt z er beliggende i et vilkaarligt endeligt Omraade. Denne Grændseværdi er

$$\lim_{s \to \infty} u_s(z) = \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0}.$$

I Følge Forudsætning kan man nu finde et Tal N saaledes at

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\nu=s}{}' b_\nu \right| < \varepsilon, \quad \text{for } s \geq n \geq N.$$

Af (3) finder man da følgende Ulighed

$$\left| \sum_{s=n}^{s=m}{}' b_s u_s(z) \right| < C\varepsilon \sum_{s=n}^{s=m}{}' \frac{1}{|(s+1)^2 - z_0^2|} + C\varepsilon < C_1 \varepsilon,$$

hvor C og C_1 er af z uafhængige Konstanter. Sætningen er hermed bevist. Hvis Rækken (2) er konvergent fremstiller den altsaa altid en hel Funktion, som vi vil betegne med $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s z (z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2).$$

For at danne os et Skøn over hvilke hele Funktioner, som kan fremstilles ved denne Række vil vi søge en Majorantværdi for $H(z)$. Rækken (2) kan naturligvis være absolut konvergent i hele Planen. Men det kan ogsaa hænde, at den er betinget konvergent for alle Værdier af z, som er forskellige fra de hele Tal. Vi vil derfor først transformere Rækken til en absolut konvergent Række. Vi benytter dertil Identiteten (3) idet vi i denne sætter $n = 0$ og lader m vokse ud over enhver Grændse. Vi faar da

$$H(z) = H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} + (z^2 - z_0^2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \sum_{\nu=0}^{\nu=s} b_\nu .$$

Det er aabenbart, at denne Række er absolut konvergent, thi u_s nærmer sig, som vi har set, en endelig Grændseværdi, naar $s \longrightarrow \infty$, og Rækken $\sum b_\nu$ er i Følge Forudsætning konvergent. Vi kan da finde en Konstant C saaledes at

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\nu=s} b_\nu \right| < C \quad s = 0,\ 1,\ 2, \cdots.$$

Vi faar heraf følgende Ulighed

$$\left| H(z) \right| < \left| H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} \right| + C \left| z^2 - z_0^2 \right| \sum_{s=0}^{\infty} \left| \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \right| . \quad (5)$$

Da vor Forudsætning, at Rækken (2) konvergerer for $z = z_0$, medfører, at denne Række konvergerer overalt, saa kan vi uden at indskrænke Almindeligheden antage, at $0 < z_0 < 1$. Af (4) følger da at

$$\left|u_s(z)\right| \frac{|z^2 - z_0^2|}{(s+1)^2 - z_0^2} \leq \frac{|z|\left(1+\frac{|z|^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{|z|^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0\left(1-\frac{z_0^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{z_0^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_0^2}{s^2}\right)} \frac{|z|^2 + z_0^2}{(s+1)^2 - z_0^2}$$

$$= \frac{|z|\left(1+\frac{|z|^2}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z|^2}{(s+1)^2}\right)}{z_0\left(1-\frac{z_0^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_0^2}{(s+1)^2}\right)} - \frac{|z|\left(1+\frac{|z|^2}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0\left(1-\frac{z_0^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_0^2}{s^2}\right)}.$$

Altsaa er

$$\left|z^2 - z_0^2\right| \sum_{s=0}^{\infty}{}' \frac{|u_s(z)|}{(s+1)^2 - z_0^2}$$

$$\leq \sum_{s=0}^{\infty}{}' \left(\frac{|z|\left(1+\frac{|z|^2}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z|^2}{(s+1)^2}\right)}{z_0\left(1-\frac{z_0^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_0^2}{(s+1)^2}\right)} - \frac{|z|\left(1+\frac{|z|^2}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0\left(1-\frac{z_0^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_0^2}{s^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{|z|\left(1+\frac{|z|^2}{1^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0\left(1-\frac{z_0^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_0^2}{s^2}\right)} - \frac{|z|}{z_0}$$

$$= \frac{sh\,\pi|z|}{\sin \pi z_0} - \frac{|z|}{z_0},$$

hvor shz er den hyperbolske sinus af z. Substituerer vi nu dette Udtryk i Uligheden (5) faar vi

$$\left|H(z)\right| < \left|H(z_0)\frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0}\right| + C\left(\frac{sh\,\pi|z|}{\sin \pi z_0} - \frac{|z|}{z_0}\right).$$

Hvis altsaa $H(z)$ er en Funktion, som kan fremstilles ved Rækken (2), saa kan vi finde en Konstant K saaledes at

$$|H(z)| < K e^{\pi|z|} \tag{6}$$

for alle z. Denne Ulighed ophører at gælde, hvis vi i Exponenten erstatter π med et Tal, som er mindre end π. Funktionen

$$\sin \omega z$$

kan nemlig fremstilles ved en Række af Formen (2), hvis $-\pi < \omega < \pi$. Derimod existerer en saadan Udvikling ikke hvis $\omega = \pi$. Ligesaa kan Funktionen

$$\frac{\cos \pi z - 1}{z}$$

fremstilles ved en Række af den nævnte Art.

3. Det er altsaa kun hele Funktioner, hvis Orden er ≤ 1, som der kan være Tale om at fremstille ved en af de ovenfor omtalte Interpolationsrækker. For nu at se hvilke yderligere Betingelser man maa paalægge Funktionen vil vi udtrykke Rækkens Restled ved Hjælp af Cauchy's Integral. Lad $H(x)$ betegne en hel Funktion og lad os for Kortheds Skyld sætte

$$\triangle H(x) = H(x+1) - H(x),$$
$$\triangle^n H(x) = \triangle(\triangle^{n-1} H(x)).$$

For de successive Differenser af $H(x)$ finder man da følgende Integraludtryk

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{H(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - x},$$

$$\triangle H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{H(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - x)(\zeta - x - 1)},$$

$$\triangle^n H(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{H(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - x)(\zeta - x - 1)\cdots(\zeta - x - n)},$$

hvor Integrationsvejen er en i positiv Omløbsretning gennemløben Cirkel med Nul som Centrum og saa stor Radius, at Cirklen omslutter Punkterne $x, x+1, \cdots x+n$. Man har nu følgende Identitet

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\psi_1(\zeta)} + \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(\zeta)} + \frac{\psi_2(z)}{\psi_3(\zeta)} + \cdots + \frac{\psi_{n-1}(z)}{\psi_n(\zeta)} + \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(\zeta)}\,\frac{1}{\zeta - z}, \quad (7)$$

hvor $$\psi_\nu(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_\nu).$$

Vi vælger først Tallene a_ν paa følgende Maade

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = -n, \quad a_{2n+1} = n.$$

Man finder da

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{s=0}^{n}{}' \frac{(z+s)(z+s-1)\cdots(z-s+1)}{(\zeta+s)(\zeta+s-1)\cdots(\zeta-s)} + \sum_{s=0}^{n-1}{}' \frac{(z+s)(z+s-1)\cdots(z-s)}{(\zeta+s+1)(\zeta+s)\cdots(\zeta-s)}$$
$$+ \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\cdots(\zeta^2-n^2)} \frac{1}{\zeta - z}.$$

