IV Kl.

Geometrisch Opgaven

IV^de Klasse. Decbr. 1885.

Geometriske Opgaver.

I. En Linie AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linie AM, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirklen i 2 Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er da Vinklen mellem AM og AB. Hvor stor er Cirklens Radius og hvor stort det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen.

II. En Flagstang paa 24 Alen Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker.

III. Trekant ABC er given. I Endepunktet B af BC opreises en Linie vinkelret paa AB, i Endepunktet C opreises en Linie vinkelret paa AC, og fra et vilkaarligt Punkt af BC opreises en Linie vinkelret paa BC. Man skal bevise, at den af disse Linier dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant

Afg. Kl. 6, 5ō!

Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamenen 1885.

A. J. Fritsche

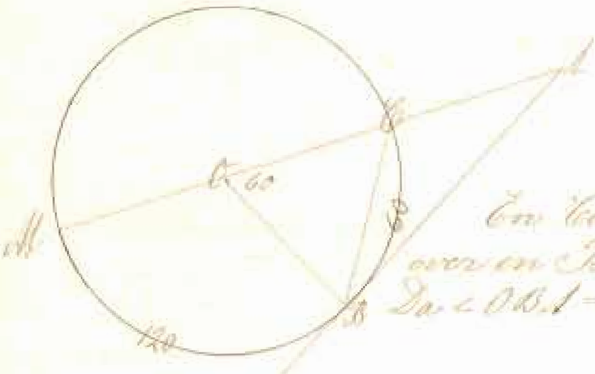
IV Kl.

1) En Linje AB af given Længde a berører i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linje AM, som halverer Cirkelen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirkelen i 2 Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvorstor er da Vinklen imellem AM og AB? Hvorstor er Cirklens Radius og hvorstor det Stykke af AM som ligger udenfor Cirklen?

$\frown MB = 2 \cdot \frown BC$

$\frown MB + \frown BC = 2r$

$\frown MB = \frac{4}{3} r$ og $\frown BC = \frac{2}{3} r$



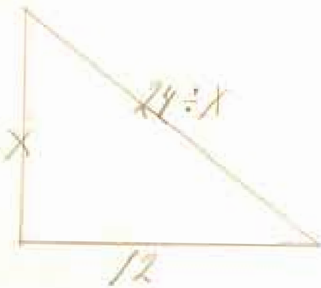
En Centrevinkel der spænder over en Bue paa $\frac{2}{3} r = 60°$, $\frac{4}{3} r = 120°$. Da $\angle OBA = 90°$, saa maa $\angle OAB = 30$

$\triangle OAB$ er en retvinklet Trekant, hvori den ene Vinkel $= 30$, derfor den mindste Kathete halv saa stor som Hypotenusen $OB = \frac{1}{2} OA$

$OB = \frac{1}{2} OA$, følgelig $2OB = OA$, men da $OB = OC$, saa maa $OB = CA = r$.

Wendt

21) En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes at den överste Del deraf hænger fast ved den nederste og stöder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt, hvor store ere Flagstangens Stykker?



$$x^2 + 12^2 = (24 \div x)^2$$

$$x^2 + 144 = 576 + x^2 \div 48x$$

$$48x = 576 \div 144 = 432$$

$$x = \frac{432}{48} = 9$$

Naar det nederste Stykke er 9 Alen saa maa det överste være 15 Alen.

Afl. Kl. 6,50

IV. Klasse.

Geometriske Opgaver

ved

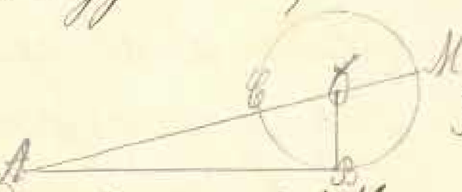
Halvaarsexamen 1885.

af

Hans Chr. Jacobsen.

No. 1.

En Linje AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Gjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linje AM, som halverer Cirklens Radius til Røringspunktet deler Halvcirklen i 2 Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er da Vinklen mellem AM og AB. Hvor stor er Cirklens Radius og hvor stort det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen?



Givet: $\frown COB = \frac{\frown BOM}{2}$

Find: $\angle MAB, OC, AC$

Da $\frown COB = \frac{\frown BOM}{2}$, er $\frown CB = 60^\circ$, $\angle COB = 60^\circ$; men da AB er Tangent til Cirklen, staar OB vinkelret paa AB, og følgelig er $\angle BAO = 30^\circ$. Deraf følger, at: $OB = \frac{1}{2} \cdot AO$, men $OB = OC$, følgelig $OC = AC$.

Linjen AB's Længde er lig a. Man faar nu:

$$a^2 + OB^2 = AO^2 = (AC + CO)^2.$$

$$a^2 + OB^2 = (2\,OC)^2 = 4\,OC^2$$

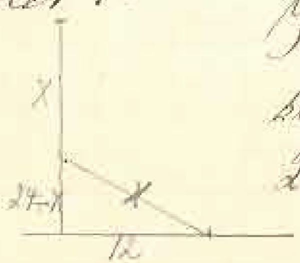
$$a^2 = 3\,O^2C^2;\ a = OC\sqrt{3}.$$

$$OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$$; men da $OC = AC$, bliver

$$AC = OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

№ 2

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker?



Kaldes det øverste Stykke af Flagstangen for x, bliver det nederste $24 \div x$, og man har Ligningen:

$$x^2 = 12^2 + (24 \div x)^2.$$

$$x^2 = 144 + 576 \div 48x + x^2$$

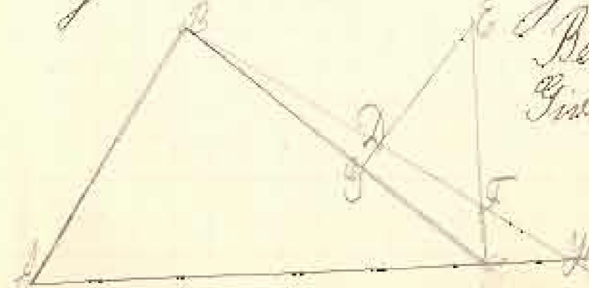
$$48x = 144 + 576 = 720$$

$$x = \underline{15}$$

$$24 \div x = \underline{9}$$

№ 3

Trekant ABC er given. I Endepunktet B af BC oprejses en Linje vinkelret paa AB. I Endepunktet C oprejses en Linje vinkelret paa AC og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Linje vinkelret paa BC. Man skal bevise, at den af disse Linjer dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant.



Bevis $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

Givet, $\angle B = \angle G = \angle C = 90°$

$\angle EDF = \angle GDB$, da de ere Topvinkler.
Men da $\angle DGB = 90^\circ$, er $\angle GDB$ og $\angle GBD$ Komplementvinkler. Men $\angle ABC$ og $\angle GBD$ ere ogsaa Komplementvinkler, følgelig er
$\angle EDF = \angle ABC$.

$\angle DFE = \angle CFH$ da de ere Topvinkler.
$\triangle CHF \sim \triangle HAB$ da $\angle HCF = \angle ABH$.
og $\angle H$ fælles og $\angle CFH = \angle HAB$.
Følgelig er $\angle DFE = \angle HAB$.
Men da nu de to Par Vinkler i Trekanterne DEF og ABC ere beviste stykkevis at være ligestore, maa det tredje Par ogsaa være det, og Trekanterne ere følgelig ligedannede.

