Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III,** 8.

UNE MÉTHODE DE SOMMABILITÉ PAR DES MOYENNES ÉLOIGNÉES

PAR

JOHANNES MOLLERUP

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1920

Soit

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots$$

une suite de nombres, qui ne converge pas, c'est-à-dire pour laquelle la notion primitive de la limite n'est pas applicable. Dans cet ordre d'idées on a construit, en prenant pour point de départ la suite (1) une autre suite

$$(2) \qquad b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots,$$

liée intimement avec la suite (1), qui effectue une répartition de (1) de telle manière que cette dernière suite devient convergente. Ordinairement on exige que l'élément b_n soit une fonction linéaire et homogène d'un nombre limité des a_n, c'est-à-dire que b_n soit une moyenne des a_n, dont la nature caractérise justement la répartition. D'autre part on exige naturellement que la suite b soit toujours convergente quand (1) converge, et que la limite de (1) et (2) doit être la même. Entre ces méthodes de répartition la sommation de Cesàro est devenue classique dans les dernières années (on trouve une explication de cette méthode dans: Cesàro's Summabilitetsmetode, 3 Foredrag af A. F. ANDERSEN, HARALD BOHR og JOHS. MOLLERUP, København 1919, que nous citerons comme C. S. I, C. S. II, C. S. III). Dans la suite nous allons considérer une méthode de répartition par des moyennes éloignées, dans laquelle les éléments de la suite (2) sont de la forme

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}\cdots a_{n+m}}{m},$$

où n et m tendent simultanément vers l'infini, seulement liés par une inégalité de la forme

$$kn^r < m < Kn^r, \tag{3}$$

k, K, r étant des nombres positifs, dont r est caractéristique pour la méthode de répartition. Bien que la manière de laquelle m et n deviennent simultanément infinis soit tout à fait spécialisée, on aura l'occasion d'étudier des apparences très nuancées de divergence, apparences qu'on ne peut pas étudier selon la méthode de Cesàro.

§ 1. Définitions et théorèmes généraux.

Définition 1. La suite

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ldots \tag{1}$$

sera nommée convergente $M(r)$, $r>0$, avec la limite a si

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}\cdots a_{n+m}}{m}\to a, \tag{4}$$

quand $n\to\infty$ et pour les valeurs de m satisfaisant aux conditions

$$kn^r < m < Kn^r, \tag{3}$$

k et K étant deux nombres positifs arbitraires, mais constants pour le même procès de limite.

Le sens détaillé de la définition est le suivant: la suite

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ldots \tag{1}$$

sera nommée convergente $M(r)$ avec la somme a, si, étant donnés trois nombres (k, K, ε), il existe un nombre $N = N(k, K, \varepsilon)$ pour lequel

$$\left| a - \frac{a_{n+1} + \dots a_{n+m}}{m} \right| < \varepsilon,$$

quand $n \geqq N$ et pour chaque valeur de m satisfaisant à l'inégalité

$$kn^r < m < Kn^r.$$

On dit que m devient infini de l'ordre r par rapport à n.

Si la suite (1) est convergente ayant la limite a on a

$$\frac{a_{n+1}}{1} \to a, \ \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{2} \to a \dots, \ \frac{a_{n+1} + \dots a_{n+m}}{m} \to a$$

pour chaque valeur fixée de m; mais de plus nous ferons remarquer le théorème suivant.

Théorème 1. Quand la suite (1) est convergente ayant la limite a, alors la suite sera convergente au sens $M(r)$ avec la limite a pour chaque valeur de $r > 0$.

Soit ε_n la borne supérieure de la suite

$$|a - a_{n+1}|, \ |a - a_{n+2}|, \ \dots,$$

nous aurons

$$\varepsilon_n \to 0$$

et d'autre part

$$\left| a - \frac{a_{n+1} + \dots a_{n+m}}{m} \right| = \frac{|(a - a_{n+1}) + \dots (a - a_{n+m})|}{m} \leqq \varepsilon_n,$$

et par cela

$$\frac{a_{n+1} + \dots a_{n+m}}{m} \to a$$

pour $n \to \infty$, tout à fait indépendamment de la valeur de m.

Théorème 2. Soit la suite (1) convergente $M(r)$ avec la limite a; alors on aura

$$\frac{a_{n+1} + \dots a_{n+p}}{m} \to 0$$

quand $n \to \infty$, si $m \to \infty$ de l'ordre r, p étant ou fini ou infini d'un ordre inférieur à r et simultanément au plus égal à 1.

En effet on aura par définition

$$\frac{a_{n+1} + \dots a_{n+m}}{m} \to a$$

et encore

$$\frac{a_{n+p+1} + \dots a_{n+m}}{m-p} \to a;$$

car de l'inégalité

$$kn^r < m < Kn^r$$

on déduit

$$m - p < Kn^r - p = (n+p)^r \left\{ K\left(\frac{n}{n+p}\right)^r - \frac{p}{(n+p)^r} \right\}$$

c'est-à-dire

$$m - p < K_1 (n+p)^r$$

et de même manière

$$m - p > k_1 (n+p)^r.$$

k_1 et K_1 ne sont pas nécessairement les mêmes que k et K, mais également des valeurs permises.

Alors on aura

$$\frac{a_{n+p+1} + \dots a_{n+m}}{m} = \frac{a_{n+p+1} + \dots a_{n+m}}{m-p} \cdot \frac{m-p}{m} \to a.$$

Par soustraction il vient

$$\frac{a_{n+1} + \dots a_{n+p}}{m} \to 0.$$

Définition 2. La série Σu_n s'appelle sommable au sens $M(r)$ avec la somme u, quand la suite

$$s_1, s_2 \dots, (s_n = u_1 + u_2 + \dots u_n)$$

est convergente $M(r)$ avec la limite u.

Le théorème que nous allons démontrer donne une relation entre la théorie de sommabilité de Cesàro et la notion de convergence $M(r)$. Voici le théorème.

Théorème 3. La série Σu_n étant sommable (C, 1)[1] elle sera aussi sommable $M(1)$ — et réciproquement.

