Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III,** 16.

SUR LA GÉNÉRALISATION

DU

PROBLÈME DE FERMAT

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1921

I. Remarques sur le problème de Fermat.

On sait que Lagrange a indiqué une méthode merveilleuse pour résoudre le problème proposé par Fermat, problème qui n'est au fond autre chose que celui-ci:

Déterminer les positifs entiers u et v qui satisfont à l'équation indéterminée

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\varepsilon} \tag{1}$$

où a est un entier qui n'est pas égal à un carré, tandis que ε est un entier quelconque, pair ou impair.

Or, la méthode ingénieuse de Lagrange, fondée sur la fraction continue qui représente $\sqrt{a}$, montre clairement que les propriétés des nombres u et v, parfaitement déterminés à l'aide de a, se rattachent aux propriétés les plus cachées et les plus énigmatiques de ce nombre.

De plus, supposons, dans (1), que ε soit un nombre pair, cette équation indéterminée a toujours une infinité de solutions, mais on n'a pas encore réussi à déterminer les nombres a, pour lesquels l'équation susdite est résoluble pour une valeur impaire de ε.

Désignons maintenant par

$$u_1,\ v_1;\ u_2,\ v_2;\ u_3,\ v_3;\ \ldots\ldots;\ u_n,\ v_n;\ \ldots\ldots \tag{2}$$

l'ensemble des solutions de l'équation indéterminée (1), supposée résoluble, nous aurons, en désignant par n et r des positifs entiers quelconques,

$$u_{nr} = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} u_r^{n-2s} v_r^{2s} a^s \tag{3}$$

$$v_{nr} = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2s+1} u_r^{n-2s-1} v_r^{2s+1} a^s, \tag{4}$$

ce qui donnera immédiatement les trois congruences, valables pour une valeur quelconque de n,

$$u_{nr} \equiv u_r^n \pmod{a} \tag{5}$$

$$v_{nr} \equiv n u_r^{n-1} v_r \pmod{a} \tag{6}$$

$$v_{nr} \equiv 0 \pmod{v_r}, \tag{7}$$

et, par une valeur paire de n,

$$v_{2nr} \equiv 0 \pmod{u_r v_r}, \tag{8}$$

tandis que l'hypothèse n impair donnera

$$u_{2nr+r} \equiv 0 \pmod{u_r}. \tag{9}$$

La nature des nombres u_n est du reste peu connue, tandis qu'il existe une infinité des nombres v_n qui sont divisibles par un positif entier quelconque p, et ces valeurs v_n se présentent par intervalles réguliers dans l'ensemble (2).

En effet, il est évident que cette autre équation indéterminée, de la même forme que (1),

$$u^2 - p^2 a v^2 = (-1)^\varepsilon \tag{10}$$

admet, au moins pour ε pair, une infinité de solutions

$$u'_1, \; v'_1; \; u'_2, \; v'_2; \; u'_3, \; v'_3; \; \ldots; \; u'_n, \; v'_n; \; \ldots. \tag{11}$$

Or, l'équation (10) se présentant aussi sous cette autre forme

$$u^2 - a(pv)^2 = (-1)^\varepsilon, \tag{12}$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1), il est évident qu'une solution quelconque u'_m, v'_m de l'ensemble (11) est déterminée par les solutions u_μ, v_μ, de sorte que nous aurons

$$u'_n = u_{m_n} \quad v'_n = \frac{1}{p} v_{m_n}; \tag{13}$$

c'est-à-dire qu'il existe une infinité des nombres v_n qui sont divisibles par le positif entier quelconque p.

Inversement, supposons divisible par p le nombre v_n, il est évident que

$$u_n, \ \frac{1}{p} v_n$$

est une solution de (12).

Cela posé, il est facile de démontrer le théorème général:

I. Soit v_r le premier des nombres v_m qui est divisible par le positif entier quelconque p, les v_{nr} forment l'ensemble des nombres v_m qui sont divisibles par p, et nous aurons, quel que soit l'indice n,

$$u'_n = u_{nr}, \quad v'_n = \frac{1}{p} v_{nr}. \tag{14}$$

En effet, v_r étant le plus petit des nombres v_m qui soit divisible par p, on aura évidemment

$$v'_1 = u_r, \quad v'_1 = \frac{1}{p} v_r;$$

formons ensuite, en vertu des formules (3) et (4), les expressions de u'_n et v'_n, à l'aide de u'_1 et v'_1, nous trouvons précisément les formules (14).

Dans ce qui suit nous désignons par le symbole

$$k = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

la fraction continue finie

$$k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Supposons ensuite infinie et périodique la fraction continue, de sorte que l'ensemble

$$a_{r+1},\ a_{r+2},\ \ldots,\ a_n$$

forme la première période, nous désignons par le symbole

$$K = [a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r,\ (a_{r+1},\ a_{r+2},\ \ldots,\ a_n)]$$

la valeur de cette fraction continue infinie.

