Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III**, 5.

NOTE ÜBER DIE PAAREN ZWEIGE EINER EBENEN ELEMENTARKURVE VIERTER ORDNUNG

VON

C. JUEL

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1920

Es ist bekannt, wie bei zwei reellen algebraischen Kurven zweiter Ordnung die Zahl der gemeinsamen Punkte und der gemeinsamen Tangenten miteinander in Verbindung stehen. Eine Verbindung ganz ähnlicher Art hat man nicht nur — wie ich früher nachgewiesen habe — wenn man den algebraischen Charakter dieser Kurven aufgibt, sondern auch, wenn man die Kurven zweiter Ordnung durch solche Kurven paarer Ordnung ersetzt, die zusammen eine zerlegte Kurve vierter Ordnung bilden.

Mit dem Nachweis der hierher gehörigen einfachen Sätze — die ich in einer anderen Arbeit gebrauchen werde — beschäftigt sich diese Note.

Ist eine Kurve vierter Ordnung in zwei Kurven paarer Ordnung zerlegt, müssen die letzteren zweiter oder vierter Ordnung sein — es ist im folgenden für die Beweise gleichgültig, wie die Zerlegung dieser Art ausfällt.

1. Aus jedem Punkt des einen Zweiges gehen entweder zwei oder auch keine Tangenten an den anderen Zweig.

Es sei P ein Punkt des einen Zweiges α. Eine Gerade m, die P mit einem Punkt M des anderen Zweiges β verbindet, schneidet noch α in einem Punkt, und also auch β in einem und nur einem neuen Punkt M_1. Die Verbindung M—M_1 ist gegenseitig eindeutig, und berührt eine Gerade m den Zweig β in einem Punkt R, laufen in der Nähe von R entsprechende Punkte in entgegengesetztem Sinne.

Fallen also M und M_1 einmal zusammen, werden sie noch einmal zusammenfallen.

2. Zwei paare Zweige einer Kurve vierter Ordnung, welche keinen Punkt miteinander gemein haben, haben entweder vier oder auch keine Tangenten miteinander gemein.[1]

Berührt eine Gerade den einen Zweig α in A, den anderen Zweig β in B, werden aus A zwei Tangenten an β gehen. Aber dann müssen aus jedem Punkt von α zwei Tangenten an β gehen, weil α und β keinen Punkt miteinander gemein haben und ferner keine Wendetangente von β Punkte mit α gemein haben kann. ($\alpha+\beta$ ist vierter Ordnung). In diesem Schluss kann man α und β umtauschen.

Schneidet nun in dem angenommenen Fall eine Tangente von α den Zweig β in M und M_1, dann ist die Abhängigkeit (MM_1) überall (2—2)-deutig. Weil ferner in der Nähe des obengenannten Punktes B ein Punkt M und der zugehörige Punkt M_1 in entgegengesetztem Sinne laufen, werden M und M_1 nach dem allgemeinen Korrespondenzsatz viermal zusammentreffen.

3. Haben zwei paare Zweige einer Kurve vierter Ordnung zwei und nur zwei Punkte mit getrennten Tangenten miteinander gemein, dann haben sie auch zwei und nur zwei Tangenten miteinander gemein.

Es mögen α und β die zwei Punkte A und B miteinander gemein haben, und es werde α durch diese Punkte in die zwei Bögen α' und α'', β in die Bögen β' und β'' zerlegt. Die Bezeichnungen mögen so gewählt werden, dass eine durch A gehende und AB benachbarte Gerade einen Punkt mit α' und einen mit β' gemein hat. Wir verbinden

[1] Dieser Satz auch: Mathematische Annalen Bd. 76, S. 348.

nun α' mit β' und α'' mit β'', und heben die Verbindung von α' mit α'' und von β' mit β'' auf. Wir haben so zwei mit Winkelpunkten versehene Kurven $\alpha'+\beta'$ und $\alpha''+\beta''$. Aus der Voraussetzung folgt, dass AB in B eine uneigentliche Tangente dieser zwei Kurven ist. Es ist ferner leicht zu sehen, dass AB auch in A eine uneigentliche Tangente derselben sein wird. Die zwei Kurven müssen nämlich beide paar sein, sonst würden sie einander (ausserhalb A und B) schneiden. Weil nun AB in B eine uneigentliche Tangente ist, soll B zweimal als Schnittpunkt von AB mit $\alpha'+\beta'$ gerechnet werden, und verbindet man B mit einem A benachbarten Punkt von α', muss sie mit $\alpha'+\beta'$ noch einen Punkt gemein haben, der dann notwendigerweise auf β' liegen und A benachbart sein muss.