1) Supposons Σu_n sommable (C, 1) avec la somme u, nous aurons

$$s_n^{(1)} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{n} \to u \tag{5}$$

ou

$$\left| \frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{n} - u \right| < \varepsilon \text{ pour } n \geqq N = N(\varepsilon),$$

ce qu'on peut écrire

$$| s_1 + s_2 + \ldots s_n - nu | < n \cdot \varepsilon.$$

De la même manière nous aurons

$$| s_1 + s_2 + \ldots s_{n+m} - (n+m)\,u | < (n+m) \cdot \varepsilon,$$

d'où l'on déduit

$$| s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots s_{n+m} - mu | < (2\,n + m) \cdot \varepsilon$$

ou

$$\left| \frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots s_{n+m}}{m} - u \right| < \varepsilon \left(2 + \frac{m}{n}\right),$$

la valeur de m tendant vers l'infini du même ordre que n et par cela on convient que

$$\frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots s_{n+m}}{m} \to u. \tag{6}$$

2)[2] La série Σu_n étant sommable $M(1)$ nous pouvons supposer

$$\frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots s_{2n}}{n} \to 0$$

(1) C'est-à-dire sommable de premièr ordre au sens de Cesàro.

(2) Ce théorème réciproque m'a été communiqué par M. Harald Bohr.

(on peut toujours supposer $u = 0$ en remplaçant s'il est nécessaire, u_1 par $u_1 - u$). Après cela il faut démontrer que

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{n} \to 0. \tag{7}$$

Posons

$$n = 2^p + n',$$

où $2^p > \frac{n}{2}$; alors 2^p tendra vers l'infini du même ordre que n, pendant que n' tendra vers l'infini d'un ordre au plus égal à celui de n. Tout d'abord nous remplaçons (7) par l'inégalité

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{2^p} \to 0, \tag{8}$$

ce qui est possible comme le montre l'égalité

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{n} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{2^p} \cdot \frac{2^p}{2^p + n'}.$$

Enfin pour démontrer (8) nous écrivons

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\frac{s_1 + s_2 + \ldots s_n}{2^p} = \frac{s_1 + s_2}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{s_3 + s_4}{2} + \\ &\frac{1}{2^{p-2}} \cdot \frac{s_5 + s_6 + s_7 + s_8}{2^2} + \ldots \frac{1}{2} \frac{s_{2^{p-1}+1} + \ldots s_{2^p}}{2^{p-1}} + \frac{R}{2^p}. \end{aligned}\right.$$

Nous séparons de la somme (9) le premier et le dernier terme, pour lesquels nous avons

$$\frac{s_1 + s_2}{2^p} \to 0 \text{ et encore } \frac{R}{2^p} = \frac{s_{2^p+1} \ldots s_n}{2^p} \to 0 \tag{10}$$

(on déduit cette dernière relation (10) de la définition de $M(r)$ ou du théorème (2) en remarquant que l'ordre de l'infini de n' est inférieur ou égal à celui de 2^p). Enfin nous considérons les autres termes de la somme (9):

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{s_3 + s_4}{2} + \frac{1}{2^{p-2}} \cdot \frac{s_5 + s_6 + s_7 + s_8}{2^2} + \cdots \\ \frac{1}{2} \frac{s_{2^{p-1}+1} + \cdots s_{2^p}}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2^{p-2}} \cdot \varepsilon_2 + \cdots \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{p-1}. \end{array} \right.$$

Ici on a

$$\varepsilon_{p-1} \to 0,$$

$$\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + \cdots \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \to 1$$

et enfin

$$\frac{1}{2^{p-\nu}} \to 0$$

pour chaque valeur fixée de ν.

D'après un théorème de convergence bien connu de M. Toeplitz (voir par exemple C. S. I, pag. 6) la somme (11) tendra vers $1 \cdot 0 = 0$.

D'après ce théorème les notions »sommable (C, 1)« et »sommable $M(1)$« ont le même domaine de validité, pendant que, comme nous le verrons plus tard, pour un r arbitraire, $r < 1$, il existe des séries sommables (C, r), et non sommables $M(r)$.

Nous allons compléter le dernier résultat par le théorème 4.

Théorème 4. Σu_n étant sommable $M(1)$ (ce qui est d'après le théorème 3 la même chose que sommable (C, 1) avec la somme u, on aura

$$(12) \qquad \frac{s_{m+1} + s_{m+2} + \cdots s_{m+n}}{n} \to u,$$

m étant ou fini ou infini au plus du même ordre que n.

Dans le cas où m est fini ou infini de l'ordre n, la formule (12) est une conséquence de la définition des notions (C, 1) et $M(1)$; pour le cas que m tende vers l'infini d'un ordre plus petit que n, la formule (12) peut être démontrée comme il suit. Nous supposons de nouveau $u = 0$ et posons

$$n = 2^p + n';$$

après cela ce qui est à démontrer est la relation

$$\frac{s_{m+1} + s_{m+2} + \ldots s_{m+n}}{2^p} \to 0. \tag{13}$$

Nous posons de plus

$$m = 2^q + m',\ 2^q > \frac{m}{2}.$$

Au sens de $M(1)$ nous aurons

$$\frac{s_{m+1} + s_{m+2} + \ldots s_{2m}}{m} \to 0$$

ou

$$\frac{s_{m+1} + s_{m+2} + \ldots s_{2m}}{2^q} \to 0.$$

Nous décomposons la somme de (13) de la manière suivante:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{s_{m+1} + \ldots s_{m+n}}{2^p} &= \frac{1}{2^{p-q}} \cdot \frac{s_{m+1} + \ldots s_{2m}}{2^q} + \\ &+ \frac{1}{2^{p-q-1}} \cdot \frac{s_{2m+1} + \ldots s_{4m}}{2^{q+1}} + \ldots \frac{1}{2^2} \cdot \frac{s_{2^{p-q-2} \cdot m+1} + \ldots s_{2^{p-q-1} \cdot m}}{2^{p-2}} \\ &+ \frac{R}{2^p}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Dans la somme R le nombre des termes est:

$$\begin{aligned} 2^p + n' - m\,(1 + 2 + 2^2 + \ldots 2^{p-q-2}) &= \\ = 2^p + n' - (2^q + m')\,(2^{p-q-1} - 1) &= \\ = 2^p + n' - 2^{p-1} + 2^q - m'\,(2^{p-q-1} - 1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire un nombre du même ordre que n. D'autre part l'index du premier terme de R est égal à

$$\begin{aligned} 2^{p-q-1} \cdot m + 1 = 2^{p-q-1}(2^q + m') + 1 &= \\ = 2^{p-1} + 2^{p-q-1} \cdot m' + 1, \end{aligned}$$

qui est — lui-même — du même ordre que n, d'où l'on aura

$$\frac{R}{2^p} \to 0.$$

Nous écrivons la partie principale de (14) sous la forme:

$$\frac{1}{2^{p-q}} \cdot \varepsilon_{m,1} + \frac{1}{2^{p-q-1}} \cdot \varepsilon_{m,2} + \ldots \frac{1}{2^2} \cdot \varepsilon_{m,p-q-1},$$

où

1) $\varepsilon_{m,\nu} \to 0$.