IV Klasse

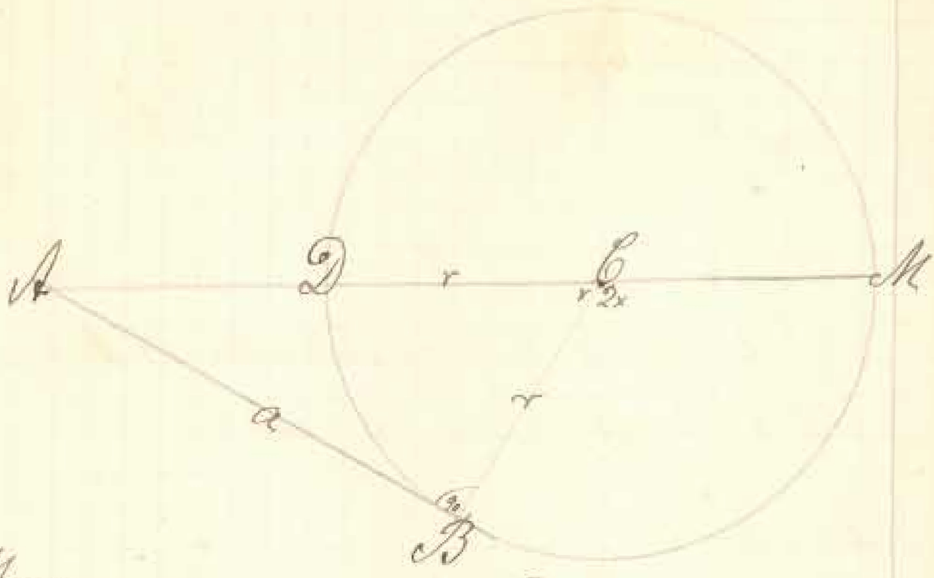
Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen i December 1885.

J. Balsen.

1.



∠ $\overset{M}{\text{D}}$CB dobbelt saa stor som ∠ DCB, er den x, er den anden altsaa $2x$, tilsammen $3x$. $3x = 180$
$x = 60$

Nu maa ∠ A være 30°.

og deraf fölger at AC er $= 2r$, men ~~B~~ DC $= r$ altsaa ogsaa AD $= r$.

r findes af:

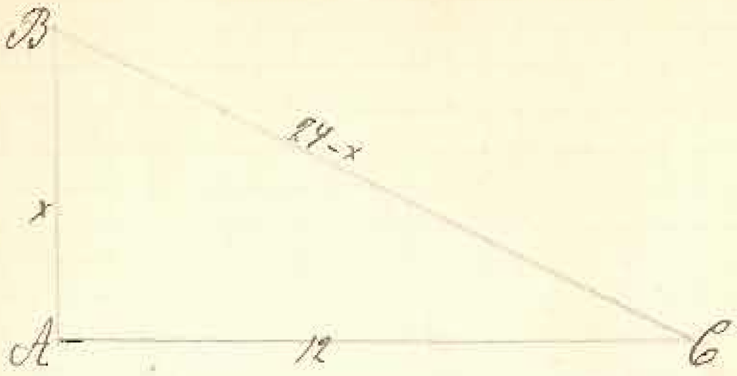
$$4r^2 = a^2 + r^2$$

$$3r^2 = a^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{3}$$

$r = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; og altsaa ogsaa AD $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2.



Givet $AC = 12$ Alen og $AB + BC = 24$ Alen; er AB x, maa BC altsaa være $= 24 - x$.

Man har:

$$(24-x)^2 = x + 12^2$$

$$576 + x^2 - 48x = x^2 + 144$$

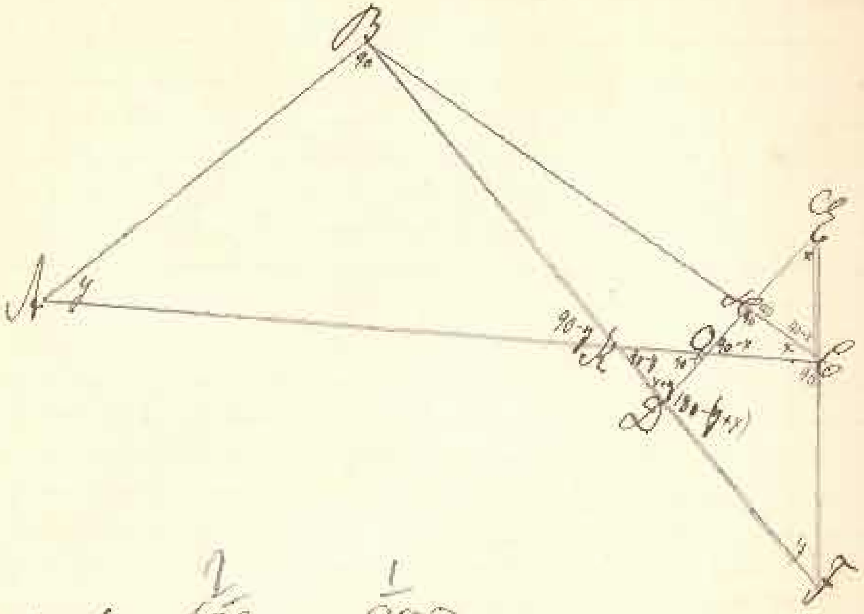
$$576 - 144 = 48x$$

$$432 = 48x$$

$$\frac{432}{48} = x$$

$$9 = x\text{ , og } 24 - x = 15.$$

Altsaa er $AB = 9$ og $BC = 15$ Alen



Bevis, at $\triangle ABC$ er $\sim \triangle DEF$.

Maldes $\angle E$ for x, er $\angle ECH = 90 - x$, og $\angle HCO$ altsaa $= x$

Altsaa have Trekanterne nu $\angle E = \angle BCA$.

$\angle HOC = 90 - x = \angle KOD$.

Maales $\angle F$ for y, er $\angle EDF = 180 - (y + x)$ og $\angle KDO = y + x$.

Da $\angle KOD$ er $= 90 - x$ og $\angle KDO$ er $= y + x$, maa $\angle OKD$ være $= 90 - y$, og ligeledes $\angle BKA = 90 - y$; $\angle A$ altsaa $= \angle y$, eller $\angle A$ er $= \angle F$.

Da Trekanterne nu have 2 Vinkler ligestore, maa de ogsaa have den tredje Vinkel ligestore, elle de er kongruente.

IV Kl.

Geometriske Opgaver

ved

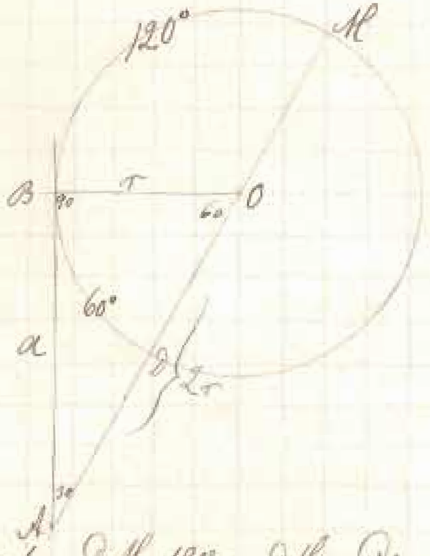
Halvaarsexamnen

i December 1885

for

Laurits Andersen.

Nr. 1. En Linje AB af given Længde, a, berøres i sit Endepunkt, B, af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt, A, er der trukket en Linje AM, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirklen i to Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet; hvor stor er da Vinklen mellem AM og AB, hvor stor er Cirklens Radius, og hvor stort det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen?



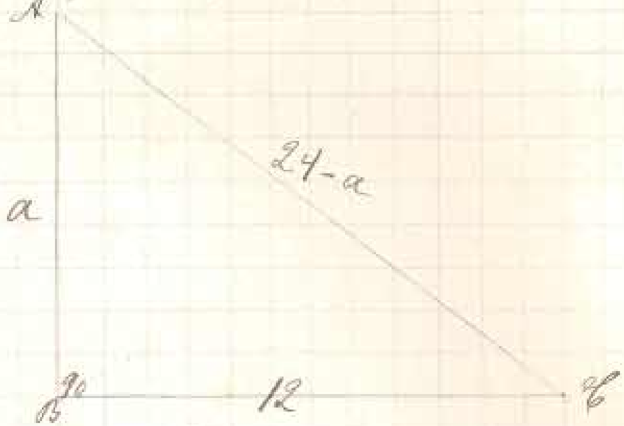
Da man ved, at $\smile DM = 180°$, er DM en Diameter og $\smile BM$ er dobbelt saa stor som $\smile BD$; altsaa $\smile BM = 120°$ og $\smile BD = 60°$. I den retvinklede Trekant ABO er $\angle BOD = 60°$, altsaa $\angle BAO = 30°$; men naar $\angle BAO = 30°$ er $BO = r$ halv saa stor som AO, der altsaa er $2r$. Nu faaes af $\triangle ABO$: $4r^2 = a^2 + r^2$; $3r^2 = a^2$; $r^2 = \frac{a^2}{3}$; $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$; Da $AO = 2r$ og $OD = r$, er

$$AD = r = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

Næste Side.

