Halvaarsexamen 1876.

M. IV. Geometrisk Opgave.

1. Johnsens geom. Opg. No 193.

2. At trække en Tangent til en Cirkel parallel med en given Linie.

4de Klasse.

Geometrisk Udarbejdelse

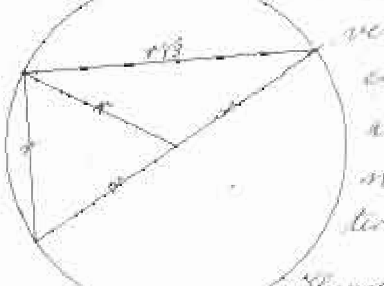
ved

Halvaarsexamen i December 1876

af

Theodor Krarup

1) Een Cirkel med Radius r er indskrevet en retvinklet Trekant, hvis ene Cathete er lig Radius. Hvad bliver Indholdet af de 4 Dele, hvori Cirkelen derved deles, nemlig Trekanten og de tre Afsnit (Segmenter)? T. Ex. sættes Radius = 3' 4".



Hypotenusen i den retvinklede Trekant maa blive Diameter, fordi en Halvcirkel rummer en ret Vinkel. Den anden Cathete er da lig $\sqrt{4r^2-r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$. Indholdet af Trekanten er lig Catheternes halve Produkt $\frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$. Det Segment, hvis Chorde er 2r, er en Halvcirkel og dets Indhold altsaa lig $\frac{1}{2}r^2\pi$. Det Afsnit, hvis Chorde er r, er lig Afsnittet med Chorden r minus den ligesidede Trekant, hvis Side er r. Udsnittet er lig $\frac{v}{360} r^2\pi$, v er = 60°, altsaa $\frac{v}{360} r^2\pi = \frac{1}{6} r^2\pi$. Den ligesidede Trekant er $= \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$, følgelig Afsnittet $= \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = r^2(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$. Det tredie Afsnit med Chorden $r\sqrt{3}$ er paa samme Maade lig Udsnittet med Chorden $r\sqrt{3}$ minus den ligebenede Trekant. Udsnittet er lig $\frac{v}{360} r^2\pi$, v er her 120°, fordi Vinklen er Supplementvinkel til en Vinkel paa 60°. altsaa Udsnittet lig $\frac{1}{3}r^2\pi$. Den ligebenede Trekant er lig den ligesidede, fordi denne er Halvdelen af hele Trekanten, altsaa $= \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$. Afsnittet er følgelig $\frac{1}{3}r^2\pi - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$

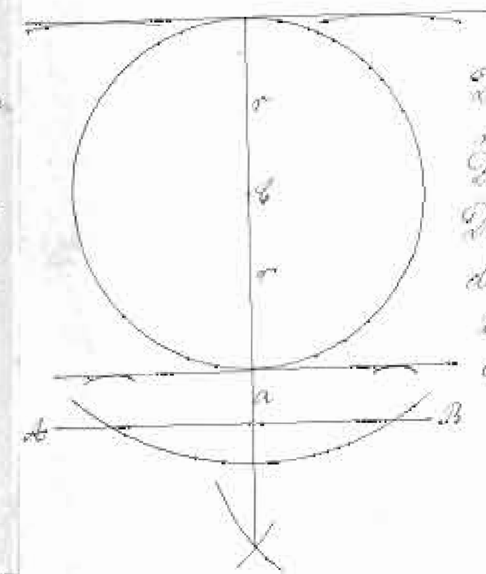
Naar man indsætter r Værdien r = 3' 4" = 40", bliver den retvinklede Trekant, som er $\frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$, = 800 · 1,7321 = 1385,68 □" = 9 □' 89,68 □".

Halvcirklen er lig $\frac{1}{2}r^2\pi$ = 800 · 3,1416 = 2513,28 □" = 17 □' 65,28 □".