2) $\frac{1}{2^{p-q}} + \frac{1}{2^{p-q-1}} \ldots + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q-1}\right) \to \frac{1}{2}$.

3) $\frac{1}{2^{p-\nu}} \to 0$ pour chaque valeur fixée de ν.

1), 2), 3) permet d'appliquer de nouveau le théorème de M. Toeplitz, lequel démontre la relation (12).

De ce résultat on déduit immédiatement le théorème: *Soit la série Σu_n sommable $M(1)$, elle sera aussi sommable $M(r)$, $r > 1$*
en posant $n = m^r$, $r > 1$.

Théorème 5. *Soit la série Σu_n sommable $M(r)$ avec la somme u, elle sera aussi sommable $M(s)$, $s > r$, avec la même somme u.*

1) Tout d'abord nous envisageons le cas $0 < r < s \leqq 1$ et supposons comme toujours $u = 0$. Les indices m et p tendant vers l'infini de l'ordre r resp. s on aura

$$p = mq + p', \ 0 \leqq p' < m.$$

Posons

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \frac{u_{n+1} + \ldots u_{n+p}}{p} &= \frac{u_{n+1} + \ldots u_{n+m}}{m} \cdot \frac{m}{p} + \\ &+ \frac{u_{n+m+1} + \ldots u_{n+2m}}{m} \cdot \frac{m}{p} + \ldots \\ &+ \frac{u_{n+(q-1)m+1} + \ldots u_{n+qm}}{m} \cdot \frac{m}{p} + \frac{R}{p}. \end{aligned} \right.$$

Ici $\frac{R}{p} \rightarrow 0$ parce que le nombre des termes de R est $p' < m < p$. D'autre part la partie principale de (15) tend vers 0 d'après le théorème de M. Toeplitz; en effet dans chacun des produits $\frac{u_{n+1} + \dots u_{n+m}}{m} \cdot \frac{m}{p}$ etc. le premier facteur tend vers 0, pendant que la somme

$$\frac{m}{p} + \frac{m}{p} + \dots = \frac{mq}{p} \rightarrow 1.$$

2) D'après cela nous allons montrer le théorème sous la condition

$$1 < r < s < r^2.$$

En supposant de nouveau $u = 0$ et en écrivant $[x]$ pour le plus grand nombre entier qui est contenu en x on aura au sens de la définition de $M(r)$:

$$\frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \dots s_{n+[n^r]}}{n^r} \rightarrow 0,$$

d'où nous allons démontrer la relation

$$\frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \dots s_{n+[n^s]}}{n^s} \rightarrow 0.$$

Pour cela nous écrivons

$$(16)\begin{cases} \dfrac{s_{n+1} + \dots s_{n+[n^s]}}{n^s} = \dfrac{s_{n+1} + \dots s_{\left[n^{\frac{s}{r}}\right]}}{n^r} \cdot \dfrac{1}{n^{s-r}} + \\ \qquad + \dfrac{s_{\left[n^{\frac{s}{r}}\right]+1} + \dots s_{n+[n^s]}}{\left(n^{\frac{s}{r}}\right)^r} \end{cases}$$

Dans la somme (16) chacun des deux termes tendra vers 0; en effet, le nombre des termes dans le numérateur du premier membre est

$$\left[n^{\frac{s}{r}}\right] - n < n^r$$

parce que $\frac{s}{r} < r$. Dans le second membre nous avons des termes du nombre

$$n + [n^s] - \left[n^{\frac{s}{r}}\right],$$

c'est-à-dire de l'ordre n^s, pendant que le premier index dans le numérateur est précisement $\left[n^{\frac{s}{r}}\right] + 1$, d'où l'on voit que le second membre tend aussi vers 0.

3) D'après cela le théorème peut être démontré facilement pour le cas général; en effet, si r < 1 le théorème est déjà démontré pour $s \leqq 1$ et d'après le théorème 4 aussi pour $s > 1$; dans le cas $r = 1$ nous avons le théorème 4; enfin pour $r > 1$ nous formons la suite

$$s_1, \; s_2, \; s_3 \; \ldots$$

où

$$r < s_1 < r^2, \; s_1 < s_2 < s_1^2, \; s_2 < s_3 < s_3^2 \ldots, \; s_n \to \infty \text{ pour } n \to \infty,$$

le nombre s étant enfermé entre deux membres consécutifs de cette série, le théorème sera démontré pour chaque $s < r$.

Théorème 6. Les nombres r et t, $t > 0$, $0 < r < 1$, étant donnés, il existe une série Σu_n sommable au sens (C, t) et non sommable au sens $M(r)$.

(Il existe par exemple une série sommable (C, 0,0001) et non sommable M (0,999), qui est spécialement préparée pour les valeurs 0,0001 et 0,999; la série sera sommable $M(1)$ parce qu'elle est sommable (C, 1)).