Ces définitions adoptées, on aura, en désignant par a un positif entier quelconque,

(15) $$\sqrt{a^2+1} = [a,\ (2a)];$$

c'est-à-dire que les solutions entières de l'équation indéterminée

(16) $$u_n^2 - (a^2+1)\, v_n^2 = (-1)^n$$

sont déterminées par les formules récursives

$$u_n = 2a\,u_{n-1} + u_{n-2}$$
$$v_n = 2a\,v_{n-1} + v_{n-2}$$

et les valeurs initiales

$$u_1 = a, \quad v_1 = 1$$
$$u_2 = 2a^2+1, \quad v_2 = 2a.$$

On aura de même

(17) $$\sqrt{4a^2+4} = [2a,\ (a,\ 4a)];$$

c'est-à-dire que l'équation indéterminée

$$u_n'^2 - (4a^2+4)\, v_n'^2 = 1$$

a les solutions

(18) $$u_n' = u_{2n}, \quad v_n' = \tfrac{1}{2} v_{2n},$$

tandis que l'équation correspondante

$$u^2 - (4a^2+4)v^2 = -1$$

n'admet pas des solutions entières de u et v.

Soient maintenant

$$\frac{y_0}{z_0},\quad \frac{y_1}{z_1},\quad \frac{y_2}{z_2},\ \ldots,\quad \frac{y_n}{z_n},\ \ldots\ldots$$

$$\frac{y'_0}{z'_0},\quad \frac{y'_1}{z'_1},\quad \frac{y'_2}{z'_2},\ \ldots,\quad \frac{y'_n}{z'_n},\ \ldots\ldots$$

les réduites des deux fractions continues (15) et (17), on aura

$$u_n = y_{n-1},\quad v_n = z_{n-1}$$

$$u'_n = y'_{2n-1},\quad v'_n = z'_{2n-1},$$

ce qui donnera par conséquant

(19) $$y'_{2n-1} = y_{2n-1},\quad z'_{2n-1} = \tfrac{1}{2} z_{2n-1}$$

De plus, on trouvera par la conclusion de n à $n+1$

(20) $$y'_{2n} = 2y_{2n},\quad z'_{2n} = z_{2n},$$

d'où provient la proposition curieuse:

II. Une réduite quelconque de la fraction continue $[a, (2a)]$ est précisément la moitié de la réduite correspondante de $[2a, (a, 4a)]$.

Revenons maintenant à l'équation indéterminée (16), il est évident que les deux polynomes entiers

(21) $$\varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} x^{n-2s}(x^2+1)^s$$

(22) $$\psi_n(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2s+1} x^{2n-2s-1}(x^2+1)^s,$$

formés à l'aide des formules (3) et (4) en y substituant

$$u_r = x, \quad v_r = 1, \quad a = x^2+1,$$

satisfont, quel que soit l'indice n, à l'identité algébrique

$$(\varphi_n(x))^2 - (x^2+1)(\psi_n(x))^2 = (-1)^n, \tag{23}$$

parce que cette équation algébrique, du degré $2n$ au plus, est satisfaite par une valeur positive entière quelconque de x.

II. Généralisations du problème de Fermat.

La formule (23) de l'article précédent conduira naturellement à chercher des généralisations convenables du problème de Fermat.

A cet effet, soit tout d'abord

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{n-1} \tag{1}$$

n quantités quelconques, par exemple des fonctions rationnelles de la variable complexe x, assujetties à satisfaire aux conditions

$$\varphi_r = \varphi_{n-r}, \quad 1 \leqq r \leqq n-1, \tag{2}$$

nous avons à étudier la fraction continue périodique

$$K = [\varphi, (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}, 2\varphi)], \tag{3}$$

Soient maintenant

$$\frac{y_1}{z_1}, \quad \frac{y_2}{z_2}, \quad \ldots, \quad \frac{y_{n-1}}{z_{n-1}}, \quad \frac{y_n}{z_n} \tag{4}$$

les réduites de la fraction continue finie

$$k = (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ 2\varphi),$$

les conditions (2) entraînent, comme dans la théorie des Nombres, l'égalité

$$z_{n-1} = y_{n-2},$$

parce que nous aurons

$$\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} = (\varphi_{n-1},\ \varphi_{n-2},\ \ldots,\ \varphi_2,\ \varphi_1) = \frac{y_{n-1}}{z_{n-1}}.$$

Cela posé, les deux dernières des réduites (4) deviennent

$$\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}},\quad \frac{2\varphi y_{n-1}+y_{n-2}}{2\varphi y_{n-2}+z_{n-2}},$$

et la valeur de la fraction continue périodique

$$\xi=[(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ 2\varphi)]$$

est une racine de l'équation quadratique

$$\frac{(2\varphi y_{n-1}+y_{n-2})\,\xi+y_{n-1}}{(2\varphi y_{n-2}+z_{n-2})\,\xi+y_{n-2}}=\xi.$$