Nr. 2

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt; hvor store ere Flagstangens Stykker?



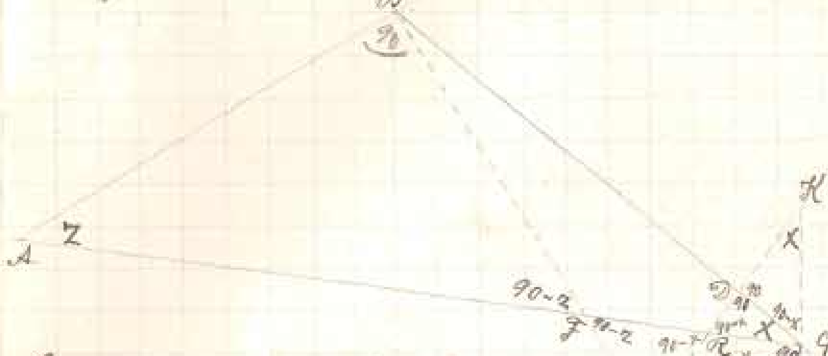
Lad Flagstangens Stykker være AB og AC, hvor AB er lig a, AC altsaa 24-a. Nu faaes af den retvinklede Trekant ABC:

$$(24-a)^2 = 144 + a^2$$
$$576 - 48a + a^2 = 144 + a^2$$
$$576 - 144 = 48a$$
$$432 = 48a$$
$$a = 9$$

Altsaa er det nederste Stykke 9, det øverste 15.

Nr. 3.

Trekant ABC er given. I Endepunktet B af BC oprejes en Linje vinkelret paa AB. I Endepunktet C oprejses en Vinkelret paa AB. I Endepunktet C oprejses en Vinkelret paa AC, og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Vinkelret paa BC. Man skal bevise, at den af disse Linjer dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant.



Givet $\triangle$ ABC, samt GB, KG og HK ere vinkelrette.
Bevis $\triangle$ GHK $\sim$ $\triangle$ ABC.

Kaldes $\angle$ ACB for x, er $\angle$ BCK = 90-x og da $\angle$ KCG = 90°, er $\angle$ HKG ogsaa = x.
Kaldes $\angle$ BAC for z, er $\angle$ AFB = 90-z og ligeledes dens Topvinkel, $\angle$ FRH = 90-x og deraf følger $\angle$ FHK = z+x og $\angle$ RHG = 180-z-x; $\angle$ HRC = 90+x, altsaa $\angle$ HGR = z°. Da nu to Vinkelpar ere ligestore, maa ogsaa det tredie være det. $\therefore$

Trekanterne altsaa ligedannede

Laurits Andersen

Afl. Kl. 6,50

IV Klasse

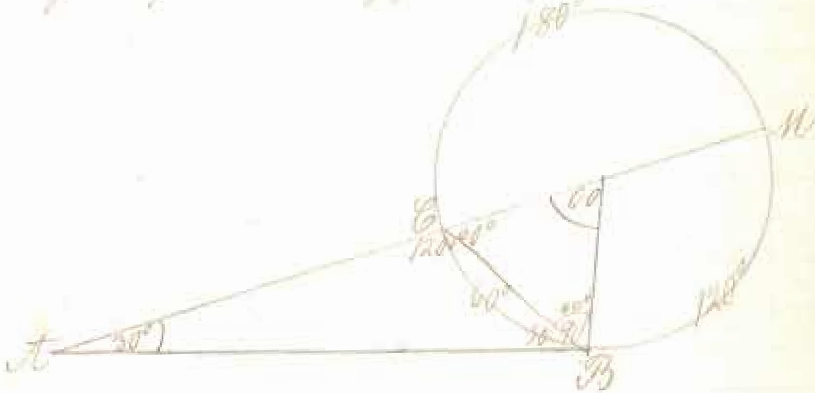
Geometriske Opgaver

ved Halvaarsexamen i Decbr 1885

af

Samuel Berg.

En Linie AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linie, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler Cirklen i to Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er da Vinklen mellem AM og AB. Hvor stor er Cirklens Radius og hvor stort det Stykke af AM, som ligger uden for Cirklen.



∠ MAB er lig med

$$\frac{120^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} =$$

$$30^\circ$$

Siden AC maa blive lig med Radius.

Mjelde...

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt, hvor store ere Flagstangens Stykker?

Betragter Opgaven som en Gaade

Stykkerne ere 15 og 9 Al.

thi

$$15^2 = 12^2 \cdot 9^2$$

$$225 = 225$$

IV Klasse.

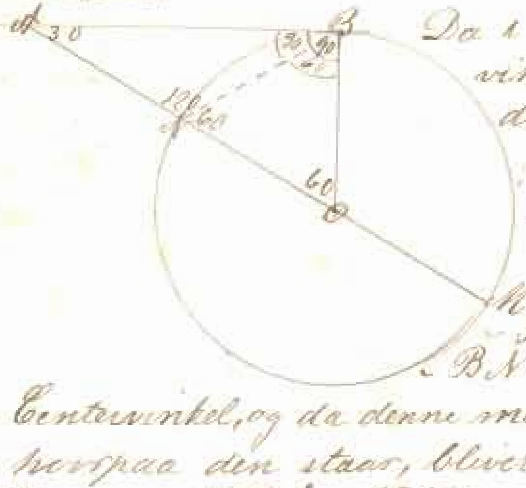
Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen 85.

C. H. Christensen.

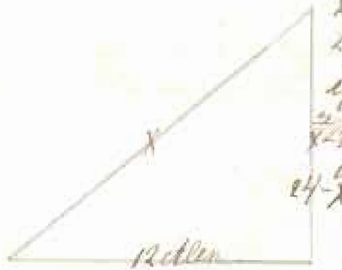
No 1. En Linie AB af given Længde a be=røres i sit ene Endepunkt B af en Cir=kel, igjen det andet Endepunkt A er der trukket en Linie AM, som halverer Cirkelens Radius til Røringspunktet de=ler Halvcirkelen i 2 Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er da Vinkelen mellem AM og AB, hvor stor er Cirkelens Radius, og hvor stort det Stykke af AM, som ligger uden=for Cirkelen.



Da i Radius staar vinkelret paa Radius i Røringspunktet, bliver ∠ B 90°. ∠ B M er dobbelt saa stor som B N altsaa maa ∠ B N være 60°, men ∠ O er en Centervinkel, og da denne maales ved den Bue, hvorpaa den staar, bliver den ogsaa 60°. Trækker man 150° fra 180°, som er Vinkelsummen i en Trekant faar man tredive Grader til ∠ A. Trækker man Hjælpelinien B N, faar man en ligebenet Δ A B N, fordi Vinkler ved Grundlinien ere lige store, ~~men~~ altsaa maa AN = NB. Trekant NBO er ligesidet, thi alle Vinklerne er hver 60°, derfor maa NB = NO, men NO = MO altsaa maa Stykkerne AN, NO og OM være ligestore altsaa hver lig ⅓ AM.

Har ikke angivet Størrelsen af AN udtrykt ved a.

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den överste Del deraf hænger fast ved den nederste og stöder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt; hvor store ere Flagstangens Stykker?