Pour démontrer ce résultat nous appliquons les notations usuelles dans la théorie de Cesàro en écrivant

$$(17) \qquad A_n^{(k)} = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)\,(n+k-1)\ldots(k+1)}{n!},$$

$$(18) \qquad S_n^{(k)} = A_0^{(k)} u_n + A_1^{(k)} u_{n-1} + \ldots A_n^{(k)} u_0,$$

Σu_n étant sommable (C, t) avec la somme u, si pour $n \to \infty$ on a

$$(19) \qquad \frac{S_n^{(t)}}{A_n^{(t)}} \to u.$$

Pour obtenir les relations entre les quantités s_0, $s_1 \ldots$ et les $S_n^{(t)}$ nous partirons de l'équation, valable pour $|x|<1$:

$$(20) \quad \Sigma s_n x^n = (1-x)^t \Sigma S_n^{(t)} x^n = \Sigma A_n^{(-t-1)} x^n \cdot \Sigma S_n^{(t)} x^n$$

(voir par exemple C. S. I, pag. 20),

d'où on aura

$$(21) \quad s_n = A_n^{(-t-1)} S_0^{(t)} + A_{n-1}^{(-t-1)} S_1^{(t)} + \ldots A_0^{(-t-1)} S_n^{(t)},$$

c'est-à-dire

$$(22) \quad \begin{cases} s_0 = A_0^{(-t-1)} \cdot S_0^{(t)} \\ s_1 = A_1^{(-t-1)} \cdot S_0^{(t)} + A_0^{(-t-1)} \cdot S_1^{(t)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n = A_n^{(-t-1)} \cdot S_0^{(t)} + A_{n-1}^{(-t-1)} \cdot S_1^{(t)} + \ldots A_0^{(-t-1)} \cdot S_n^{(t)}. \end{cases}$$

Les dernières formules montrent comment de la suite $S_0^{(t)}, S_1^{(t)} \ldots$ on peut déterminer la série Σu_n. Par addition (voir C. S. I, pag. 18 (8)) on obtient

$$(23) \quad s_0 + s_1 + \ldots s_n = A_n^{(-t)} S_0^{(t)} + A_{n-1}^{(-t)} S_1^{(t)} + \ldots A_0^{(-t)} S_n^{(t)},$$

et encore

$$(24) \quad \begin{cases} s_0 + s_1 + \ldots s_{n+m} = \\ = A_{n+m}^{(-t)} S_0^{(t)} + A_{n+m-1}^{(-t)} S_1^{(t)} + \ldots A_0^{(-t)} S_{n+m}^{(t)} \end{cases}$$

et par soustraction

$$(25) \quad \begin{cases} s_{n+1} + s_{n+2} + \ldots s_{n+m} = \\ S_0^{(t)} \left(A_{n+m}^{(-t)} - A_n^{(-t)}\right) + \ldots S_n^{(t)} \left(A_m^{(-t)} - A_0^{(-t)}\right) \\ + A_{m-1}^{(-t)} S_{n+1}^{(t)} + \ldots A_0^{(-t)} \cdot S_{n+m}^{(t)}. \end{cases}$$

En divisant par m nous aurons la formule qui sera fondamentale dans la suite:

$$(26)\left\{\begin{aligned}
&\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\cdots s_{n+m}}{m}=\\
&\frac{S_0^{(t)}}{A_0^{(t)}}\cdot\frac{A_0^{(t)}\left(A_{n+m}^{(-t)}-A_n^{(-t)}\right)}{m}+\frac{S_1^{(t)}}{A_1^{(t)}}\cdot\frac{A_1^{(t)}\left(A_{n+m-1}^{(-t)}-A_{n-1}^{(-t)}\right)}{m}+\cdots\\
&+\frac{S_n^{(t)}}{A_n^{(t)}}\cdot\frac{A_n^{(t)}\left(A_m^{(-t)}-A_0^{(-t)}\right)}{m}+\frac{S_{n+1}^{(t)}}{A_{n+1}^{(t)}}\cdot\frac{A_{n+1}^{(t)}\cdot A_{m-1}^{(-t)}}{m}\\
&+\frac{S_{n+2}^{(t)}}{A_{n+2}^{(t)}}\cdot\frac{A_{n+2}^{(t)}A_{m-2}^{(-t)}}{m}+\cdots\frac{S_{n+m}^{(t)}}{A_{n+m}^{(t)}}\cdot\frac{A_{n+m}^{(t)}A_0^{(-t)}}{m}.
\end{aligned}\right.$$

Nous appliquons maintenant un théorème remarquable de M. TOEPLITZ (Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. t. XXII; voir aussi: C. S. I Hjælpesætning II A); M. TOEPLITZ regarde des formes linéaires des variables s_1, $s_2 \ldots$ où chacune des t_p contient un nombre limité des variables s:

$$(27)\left\{\begin{aligned}
t_1 &= a_{11}s_1+\cdots a_{1n_1}s_{n_1}\\
t_2 &= a_{21}s_1+\cdots a_{2n_2}s_{n_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

les a_{ik} étant des nombres donnés. Le théorème mentionné est: Afin que pour chaque suite convergente s_1, $s_2 \ldots$ la suite correspondante t_1, $t_2 \ldots$ soit également convergente ayant la même limite:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

il est nécessaire et suffisant que ces trois conditions soient remplies:

$$\begin{aligned}
&1.\ \lim_{p\to\infty}\big(\sum_{(q)} a_{pq}\big) &&= 1\\
&2.\ \lim_{p\to\infty} a_{pq} &&= 0\\
&3.\ \sum_{(q)} |a_{pq}| &&< M,
\end{aligned}$$

M étant une constante indépendante de p. Nous posons maintenant dans les formules (27) pour les variables s les nombres

$$\frac{S_0^{(t)}}{A_0^{(t)}},\ \frac{S_1^{(t)}}{A_1^{(t)}},\ \ldots$$

et allons constater que les conditions (1), (2), (3) sont remplies. Quant à la condition (1) il est nécessaire de considérer la somme:

$$(28)\left\{\begin{aligned} &\frac{A_0^{(t)}\left(A_{n+m}^{(-t)}-A_n^{(-t)}\right)}{m}+\frac{A_1^{(t)}\left(A_{n+m-1}^{(-t)}-A_{n-1}^{(-t)}\right)}{m}+\ldots\\ &+\frac{A_n^{(t)}\left(A_m^{(-t)}-A_0^{(-t)}\right)}{m}+\frac{A_{n+1}^{(t)}A_{m-1}^{(-t)}}{m}+\frac{A_{n+2}^{(t)}A_{m-2}^{(-t)}}{m}+\ldots\\ &\qquad+\frac{A_{n+m}^{(t)}A_0^{(-t)}}{m}=\frac{A_{n+m}^{(1)}-A_n^{(1)}}{m}=\end{aligned}\right.$$

$$\frac{n+m+1-(n+1)}{m}=1 \text{ (voir C. S. I, pag. 17 (7)).}$$

Pour remplir la condition (2) il est nécessaire d'avoir pour chaque valeur fixée de ν

$$(29)\qquad \frac{A_\nu^{(t)}\left(A_{n+m-\nu}^{(-t)}-A_{n-\nu}^{(-t)}\right)}{m}\rightarrow 0;$$