Posons

$$\xi=\frac{\varphi y_{n-1}+\sqrt{\varphi^2 y_{n-1}^2+(2\varphi y_{n-2}+z_{n-2})\,y_{n-1}}}{2\varphi y_{n-2}+z_{n-2}},$$

nous aurons par conséquent

$$K=\varphi+\frac{2\varphi y_{n-2}+z_{n-2}}{\varphi y_{n-1}+\sqrt{\varphi^2 y_{n-1}^2+(2\varphi y_{n-2}+z_{n-2})\,y_{n-1}}},$$

ce qui donnera, après une simple réduction,

$$K=\sqrt{\varphi^2+\frac{2\varphi y_{n-2}+z_{n-2}}{y_{n-1}}}=\sqrt{A}, \tag{5}$$

où A est une fonction rationnelle de la variable complexe x, pourvu que les φ soient de telles fonctions.

Remarquons maintenant que la formule (3) se présente sous cette autre forme aussi

$$\sqrt{A}=[\varphi,\ (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},\ 2\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{nk-1},\ 2\varphi)],$$

où k est un positif entier quelconque, nous aurons évidemment

$$\sqrt{A}=(\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{nk-1},\ \varphi+\sqrt{A}), \tag{6}$$

où la fraction continue est finie.

Soient ensuite

$$\frac{y_0}{z_0},\quad \frac{y_1}{z_1},\quad \frac{y_2}{z_2},\quad \ldots,\quad \frac{y_r}{z_r},\ \ldots. \tag{7}$$

les réduites de la fraction continue (6), nous aurons par conséquent

$$\sqrt{A} = \frac{(\varphi + \sqrt{A})\, y_{nk-1} + y_{nk-2}}{(\varphi + \sqrt{A})\, z_{nk-1} + z_{nk-2}},$$

d'où, en séparant les termes rationnels et irrationnels,

$$\varphi\, y_{nk-1} + y_{nk-2} = A\, z_{nk-1}$$
$$\varphi\, z_{nk-1} + z_{nk-2} = y_{nk-1},$$

ce qui donnera, après l'élimination de φ,

$$y_{nk-1}^2 - A\, z_{nk-1}^2 = (-1)^{nk}, \tag{8}$$

formule qui représente évidemment une généralisation très étendue du problème de FERMAT.

Soit par exemple

$$K = [x,\ (1,\ 1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 2x)],$$

où la période contient n nombres 1, les réduites de la fraction continue finie, formée par la période, deviennent

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\ \ldots,\quad \frac{a_n}{a_{n-1}},\quad \frac{2a_n x + a_{n-1}}{2a_{n-1}x + a_{n-2}},$$

où les nombres

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

forment la suite de FIBONACCI, savoir

$$a_0 = a_1 = 1,\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Dans ce cas il résulte, en vertu de (5),

$$A = x^2 + \frac{2a_{n-1}x + a_{n-2}}{a_n},$$

tandis que les réduites (7) deviennent

$$\frac{x}{1},\quad \frac{x+1}{1},\quad \frac{2x+1}{2},\quad \frac{3x+2}{3},\ \ldots,\quad \frac{a_n x + a_{n-1}}{a_n},$$

ce qui donnera, en vertu de (8),

$$(a_n x + a_{n-1})^2 - \left(x^2 + \frac{2a_{n-1}x + a_{n-2}}{a_n}\right)a_n^2 = (-1)^{n+1},$$

identité qui est valable pour une valeur quelconque de n; c'est-à-dire que nous avons démontré la proposition, très connue:

III. Soit $n \geqq 2$, les éléments de la suite de Fibonacci satisfont à la condition

$$a_{n-1}^2 - a_n a_{n-2} = (-1)^{n-1}. \tag{9}$$

Soit maintenant n un nombre pair, il résulte, en vertu de (9),

$$a_{2n} a_{2n-2} = a_{2n-1}^2 + 1;$$

c'est-à-dire que a_{2n} est toujours un nombre de la forme $4m+1$ ou $4m+2$.

III. Sur un problème algébrique.

On voit que la généralisation la plus idéale du problème de FERMAT est évidemment représentée par le problème suivant:

Soit

$$f(x) = a_0 x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \ldots\ldots + a_{2p-1}x + a_{2p} \tag{1}$$

un polynome entier d'un degré pair et non égal à un carré, savoir que les zéros de $f(x)$ ne sont pas tous d'un ordre de multiplicité pair, il s'agit de déterminer tous les polynomes entiers

$$\varphi_n(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$$
$$\psi_n(x) = \beta_0 x^{n-p} + \beta_1 x^{n-p-1} + \ldots\ldots + \beta_{n-p-1}x + \beta_{n-p}$$

qui satisfont à l'identité

$$(\varphi_n(x))^2 - f(x)(\psi_n(x))^2 = (-1)^{n\varepsilon} \tag{2}$$

et dont les coefficients sont de la même nature que ceux du polynome donné $f(x)$.