Kaldes det ene Stykke x, bliver den anden 24−x, saa har man ifölge den pythagoræiske Læresætning at

$x^2 = 12^2 + (24-x)^2$

$x^2 = 144 + 576 + x^2 - 48x$

$x = \sqrt{144 + 576 + x^2 - 48x}$

$x = 26,1993 + \sqrt{x^2 - 48x}$

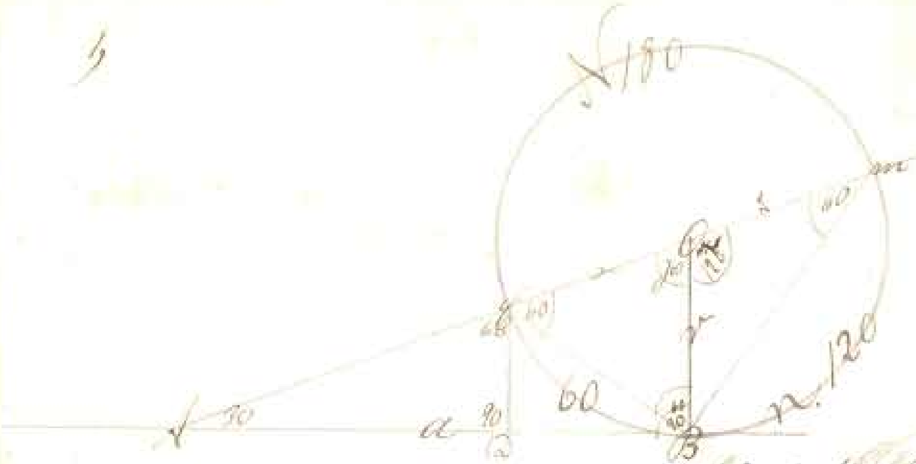
Afl. Kl. 6,50

Geometriske Opgaver.

Ribe Kathedralskoles Halvaarsexamen 1885.

Franz C. Jepsen.

IV st. Klasse.



Givet: CB dobbelt saa stor som Bm, og $\cup N = \cup n$, og AB's Længde $= a$

Trekant AOB er retvinklet da OB er en Radius og staar $\perp$ paa Tangenten (AB) til Berøringspunktet $(B.)$

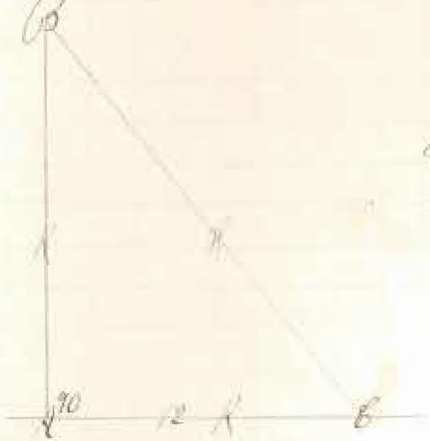
$\angle O$ spænder over CB og da den er en Center vinkel er den lig med CB. Vinkelsummen i en Trekant er $180°$ og da $\angle B$ har taget de $90°$ maa $\angle A$ være $90° \div O$ og da O er $= CB$ bliver $\angle A = 90° \div CB. = 30$

~~$\angle y$ dobbelt saa stor som $\angle x$.~~

$\triangle COB$ er ligebenet thi Benene ere Radier og den er tillige ligesidet thi $\angle O$ ~~er lig~~ maales ved $\cup BC$ og $\angle C$ ved $\frac{1}{2}\cup Bm$ maa de være lige store ifølge det givne at CB er dobbelt saa stor som Bm. altsaa er Radius = Korden CB. Det Stykke der ligger uden for Cirkelen af Am er AC og det er Kathete i ACD.

Godkjendt.

2,



Givet: $AB + BC = 27$ Alen
og $AC = 12$ Alen.

Ifølge den pythagoræiske Sætning er $(BA)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$.

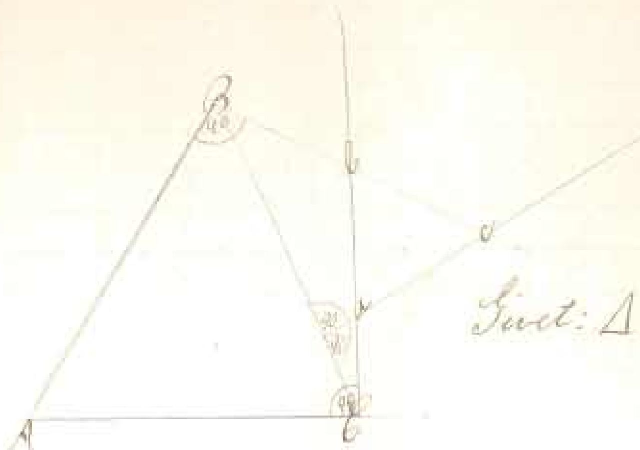
Foruden denne Sætning gjælder om den retvinklede Trekant:

1, Højden gange Hypothenusen er lig med Katheternes Produkt.

2, Højden er mellemproportional mellem de to Stykker paa Hypothenusen

3, En af Katheterne er mellemproportional mellem sin Projektion paa Hypothenusen og hele Hypothenusen.

3



Givet: Δ ABC.

Afskr. 5,57 IIII Klasse.

Geometriske Opgaver

ved

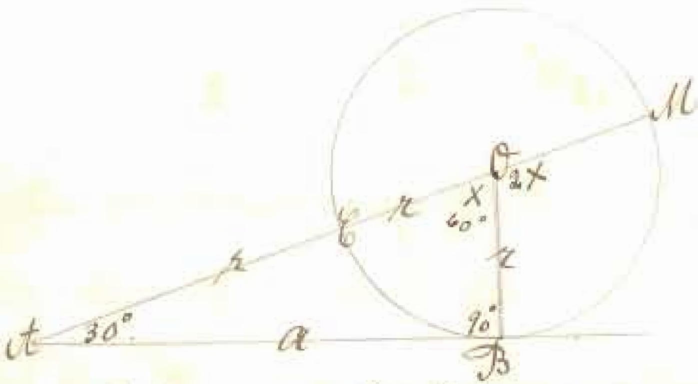
Halvaarsexamen i 1885.

af

Th. Rosenvinge.

№ 1.

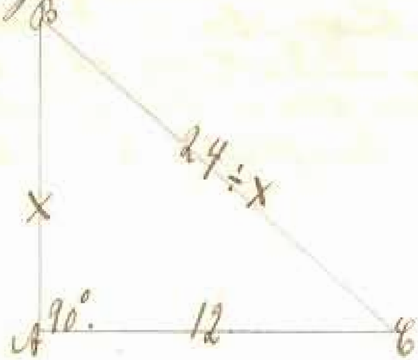
En Linje AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linje AM, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirklen i to Stykker, det ene dobbelt saa stor som det andet. Hvor stor er Vinklen imellem AM og AB? Hvor stor er Cirklens Radius og hvor stor er det Stykke af AM, som ligger uden for Cirklen?



Buen CBM er $= 180°$. Altsaa $x + 2x = 180$; $x = 60°$. $OB \perp$ paa AB, deraf $ABO = 90°$. Altsaa $\angle BAM = 180° \div 150° = 30°$. Deraf faas $OB = \frac{1}{2} AO$, men $OB = OC$, altsaa $AC = OC$. Af den retvinklede $\triangle ABO$ faas $a^2 + r^2 = 4r^2$; $r = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; $AC = r = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

No 2.

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker?



AB og BC ere Flagstangens knækkede Stykker.