(29) est valable indépendamment de m, parce que $A_n^{(r)}$ est de l'ordre r et

$$(n+m-\nu)^{-t}\rightarrow 0,\ (n-\nu)^{-t}\rightarrow 0.$$

Pour la condition (3) on peut remarquer que pour $0<t<1$ tous les nombres A sont positifs, tandis que les nombres

$$A_{n+m}^{(-t)}-A_n^{(-t)},\ A_{n+m-1}^{(-t)}-A_{n-1}^{(-t)},\ \ldots A_m^{(-t)}-A_0^{(-t)}$$

sont négatifs (voir C. S. I, pag. 18); par cela on a pour la somme des valeurs absolues des termes dans (28):

$$
(30)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{A_0^{(t)}\left(A_n^{(-t)}-A_{n+m}^{(-t)}\right)}{m}+\frac{A_1^{(t)}\left(A_{n-1}^{(-t)}-A_{n-m-1}^{(-t)}\right)}{m}+\cdots\\
&+\frac{A_n^{(t)}\left(A_0^{(-t)}-A_m^{(-t)}\right)}{m}+\frac{A_{n+1}^{(t)}A_{m-1}^{(-t)}}{m}+\frac{A_{n+2}^{(t)}A_{m-2}^{(-t)}}{m}+\cdots\\
&+\frac{A_{n+m}^{(t)}A_0^{(-t)}}{m}=-1+2\,\frac{A_{n+1}^{(t)}A_{m-1}^{(-t)}+\cdots A_{n+m}^{(t)}A_0^{(-t)}}{m},
\end{aligned}
\right.
$$

(en appliquant (28) elle-même). La question est ainsi réduite à savoir si la somme des termes positifs

$$
(31)\qquad \frac{A_{n+1}^{(t)}A_{m-1}^{(-t)}+\cdots A_{n+m}^{(t)}A_0^{(-t)}}{m}
$$

reste inférieure à un nombre fixe M (indépendant de m, n); on voit immédiatement que le moindre terme dans (31) est le premier, et ce terme est pour $n\to\infty$ de la grandeur $n^t\cdot m^{-t}=\left(\frac{n}{m}\right)^t$, c'est-à-dire, ce terme tend vers l'infini aussitôt que m tend vers l'infini d'un ordre inférieur à n. Alors il existe une série sommable (C, t), mais pour laquelle la quantité

$$
\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\cdots s_{n+m}}{m}
$$

diverge, quand $m\to\infty$ de l'ordre donné r, $0<r<1$. Le théorème est donc démontré.

On démontre de la même manière qu'il existe une série sommable au sens (C, t), $1<t<2$, par exemple sommable (C, 1,0001), qui n'est pas sommable $M(r)$ pour une valeur r donnée d'avance, par exemple qui n'est pas sommable $M(1000000)$. En effet tous les termes de (28) sont négatifs excepté le dernier

$$
\frac{A_{n+m}^{(t)}A_0^{(-t)}}{m}=\frac{A_{n+m}^{(t)}}{m},
$$

c'est-à-dire que la somme des valeurs absolues des termes est

$$-1+2\,\frac{A_{n+m}^{(t)}}{m},$$

où

$$\frac{A_{n+m}^{(t)}}{m}\rightarrow\infty$$

pour chaque suite des valeurs m, qui tend vers l'infini.

Théorème 7. Σu_n étant sommable $M(r)$, si on a

$$|u_n|<\frac{k}{n^r},$$

le constant k étant >0, la série sera aussi convergente.

Pour démontrer ce théorème nous allons déduire une relation simple entre les s_n et les fractions

$$\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\ldots s_{n+m}}{m}$$

valable pour les séries du caractère $|u_n|<\frac{k}{n^r}$. On trouve successivement:

$$s_n-\frac{k}{n^r}<s_{n+1}<s_n+\frac{k}{n^r}$$

$$s_n-\frac{2\,k}{n^r}<s_{n+2}<s_n+\frac{2\,k}{n^r}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n-\frac{mk}{n^r}<s_{n+m}<s_n+\frac{mk}{n^r}$$

d'où par addition

$$ms_n-\frac{k}{n^r}\cdot\frac{m(m+1)}{2}<s_{n+1}+\ldots s_{n+m}<ms_n+\frac{k}{n^r}\,\frac{m(m+1)}{2}$$

ou

$$(32)^{*}\left\{\begin{aligned}&\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\ldots s_{n+m}}{m}-\frac{k}{2}\,\frac{m+1}{n^{r}}<s_n\\&<\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\ldots s_{n+m}}{m}+\frac{k}{2}\cdot\frac{m+1}{n^{r}}.\end{aligned}\right.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné nous allons former une suite des valeurs m pour laquelle

$$\frac{k}{2}\cdot\frac{m+1}{n^{r}}\to\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\frac{m}{n^{r}}\to\frac{2\,\varepsilon}{k}.$$

Au sens de $M(r)$ nous aurons

$$\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\ldots s_{n+m}}{m}\to u,$$

c'est-à-dire que s_n se trouve pour des grandes valeurs de n entre $u-2\,\varepsilon$ et $u+2\,\varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour $r = 1$ nous aurons spécialement:

Σu_n étant sommable $M(1)$ et encore $|u_n| < \frac{k}{n}$, Σu_n sera convergente.

En remarquant qu'on déduit de la sommabilité $M(1)$ la sommabilité (C, 1), on voit que le théorème (7) donne pour $r = 1$ un théorème bien connu de M. HARDY (voir C. S. I, Théorème VI).

§ 2. La sommabilité $M(r)$ des séries de Fourier.

Comme le premier exemple nous considérons la série de Fourier en démontrant le théorème suivant:

Théorème 8. La série de Fourier d'une fonction bornée et intégrable $f(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, est sommable $M(1)$ ayant la somme $\frac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\}$.

La série de Fourier d'une fonction bornée et intégrable $f(x)$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$, a les coefficients:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\ \cos nu\, du,\ n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\ \sin nu\, du,\ n = 1,\ 2 \ldots$$

Cette série est d'après M. FEJÉR sommable (C, 1) et de plus d'après M. RIESZ et M. CHAPMAN sommable (C, ε), $\varepsilon > 0$; on déduit du théorème 3 que la série sera aussi sommable $M(1)$, c'est-à-dire qu'on a pour $n \to \infty$

$$(33)\quad \frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \cdots s_{n+m}}{m} \to \tfrac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\},$$
$$kn < m < Kn.$$

Il vaut la peine d'ajouter une démonstration directe de ce théorème en cherchant une expression de la somme par une intégrale.