Or, il saute aux yeux que ce problème n'admet pas généralement, pour $p > 1$, des solutions de la nature susdite.

En effet, l'identité en question étant du degré $2n$, elle donne précisément $2n+1$ conditions entre les coefficients a, α, β, équations qui contiennent seulement

$$(n+1)+(n-p+1) = 2n-p+2 < 2n+1$$

inconnues, savoir les coefficients α et β.

Or, il est très facile de démontrer le théorème fondamental:

IV. Supposons qu'il existe deux polynomes entiers $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ qui satisfont à une identité algébrique de la forme (2), cette même identité admet une infinité d'autres solutions, savoir

$$\varphi_m(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m}{2}} \binom{m}{2s} (\varphi_1(x))^{m-2s} (\psi_1(x))^{2s} (f(x))^s \tag{3}$$

$$\psi_m(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{m-1}{2}} \binom{m}{2s+1} (\varphi_1(x))^{m-2s-1} (\psi_1(x))^{2s+1} (f(x))^s. \tag{4}$$

En effet, supposons tout d'abord que l'identité algébrique (2) ait deux solutions φ_1, ψ_1 et φ_2, ψ_2, savoir

$$\varphi_1^2 - f\psi_1^2 = (-1)^{\varepsilon_1}$$
$$\varphi_2^2 - f\psi_2^2 = (-1)^{\varepsilon_2},$$

je dis que ces autres polynomes entiers

$$\left.\begin{cases} \varphi_3 = \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2 f \\ \psi_3 = \psi_2\varphi_1 + \psi_1\varphi_2 f \end{cases}\right. \tag{5}$$

$$\left.\begin{cases} \varphi_4 = \varphi_1\varphi_2 - f\psi_1\psi_2 \\ \psi_4 = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1 \end{cases}\right. \tag{6}$$

satisfont à l'identité

$$(7) \qquad (\varphi(x))^2 - f(x)(\psi(x))^2 = (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

Quant à la démonstration de ce postulat, on aura, en vertu de (5) et (6),

$$(\varphi_1 \pm \psi_1 \sqrt{f})(\varphi_2 \pm \psi_2 \sqrt{f}) = \varphi_3 \pm \psi_3 \sqrt{f}$$
$$(\varphi_1 \pm \psi_1 \sqrt{f})(\varphi^2 \mp \psi_2 \sqrt{f}) = \varphi_4 \pm \psi_4 \sqrt{f},$$

ce qui montrera que l'identité (7) admet les deux systèmes de solutions

$$\varphi(x) = \varphi_3, \quad \psi(x) = \psi_3$$
$$\varphi(x) = \varphi_4, \quad \psi(x) = \psi_4.$$

On voit du reste que le degré ou de φ_3 ou de φ_4 est précisément égal à la somme des degrés de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$.

Supposons maintenant que l'identité algébrique (2) soit satisfaite par les polynomes entiers $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$, puis désignons par m un positif entier quelconque, nous aurons, en vertu de (3) et (4),

$$(\varphi_1(x) \pm \psi_1(x) \sqrt{f(x)})^m = \varphi_m(x) \pm \psi_m(x) \sqrt{f(x)},$$

ce qui donnera généralement

$$(8) \qquad (\varphi_m(x))^2 - f(x)(\psi_m(x))^2 = (-1)^{m\varepsilon},$$

pourvu que

$$(\varphi_1(x))^2 - f(x)(\psi_1(x))^2 = (-1)^{\varepsilon}.$$

IV. Polynomes du second degré.

Étudions maintenant le cas exclu $p = 1$, et posons, pour simplifier les formules,

$$(1) \qquad f(x) = a^2 x^2 + bx + c,$$

où il faut supposer par conséquent

$$(2) \qquad b^2 - 4a^2 c \neq 0,$$

nous avons tout d'abord à démontrer le théorème fondamental:

V. Soit n un positif entier quelconque, il existe toujours deux polynomes entiers $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ du degré n, respectivement $n-1$, qui satisfont à l'identité algébrique

$$(\varphi_n(x))^2 - f(x)(\psi_n(x))^2 = (-1)^{n\varepsilon}, \tag{3}$$

où ε est un entier quelconque, pair ou impair.