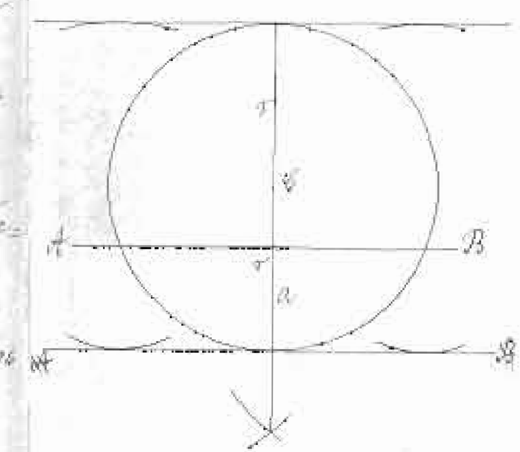
Afsnittet med Chorden r er $= r^2(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$ = 1600 (0,5236 − 0,4330) = 1600 · 0,0906 = 144,96 □" = 1 □' 0,96 □".

Afsnittet med Chorden $r\sqrt{3}$ er lig $r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$ = 1600 (1,0472 − 0,4330) = 1600 · 0,6142 = 982,72 □" = 6 □' 118,72 □".

2). At trække en Tangent til en Cirkel parallel med en given Linie.



Naar AB er den givne Linie, nedfælder man fra C en Linie lodret paa AB. Derpaa trækker man en Linie parallel med AB i Afstanden a eller 2r + a. Disse to Linier opfylde da Betingelserne. Dersom Linien berørte Cirkelen, vilde der kun blive en Tangent i Afstanden 2r. Dette ses ogsaa deraf, at a da bliver 0 og 2r + a følgelig 2r.



Hvis Linien ~~havde skaaret~~ skærer Cirkelen, maa Parallelernes Afstand fra den være a og 2r − a. Gik AB over til at blive Diameter, bliver a = r og begge Parallelernes Afstand fra Linien altsaa r.

Halvaarsexamen 18/6.

Fjerde Klasse.

Geometriske Udarbejdelser

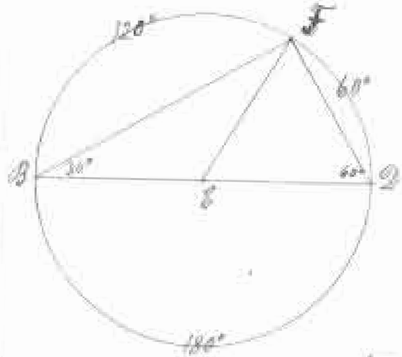
for

Christian S. Blinkenberg

I Johsens geometriske Opgaver № 193:

I en Cirkel med Radius r er indskrevet en retvinklet Trekant, hvis ene Kathete er lig Radius. Hvad blive Indholdet af de fire Dele, hvori Cirkelen derved deles, nemlig Trekanten og de tre Afsnit (Segmenter)?

T. Ex. sættes Radius = $3'4''$



I det følgende ville vi kalde Cirkelens Fladeindhold C, ethvert Afsnit, Udsnit og Bue henholdsvis A, U og b med Gradeantallet som Index forneden.

Enhver retvinklet Trekant, der indskrives i en Cirkel bliver Hypotenusen lig Cirkelens Diameter. Altsaa bliver i dette Tilfælde Hypothenusen dobbelt saa stor som den ene Kathete, der er lig Cirkelens Radius. Derfor findes Vinklerne i Trekanten foruden den rette Vinkel henholdsvis at være $30°$ og $60°$ og de tilsvarende Buer $60°$ og $120°$. Den anden Kathete BF i Trekanten bliver da Korden til $120°$ eller $r\sqrt{3}$. Trekantens Areal bliver $= \frac{1}{2}r \cdot r\sqrt{3} = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$.