Parlons de la formule bien connue (C. S. II, pag. 12):

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\frac{\cos n(u-x) - \cos(n+1)(u-x)}{2(1-\cos(u-x))}\,du,$$

d'où l'on a

$$\frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \cdots s_{n+m}}{m} =$$
$$= \frac{1}{\pi m}\int_0^{2\pi} f(u)\,\frac{\cos(n+1)(u-x) - \cos(n+m+1)(u-x)}{2(1-\cos(u-x))}\,du.$$

ce qu'on peut réduire par les méthodes usuelles à (voir C. S. II, pag. 18)

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{s_{n+1} + s_{n+2} + \cdots s_{n+m}}{m} = \\ &= \frac{1}{\pi m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha)\}\,\frac{\sin(2n+m+2)\alpha \cdot \sin m\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha.\end{aligned}\right.$$

Pour $f(x) = 1$ on aura spécialement

$$1 = \frac{1}{\pi m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 . \frac{\sin(2n+m+2)\alpha\cdot\sin m\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

et enfin par soustraction

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{s_{n+1}+s_{n+2}+\cdots s_{n+m}}{m} - \tfrac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\} \\ &= \frac{1}{\pi m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)-f(x+)-f(x-)\} \\ &\qquad . \frac{\sin(2n+m+2)\alpha\cdot\sin m\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Ce que nous voulons démontrer sans appliquer la théorie, c'est que la somme (35) tendra vers 0 pour $n \to \infty$; avant effectuer cette démonstration je me permet de faire quelques remarques.

1) Dans la théorie classique des séries de Fourier DIRICHLET envisage l'intégrale

$$(36)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\cdot\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\cdot\frac{\sin(2n+1)\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

et démontre que cette intégrale tend vers 0 avec $n \to \infty$, $\varphi(\alpha)$ étant une fonction monotone, $\varphi(0) = 0$.

2) Dans la théorie de sommabilité des séries de Fourier M. FEJÉR envisage l'intégrale analogue

$$(37)\quad \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\cdot\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha;$$

cette intégrale tend vers 0 pour $n \to \infty$, $\varphi(\alpha)$ étant une fonction intégrable, $\varphi(\alpha) \to 0$ pour $0 \leftarrow \alpha$. M. FEJÉR ajoute lui-même la remarque suivante (Untersuchungen über Fourier'sche Reihen, Mathematische Annalen 58, pag. 54): »Von diesen beiden Integralen ((36), (37)) hat (37) den einfacheren Charakter. Während nämlich im DIRICHLET'schen Integrale neben φ der Faktor $\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}$ steht — bei dem die Anzahl der Zeichenwechsel mit n unbegrenzt wächst — tritt im Integrale (37) neben φ der niemals negative Faktor $\frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}$ auf. Diesem Umstand ist es zu verdanken, dass man bei der Bestimmung des Grenzwertes (37) im wesentlichen mit dem ersten Integralmittelwertes auskommen kann, während die Grenzbestimmung (36) die Anwendung des tiefer liegenden Zweiten benötigt.« Mais bien que le facteur $\frac{\sin 2n+m+2)\alpha\cdot\sin m\alpha}{\sin^2\alpha}$ de $\varphi(\alpha) = f(x+2\alpha) - f(x+) + f(x-2\alpha) - f(x-)$ dans l'équation (35) change son signe une infinité de fois, n tendant vers l'infini, on peut démontrer en appliquant seulement le premier théorème de la moyenne du calcul intégral que l'intégrale $(35) \to 0$ pour $n \to \infty$ pour chaque fonction $f(x)$ supposée seulement intégrable. Ce qui est principal pour la convergence n'est pas le signe du facteur sous le signe d'intégration dans (37), mais le facteur $\frac{1}{n}$ en dehors de l'intégrale.

Les intégrales (35) et (37) sont toutes les deux du même type:

$$(38) \qquad \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\,\frac{\sin(an+bm+c)\alpha\cdot\sin(a_1 n+b_1 m+c_1)\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha,$$

où (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) sont 2 triples des constantes, a, b, a_1, b_1 sont positifs, $\varphi(\alpha) \to 0$ pour $0 \leftarrow \alpha$, $n \to \infty$ et $m \to \infty$ du même ordre que n. Nous démontrons que l'intégrale (38) tend vers 0. Pour cela nous divisons le champ de l'intégration en (38) en écrivant:

$$(39) \qquad \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{m}\int_0^{n-p} + \frac{1}{m}\int_{n-p}^{n-q} + \frac{1}{m}\int_{n-q}^{\frac{\pi}{2}},$$

où $p > q$; soit g la borne supérieure de $|\varphi(x)|$ dans l'intervalle $0 < x < n^{-q}$ et G la borne supérieure de $|\varphi(x)|$ dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tout d'abord nous remplaçons dans la fraction de (38) le dénominateur $\sin^2\alpha$ par α^2; au sens de l'inégalité

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} < 1$$

nous aurons

$$(40)\left\{\begin{aligned}&\Bigg|\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\cdot\sin(an+bm+c)\alpha\cdot\sin(a_1n+b_1m+c_1)\alpha\cdot\\&\qquad\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)d\alpha\Bigg| < \frac{1}{m}\cdot G\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}\right.$$

Pour les 3 intégrales de (39) nous aurons les inégalités:

$$(41)\left\{\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m}\int_0^{n^{-p}}\varphi(\alpha)\frac{\sin(an+bm+c)\alpha\cdot\sin(a_1n+b_1m+c_1)\alpha}{\alpha^2}\right| <\\&\qquad < \frac{1}{m\cdot n^p}\cdot g\,|an+bm+c|\,|a_1n+b_1m+c_1|,\end{aligned}\right.$$

$$(42)\left\{\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m}\int_{n^{-p}}^{n^{-q}}\varphi(\alpha)\frac{\sin(an+bm+c)\alpha\cdot\sin(a_1n+b_1m+c_1)\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha\right| <\\&\qquad < \frac{1}{m}\cdot g\,(n^p-n^q),\end{aligned}\right.$$

$$(43)\left\{\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m}\int_{n^{-q}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\frac{\sin(an+bm+c)\alpha\cdot\sin(a_1n+b_1m+c_1)\alpha}{\alpha^2}\right| <\\&\qquad < \frac{1}{m}\cdot G\cdot\left(n^q-\frac{2}{\pi}\right).\end{aligned}\right.$$