Wir runden nun die Winkelpunkte auf $\alpha'+\beta'$ und $\alpha''+\beta''$ so ab, dass die dadurch entstandenen Kurven γ' und γ'' keinen Punkt miteinander gemeinsam haben. Sie haben dann dem vorigen Satz zufolge entweder keine oder auch vier Tangenten miteinander gemein. In diesem Fall haben sie aber sicher zwei Tangenten miteinander gemein, welche der Geraden AB benachbart sind. Diese fallen weg, wenn die Abrundung aufgehoben und die Verbindungen in A und B wiederhergestellt werden, so dass zwei und nur zwei zurückbleiben.

4. H a b e n z w e i p a a r e Z w e i g e e i n e r K u r v e v i e r t e r O r d n u n g k e i n e T a n g e n t e n m i t e i n a n d e r g e m e i n, d a n n h a b e n s i e v i e r o d e r a u c h k e i n e P u n k t e m i t e i n a n d e r g e m e i n.

Es möge A ein Schnittpunkt von α und β sein. Eine Tangente an β, die in einem A benachbarten Punkt berührt, schneidet α in zwei Punkten; jede in M berührende Tangente an β muss dann auch zwei Punkte M_1 und M_2 mit

α gemein haben, weil α und β keine Tangenten miteinander gemein haben und die Kurven als spitzenlos vorausgesetzt sind. (Jede durch eine Spitze von α gehende und β berührende Gerade wäre als eine gemeinsame Tangente von α und β zu betrachten). Aus einem Punkt M_1 von α geht aber infolge (1) noch eine Tangente an β, und diese möge in M' berühren. Die Beziehung (MM') ist (2—2)-deutig, und in der Nähe von A laufen ein Paar entsprechender Punkte in entgegengesetztem Sinn. Es fallen also M und M' viermal zusammen, d. h. α und β schneiden einanden in vier Punkten.

5. Zwei paare Zweige einer Kurve vierter Ordnung, die $2s$ Punkte miteinander gemein haben, werden, wenn $2s > 4$, ebenso viele Tangenten miteinander gemein haben.

Die zwei Kurven α und β haben infolge (4) Tangenten miteinander gemein. Es gibt deshalb Gerade, welche keine Punkte mit α und mit β gemein haben. Die zwei Kurven können deshalb, wenn sie auch nicht ursprünglich im Endlichen liegen, doch immer so projiciert werden, und wir nehmen an, dass dieses, wenn nötig, geschehen ist.

Es seien nun $M_1, M_2, \ldots, M_{2s-1}, M_{2s}$ die Schnittpunkte der Kurven, und sie mögen auf α in der genannten Ordnung aufeinander folgen. Die aufeinander folgenden Bögen $M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{2s-1}\,M_{2s}, M_{2s}M_1$ von α nennen wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_2, \alpha_{2s}$. Eine Gerade, welche zwei aufeinander folgende Schnitt punkte verbindet z. B. M_1M_2, zerlegt die Ebene in zwei Halbebenen, und ein aber auch nur ein Bogen M_1M_2 von β kann derselben Halbebene wie α_1 angehören. Wir nennen alle die in der genannten Weise auf β bestimmten Bögen $M_1M_2, \ldots M_{2s-1}M_{2s}, M_{2s}M_1$: $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2s}$. Auf einem dieser Bögen, z. B. auf β_1, kann ausser den Endpunkten M_1 und M_2 kein weiterer Schnittpunkt M liegen, indem α_1 und β_1 die einzigen Kurvenbögen von α und β sind, die in derselben Halbebene liegen wie α_1 und β_1. Wir verbinden nun α_1 mit β_1, α_2 mit $\beta_2 \ldots \alpha_{2s}$ mit β_{2s}, während wir die Verbindungen α_1 mit $\alpha_2, \ldots,$ β_1 mit $\beta_2 \ldots$ aufheben, so dass $2s$ Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s}$ entstehen, welche in den Punkten $M_1, \ldots, M_{2s}$ Winkelpunkte haben. Dass diese Kurven alle paar sind folgt schon daraus, dass sie ganz im Endlichen liegen.