A_{120} bliver $= U_{120} - \triangle EFB$. Men $U_{120} = \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}r^2\pi$ og $\triangle EFB$ er $= \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$, hvilket indsat giver: $A_{120} = \frac{1}{3}r^2\pi - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3})$

A_{60} bliver $= U_{60} - \triangle EFD = \frac{1}{6}r^2\pi - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$A_{180} = \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}r^2\pi$

Ex. $r = 3'4'' = 40''$ $\pi = 3,1416$ $\sqrt{3} = 1,73205$

$T = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} = 800 \cdot 1,73205 = 8 \cdot 173,205 = 1385,640□'' = 9□'89,640□''$

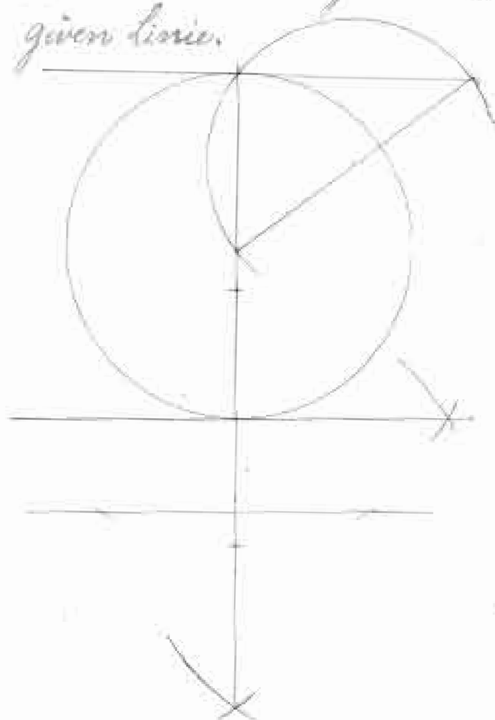
~~$A_{120} = r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1600(1,0472 - 0,8660) = 1600 \cdot 0,1812 = 16 \cdot 18,12 = 289,920□'' = 20□'1,920□''$~~

$A_{60} = \frac{1}{2}r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 800(1,0472 - 0,8660) = 800 \cdot 0,1812 = 8 \cdot 18,12 = 144,96 = 1□'0,96□''$

$A_{180} = \frac{1}{2}r^2\pi = 800 \cdot 3,1416 = 8 \cdot 314,16 = 2513,28□'' = 17□'65,28□''$

$A_{120} = r^2(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}) = 1600(1,0472 - 0,4330) = 1600 \cdot 0,6142 = 16 \cdot 61,42 = 982,72□''$
$= 6□'118□'',72□''$

II At trække en Tangent til en Cirkel parallel med en given Linie.



Man fælder fra den givne Cirkels Centrum en Linie Perpendiculær paa den givne Linie. Igjennem det Punkt, hvori denne Perpendiculær skærer Cirkelperipherien, rejses en Linie lodret paa Radius, og denne er da den forlangte Tangent. 2 Løsninger ere altid mulige.

4de Klasse.

Geometriske Udarbejdelser.

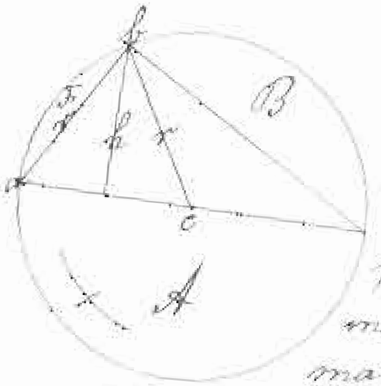
Halvaarsexamen i December 1876.

K. Johansen.

I en Cirkel med Radius r er indskrevet en retvinklet Trekant, hvis ene Kathete er lig Radius. Hvad bliver Indholdet af de 4 Dele, hvori Cirklen derved deles, nemlig Trekanten og de tre Afsnit (Segmenter)?

T. Ex. sættes Radius = 3'4"

(Juni 1865.)



Trækker man en Diameter og ved et af dennes Endepunkter afsætter den givne Kathete r samt fra r's Endepunkt en Linie til Diameterens andet Endepunkt, faar man en retvinklet Trekant, da en Halvcirkel rummer en ret Vinkel.