Les dernières 4 inégalités donnent enfin:

$$(44)\left\{\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\frac{\sin(an+bm+c)\alpha\cdot\sin(a_1n+b_1m+c_1)\alpha}{\sin^2\alpha}\,d\alpha\right| <\\&\qquad < \frac{1}{m}\cdot G\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\right)+G\cdot\frac{n^q}{m}+\\&\qquad + g\cdot\frac{(an+bm+c)(a_1n+b_1m+c_1)}{m\cdot n^p}+g\cdot\frac{n^p-n^q}{m},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit que l'intégrale (38) tend vers 0 si m tend vers l'infini d'un ordre $p \geqq 1$.

Théorème 9. Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$, et soit g le plus grand des deux nombres:

$$\text{borne supérieure de} \left| f(x+2\alpha) - f(x+) \right|,$$
$$\text{borne supérieure de} \left| f(x-2\alpha) - f(x-) \right|,$$
$$0 < \alpha < n^{-r}, \quad 0 < r < 1$$

si l'on a pour $n \to \infty$

$$g \cdot n^{1-r} \to 0,$$

la série de Fourier pour $f(x)$ sera sommable $M(r)$ avec la somme $\frac{1}{2}\left\{f(x+) + f(x-)\right\}$.

Nous appliquons de nouveau la formule (35)

$$(35) \begin{cases} \dfrac{s_{n+1} + s_{n+2} + \cdots s_{n+m}}{m} - \frac{1}{2}\left\{f(x+) + f(x-)\right\} \\ \quad = \dfrac{1}{\pi m} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+m+2)\alpha \cdot \sin m\alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha \end{cases}$$

où

$$\varphi(\alpha) = f(x+2\alpha) - f(x+) + f(x-2\alpha) - f(x-)$$

et

$$kn^r < m < Kn^r.$$

Dans le dénominateur nous remplaçons comme ci-dessus $\sin^2\alpha$ par α^2, ce qui conduit à l'intégrale

$$(45) \begin{cases} \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha) \frac{\sin(2n+m+2)\alpha \cdot \sin m\alpha}{\alpha^2} d\alpha = \\ \quad = \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^{n^{-1}} + \frac{1}{m} \int_{n^{-1}}^{n^{-r}} + \frac{1}{m} \int_{n^{-r}}^{n^{-q}} + \frac{1}{m} \int_{n^{-q}}^{\frac{\pi}{2}}, \end{cases}$$

$$1 > r > q.$$

Les première, troisième et quatrième parties de (45) tendent vers 0 avec $n \to \infty$ indépendamment de la supposition $g \cdot n^{1-r} \to 0$. En effet:

$$1)\ \left|\frac{1}{m}\int_0^{n-1}\right| < \frac{1}{m}\cdot 2g\cdot\frac{(2n+m+2)\,m}{n} \to 0,$$

$$3)\ \left|\frac{1}{m}\int_{n-r}^{n-q}\right| < \frac{1}{m}\cdot 2g'\cdot(n^r - n^q) \to 0$$

(g' est le nombre correspondant à g pour l'intervalle $0 < \alpha < n^{-q}$)

$$4)\ \left|\frac{1}{m}\int_{n-q}^{\frac{\pi}{2}}\right| < \frac{1}{m}\cdot 4\,G\cdot\left(n^q - \frac{2}{\pi}\right) \to 0$$

(G est la borne supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$).

Pour la deuxième partie de (45) nous pouvons écrire

$$2)\ \left|\frac{1}{m}\int_{n-1}^{n-r}\right| < \frac{1}{m}\cdot 2g\cdot(n - n^r),$$

et cette partie tend vers 0 au sens de la supposition spéciale $g\cdot n^{1-r} \to 0$.

Théorème 10. Soit $f(x)$ une fonction remplissant les conditions du théorème (9), dont les constantes de Fourier a_n et b_n sont de la grandeur

$$\left|a_n\right| < \frac{k}{n^r},\quad \left|b_n\right| < \frac{k}{n^r}\quad (k > 0 \text{ constant, } 0 < r < 1),$$

alors la série de Fourier de $f(x)$ sera convergente dans le point x.

Ce qui est une conséquence des théorèmes (7) et (9).

§ 3. La sommabilité $M(r)$ des séries de Dirichlet.

Lemme. Introduisons pour la série Σu_n les notations:

$$s_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} u_i,\quad s_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} s_i^{(0)},$$

et supposons que la quantité $\left|\frac{s_n^{(1)}}{n^r}\right|$, $r \geqq 1$, reste inférieure à un nombre donné C; soit de plus

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots$$

une suite qui remplit les conditions:

$$n^{r-s}\cdot\alpha_n \to 0;\ \ \Sigma n^{r-s}\,|\,\Delta\alpha_n| \text{ converge};\ \ \Sigma n^r |\,\Delta^2\alpha_n\,| \text{ converge},$$
$$(0 < s < 1),\ (\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n+1},\ \Delta^2\alpha_n = \Delta\alpha_n - \Delta\alpha_{n+1});$$

alors la série $\Sigma\alpha_n u_n$ sera sommable $M(s)$.