$\sphericalangle BAC$ bliver $= 90°$. Kaldes AB for x, bliver BC $24 \div x$. Man har nu $(24 \div x)^2 = 12^2 + x^2$;

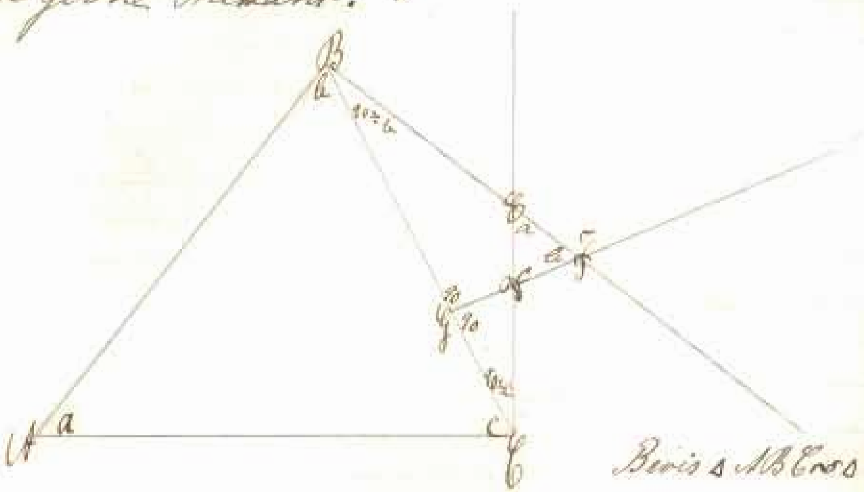
$$576 \div 24x \div 24x + x^2 = 144 + x^2.$$

$$576 \div 144 = 48x$$
$$x = 9.$$

AB bliver altsaa $= 9$ og BC $= 15$.

No 3.

Trekant ABC er given. I Endepunktet B af BC oprejses en Linje vinkelret paa AB. I Endepunktet C oprejses en Linje vinkelret paa AC og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Linje vinkelret paa BC. Man skal bevise, at disse Linjer dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant.



Bevis $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

$\angle DGC = 90^\circ$, $\angle GCD = 90 \div c$ altsaa $\angle GDC = c$. $\angle GDC = EDF$, deraf $EDF = c$. $\angle BGD = 90$, $\angle GBE = 90 \div b$, altsaa $BFG = b$. Men af ($\angle GDC$) $\angle EDF = c$ og $\angle DFE = b$ følger $DEF = a$., Trekanterne altsaa lige

IV Klasse

Geometriske Opgaver

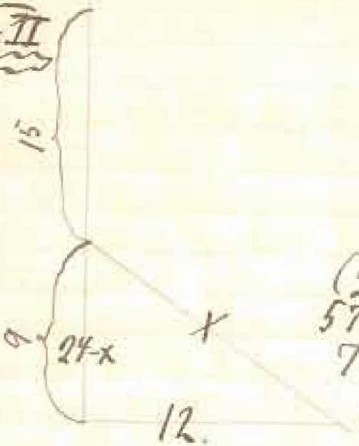
ved

Halvaarsexamenen i 1885

af

B. Thune

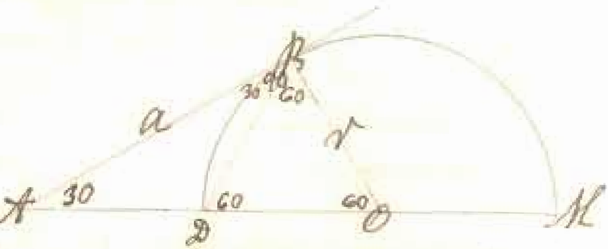
N=II



$$(24-x)^2 = x^2 - 12^2$$
$$576 - x^2 + 48x = x^2 - 144$$
$$720 = 48x$$
$$15 = x$$

Da det største Stykke bliver lig 15 bliver det andet lig 9 Alen

N=I



Da Buen DB er givet dobbelt saa stor som Buen BK, maa $\smile BD$ vere lig 60° og $\smile BK$. 120°.

$\angle A$ er da lig $\dfrac{120^\circ - 60^\circ}{2} = 30^\circ$

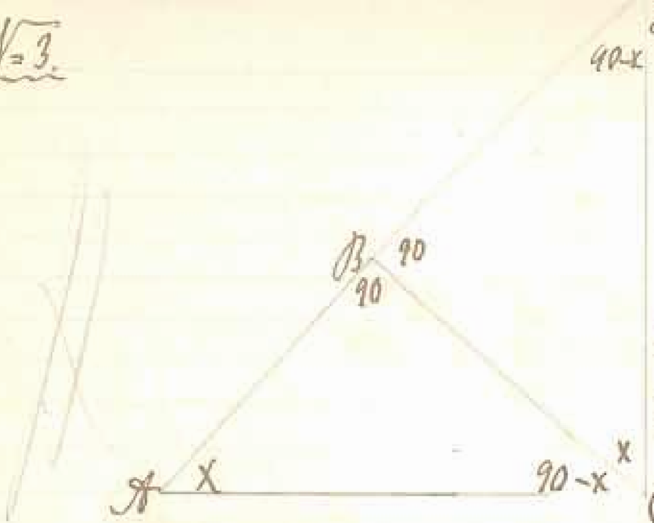
Ved at trække BD fremkommer der en ligesidet Trekant DBO, da $\angle B = 90^\circ$ maa $\angle ABD$ vere $= 30^\circ$, deraf faaes $AD = BD = r$.

Af Trekant ABO faaes $a^2 + r^2 = d^2$

$$r^2 = d^2 - a^2$$
$$r = \sqrt{d^2 - a^2}$$

[illegible]

№ 3.



Naar Δ ABC er sen ret vinklet Trekant falder den vinkelrette i B i Linein BC, ved at oprejse BD i B paa BC og den CD i C fremkommer $\Delta BDC \sim$ med ΔABC, da $\angle ABC = DBC = 90$, og ved at kalde $\angle A$ x bliver $\angle C$ $90-x$, Vinkel $BCD = x$ og $\angle BDC = 90-x$

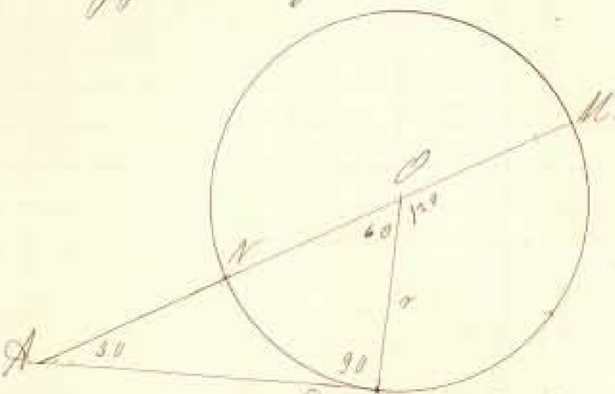
Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen December
1885

E Gjessing
III Klasse.

Nr 1) En given Linje AB af en given Størrelse a. Berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukken en Linje AM, som halverer Cirkelen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirkelen i 2 Dele, den ene dobbelt saa stor som den anden. Hvor stor er da Vinkelen mellem AM og AB. Hvor stor er Cirklens Radius, og hvor stor det af AM, som ligger udenfor Cirkelen.



OB deler NM i 2 Dele og man ved at den ene af disse er halv saa stor som den anden, og man har $\smile BM = 120°$ $\smile NB = 60°$ og ergo $\angle NOB = 60°$ $\triangle AOB$ er retvinklet og har en Vinkel paa $60°$, og saa er $AO = 2r$, naar $OB = r$. Man har nu, da $AB = a$ (se overst oppe)