Vi multiplicerer begge Sider af denne Ligning med $H(\zeta)$ og integrerer med Hensyn til ζ langs med en i positiv Omløbsretning gennemløben Cirkel C_n, som har Nul som Centrum og en Radius, som er større end n. Vi faar da

$$H(z) = \sum_{s=0}^{n}{}' \binom{z+s}{2s} \triangle^{2s} H(-s) + \sum_{s=0}^{n-1}{}' \binom{z+s}{2s+1} \triangle^{2s+1} H(-s-1) + R_{2n+1}, \quad (8)$$

hvor

$$R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\cdots(\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (9)$$

Det er herved forudsat, at Punktet z ligger inden for Cirkelen C_n. Denne Række betegnes almindeligvis som Gauss' Interpolationsformel[1]. Vælger vi derimod i (7) Tallene a_ν paa følgende Maade

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = n, \quad a_{2n+1} = -n,$$

saa faar vi i Stedet for (8) følgende analoge Formel

$$H(z) = \sum_{s=0}^{n}{}' \binom{z+s-1}{2s} \triangle^{2s} H(-s) + \sum_{s=0}^{n-1}{}' \binom{z+s}{2s+1} \triangle^{2s+1} H(-s) + R_{2n+1}. \quad (10)$$

[1] C. F. Gauss, Werke 3, Göttingen 1876, p. 329. J. F. Encke, Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen, Berlin 1888, p. 1.

Adderer vi Rækkerne (8) og (10) til hinanden Led for Led saa faar vi STIRLING's Interpolationsformel[1]

$$H(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!} \triangle^{2s} H(-s)$$

$$+\sum_{s=0}^{n-1} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \nabla \triangle^{2s+1} H(-s-1) + R_{2n+1}, \quad (11)$$

hvor R_{2n+1} har den ved (9) angivne Værdi, og hvor vi for Kortheds Skyld har sat

$$\nabla H(x) = \frac{H(x+1)+H(x)}{2}.$$

Hvis vi i begge Rækkerne (11) giver s Værdierne 0, 1, 2, $\cdots$ $n-1$ saa finder vi for Restleddet efter $2n$ Led R_{2n} følgende Udtryk

$$R_{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-(n-1)^2)(z\zeta-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\cdots(\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \quad (12)$$

En anden bemærkelsesværdig Udvikling faas paa følgende Maade. Vi erstatter i (10) z med $z+\frac{1}{2}$ og $H(z)$ med $H(z-\frac{1}{2})$. Vi erstatter i (8) z med $z-\frac{1}{2}$ og $H(z)$ med $H(z+\frac{1}{2})$. Adderer vi de to derved fremkomne Rækker til hinanden Led for Led faar vi BESSEL's Interpolationsformel

$$H(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s)!} \nabla \triangle^{2s} H(-s-\tfrac{1}{2})$$

$$+z\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s+1)!} \triangle^{2s+1} H(-s-\tfrac{1}{2}) + \mathfrak{R}_{2n+1}, \quad (13)$$

hvor

[1] Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730.

$$\mathfrak{R}_{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(n-\frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2-(\frac{1}{2})^2)(\zeta^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(\zeta^2-(n-\frac{1}{2})^2)}\frac{H(\zeta)}{\zeta-z}dz, \quad (14)$$

$$\mathfrak{R}_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{n+1}} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)\cdots(z^2-(n-\frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2-(\frac{1}{2})^2)\cdots(\zeta^2-(n+\frac{1}{2})^2)}(z\zeta-(n+\tfrac{1}{2})^2)\frac{H(\zeta)}{\zeta-z}dz. \quad (15)$$

4. Vi vil nu vise, at disse Restled konvergerer mod Nul, naar $n \to \infty$, saafremt $H(z)$ tilfredsstiller en vis Ulighed. Vi betragter først R_{2n+1}. Vi kan uden at ændre dette Integrals Værdi deformere Cirkelen C_n og erstatte den med den i hosstaaende Fig. 1 angivne Integrationsvej. *KAB* og *DEF* betegner Buer af en Cirkel med Centrum o og Radius $\log n$. Som Integrationsvej vælger vi Kurven *ABCDEFGKA*

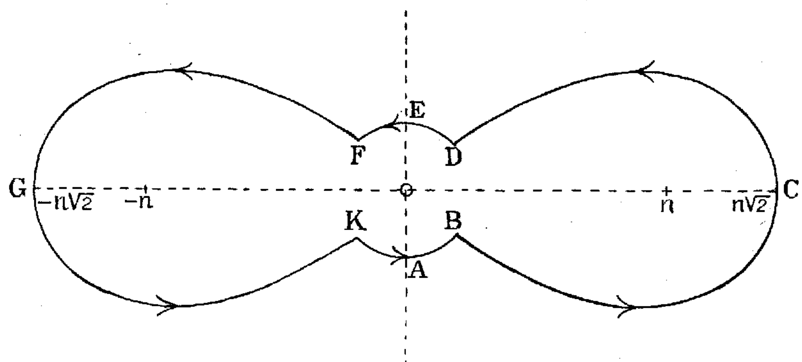

Fig. 1.

sammensat af de to nævnte Cirkelbuer og af to Buer *BCD* og *FGK* af den Bernoulli'ske Lemniscat, som har Ligningen $r = n\sqrt{2\cos 2v}$. Denne Kurve skærer altsaa de reelle Tals Axe i Punkterne $\pm n\sqrt{2}$. Ved at vælge Integrationslinien paa denne Maade opnaar vi, at de nedenfor angivne Uligheder bliver saa præcise som overhovedet muligt. Da Integrationsvejen er symmetrisk med Hensyn til den imaginære Axe, saa kan Integralet (9) reduceres og skrives saaledes

$$R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\cdots(\zeta^2-n^2)}\,\frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2-z^2}\,dz, \qquad (16)$$

hvor vi for Kortheds Skyld har sat

$$H_1(\zeta) = \zeta\big(H(\zeta)-H(-\zeta)\big) + z\big(H(\zeta)+H(-\zeta)\big). \qquad (17)$$

Lad v_n betegne det mindste positive Tal, som tilfredsstiller Ligningen

$$\cos 2v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2. \qquad (18)$$

v_n er da mindre end $\frac{\pi}{4}$, og man har aabenbart

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{\pi}{4}.$$

Sætter vi $\zeta = re^{iv}$, saa er Integrationslinien altsaa sammensat af

Buen AB, hvor $r = \log n$ og $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq -v_n$,

Buen BCD, hvor $r = n\sqrt{2\cos 2v}$ og $-v_n \leq v \leq v_n$,

Buen DE, hvor $r = \log n$ og $v_n \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