De 3 Afsnit A, B og F, samt Trekanten udgjøre da hele Cirkelen. A er $= \frac{1}{2}c =$
$\frac{1}{2}r^2\pi = \frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{3}\right)^2 \times 3,1416 = \frac{100}{18} \times 3,1416 = \frac{314,16}{18}$
$= 17,45\,\square'$. Da $\triangle abc$ er en ligebenet Trekant, falder Højdelinien paa Midten af ac, og ~~man~~ staar Perpendikulær paa samme. Man faar da: $r^2 = \frac{1}{4}r^2 + h^2$, $\frac{3}{4}r^2 = h^2$,
$h = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, $T = r \times \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} =$

$\frac{100}{18} \times 1,7321 = \frac{173,21}{18} = 9,623\,\square'$

$B = 2F$, da $r = ch_{60}$ og f følgelig $= ch_{120}$

$\frac{1}{2}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} = 3F$

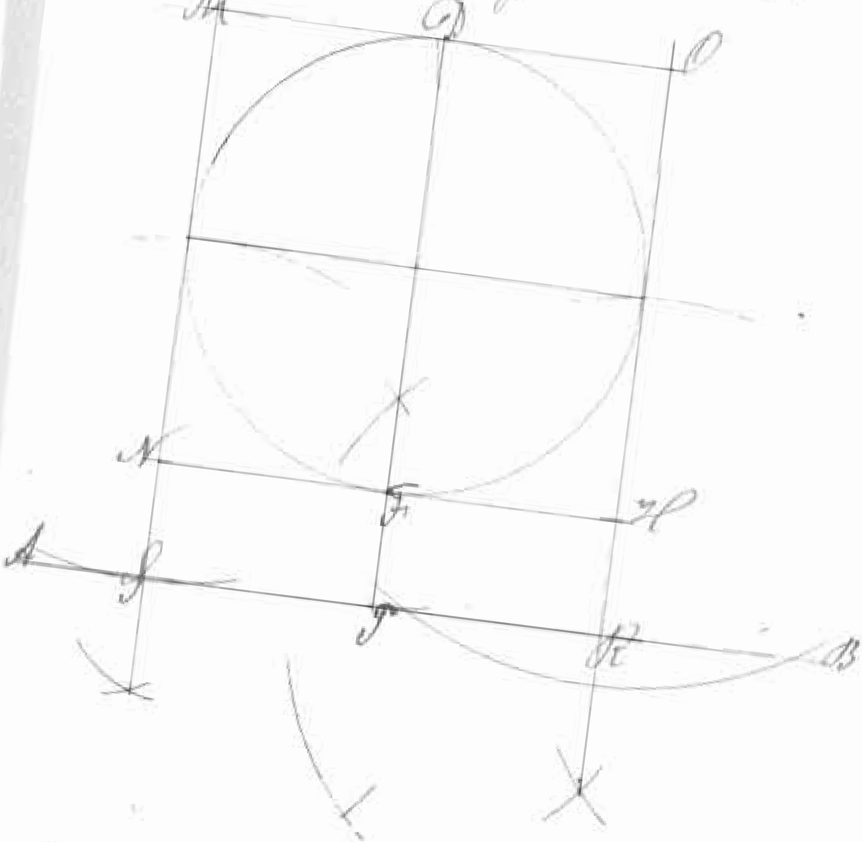
$\frac{\frac{1}{2}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\sqrt{3}}{3} = F$

$\frac{r^2\pi - r^2\sqrt{3}}{3} = B = \frac{34,90 - \frac{100}{9} \times 1,7321}{3} = \frac{34,}{}$

$= \frac{34,90 - 19,246}{3} = \frac{15,654}{3} = 5,218\,\square'$.

$F = \frac{1}{2}B = 2,609\,\square'$.