$(a^2 + r^2 =)$

$a^2 + r^2 = 4r^2$

$a^2 = 3r^2$

$a = \sqrt{3} \cdot r$

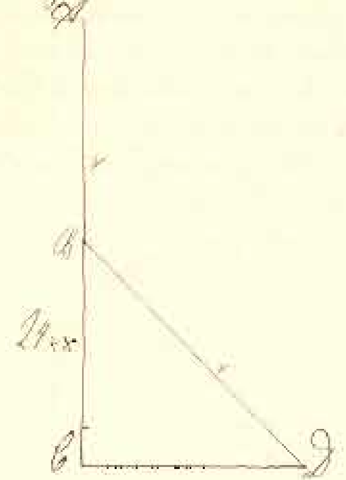
$\frac{a}{\sqrt{3}} = r$

$AN = r$ thi $ON = r$

AN altsaa $= \frac{a}{\sqrt{3}}$

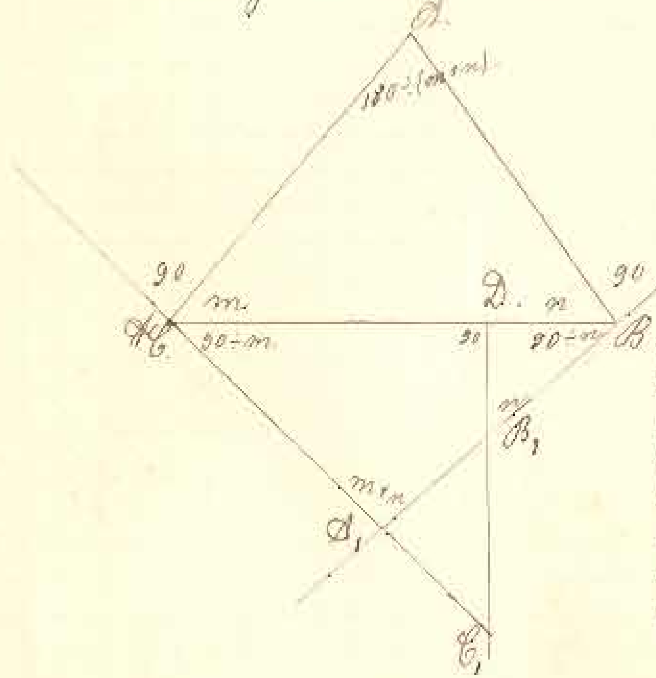
$\angle OAB = 30°$

2/. En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og staar til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor stor er Flagstangens øverste Stykke



Naar $AB = x$ er
$BC = 24 \div x$
$BD = x$
$CD = 12$
Man har nu
$x^2 = (24 \div x)^2 + (12)^2$
$x^2 = 576 \div 48x + x^2 + 144$
$x^2 = 720 \div 48x + x^2$
$48x = 720$
$x = 15$
$AB = 15$
$BC = 9$

3) $\triangle ABC$ er given. I Endepunktet B af BC er oprejst en Linje vinkelret paa AB. I Endepunktet C oprejses en Vinkelret paa AC, og paa et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en vinkelret paa BC.
Man skal bevise, at den af disse Linjer dannede $\triangle$ er $\sim$ med den givne Trekant.



$(\angle C =)$
$\angle ACB = m^\circ$
$\angle ABC = n^\circ$
$\angle CAB = 180^\circ \div (m^\circ + n^\circ)$
$\angle BCA_1 = 90^\circ \div m^\circ$
$\angle CBB_1 = 90^\circ \div n^\circ$
$\angle CA_1B = m^\circ + n^\circ$
$\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ \div (m^\circ + n^\circ)$
$= \angle A$
Da $\angle BDB_1 = 90^\circ$
i $\triangle B_1DB$
er $\angle DB_1B = n$
$= \angle A_1B_1C_1$

Naar $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

IV Klasse

Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen 1885

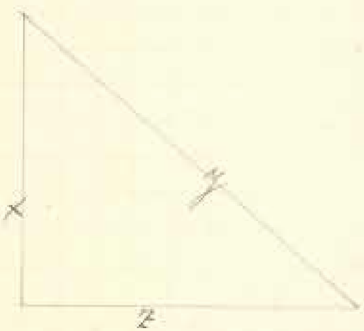
af

Hans Schultz.

Geometriske Opgaver.

№ 1.

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker?



$y = 24 \div x;\quad z = 12;$

$(24 \div x)^2 = 144 + x^2;$

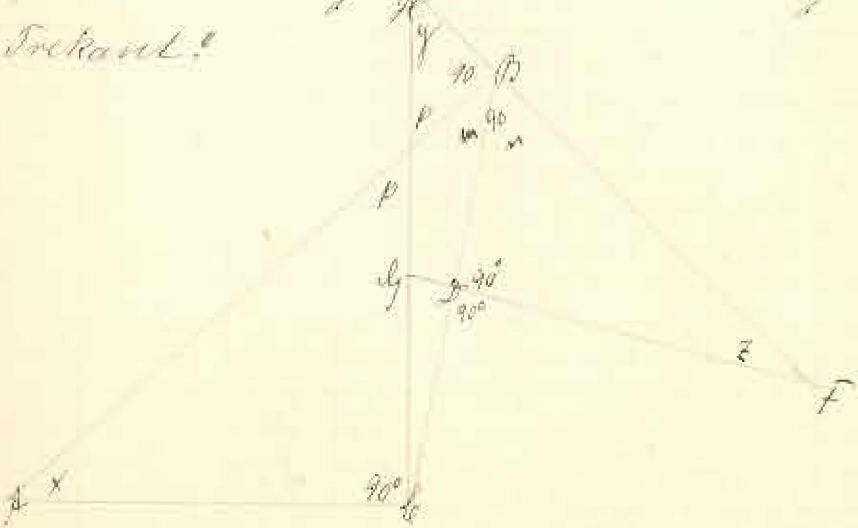
$576 + x^2 \div 48x = 144 + x^2;$

$48x = 576 \div 144;$

$48x = 432$
$x = 9$ Alen;
$y = 24 \div 9$;
$y = 15$ Alen;

No 2.

Trekant ABC er givet. I Endepunktet B af BC, opreises en Linje ⊥ AB; i Endepunktet C opreises en Linje ⊥ AC og fra et vilkaarligt Punkt af BC opreises en Linje ⊥ BC. Bevis, at den af disse Linjer dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant!



Bevis: △ABC ∾ △HFG;

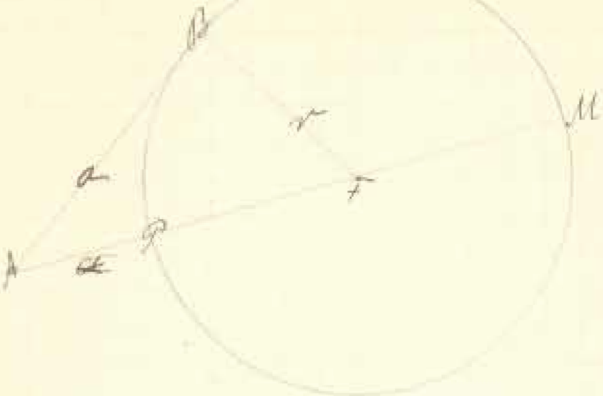
$\angle m + \angle n = 90°$;

$\angle z = 90° \div n$;
$m = 90° \div n$;
$z = m$;

$x = 90° \div p$;
$y = 90° \div p$;
$y = x$;

Da △ABC og △HFG have to Vinkler stykkevis ligestore, maa de ogsaa den tredje ligestore, og altsaa være ∾.

En Linje AB af given Længde a beskrives i sit Endepunkt B af en Cirkel; igjennem det andet Endepunkt A er trukket en Linje AM, som berører Cirklen. Radius til C Røringspunktet deler Halvcirklen i to Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er Cirklens Radius og hvor stor det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen?



Da BF deler den halve Cirkel i to Dele, hvoraf den ene er dobbelt saa stor som den anden, saa bliver $\angle BFM = 120^\circ$ og $BFP = 60^\circ$; $\frown PB$ altsaa 60° og $\frown BM = 120^\circ$; $\angle BAM = \frac{1}{2}(120^\circ \div 60^\circ) = 30^\circ$;

Man har nu en retvinklet Trekant ABF, hvori den ene Vinkel $= 60^\circ$, den anden $= 30^\circ$, altsaa er $AF = 2r$; $AP = r$;

Men da Tangenten er mellemproportional mellem hele Sekanten og det udenfor Cirklen liggende Stykke, haves:

$$\frac{a}{3r} = \frac{r}{a}; \quad 3r^2 = a^2; \quad r^2 = \frac{a^2}{3}; \quad r = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

Afl Kl 5, 12

Geometriske Opgaver

ved

Halvaarsexamen 1885.