A cet effet, nous étudions tout d'abord le cas $n = 1$, de sorte qu'il s'agit de déterminer les deux polynomes

$$\varphi_1(x) = \alpha x + \beta$$
$$\psi_1(x) = \gamma$$

qui satisfont à l'identité

$$(\alpha x + \beta)^2 - (a^2 x^2 + bx + c)\gamma^2 = (-1)^\varepsilon,$$

ce qui donnera immédiatement

$$\alpha^2 = a^2\gamma^2, \quad 2\alpha\beta = b\gamma^2, \quad \beta^2 - c\gamma^2 = (-1)^\varepsilon.$$

Posons $$\alpha = a\gamma,$$

il résulte $$2a\beta = b\gamma,$$

ce qui donnera $$\gamma^2 = \frac{4a^2}{(b^2 - 4a^2c)(-1)^\varepsilon},$$

de sorte que nous aurons finalement

$$\alpha = \frac{2a^2}{\sqrt{(b^2 - 4a^2c)(-1)^\varepsilon}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{(b^2 - 4a^2c)(-1)^\varepsilon}}.$$
$$\gamma = \frac{2a}{\sqrt{(b^2 - 4a^2c)(-1)^\varepsilon}},$$

où le signe de γ est arbitraire, et où il est de même permis de changer les signes et de α et de β.

Posons encore pour abréger

$$\Omega = \sqrt{(b^2 - 4a^2c)(-1)^\varepsilon}, \tag{4}$$

nous aurons par conséquent

$$(5) \qquad \varphi_1(x) = \frac{2a^2x + b}{\Omega}, \quad \psi_1(x) = \frac{2a}{\Omega},$$

ce qui donnera le système de solutions d'un degré quelconque

$$(6) \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\Omega^n} \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} (2a^2x + b)^{n-2s} (2a)^{2s} (a^2x^2 + bx + c)^s$$

$$(7) \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\Omega^n} \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2s+1} (2a^2x+b)^{n-2s-1} (2a)^{2s+1} (a^2x^2+bx+c)^s.$$

Quant aux solutions de l'identité algébrique (3), dont nous venons de démontrer l'existence, nous avons à démontrer cet autre théorème fondamental:

VI. *Les polynomes entiers de x, déterminés par les formules (6) et (7), représentent tous les systèmes des polynomes entiers qui satisfont à l'identité algébrique (3).*

En effet, soit

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \\ \Psi_n(x) &= c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \ldots + c_{n-2}x + c_{n-1} \end{aligned}$$

deux polynomes entiers qui satisfont à l'identité (3), on aura, en cherchant, dans cette identité, les coefficients des puissances x^{2n}, respectivement x^{2n-1},

$$\begin{aligned} b_0^2 &= a^2c_0^2 \\ 2b_0b_1 &= 2a^2c_0c_1 + bc_0^2, \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} b_0 &= ac_0 \\ 2ab_1 &= 2a^2c_1 + bc_0. \end{aligned} \right.$$

Or, les deux polynomes entiers

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_n(x)\varphi_1(x) - f(x)\Psi_n(x)\psi_1(x) \\ \Psi(x) &= \Psi_n(x)\varphi_1(x) - \Phi_n(x)\psi_1(x) \end{aligned} \right.$$

sont des solutions d'une identité de la forme (3), et on voit, en vertu de (8), que le degré de $\Psi(x)$ ne peut jamais dépasser $n-2$, c'est-à-dire que $\Phi(x)$ est du degré $n-1$ au plus.

De plus, je dis que les polynomes $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, définis par les formules (9) sont précisément des degrés $n-1$ respectivement $n-2$, parce que nous aurons, en vertu de (9),

$$\pm\,\Phi_n(x) = \varphi_1(x)\,\Phi(x) + \psi_1(x)\,\Psi(x) f(x)$$
$$\pm\,\Psi_n(x) = \psi_1(x)\,\Phi(x) + \varphi_1(x)\,\Psi(x).$$

Cela posé, soit tout d'abord $n = 2$, on aura par conséquent

$$\Phi(x) = \varphi_1(x), \quad \Psi(x) = \psi_1(x),$$

ce qui donnera

$$\Phi_2(x) = \varphi_2(x), \quad \Psi_2(x) = \psi_2(x),$$

et la conclusion de n à $n+1$ est évidente.

On voit que le théorème VI se présente aussi sous cette autre forme, fondamentale dans ce qui suit:

VII. Soient a, b, c des nombres complexes, assujettis à satisfaire aux deux conditions

$$a \neq 0, \quad b^2 \neq 4a^2c,$$

mais étant du reste arbitraires, il existe deux et seulement deux polynomes $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ du degré n, respectivement $n-1$, qui satisfont à l'identité algébrique

$$(\varphi_n(x))^2 - (ax^2+bx+c)\,(\psi_n(x))^2 = (-1)^{n\varepsilon}.$$

Quant à la racine carrée du polynome $f(x)$ qui figure dans l'identité algébrique générale (3), on trouvera immédiatement la fraction continue périodique

$$\text{(10)} \qquad \sqrt{a^2x+bx+c} = \left[ax + \frac{b}{2a},\ \left(\frac{2ax+\dfrac{b}{a}}{c-\dfrac{b^2}{4a^2}},\ 2ax+\frac{b}{a}\right)\right],$$

dont les deux premières réduites deviennent

$$(11) \qquad \frac{ax+\frac{b}{2a}}{1}, \quad \frac{\frac{2\left(ax+\frac{b}{2a}\right)^2}{c-\frac{b^2}{4a^2}}+1}{\frac{2ax+\frac{b}{a}}{c-\frac{b^2}{4a^2}}};$$

c'est-à-dire que la fraction continue (10) conduira seulement aux solutions $\varphi_{2n}(x)$, $\psi_{2n}(x)$ de l'identité algébrique (3), tandis qu'il est impossible d'obtenir, par ce point de vue, les solutions $\varphi_{2n-1}(x)$, $\psi_{2n-1}(x)$.