Integralet (16) kan vi skrive paa følgende Form

$$R_{2n+1} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDE}\frac{(-1)^n(n!)^2\Gamma(\zeta-n)}{\Gamma(\zeta+n+1)}\,\frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2-z^2}dz.$$

Det foran Integraltegnet staaende Produkt konvergerer mod en endelig Grændseværdi naar $n \to \infty$, nemlig mod $\frac{\sin \pi z}{\pi}$. Det gælder da blot om at undersøge det sidste Integral. Vi dekomponerer dette i tre Dele og sætter

$$R_{2n+1} = z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\frac{1}{2\pi i}(P_n+Q_n+T_n),$$

hvor

$$P_n = \int_{AB} \quad Q_n = \int_{BCD} \quad T_n = \int_{DE}.$$

Paa Buen BCD har man nu

$$\zeta = n\sqrt{2\cos 2v}\; e^{iv},$$

altsaa
$$d\zeta = in\sqrt{2\cos 2v}\,(1 + i\,tg\,2v)\,e^{iv}\,dv,$$

$$\left|\frac{d\zeta}{dv}\right| = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}}.$$

Sætter vi for Kortheds Skyld

$$f_n(v) = (-1)^n \frac{(n!)^2\,\Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + n + 1)} \tag{19}$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\,\frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n+\zeta)\,\Gamma(n-\zeta)}\,\frac{n^2}{n^2-\zeta^2}, \tag{20}$$

saa er altsaa

$$P_n = i \log n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-v_n} f_n(v)\,\frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2}\,e^{iv}\,dv,$$

$$Q_n = in \int_{-v_n}^{+v_n} f_n(v)\,\frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2}\sqrt{2\cos 2v}\,(1 + i\,tg\,2v)\,e^{iv}\,dv, \tag{21}$$

$$T_n = i \log n \int_{v_n}^{\frac{\pi}{2}} f_n(v)\,\frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2}\,e^{iv}\,dv. \tag{22}$$

5. For nu at se hvilken Betingelse man maa paalægge H for at opnaa, at disse Integraler konvergerer mod Nul, naar $n \to \infty$, definerer vi i Intervallet $-\pi \leq v \leq \pi$ en kontinuert Funktion $\psi(v)$ saaledes

$$\left.\begin{aligned}\psi(v) = {} & \cos v \log\left(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v\right)^2 \\ & + 2\sin v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin v\right),\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

saafremt $0 \leq |v| \leq \frac{\pi}{4}$ eller $\frac{3\pi}{4} \leq |v| \leq \pi$. Derimod er

$$\psi(v) = \pi\,|\sin v|, \tag{24}$$

saafremt $\frac{\pi}{4} \leq |v| \leq \frac{3\pi}{4}$. Da denne Funktion spiller en afgørende Rolle for vort Problem, vil vi desangaaende bemærke følgende.

Den tilfredsstiller Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(-v), \\ \psi(v) &= \psi(\pi - v), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

og den er aabenbart kontinuert, thi af begge de angivne Udtryk følger, at

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Man har endvidere

$$\psi(o) = \psi(\pm\pi) = 2\log\left(1 + \sqrt{2}\right),$$

$$\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Vi vil nu vise, at $\psi(v)$ har Minima i Punkterne o og $\pm\pi$, samt Maxima i Punkterne $\pm\frac{\pi}{2}$. Vi betragter først Intervallet $0 \leq v \leq \frac{\pi}{4}$. Man har aabenbart

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\sqrt{2}\sin v\right) = \sqrt{2}\int_0^v \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}, \tag{26}$$

$$\log\left(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v\right) = \sqrt{2}\int_v^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}. \tag{27}$$

Af den sidste Ligning følger specielt for $v = 0$

$$\log\left(1 + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Udtrykket (23) kan da skrives saaledes

$$\psi(v) = 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\cos v \int_0^v \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}} + 2\sqrt{2}\sin v \int_0^v \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\int_0^v \frac{\sin(v-x)\, dx}{\sqrt{\cos 2x}}. \tag{28}$$

Differentieres med Hensyn til v faas

$$\psi'(v) = -2\sin v \log(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}\int_0^v \frac{\cos(v-x)}{\sqrt{\cos 2x}}\, dx. \tag{29}$$

Differentieres endnu en Gang faas

$$\psi''(v) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} - \psi(v). \tag{30}$$

Af (28) følger nu at

$$\psi(v) \leq 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}}\int_0^v \sin(v-x)\, dx$$

$$= 2\cos v \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}}(1-\cos v).$$

Altsaa er

$$\psi''(v) \geq 2\cos v\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} - \log(1+\sqrt{2})\right).$$

Men heraf fremgaar, at $\psi''(v) > 0$ i det betragtede Interval. Da nu i Følge (29)

$$\psi'(0) = 0,$$

saa er $\psi'(v)$ altsaa positiv, kontinuert og voksende i Intervallet $0 < v \leq \frac{\pi}{4}$. Af dette Resultat samt af Udtrykket (24) kan vi da slutte, at $\psi(v)$ er positiv, kontinuert og voksende i Intervallet $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Af Ligningerne (25) følger sluttelig at $\psi(v)$ har de ovenfor angivne Maxima og ingen andre. Man har altsaa for alle Værdier af v

$$\pi \geq \psi(v) \geq 2 \log (1+\sqrt{2}) > 0.$$

Af (23), (26) og (27) kan vi ogsaa aflede følgende Udtryk for $\psi(v)$

$$\psi(v) = \pi \sin v + 2\sqrt{2} \int_{v}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-v)\,dx}{\sqrt{\cos 2x}},$$

og heraf følger, at i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v \geq 0$ er

$$\psi(v) > \pi \sin v.$$

6. Sætter man

$$h(v) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |H(re^{iv})|}{r} \tag{31}$$

saa har vi i § 2 vist, at Interpolationsrækkens Konvergens medfører, at

$$h(v) \leq \pi$$

for alle Værdier af v. Men det er blot i Punkterne $v = \pm \frac{\pi}{2}$, at $h(v)$ kan naa den angivne øvre Grændse π. Man kan nemlig ved en mere detailleret Analyse vise, at

$$h(v) \leq \psi(v).$$

Det er endvidere let at se, at vore ovenfor angivne Restled konvergerer mod Nul, saafremt

$$h(v) < \psi(v)$$

for alle Værdier af v. Men vi kan endda vise noget mere. Vi antager, at Funktionen $H(\zeta) = H(re^{iv})$, for $r \geq r_0$, tilfredsstiller Ulighederne

$$|H(\zeta) - H(-\zeta)| < e^{r\psi(v)} r^{\beta_1}, \tag{32}$$

$$|H(\zeta) + H(-\zeta)| < e^{r\psi(v)} r^{\beta_2}. \tag{33}$$

Lad β betegne det største af Tallene β_1 og $\beta_2 - 1$; man kan da finde en Konstant C saaledes at

$$|H_1(re^{iv})| < Ce^{r\psi(v)} r^{\beta+1} \tag{34}$$

for $r \geqq r_0$. Vi vil nu vise, at R_{2n+1} konvergerer mod Nul, hvis β er negativ. For at indse dette, maa vi undersøge, hvorledes $|f_n(v)|$ forholder sig for meget store Værdier af n. Vi antager først, at $v_n > v > -v_n$. Man har som bekendt