2. At trække en Tangent til en Cirkel parallel med en given Linie.



Er A B den givne Linie og trækkes ~~dermed~~ en Diameter, som er parallel med A B, samt oprejses 2 Perpendiculærer saaledes paa A B at hver af dem gaar igjennem og følgelig staar lodret paa et af Diameterens Endepunkter, da faar man, naar man har oprejst en Linie perpendiculær paa AB saaledes at den gaar igjennem Centrum, ved at tage PD og PF i Passeren og afsætte dem paa SM og RO

2 Punkter M og O, som ere Punkter i en Tangent til Cirkelen, ~~og~~ derei Parallel med A B da disse 2 Punkter have samme Afstand fra A B og beröier Cirkelen, fordi de have samme Afstand fra A B som D fra A B.
Det samme er Tilfældet med Tangenten N H.

Denne Opgave kan altid löses, og der kan altid faas 2 Tangenter parallele med den givne Linie undtagen naar den givne Linie selv er en Tangent.

Geometrisk Udarbejdelse

ved

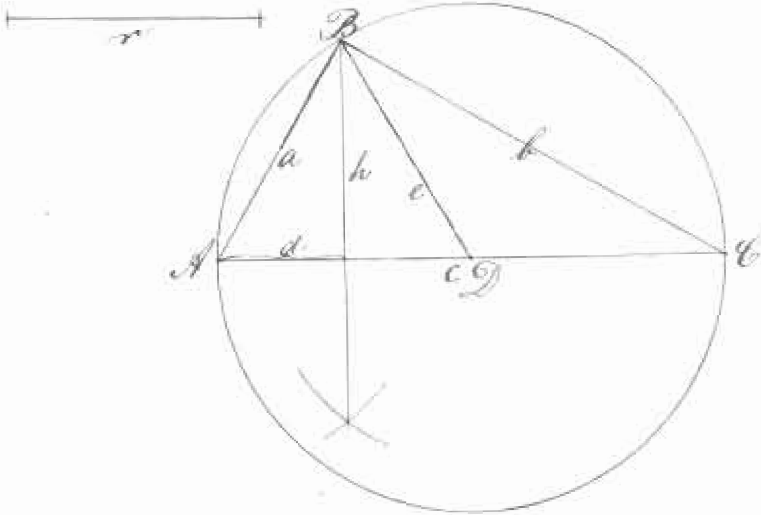
Halvaarsexamen i December 18$^{7}/_{6}$

4de Klasse

Niels Lund.

1) I en Cirkel med Radius r er indskrevet en retvinklet Trekant, hvis ene Kathete er lig Radius. Hvad bliver Indholdet af de fire Dele, hvori Cirklen derved deles, nemlig Trekanten og de tre Afsnit (Segmenter)?

Til Exempel sættes Radius = 3'4".



Da i en retvinklet Trekant Hypothenusens Kvadrat er lig Summen af Katheternes Kvadrater, er a^2, som er Hypothenusens Kvadrat i den ene af de to retvinklede Trekanter, hvori den store T deles af Højden, lig $h^2 + d^2$, som er Katheternes Kvadrater, og altsaa $h^2 = a^2 - d^2$; og da Trekantens Areal lig Productet af den halve Grundlinie og Højden, er $T = \frac{1}{2} ch$.

Fra den rette Vinkels Toppunkt B trækkes en Linie til Centrum D, og saa opstaar der en lige~~benet~~sidet Trekant ABD, og Perpendiculæren paa Grundlinien igjennem Vinkelens Toppunkt deler Grundlinien i to ligestore Stykker, saa at $d = \frac{1}{2} r$.

Indsættes nu Værdien for r = 3'4" eller 40" er $h^2 = 40^2 - 20^2 = 1600 - 400 = 1200$

$h = \sqrt{1200} = 34,64"$. T er altsaa = 40"·34,64" = 1385,60□" = ~~115□'5,60□"~~ = 9□'89,60□".