Dans l'article VI nous avons à étudier plus amplement les propriétés de la fraction continue (10).

V. Solutions aux coefficients entiers.

Supposons maintenant entiers les coefficients a, b, c qui figurent dans le polynome

$$(1) \qquad f(x) = a^2x^2+bx+c,$$

les solutions aux coefficients entiers, $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$, de l'identité algébrique

$$(2) \qquad (\Phi_n(x))^2 - f(x)(\Psi_n(x))^2 = (-1)^n$$

présentent un intérêt particulier.

Or, de telles solutions aux coefficients entiers étant à chercher parmi les solutions générales, formées à l'aide des formules (6) et (7) de l'article précédent, il est très facile de démontrer le théorème général:

VIII. Supposons que l'identité algébrique susdite admette des solutions aux coefficients entiers, puis supposons que $\varphi_p(x)$ et $\psi_p(x)$ soient les premières des solutions générales qui aient des coefficients entiers, la suite

$$(3) \quad \varphi_p(x),\ \psi_p(x);\ \varphi_{2p}(x),\ \psi_{2p}(x);\ \ldots;\ \varphi_{np}(x),\ \psi_{np}(x);\ \ldots$$

représente toutes les solutions aux coefficients entiers.

En effet, supposons entiers les coefficients de $\varphi_p(x)$ et de $\psi_p(x)$, les formules

$$(4) \qquad \varphi_{np}(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \binom{n}{2s} (\varphi_p(x))^{n-2s} (\psi_p(x))^{2s} (f(x))^s$$

$$(5) \qquad \psi_{np}(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2s+1} (\varphi_p(x))^{n-2s-1} (\psi_p(x))^{2s+1} (f(x))^s,$$

tirées directement des formules générales (3) et (4) de l'article III, montrent clairement que tous les polynomes de la suite (3) ont des coefficients entiers.

Inversement, supposons que les polynomes

$$\varphi_{np+r}(x), \quad \psi_{np+r}(x), \quad 1 \leqq r \leqq p-1,$$

aient des coefficients entiers, les deux autres polynomes

$$\pm\, \varphi_r(x) = \varphi_{np+r}(x)\, \varphi_{np}(x) - \psi_{np+r}(x)\, \psi_{np}(x)\, f(x)$$
$$\pm\, \psi_r(x) = \varphi_{np+r}(x)\, \psi_{np}(x) - \psi_{np+r}(x)\, \varphi_{np}(x)$$

auront la même propriété, ce qui est impossible, parce que $r < p$, et nous avons supposé que $\varphi_p(x)$ et $\psi_p(x)$ soient les premières des solutions générales, dont les coefficients soient des nombres entiers.

Remarquons maintenant que les expressions de $\varphi_n(x)$ et de $\psi_n(x)$, indiquées par les formules (6) et (7) de l'article précédent, contiennent le diviseur commun Ω^n, où

$$\Omega = \sqrt{(-1)^{\varepsilon}(b^2 - 4a^2c)},$$

puis supposons $\varepsilon = 1$, il résulte immédiatement:

IX. Supposons que l'identité algébrique

$$(\varphi(x))^2 - f(x)(\psi(x))^2 = -1$$

admette des solutions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ aux coefficients entiers, la différence $4a^2c - b^2$ doit nécessairement être un carré, condition nécessaire qui n'est pas généralement suffisante aussi.

Quant au problème qui nous occupe ici, il n'est pas généralement résoluble, savoir il n'existe pas généralement des polynomes $\varphi(x)$, $\psi(x)$ aux coefficients entiers qui satisfont à l'identité algébrique (2).