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}(1+\varepsilon(x)), \tag{35}$$

hvor $\varepsilon(x)$ konvergerer mod Nul, naar $|x|$ vokser ud over enhver Grændse og samtidig x fjerner sig uendelig langt fra de negative Tals Axe. Af Udtrykket (19) følger da at

$$\begin{aligned} f_n(v) &= (-1)^n \frac{(\Gamma(n))^2 \Gamma(\zeta-n)}{\Gamma(\zeta+n)} \frac{n^2}{\zeta+n} \\ &= (-1)^n 2\pi \left(\frac{n^2}{\zeta^2-n^2}\right)^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{\zeta-n}{\zeta+n}\right)^{\zeta} (1+\varepsilon(n)), \end{aligned} \tag{36}$$

hvor $\varepsilon(n)$ konvergerer mod Nul, naar $n \to \infty$. For $v_n > v > -v_n$ har vi nu

$$\zeta = re^{iv} = n\sqrt{2\cos 2v}\, e^{iv}.$$

Heraf følger at $\zeta^2 - n^2 = n^2 e^{4iv}$.

Altsaa er
$$\left|\frac{\zeta^2-n^2}{n^2}\right| = 1.$$

Endvidere er

$$\begin{aligned} \frac{\zeta-n}{\zeta+n} &= \frac{2\cos 2v - 1 + i\,2\sin v\sqrt{2\cos 2v}}{(\sqrt{\cos 2v}+\sqrt{2}\cos v)^2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\cos 2v}+i\sqrt{2}\sin v}{\sqrt{\cos 2v}+\sqrt{2}\cos v}\right)^2. \end{aligned}$$

Men af denne Ligning følger at

$$\left|\frac{\zeta-n}{\zeta+n}\right| = (\sqrt{\cos 2v}+\sqrt{2}\cos v)^{-2},$$
$$\arg\frac{\zeta-n}{\zeta+n} = 2\arcsin(\sqrt{2}\sin v).$$

Af Udtrykket (36) kan vi da slutte at

$$\begin{aligned}\left|f_n(v)\right| &= 2\pi\left|\left(\frac{\zeta-n}{\zeta+n}\right)^{\zeta}(1+\varepsilon(n))\right| \\ &= 2\pi e^{-r\psi(v)}\left|1+\varepsilon(n)\right|.\end{aligned}$$

Af Ligningen (21) i Forbindelse med Uligheden (34) faar vi nu

$$\begin{aligned}|Q_n| &\leq n\int_{-v_n}^{+v_n}|f_n(v)|\left|\frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2-z^2}\right|\frac{\sqrt{2}\,dv}{\sqrt{\cos 2v}} \\ &< n\,C_1\int_{-v_n}^{+v_n}|f_n(v)|\,e^{r\psi(v)}\,r^{\beta-1}\frac{dv}{\sqrt{\cos 2v}} \\ &< n^{\beta}\,C_2\int_{-v_n}^{+v_n}(\cos 2v)^{\frac{1}{2}\beta-1}\,dv \\ &= 2\,C_2\,n^{\beta}\int_0^{v_n}(\cos 2v)^{\frac{1}{2}\beta-1}\,dv,\end{aligned}$$

hvor C_1 og C_2 er Konstanter. Vi deler det sidste Integral i to Dele, og faar da

$$|Q_n| < 2\,C_2 n^{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2v)^{\frac{1}{2}\beta-1}\,dv + 4\,C_2\,n^{\beta}\int_{\frac{\pi}{6}}^{v_n}\frac{\sin 2v\,dv}{(\cos 2v)^{1-\frac{1}{2}\beta}}.$$

Vi antager nu, at $\beta < 0$. Det første Integral paa højre Side konvergerer da mod Nul, naar $n \longrightarrow \infty$. Det sidste Integral er lig med

$$\begin{aligned}&2\,C_2\,n^{\beta}\int_{\cos 2v_n}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}\beta-1}\,dx \\ &= 4\,C_2\,\beta^{-1}\,n^{\beta}\left(2^{-\frac{1}{2}\beta}-(\cos 2v_n)^{\frac{1}{2}\beta}\right) \\ &= 2^{2-\frac{1}{2}\beta}\,C_2\,\beta^{-1}\left(n^{\beta}-(\log n)^{\beta}\right).\end{aligned}$$

Men da β i Følge Forudsætning er negativ, saa konvergerer denne Størrelse mod Nul, naar $n \longrightarrow \infty$. Altsaa har vi vist at

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 0.$$

Vi vil dernæst betragte Integralet T_n og maa da først undersøge, hvorledes $f_n(v)$ forholder sig paa Cirkelbuen DE, naar n antages meget stor. f_n kan skrives paa Formen (20). Af Gammafunktionens asymptotiske Udtryk (35) kan vi slutte, at

$$\frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n+\zeta)\,\Gamma(n-\zeta)}\,\frac{n^2}{n^2-\zeta^2} = \left(\frac{n^2}{n^2-\zeta^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{n-\zeta}{n+\zeta}\right)^{\zeta}(1+\varepsilon(n)).$$

Vi sætter nu $\zeta = \log n \cdot e^{iv}$ og faar da, at

$$\frac{n-\zeta}{n+\zeta} = \frac{n^2-\log^2 n - 2\,in\log n\,\sin v}{n^2+\log^2 n + 2\,n\log n\,\cos v}.$$

Altsaa er

$$\left|\frac{n-\zeta}{n+\zeta}\right|^2 = 1 - \frac{4\,n\log n\,\cos v}{n^2+\log^2 n+2\,n\log n\cos v},$$

$$\arg\frac{n-\zeta}{n+\zeta} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{2\,n\log n\,\sin v}{n^2-\log^2 n}.$$

Sætter vi

$$\varphi(n) = \frac{4\,n\log n\,\cos v}{n^2+\log^2 n+2\,n\log n\cos v},$$

saa faar vi heraf

$$\left|\left(\frac{n-\zeta}{n+\zeta}\right)^{\zeta}\right| = e^{\frac{1}{2}\log n\cos v\log(1-\varphi(n))+\log n\sin v\operatorname{arc\,tg}\frac{2\,n\log n\sin v}{n^2-\log^2 n}}.$$