Th Filskov

IV Kl.

17) En Linie AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er trukket en Linie AM, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirklen i to Dele, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er den Vinkel mellem AM og AB? Hvor stor er Cirklens Radius, og hvor stor er det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen.

Da Udsnittet BDM er dobbelt saa stort som BDC, saa er ∠BDM ogsaa dobbelt saa stor som ∠BDC. Tilsammen ere de 180° altsaa ∠BDC = 60°

Da ∠B er ret, maa ∠A blive 30°

Heraf faas igjen:

$$BD = r = \tfrac12 \cdot AD = \tfrac12(AC + r) = \tfrac12 AC + \tfrac12 r$$

$$r = \tfrac12 AC + \tfrac12 r$$

$$\tfrac12 r = \tfrac12 AC$$

$$r = AC.$$

$$AB = a.$$

altsaa: $a^2 + r^2 = AD^2$

$$a^2 + r^2 = (AC + r)^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

$$a^2 = 3r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = AC.$$

2) En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker?

Kaldes det ene Stykke x, bliver det andet 24-x. Dette sidste bliver Hypothenuse i en retvinklet Trekant, hvis Kathetre ere x og 12. Heraf faas:

$$(24-x)^2 = x^2 + 12^2$$

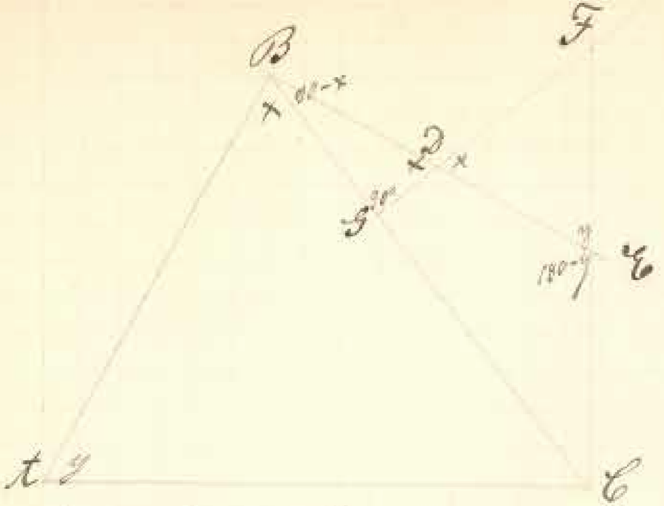
$$576 + x^2 - 48x = x^2 + 144$$

$$432 = 48x$$

$$x = 9.$$

$$24 - x = 24 - 9 = 15.$$

3) Trekant ABC er given. I Endepunktet B af BC oprejses en Linie vinkelret paa AB, i Endepunktet (B) C oprejses en Linie vinkelret paa AC, og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Linie vinkelret paa BC. Man skal bevise, at den af disse Linier dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant.



Givet ∠ ABC og ACE ere rette.

∠A = y, altsaa ∠BEC = 180 − y, og dens Nabovinkel ∠DEF = y.

∠ABC = x, altsaa ∠GBD = 90 − x

∠BDG = 180 − 90 − (90 − x) = x

∠FDE er altsaa ogsaa x (dens Topvinkel)

∠ACB = ∠DFE = 180 − x − y

Da Trekanterne altsaa have alle Vinkler lige store, ere de ligedannede.

4de Klasse.

Geometriske Opgaver

ved

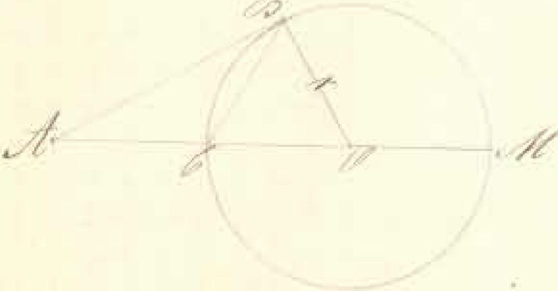
Halvaarsexamen i December 1885.

af

A. Andersen.

9)

En Linie AB af given Længde, berøres i sit Endepunkt B. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linie AM, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler (Cirklen) Halvcirklen i 2 Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er da Vinklen mellem AM og AB, hvor stor er Cirklens Radius og hvor stort det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen.



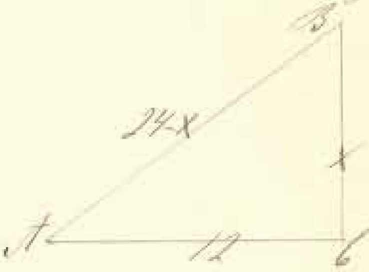
Da Radius r deler Halvcirklen CM i 2 Dele, hvoraf ⌣BM er dobbelt saa stor som ⌣BC, saa maa ⌣BC være lig med 60° og ⌣BM = 120°. A er en Vinkel, hvis Toppunkt ligger udenfor Cirklen, og maales altsaa ved de mellemliggende Buers halve Forskjel og er lig med $\frac{120° - 60°}{2}$ = 30°. Da nu ∠A i den retvinklede △ABO, saa er ∠O = 60°. BO er altsaa halv saa stor som OA; naar OB = r, er OA = 2r

$\triangle BCO$ er ligesidet, $CO = OB = r$. Da nu $AO = 2r$ og $CO = r$, saa maa AC være lig med r.

---

2)

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker?



Kaldes BC x og, saa er $AB = 24 - x$. Deraf faas:

$$(24-x)^2 = x^2 + 144$$

$$576 - 48x + x^2 = x^2 + 144$$

$$576 - 144 = 48x$$

$$432 = 48x$$

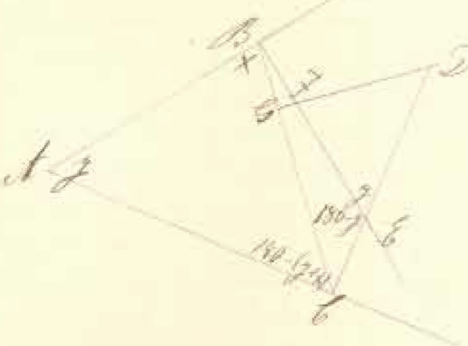
$$9 = x$$

$BC = 9$ Alen og $AB = 15$ Alen.

---

3)

$\triangle ABC$ er given. I Endepunktet B af BC oprejses en Linie vinkelret paa AB, i Endepunktet C oprejses en Linie vinkelret paa BC, og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Linie vinkelret paa BC. Man skal bevise, at den af disse Linier dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant.



$\triangle FDE$ skal bevises at være ligedannet med $\triangle ABC$. Er $\angle A = y$ og $\angle ABC = x$, saa er $\angle ACB = 180 - (y+x)$. I Firkant $ABEC$ kjender man $\angle B = \angle C = 90°$ og $\angle A = y$, derved faas $\angle E = 180 - y$. $\angle BEC$ er Nabovinkel til $\angle FED$, og denne sidste er altsaa lig med y. Da nu $\angle ABC = x$, saa er $\angle GBF = 90 - x$ og $\angle BFG = x$. $\angle DFE$ er Topvinkel til $\angle BFG$ og altsaa lig med x, $\angle D = 180 - (y+x)$.

Trekanterne ligedannede!

IV Klasse

Geometriske Opgaver

ved

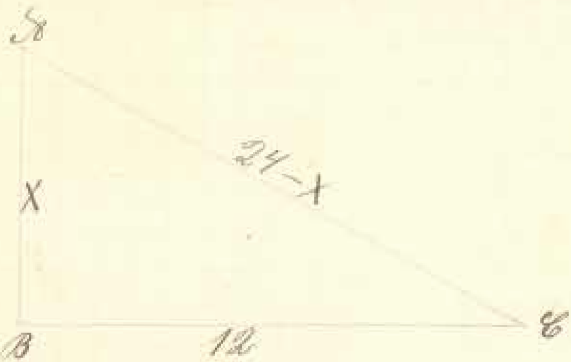
Halvaarsexamen i December 1885

for

P. J. Gantzel

No 11.