Eine Gerade, welche zwei Schnittpunkte verbindet, gleichviel ob diese aufeinander folgen oder nicht, ist eine uneigentliche Tangente der zwei verschiedenen Kurven γ, welche diese Schnittpunkte als Winkelpunkte haben; die Gerade M_1M_r wird z. B. eine uneigentliche Tangente von γ_1 in M_1, und von γ_r (oder γ_{r-1}) in M_r sein. Die Gerade M_1M_r hat nämlich nur die Punkte M_1 und M_r mit $\alpha+\beta$ gemein, und nehmen wir erstens an, dass γ_1 und γ_r in derselben durch M_1M_r begrenzten Halbebene liegen. Eine der genannten Geraden benachbarte und in der genannten Halbebene liegende Halbgerade wird nun sowohl M_1 benachbarte Punkte mit α_1 und β_1 und M_r benachbarte Punkte mit α_r und β_r gemein haben, was eben die Bedingung dafür ist, dass M_1M_r in M_1 wie in M_r eine uneigentliche Tangente ist. Liegen γ_1 und γ_r nicht in derselben durch M_1M_r begrenzten Halbebene, dann liegen γ_1 und γ_{r-1} in derselben, und wenn M_1M_r eine uneigentliche Tangente in M_r an γ_{r-1} ist, wird sie es auch an γ_r sein.

Runden wir nun auf sämtlichen Kurven γ die Winkelpunkte M so ab, dass die entstandenen Kurven $\gamma_1', \gamma_2' \ldots \gamma_{2s}'$ einander nicht schneiden, und betrachten wir zwei Kurven, welche nicht aufeinander folgen, z. B. γ_1' und γ_r'. Diese haben entweder vier oder auch keine Tangenten miteinander gemein — hier aber vier, welche den Geraden M_1M_r, M_1M_{r+1}, M_2M_r, M_2M_{r+1} benachbart sind. Heben wir die Rundung wieder auf, verschwinden diese Tangenten und γ_1 und γ_r haben keine eigentlichen Tangenten miteinander gemein. Nehmen wir aber zwei aufeinander folgende Kurven, z. B. γ_1' und γ_2', dann haben sie als gemeinsame Tangenten drei Gerade, welche M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3 benachbart sind, und haben demnach noch eine eigentliche Tangente miteinander gemein. Diese kann nicht zwei Bögen desselben Zweiges, z. B. α_1 und α_2, berühren. Angenommen, eine Gerade berührte α_1 in R_1 und α_2 in R_2, dann würde ein endliches Geradenstück $\overline{R_1R_2}$ in Verbindung mit einem Bogen α' von α einen endlichen Raum begrenzen, so dass auf α' nur ein Schnittpunkt M liegen würde. Das ist aber unmöglich, denn die Kurve β müsste dann mit der ganzen Begrenzung $\alpha' + \overline{R_1R_2}$ des genannten Raumes wenigstens zwei Schnittpunkte gemein haben, und β kann R_1R_2 nicht schneiden.

Ein Bogen α_r und ein anstossender Bogen β_{r+1}, und ebenso ein Bogen β_s und ein anstossender Bogen α_{s+1} haben also immer eine Tangente gemein. Weil andere gemeinsame Tangenten an α und β dem obigen zufolge ausgeschlossen sind hat, man also $2s$ gemeinsame Tangenten von α und β.

Forelagt paa Mødet den 27. Febr. 1920.
Færdig fra Trykkeriet den 27. Nov. 1920.