Naar $n\to\infty$, saa konvergerer denne Størrelse ligelig mod 1. Endvidere er

$$\left|\frac{n^2-\zeta^2}{n^2}\right|^2 = 1-\frac{2}{n^2}\log^2 n\cos 2\,v+\frac{\log^4 n}{n^4}.$$

Altsaa

$$\left|\frac{n^2}{n^2-\zeta^2}\right|^{n+\frac{1}{2}} = e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{2}{n^2}\log^2 n\cos 2\,v+\frac{\log^4 n}{n^4}\right)}.$$

Ogsaa denne Størrelse konvergerer mod 1, naar $n\to\infty$. Altsaa har vi vist at, hvis $|\zeta| = \log n$, saa er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\Gamma(n))^2}{\Gamma(n+\zeta)\,\Gamma(n-\zeta)}\,\frac{n^2}{n^2-\zeta^2} = 1.$$

Vi kan altsaa finde en Konstant c saaledes at paa Buen DE

$$|f_n(v)| < ce^{-r\pi\sin v}.$$

For Integralet (22) faar jeg da følgende Majorantudtryk

$$|T_n| < C_1 r^{-1}\int_{v_n}^{\frac{\pi}{2}} |f_n(v)\,H_1(re^{iv})|\,dv$$

$$< C_2 r^{-1}\int_{v_n}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\pi\sin v}\,|H_1(re^{iv})|\,dv,$$

hvor C_1 og C_2 betegner Konstanter. Vi deler dette Integral i to Dele og erstatter H_1 med den ved Uligheden (34) angivne øvre Grændse. Vi faar da

$$|T_n| < CC_2 r^{\beta}\int_{v_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r(\psi(v)-\pi\sin v)}\,dv + CC_2 r^{\beta}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dv.$$

Det sidste Led konvergerer mod Nul, naar $n\to\infty$, fordi $\beta < 0$. Af Ligningen (18) følger endvidere at

$$\frac{\pi}{4} - v_n < \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2.$$

Da nu den kontinuerte Funktion $\psi(v) - \pi\sin v$ forsvinder i Punktet $v = \frac{\pi}{4}$, saa kan vi finde et positivt Tal N saaledes at for $n > N$ er

$$\psi(v) - \pi\sin v < 1, \quad \text{hvis } \frac{\pi}{4} \geq v \geq v_n.$$

Man har da

$$\int_{v_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r(\psi(v)-\pi\sin v)}\,dv = \int_{v_n}^{\frac{\pi}{4}} n^{\psi(v)-\pi\sin v}\,dv$$

$$< n\left(\frac{\pi}{4} - v_n\right) < \frac{n}{2}\left(\frac{\log n}{n}\right)^2,$$

og denne Størrelse konvergerer mod Nul, naar n vokser ud over enhver Grændse. Heraf følger at

$$\lim_{n \to \infty} T_n = 0.$$

Paa samme Maade ser man, at $P_n \to 0$. Vi har dermed bevist, at

$$\lim_{n \to \infty} R_{2n+1} = 0,$$

hvis $\beta < 0$. Gauss' Interpolationsrækker

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\binom{z+s}{2s} \triangle^{2s} H(-s) + \binom{z+s-1}{2s-1} \triangle^{2s-1} H(-s) \right],$$

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\binom{z+s-1}{2s} \triangle^{2s} H(-s) + \binom{z+s-1}{2s-1} \triangle^{2s-1} H(-s+1) \right]$$

er altsaa konvergente, saafremt $H(z)$ er en hel Funktion, der tilfredsstiller Ulighederne (32) og (33), hvor

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 < 1. \tag{37}$$

Betragter vi dernæst Integralet (12), saa kan vi decomponere dette i to Integraler og skrive Restleddet R_{2n} under følgende Form

$$R_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z^2 (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - (n-1)^2)}{\zeta (\zeta^2 - 1^2)(\zeta^2 - 2^2) \cdots (\zeta^2 - (n-1)^2)} \frac{H(\zeta) + H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - n^2)}{(\zeta^2 - 1^2)(\zeta^2 - 2^2) \cdots (\zeta^2 - n^2)} \frac{H(\zeta) - H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta.$$

Man ser heraf umiddelbart, at Ulighederne (37) ogsaa medfører, at disse to Integraler konvergerer mod Nul, naar $n \to \infty$. Stirling's Række:

$$H(z) = H(0) + \frac{z}{1} \nabla \triangle H(-1) + \frac{z^2}{2!} \triangle^2 H(-1) +$$

$$+ \frac{z(z^2 - 1^2)}{3!} \nabla \triangle^3 H(-2) + \frac{z^2 (z^2 - 1^2)}{4!} \triangle^4 H(-2) + \cdots$$

er altsaa konvergent, hvis β_1 og β_2 tilfredsstiller Ulighederne (37).

Restleddene (14) og (15) til Bessel's Række kan vi reducere til følgende Form

$$\mathfrak{R}_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDE} \frac{z(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(n-\frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2-(\frac{1}{2})^2)(\zeta^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(\zeta^2-(n-\frac{1}{2})^2)}\,\frac{H(\zeta)-H(-\zeta)}{\zeta^2-z^2}\,d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDE} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(n+\frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2-(\frac{1}{2})^2)(\zeta^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(\zeta^2-(n+\frac{1}{2})^2)}\,\zeta\,\frac{H(\zeta)+H(-\zeta)}{\zeta^2-z^2}\,d\zeta$$

$$\mathfrak{R}_{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDE} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(n-\frac{1}{2})^2)}{(\zeta^2-(\frac{1}{2})^2)(\zeta^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(\zeta^2-(n-\frac{1}{2})^2)}\,\frac{H_2(\zeta)}{\zeta^2-z^2}\,d\zeta,$$

hvor

$$H_2(\zeta) = \zeta\left[H(\zeta)+H(-\zeta)\right] + z\left[H(\zeta)-H(-\zeta)\right].$$

Aldeles samme Ræsonnement som ovenfor viser da, at disse Restled konvergerer mod Nul, det vil sige, at Bessel's Række konvergerer saafremt

$$\beta_1 < 1, \quad \beta_2 < 0. \tag{38}$$

Hvis $H(z)$ er en ulige Funktion, er Bessel's Række altsaa den fordelagtigste, men hvis $H(z)$ er en lige Funktion, er Stirling's Række at foretrække.