Soit par exemple

$$f(x) = 4x^2 + 4x + 7,$$

on aura

$$4a^2c - b^2 = 96, \quad \Omega = 4\sqrt{6},$$

ce qui donnera

$$\varphi_1(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{6}}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{4x^2+4x+4}{3}, \quad \psi_2(x) = \frac{2x+1}{3}.$$

Déterminons ensuite, en vertu des formules (4) et (5), les $\varphi_{2n}(x)$ et les $\psi_{2n}(x)$, les coefficients de x^{2n}, respectivement de x^{2n-1}, deviennent tous deux

$$\frac{2^{2n-1}}{3^n}.$$

Or, nous avons à démontrer le théorème général:

X. Il existe une infinité de polynomes du second degré $f(x)$, pour lesquels l'identité algébrique (2) admet, comme solutions, des polynomes entiers

$\Phi_n(x)$, $\Psi_n(x)$ étant d'un degré quelconque et ayant des coefficients entiers. Ces polynomes sont ou

$$f(x) = \gamma^2 x^2 + 2\beta x + c,$$

dont les coefficients entiers satisfont à la condition

$$\beta^2 - c\gamma^2 = \pm 1,$$

ou

$$f(x) = 2\gamma^2 x^2 + \beta x + c,$$

où il faut déterminer les coefficients entiers de sorte que

$$\beta^2 - 4c\gamma^2 = +1.$$

En effet, supposons donnés les coefficients entiers a, b, c, il s'agit de déterminer les trois nombres entiers α, β, γ, tels que

$$(\alpha x + \beta)^2 - (a^2 x^2 + bx + c)\gamma^2 = \pm 1,$$

ce qui donnera tout d'abord

$$\beta^2 - c\gamma^2 = \pm 1. \tag{6}$$

Choisissons maintenant un système quelconque de solutions entières de cette équation indéterminée, ce qui détermine β et γ, nous avons encore à résoudre les deux autres équations

$$\alpha = a\gamma, \quad 2\alpha\beta = b\gamma^2,$$

ce qui donnera

$$2a\beta = b\gamma.$$

Or, β et γ étant sans diviseur commun, on aura nécessairement

$$b = k\beta,$$

où k est un nombre entier, ce qui donnera

$$a = \frac{k\gamma}{2}, \quad \alpha = \frac{k\gamma^2}{2}.$$

Soit maintenant γ un nombre impair, k doit être pair, savoir $k = 2k_1$, et on aura par conséquent

$$f(x) = k_1^2\gamma^2 x^2 + 2k_1\beta x + c;$$

posons ensuite $k_1 x = x_1$, puis remplaçons x_1 par x, nous aurons

(7) $$f(x) = \gamma^2 x^2 + 2\beta x + c,$$

où β et γ satisfont à l'équation indéterminée (6), ce qui donnera

(8) $$\varphi_1(x) = \gamma^2 x + \beta, \quad \psi_1(x) = \gamma.$$

Soit, au contraire, γ un nombre pair, savoir $\gamma = 2\gamma_1$, il résulte
$$f(x) = 4\gamma_1^2 k^2 x^2 + 2k\beta x + c;$$

posons ensuite $2kx = x_1$, puis introduisons x au lieu de x_1 et γ au lieu de γ_1, nous aurons

(9) $$f(x) = \gamma^2 x^2 + \beta x + c$$

(10) $$\varphi_1(x) = 2\gamma^2 x + \beta, \quad \psi_1(x) = 2\gamma,$$

où il faut supposer par conséquent

(11) $$\beta^2 - 4c\gamma^2 = +1,$$

parce que l'équation correspondante $\beta^2 - 4\gamma^2 = -1$ n'admet pas des solutions entières.

VI. Remarques sur les méthodes diverses.

Revenons maintenant à l'identité algébrique

(1) $$(\varphi(x))^2 - f(x)(\psi(x))^2 = \pm 1,$$
où
(2) $$f(x) = a^2 x^2 + bx + c,$$

puis supposons possible un développement en fraction continue périodique de la forme

(3) $$\sqrt{f(x)} = [\varphi, (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}, 2\varphi)],$$

où les φ sont des polynomes entiers de x, qui ont des coefficients entiers, et qui satisfont aux conditions

(4) $$\varphi_r = \varphi_{n-r}, \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Supposons ensuite que tous ces polynomes entiers φ_r

soient des positifs entiers, pourvu que x soit égal à un positif entier quelconque qui dépasse une certaine limite, la fraction continue (3) est parfaitement déterminée.

Or, il est très intéressant, ce me semble, que la méthode, indiquée par les formules générales (6) et (7) de l'article IV, peut conduire plus rapidement à la résolution de l'identité (1) que la fraction continue (3), ce qui saute aux yeux dans l'étude des exemples convenables.

Exemple I:

$$f(x) = 4x^2 + 4x - 3 = (2x+1)^2 - 4;$$

on trouvera la fraction continue de la forme (3)

$$\sqrt{f(x)} = [2x, (1, x-1, 2, x-1, 1, 4x)];$$

c'est-à-dire qu'il faut calculer les six premières réduites de cette fraction continue pour obtenir les premières solutions de l'identité correspondante (1).