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den överste Del deraf hænger fast ved den nederste og Stöder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor stor ere Flagstangens Stykker.



$(24-x)^2 = x^2 + 12^2$

$576 + x^2 - 48x = x^2 + 144$

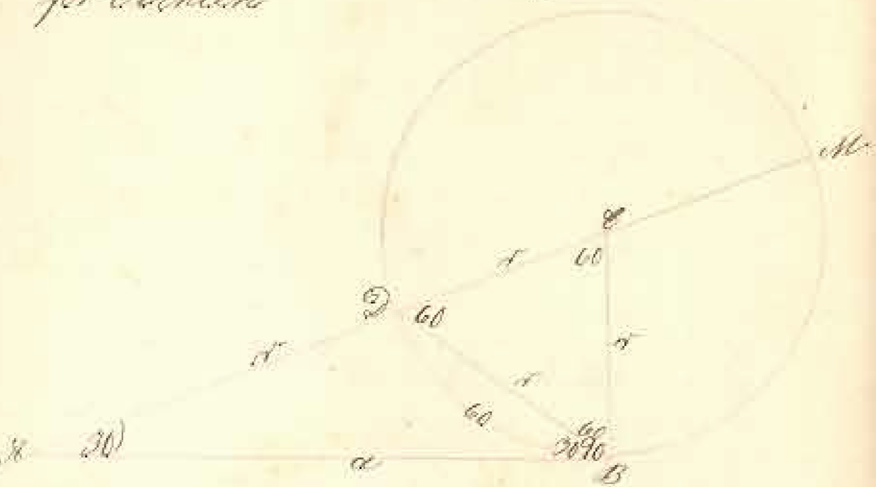
$432 = 48x$

$\underline{9 = x}$

$\underline{24 - x = 15}$

No 2.

En Linje AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt, B, af en Cirkel, og gjennem det andet, A, er der trukket en Linje AM, som halverer Cirklen i 2 Stykker, det ene dobbelt saa stort som det andet; hvor stor er da Vinklen mellem AM og AB; hvor stor er Cirklens Radius, og hvor stor det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen



Da ∠ E = 60° og ∠ B = 90° er ∠ MAB = 30°
Trækkes DB faas AD = DE = EB = BD = r, hvoraf igjen faas $a^2 + r^2 = 4r^2$

$3r^2 = a^2$

$r^2 = a^2 \cdot \frac{1}{3}$

$r = a\sqrt{\frac{1}{3}}$

AD altsaa $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$

No 3

Δ ABC er givet; i Endepunktet B af BC oprejses en Linje vinkelret paa AB, i Endepunktet C oprejses en Vinkelret paa AC og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Linje vinkelret paa BC; man skal bevise, at den af disse Linjer dannede Trekant er ligedannet med givne Trekant.

∠ BAD = ∠ DEC, de have nemlig samme ~~Supplement~~ Komplementvinkel.

∠ DCF = b ∠ FCH = 90 ÷ b og da ∠ F = 90 er ∠ H = b altsaa ere de to Trekanter ABC og HGE ensvinklede eller ligedannede.

F

IVde Klasse.

Geometriske Opgaver

ved

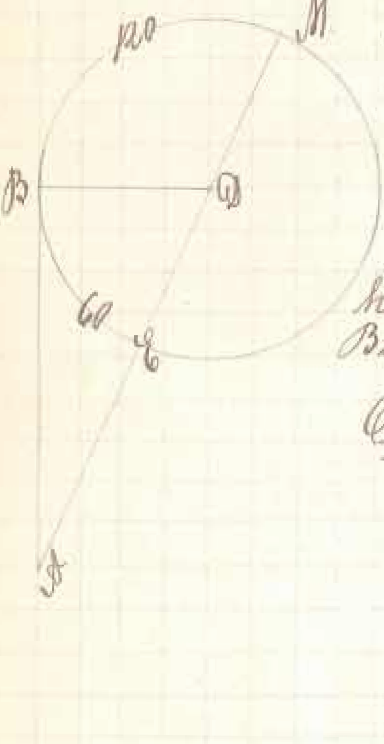
Halvaarsexamen i December 1885.

for

Harald Wolff

Nr 1.

En Linie AB af given Længde a berøres i sit Endepunkt B af en Cirkel. Igjennem det andet Endepunkt A er der trukket en Linie AM, som halverer Cirklen. Radius til Røringspunktet deler Halvcirklen i to Stykker. Det ene dobbelt saa stort som det andet. Hvor stor er Cirklens Radius og hvor stor det Stykke af AM, som ligger udenfor Cirklen?



Der er givet, at $\frown MB = 2 \frown EB$.

Givet: Buen $ME = 180°$.

Kaldes EB for x og MB for 2x faas:

$x + 2x = 180°;\ 3x = 180°;\ x = 60°.$

$\frown EB = 60°;\ \frown MB = 120°.$

En Vinkel, som har sit Toppunkt udenfor Periferien maales ved den halve Forskjel af de mellemliggende Buer. Altsaa $\angle A = \frac{1}{2}(120° - 60°) = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°.$

r

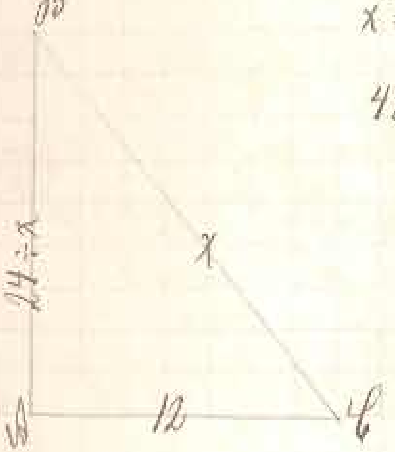
$DA = MA - r;\ DB = \frac{MA - r}{2};$

$EA = MA - 2r.$

Mangler AE udtrykt ved a.

Nr 2.

En Flagstang paa 24 Alens Længde er knækket saaledes, at den øverste Del deraf hænger fast ved den nederste og støder til Jorden 12 Alen fra Flagstangens Fodpunkt. Hvor store ere Flagstangens Stykker?



$$x^2 = 12^2 + (24-x)^2$$

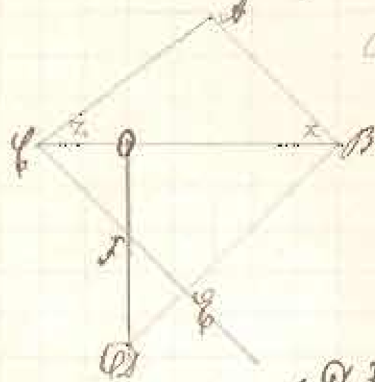
$$x^2 = 144 + 576 - 48x + x^2$$

$$48x = 720;\ x = 15.$$

CB er altsaa = 15 Al.
og AB = 24 ÷ 15 = 9 Al.

No 3.

Trekant ABC er givet. I Endepunktet B af BC oprejses en Linie vinkelret paa AB. I Endepunktet C oprejses en Linie vinkelret paa AC, og fra et vilkaarligt Punkt af BC oprejses en Linie vinkelret paa BC. Man skal bevise, at den af disse Linier dannede Trekant er ligedannet med den givne Trekant.



Bevis ΔFED er ligedannet med ΔCAB.

Kaldes $\angle ACB$ for z og $\angle ABC$ for x faas:

$\angle A = 180 \div (z+x)$
$\angle BCE = 90^\circ - z$
$\angle COF = 90^\circ$.
$\angle CFO$ altsaa $= z$.

$\angle DFE$ er Topvinkel til $\angle CFO$ og derfor $= z$.

$\angle CBE = 90 - x$.
$\angle CEB = z + x$. Hvorfor?

$\angle CEB$ er Nabovinkel til $\angle FED$ og derfor er $\angle FED = 180 - (z+x)$

Deraf $\angle D = x$

Da ΔFED og ΔCAB have alle Vinkler ligestore, ere de ligedannede