Angaaende Gauss' Række vil vi endnu bemærke følgende. Vi har ovenfor vist at, hvis man i denne forener to og to paa hinanden følgende Led til eet, saa bliver den derved fremkomne Række konvergent, saafremt Betingelserne (37) er opfyldt. Men hvis man ikke foretager en saadan Sammentrækning af Rækkens Led, saa er disse Betingelser ikke tilstrækkelige til at sikre Konvergensen. Vi maa i saa Fald endnu vise, at Rækkens Led konvergerer mod Nul. Man har nu

$$\binom{z+n}{2n}\Delta^{2n}H(-n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-(n-1)^2)(z+n)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\cdots(\zeta^2-n^2)}\,(H(\zeta)+H(-\zeta))\,d\zeta, \tag{39}$$

Dette Integral konvergerer mod Nul, hvis Tallet β_2 er negativt, naar v tilhører Intervallet $\frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}$. Gauss' Række

$$H(z) = H(0) + \binom{z}{1} \triangle H(-1) + \binom{z+1}{2} \triangle^2 H(-1) + \binom{z+1}{3} \triangle^3 H(-2) + \cdots$$

er altsaa konvergent, saafremt $\beta_1 < 0$ og

$$\beta_2 < 1 \quad \text{for } \frac{3\pi}{4} > v > \frac{\pi}{4},$$

$$\beta_2 < 0 \quad \text{for } \frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}.$$

Heraf følger, at $\cos \pi z$ kan fremstilles ved Gauss' Række, som for denne Funktion tager Formen

$$\left.\begin{aligned} \cos \pi z = 1 + 2\binom{z}{1} - 2^2\binom{z+1}{2} - \cdots + (-1)^n 2^{2n}\binom{z+n}{2n} \\ + (-1)^n 2^{2n+1}\binom{z+n}{2n+1} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Man verificerer ogsaa let, at denne Række konvergerer betinget i hele Planen. Sætter man derimod i Gauss' Række $H(z) = \sin \pi z$, saa bliver alle Rækkens Koefficienter Nul. Funktionen $\sin \pi z$ kan altsaa ikke fremstilles ved en saadan Række. Denne Funktion tilfredsstiller vor Ulighed for $\beta_1 = 0$. Dette Exempel viser derfor, at det er nødvendigt at forudsætte $\beta_1 < 0$.

7. Exemplet $H(z) = \cos \pi z$ viser, at vore Konvergensbetingelser ikke er tilstrækkelige til at sikre absolut Konvergens. Betegner vi Leddene i Gauss' Række med u_0, u_1, u_2, $\cdots$ saa er u_{2n} lig med Integralet (39) og

$$u_{2n+1} = \binom{z+n}{2n+1} \triangle^{2n+1} H(-n)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\cdots(\zeta^2-(n+1)^2)} \left[(n+1)(H(\zeta)+H(-\zeta)) + \zeta(H(\zeta)-H(-\zeta))\right] d\zeta.$$

Disse to Integraludtryk viser, at man kan finde et positivt Tal ε saaledes at

$$\lim_{n \to \infty} n (\log n)^{1+\varepsilon} u_n = 0.$$

saafremt

$$\beta_1 < -1, \quad \beta_2 < -2.$$

Disse to Uligheder medfører altsaa, at begge de Gauss'iske Interpolationsrækker konvergerer absolut.

For Stirling's Række har man

$$u_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ABCDE} \frac{z^2 (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - (n-1)^2)}{\zeta (\zeta^2 - 1^2) \cdots (\zeta^2 - n^2)} (H(\zeta) + H(-\zeta))\, d\zeta,$$

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ABCDE} \frac{z (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - n^2)}{(\zeta^2 - 1^2) \cdots (\zeta^2 - (n+1)^2)} (H(\zeta) - H(-\zeta))\, d\zeta,$$

og heraf følger, at Stirling's Række konvergerer absolut, saafremt

$$\beta_1 < -1, \quad \beta_2 < 0.$$

Ligesaa ser man, at Bessel's Række konvergerer absolut, saafremt

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 < -1.$$

Hvis specielt $H(z)$ er en lige Funktion, saa er

$$\nabla \triangle^{2s+1} H(-s-1) = 0,$$

$$\triangle^{2s+1} H(-s-\tfrac{1}{2}) = 0, \quad \nabla \triangle^{2s} H(-s-\tfrac{1}{2}) = \triangle^{2s} H(-s-\tfrac{1}{2}).$$

Stirling's Formel reducerer sig derfor til

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2 (z^2 - 1^2) \cdots (z^2 - (s-1)^2)}{(2s)!} \triangle^{2s} H(-s), \quad (41)$$

og Bessel's Formel reducerer sig til

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2 - (\frac{1}{2})^2)(z^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdots (z^2 - (s-\frac{1}{2})^2)}{(2s)!} \triangle^{2s} H(-s-\tfrac{1}{2}). \quad (42)$$

Hvis $H(z)$ er en ulige Funktion, saa er

$$\triangle^{2s} H(-s) = 0, \qquad \nabla \triangle^{2s+1} H(-s-1) = \triangle^{2s+1} H(-s),$$
$$\nabla \triangle^{2s} H(-s-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Stirling's Formel reducerer sig derfor til

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \triangle^{2s+1} H(-s), \quad (43)$$

og Bessel's Formel reducerer sig til

$$H(z) = z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s+1)!} \triangle^{2s+1} H(-s-\tfrac{1}{2}). \quad (44)$$

Da Funktionen $\cos \pi z$ tilfredsstiller Betingelserne (37) saa faar vi af (41) den konvergente Udvikling

$$\cos \pi z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s}}{(2s)!} z^2 (z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2). \quad (45)$$

Funktionen $\sin \pi z$ tilfredsstiller Betingelserne (38) og kan derfor fremstilles ved Rækken (44) som reducerer sig til

$$\sin \pi z = z \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s+1}}{(2s+1)!} (z^2-(\tfrac{1}{2})^2)(z^2-(\tfrac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\tfrac{1}{2})^2). \quad (46)$$

Ligesaa finder vi de konvergente Udviklinger

$$\frac{\cos \pi z - \cos \pi \alpha}{z^2-\alpha^2} = \cos \pi \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(\alpha^2-(\frac{1}{2})^2)(\alpha^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(\alpha^2-(s+\frac{1}{2})^2)},$$

$$\frac{\alpha \sin \pi z - z \sin \pi \alpha}{z^2-\alpha^2} = \sin \pi \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\cdots(z^2-s^2)}{(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\cdots(\alpha^2-(s+1)^2)},$$

hvor α er et vilkaarligt Tal, som ikke gør en af Nævnerne til Nul.