Appliquons maintenant notre méthode nouvelle, puis posons

$$\Omega^2 = b^2 - 4a^2c = 64, \quad \Omega = 8,$$

nous aurons déjà les premières solutions de l'identité susdite représentées par

$$\varphi_3(x) = 4x^3 + 6x^2 - 1, \quad \psi_3(x) = 2x^2 + 2x.$$

Exemple II:

$$\sqrt{x^2 - 2} = [x-1, (1, x-2, 1, 2x-2)];$$

dans ce cas nous aurons

$$\varphi_2(x) = x^2 - 1, \quad \psi_2(x) = x,$$

tandis qu'il faut calculer les quatre premières réduites de la fraction continue.

Exemple III:

$$\sqrt{4x^2 - 4} = [2x-1, (1, x-2, 1, 4x-2)];$$

on trouve ici

$$\varphi_2(x) = 2x^2 - 1, \quad \psi_2(x) = x.$$

Exemple IV:

$$\sqrt{(2x+1)^2+4} = [2x+1, (x, 1, 1, x, 4x+2)];$$

notre méthode nouvelle donnera ici

$$\varphi_1(x) = 2x+2, \quad \psi_1(x) = 1,$$

et nous aurons par conséquent

$$(\varphi_1(x))^2 - (4x^2+4x+5)(\psi_1(x))^2 = -1,$$

tandis que les polynomes $f(x)$, qui figurent dans les trois premiers exemples, ne permettent pas des solutions aux coefficients entiers d'une identité de cette forme.

Supposons maintenant, dans la fraction continue (3), $n = 1$, savoir

$$\sqrt{f(x)} = [\varphi, (\varphi_1, 2\varphi)], \tag{5}$$

cette fraction continue n'est pas généralement identique à celle obtenue par la formule générale (10) de l'article IV, ce qui est évident, en vertu des exemples suivants:

Exemple I:

$$\sqrt{x^2-1} = [x-1, (1, 2x-2)] = [x, (-x, 2x)]$$

Exemple II:

$$\sqrt{x^2+x} = [x, (2, 2x)] = [x+\tfrac{1}{2}, (-8x-4, 2x+1)].$$

Or, il peut arriver que les deux fractions continues en question deviennent identiques, ce qui a lieu pour les fonctions

$$\sqrt{4x^2+4} = [2x, (x, 4x)]$$
$$\sqrt{x^2+2} = [x, (x, 2x)],$$

conséquences immédiates des relations

$$b = 0, \quad 2a \equiv 0 \pmod{c}.$$

Soit, en dernier lieu, la fraction continue (3) de la forme

$$\sqrt{f(x)} = [\varphi, (2\varphi)], \tag{6}$$

la fraction continue (10) de l'article IV ne donne que les solutions aux indices pairs.

Exemple:

$$\sqrt{x^2+1} = [x, (2x)] = [x, (2x, 2x)].$$

Désignons maintenant, pour donner une dernière application de notre méthode générale, par m un positif entier qui n'est pas égal à un carré, puis choisissons les quatre nombres entiers, a, b, c, p, de sorte que

$$a^2 p^2 + bp + c = m, \tag{7}$$

nous aurons, pour le polynome entier

$$f(x) = a^2 x^2 + bx + c,$$

la relation

$$f(p) = m. \tag{8}$$

Appliquons maintenant notre méthode générale pour résoudre l'identité algébrique (1), qui correspond au polynome $f(x)$ ainsi déterminé, les valeurs numériques

$$\varphi_{2n}(p) = A_{2n}, \quad \psi_{2n}(p) = B_{2n}$$

sont toujours des nombres rationnels qui satisfont à l'équation indéterminée

$$A_{2n}^2 - mB_{2n}^2 = 1.$$

Supposons que l'équation indéterminée (7) admette plusieurs solutions, il est évident que l'identité algébrique, qui correspond à une de ces solutions, conduira aux solutions en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$x^2 - my^2 = \pm 1.$$

Soit par exemple $m = 5$, on aura

$$f(x) = 4x^2 + 1, \quad f(1) = 5,$$

et la méthode susdite donnera

$$\varphi_1(x) = 2x, \quad \psi_1(x) = 1,$$

de sorte que l'on trouvera, pour $x = 1$, toutes les solutions entières de l'équation indéterminée

(9) $$x^2 - 5y^2 = \pm 1.$$

On aura de même

$$f(x) = x^2 + 4, \quad f(1) = 5,$$

ce qui donnera

$$\varphi_3(x) = \frac{x^3 + 3x}{2}, \quad \psi_3(x) = \frac{x^2 + 1}{2};$$

c'est-à-dire que les nombres entiers

$$\varphi_{3n}(1), \quad \psi_{3n}(1)$$

représentent toutes les solutions entières de l'équation indéterminée (9).

Soit, en dernier lieu

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 3, \quad f(1) = 5,$$

on ne trouvera jamais des solutions entières de l'équation indéterminée susdite.

Forelagt paa Mødet den 21. Januar 1921.
Færdig fra Trykkeriet den 11. April 1921.