Cette lemme est formée comme l'analogue d'un théorème de la théorie de sommabilité des séries de Dirichlet (voir Harald Bohr, Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori, dissertation, pag. 61; C. S. III, pag. 11). Pour démontrer la lemme nous posons comme l. c.:

$$s_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} u_i;\ s_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} s_i^{0};\ t_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i;\ t_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} t_i^{0}.$$

On trouve par sommation partielle (l. c. pag. 12):

$$(46)\quad t_n^{(1)} = s_n^{(1)}\alpha_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} s_i^{(1)}\,\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n-2} s_i^{(1)}\,(n-i+1)\,\Delta^2\alpha_i$$

d'où

$$(47)\quad \begin{cases} t_{n+m}^{(1)} = s_{n+m}^{(1)}\,\alpha_{n+m} + \\ + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n+m-1} s_i^{(1)}\,\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n+m-2} s_i^{(1)}\,(n+m-i+1)\cdot\Delta^2\alpha_i. \end{cases}$$

Par soustraction et division par m (de l'ordre s) nous aurons

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{t_{n+m}^{(1)} - t_n^{(1)}}{m} = \dfrac{s_{n+m}^{(1)}\,\alpha_{n+m} - s_n^{(1)}\,\alpha_n}{m} + \\ + 2\displaystyle\sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{s_i^{(1)}}{m}\,\Delta\alpha_i - \sum_{i=n-1}^{n+m-2} \frac{s_i^{(1)}}{m}\,(i-1-n)\cdot\Delta^2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n+m-2} s_i^{(1)}\Delta^2\alpha_i. \end{cases}$$

Considérons premièrement la fraction $\frac{s_{n+m}^{(1)} \cdot \alpha_{n+m}}{m}$, laquelle est égale au produit

$$\frac{s_{n+m}^{(1)}}{m} \cdot \alpha_{n+m} = \frac{s_{n+m}^{(1)}}{(n+m)^r} \cdot \frac{(n+m)^s}{n^s} \cdot \frac{n^s}{m} \left\{ (n+m)^{r-s} \cdot \alpha_{n+m} \right\}; \tag{49}$$

dans ce produit les trois premiers facteurs restent bornés, pendant que le quatrième tend vers 0. De la même manière on trouve aussi $\frac{s_n^{(1)} \cdot \alpha_n}{m} \to 0$. — Ensuite nous considérons la quantité

$$\sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{s_i^{(1)}}{m} \Delta\alpha_i = \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{s_i^{(1)}}{i^r} \cdot i^{r-s} \Delta\alpha_i \left(\frac{i}{n+m-1}\right)^s \cdot \frac{(n+m-1)^s}{n^s} \cdot \frac{n^s}{m}, \tag{50}$$

où $\sum \frac{s_i^{(1)}}{i^r} \cdot i^{r-s} \cdot \Delta\alpha_i$ est une série absolument convergente dans laquelle le »reste« $\sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{s_i^{(1)}}{i^r} \cdot i^{r-s} \cdot \Delta\alpha_i \to 0$ pour $n \to \infty$; $\left(\frac{i}{n+m-1}\right)^s$ reste < 1; $\frac{(n+m-1)^s}{n^s} \to 1$, $\frac{n^s}{m}$ est borné, d'où l'on déduit que $\sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{s_i^{(1)}}{m} \cdot \Delta\alpha_i \to 0$. — Quant à la quantité $\sum_{i=n-1}^{n+m-2} s_i^{(1)} \Delta^2\alpha_i \frac{i-1-n}{m}$ la série $\sum s_i^{(1)} \cdot \Delta^2\alpha_i$ est absolument convergente, c'est-à-dire le »reste« $\sum_{i=n-1}^{n+m-2} s_i^{(1)} \Delta^2\alpha_i \to 0$; $\frac{i-1-n}{m}$ reste < 1; alors nous aurons

$$\sum_{i=n-1}^{n+m-2} s_i^{(1)} \Delta^2 \alpha_i \frac{i-1-n}{m} \to 0.$$

Enfin nous trouvons

$$\frac{t_{n+m}^{(1)} - t_n^{(1)}}{m} \to \sum s_i^{(1)} \Delta^2 \alpha_i. \tag{51}$$

La démonstration précédente est aussi valable pour $s = 1$, $r > 1$; mais dans ce cas spécial le théorème se confond avec un théorème de M. BOHR. En effet, supposons $\frac{s_n^{(1)}}{n^r}$ borné $(r > 1)$, et la suite

$$\alpha_1, \ \alpha_2 \ldots$$

remplissant les conditions

$$n^{r-1} \cdot \alpha_n \rightarrow 0, \ \Sigma n^{r-1} |\Delta \alpha_n| \text{ et } \Sigma n^r |\Delta^2 \alpha_n| \text{ convergentes,}$$

alors la série $\Sigma \alpha_n u_n$ est sommable (C, 1) (voir la dissertation de M. BOHR, § 5 ou C. S. III, pag. 12, où la démonstration reste valable sous les conditions nommées plus haut).

Théorème 11. Soit pour la série de DIRICHLET $\sum \frac{a_n}{n^z}$ dans le point $z_0 = x_0 + iy$ la quantité $\left|\frac{s_n^{(1)}}{n^r}\right|$ bornée, $r \geqq 1$, la série sera sommable $M(s)$ pour $x > x_0 + r - s$.

Nous posons

$$\frac{a_n}{n^{z_0}} = u_n, \ \frac{a_n}{n^z} = u_n \alpha_n, \ \alpha_n = \frac{1}{n^{z - z_0}}.$$

On trouve alors (l. c. pag. 15 et 19)

$$\left|\Delta \alpha_n\right| < \left|z - z_0\right| \frac{1}{n^{x - x_0 + 1}}$$

et

$$\left|\Delta^2 \alpha_n\right| < \left|z - z_0\right| \left|z - z_0 + 1\right| \cdot \frac{1}{n^{x - x_0 + 2}},$$

enfin

$$n^{r-s} \alpha_n = \frac{1}{n^{z - z_0 - r + s}},$$

$$n^{r-s} |\Delta \alpha_n| < \frac{|z - z_0|}{n^{x - x_0 + 1 - r + s}},$$

$$n^r |\Delta^2 \alpha_n| < \frac{|z - z_0| \, |z - z_0 + 1|}{n^{x - x_0 - r + 2}}.$$

On voit immédiatement que les conditions du théorème sont remplies pour $x > x_0 + r - s$.

La valeur de ce théorème consiste dans la possibilité de déterminer une série divergente et sommable $M(s)$ pour la valeur arbitraire s, $0 < s < 1$. Considérons le théorème pour le cas $r = 1$, c'est-à-dire $\frac{s_n^{(1)}}{n}$ borné, alors on aura

$$x_0 = \lambda_1,$$

λ_1 étant la première abscisse de sommabilité; soit de plus l'abscisse de convergence

$$\lambda_0 = \lambda_1 + 1.$$

Alors dans un point quelconque $x + iy$ où $x > \lambda_0 - s$ la série sera sommable $M(s)$.

Færdig fra Trykkeriet d. 31. Juli 1920.