8. Af det ovenfor sagte følger a fortiori, at alle fire Interpolationsrækker konvergerer absolut, saafremt den ved Ligningen (31) definerede Funktion $h(v)$ tilfredsstiller Uligheden

$$h(v) < \psi(v)$$

for alle Værdier af v. Af særlig Interesse er det Tilfælde, hvor $h(v) = \psi(v)$ i et endeligt Antal Punkter i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$, medens $h(v) < \psi(v)$ for alle andre Værdier af v. Vi skal se at vore Konvergensbetingelser i dette Tilfælde kan noget præciseres. Lad os først betragte følgende Exempel:

$$H(z) = t^{2z}.$$

For hvilke Værdier af t kan denne Funktion fremstilles ved vore Rækker? En nødvendig Betingelse for at Gauss' Række konvergerer er, at Rækkens Led konvergerer mod Nul, altsaa at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\triangle^{2n} H(-n)}{\sqrt{n}\, 2^{2n}} = 0.$$

Man har nu

$$\triangle^{2n} H(-n) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n}.$$

En nødvendig Betingelse for Konvergens er altsaa, at $\left|t - \frac{1}{t}\right| \leq 2$. Kurven

$$\left|t - \frac{1}{t}\right| = 2$$

bestaar af de to i Fig. 2 angivne Cirkler:

$$|t - 1| = \sqrt{2}, \qquad |t + 1| = \sqrt{2}$$

med Radius $\sqrt{2}$ og med Centrum respektive i Punkterne $+1$ og -1. Hvis t er beliggende i det Indre af et af de to skraverede Omraader, saa er $\left|t - \frac{1}{t}\right| < 2$, absolut Konvergens foreligger altsaa i dette Tilfælde. Hvis t er beliggende uden for de skraverede Omraader, saa er $\left|t - \frac{1}{t}\right| > 2$ og Rækkerne følgelig divergente. Vi vil nu først søge Maximum af $|t^{2z}|$, naar t gennemløber Kontouren $AFCBA$. Lad os sætte

$$t = 1 + \sqrt{2}\, e^{i\varphi}, \qquad z = r\, e^{iv}.$$

Vi har da paa Buen AFC

$$\left| t^{2z} \right| = e^{r\lambda(\varphi)},$$

hvor

$$\lambda(\varphi) = \cos v \log\left(3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi\right)$$
$$- 2 \sin v \arcsin \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi}}. \tag{47}$$

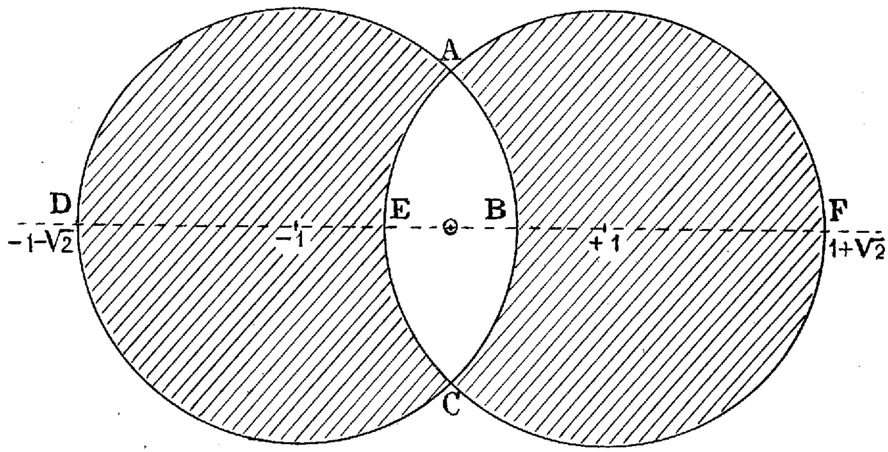

Fig. 2.

Differentieres med Hensyn til φ faas

$$\lambda'(\varphi) = -2\sqrt{2}\,\frac{\sin(v+\varphi) + \sqrt{2}\sin v}{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi}.$$

Hvis $\frac{3\pi}{4} > v > \frac{\pi}{4}$, saa er $\lambda' < 0$, fordi $\sqrt{2}\sin v > 1$. I Intervallet $\frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{3\pi}{4}$ er $\lambda(\varphi)$ derfor aftagende, og den tager sin største Værdi i Punktet $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, nemlig

$$\lambda\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \pi \sin v.$$

Hvis $-\frac{\pi}{4} > v > -\frac{3\pi}{4}$, saa er $\lambda' > 0$, fordi $-\sqrt{2}\sin v > 1$. I Intervallet $\frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{3\pi}{4}$ er $\lambda(\varphi)$ derfor voksende, og den tager sin største Værdi i Punktet $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, nemlig

$$\lambda\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\pi \sin v.$$

Hvis $\frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}$, saa forsvinder λ' i eet og kun eet Punkt i Intervallet $\frac{3\pi}{4} > \varphi > -\frac{3\pi}{4}$, nemlig for den Værdi af φ, som tilfredsstiller Ligningen

$$\sin(v + \varphi) + \sqrt{2}\sin v = 0.$$

Man ser let, at $\lambda(\varphi)$ antager sin største Værdi i dette Punkt. Af den sidste Ligning afleder vi nu at

$$\cos\varphi = \cos v\sqrt{\cos 2v} - \sqrt{2}\sin^2 v,$$
$$\sin\varphi = -\sin v\sqrt{\cos 2v} - \sqrt{2}\sin v\cos v,$$

hvor $\sqrt{\cos 2v}$ antages positiv. Men heraf følger, at

$$3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi = \left(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v\right)^2,$$
$$\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi}} = -\sqrt{2}\sin v.$$

Substituerer vi nu disse Udtryk i Ligningen (47), saa ser vi, at Maximum af $\lambda(\varphi)$ er den ved Udtrykket (23) definerede Funktion $\psi(v)$.

Hvis endelig $\pi \geq |v| > \frac{3\pi}{4}$ saa er

$$\lambda(\varphi) < \psi(v).$$

Lader vi t variere paa Buen ABC, saa finder vi samme Majorantudtryk blot med den Forskel, at de to sidstnævnte Intervaller har byttet Rolle. Sammenfatter vi disse Resultater, saa følger heraf, at

$$\left| t^{2z} \right| \leq e^{r\psi(v)},$$

naar t beskriver Kontouren $AFCBA$. Den angivne Maximalværdi naas i eet og kun eet Punkt paa Kurven. Dette Punkt er A eller C, hvis $\frac{\pi}{4} \leq |v| \leq \frac{3\pi}{4}$, men hvis v ligger uden for dette Interval, er det et fra A og C forskelligt Punkt.

Lad nu t være et fast Punkt paa den nævnte Kontour, Punkterne A og C undtagne. For at fixere Tanken kan vi antage, at t ligger paa Buen AFC, altsaa at

$$t = 1 + \sqrt{2}\, e^{i\varphi}, \quad \frac{3\pi}{4} > \varphi > -\frac{3\pi}{4}.$$

Man har da

$$\left| t^{2z} \right| = e^{r\mu(v)},$$

hvor

$$\mu(v) = \cos v \log\left(3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi\right) - 2\sin v \arcsin \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi}},$$

Vi har set, at

$$\mu(v) \leq \psi(v),$$

og at Lighedstegnet kun gælder for een Værdi af v i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$, nemlig for $v = \alpha$, hvor α bestemmes af Ligningen

$$\sin(\alpha + \varphi) + \sqrt{2}\sin\alpha = 0.$$

Udtrykker vi φ ved α, saa kan $\mu(v)$ skrives saaledes

$$\mu(v) = \cos v \log\left(\sqrt{\cos 2\alpha} + \sqrt{2}\cos\alpha\right)^2 + 2\sin v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\alpha\right).$$

Ved Differentiation faas heraf

$$\mu'(v) = -\sin v \log\left(\sqrt{\cos 2\alpha} + \sqrt{2}\cos\alpha\right)^2 + 2\cos v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\alpha\right).$$

Man har nu

$$\psi(v) = \cos v \log\left(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v\right)^2 + 2\sin v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin v\right),$$

$$\psi'(v) = -\sin v \log\left(\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2}\cos v\right)^2 + 2\cos v \arcsin\left(\sqrt{2}\sin v\right).$$

Altsaa er $\quad \mu(\alpha) = \psi(\alpha), \quad \mu'(\alpha) = \psi'(\alpha)$

og
$$\mu(v) < \psi(v)$$
for alle andre Værdier af v.

Jeg antager nu, at den hele Funktion $H(z) = H(re^{iv})$ er saaledes beskaffen, at i Nærheden af et vist Punkt $v = \alpha$ i Intervallet $\frac{\pi}{4} > v > -\frac{\pi}{4}$ gælder Ulighederne
$$\begin{aligned} |H(z) - H(-z)| &< e^{r\mu(v)} r^{\beta_1}, \\ |H(z) + H(-z)| &< e^{r\mu(v)} r^{\beta_2} \end{aligned} \qquad |v - \alpha| < \eta$$
for $r > r_0$, og at for øvrigt
$$h(v) < \psi(v) \quad \text{for } v \gtrless \alpha.$$

Ved Undersøgelse af Restleddet R_{2n+1} kommer det da blot an paa Integralet
$$Q_n' = \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-r\psi(v)} r^{-1} |H_1(re^{iv})| \frac{dv}{\cos 2v}.$$

Vi betegner med β det største af Tallene β_1 og $\beta_2 - 1$. Man kan da bestemme en Konstant C saaledes at
$$Q_n' < C \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} r^{\beta} e^{-r(\psi(v)-\mu(v))} \frac{dv}{\cos 2v}. \tag{48}$$

Nu er
$$\mu''(v) = -\mu(v),$$
$$\psi''(v) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2v}} - \psi(v),$$
altsaa
$$\psi''(\alpha) - \mu''(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Vi udvikler $\psi - \mu$ efter Potenser af $v - \alpha$ og finder da
$$\psi(v) - \mu(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}} (v - \alpha)^2 + \cdots$$

Vælger vi η tilstrækkelig lille, saa kan vi finde en positiv Konstant c saaledes at

$$\psi(v) - \mu(v) > \frac{c(v-\alpha)^2}{\sqrt{\cos 2v}} \quad \text{for } |v-\alpha| < \eta.$$

Vi tænker os endvidere η valgt saa lille at

$$\frac{\pi}{4} > \alpha + \eta > \alpha - \eta > -\frac{\pi}{4}.$$

Af (48) følger da

$$\begin{aligned} Q'_n &< C_1 n^{\beta} \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-cn(v-\alpha)^2} dv \\ &= C_1 n^{\beta} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-cnv^2} dv \\ &= C_1 n^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{-\eta\sqrt{n}}^{+\eta\sqrt{n}} e^{-cv^2} dv \\ &< C_1 n^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cv^2} dv \end{aligned}$$

Hvis $\beta < \frac{1}{2}$, saa vil altsaa Q'_n og følgelig ogsaa R_{2n+1} konvergere mod Nul, naar $n \to \infty$. Stirling's Række er altsaa konvergent, hvis

$$\beta_1 < \tfrac{1}{2}, \quad \beta_2 < \tfrac{3}{2}.$$

Paa samme Maade ser man, at Bessel's Række konvergerer, hvis

$$\beta_1 < \tfrac{3}{2}, \quad \beta_2 < \tfrac{1}{2},$$

og at Gauss' Række konvergerer, hvis

$$\beta_1 < \tfrac{1}{2}, \quad \beta_2 < \tfrac{1}{2}.$$

Hvis der i Intervallerne $\frac{\pi}{4} > |v| \geq 0$, $\pi \geq |v| > \frac{3\pi}{4}$ findes et endeligt Antal Punkter α af den nævnte Beskaffenhed, saa skal de tilsvarende Uligheder naturligvis være opfyldt for ethvert saadant Punkt.

Sætter man i Gauss' Række $H(z) = t^{2z}$, saa faar man

$$\left.\begin{aligned} t^{2z} = 1 + \binom{z}{1} t \left(t - \frac{1}{t}\right) + \binom{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + \binom{z+1}{3} t \left(t - \frac{1}{t}\right)^3 + \cdots \\ + \binom{z+n-1}{2n}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n} + \binom{z+n}{2n+1} t \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n+1} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Af Stirling's Række faar man ligesaa

$$t^{2z} + t^{-2z} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\cdots(z^2-(s-1)^2)}{(2s)!}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s}, \quad (50)$$

$$t^{2z} - t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\cdots(z^2-s^2)}{(2s+1)!}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}. \quad (51)$$

Og af Bessel's Række faas endelig

$$t^{2z} + t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s)!}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s}, \quad (52)$$

$$t^{2z} - t^{-2z} = 2z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z^2-(\frac{1}{2})^2)(z^2-(\frac{3}{2})^2)\cdots(z^2-(s-\frac{1}{2})^2)}{(2s+1)!}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}. \quad (53)$$

Af hvad vi lige har sagt fremgaar, at disse Rækker konvergerer og fremstiller de angivne Funktioner, saafremt t er beliggende paa Kontouren $AFCBA$, Punkterne A og C undtagne. Funktionen $t^{2z} \pm t^{-2z}$ har nemlig to Punkter α af den nys angivne Beskaffenhed og for alle andre Værdier af v er

$$h(v) < \psi(v).$$

I alle Punkter paa Kontouren $AFCBA$ er nu

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| = 2$$

og i hele det af denne Kontour begrændsede skraverede Omraade er

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| < 2.$$

Men heraf følger, at de fem sidste Ligninger er gyldige i hele dette Omraade. Men de er ogsaa kun gyldige i dette Omraade. Hvis nemlig t er beliggende i Gebetet $AECDA$, saa er Rækkerne ganske vist konvergente, men de fremstiller ikke de paa venstre Side angivne Funktioner, thi Rækkerne bliver enten uforandrede eller ændrer Fortegn, naar t erstattes med $-t$. Hvis t ligger helt udenfor de to skraverede Omraader, saa er

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| > 2$$

og Rækkerne følgelig divergente. Hvis endelig t ligger i Punkterne A eller C, saa reducerer (50) sig til Ligningen (45), og (53) reducerer sig til Ligningen (46). Disse to Ligninger er altsaa gyldige ogsaa for $t = \pm i$. Dette gælder derimod ikke om de tre andre Ligninger.

Forelagt paa Mødet den 4. November 1921.
Færdig fra Trykkeriet den 13. Januar 1922.