Geometriske Opgaver

ved

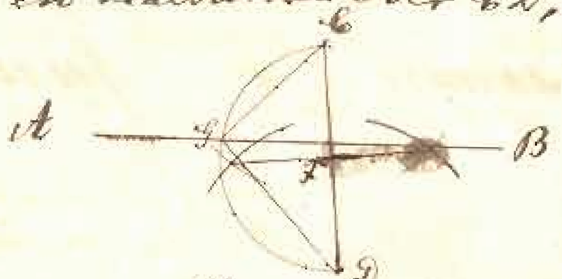
Hovedexamen i Juni 1875

af

J. C. Petersen.

1. Ved Konstruktion at bestemme et Punkt i en given ret Linie saaledes, at Linier efterfra til to givne Punkter i samme Plan som den givne Linie danne en Vinkel paa 90° med hinanden. (Punkternes Afstand ses altsaa under en Synsvinkel paa 90°).

Er den givne Linie AB, de givne Punkter C og D, trækkes först CD. Denne Linie halveres. Derpaa beskrives med Radius CF eller FD en Halvcirkel over CD, som skjærer



den givne Linie AB i Punktet G. Dette Punkt, G, er da det, som skulde bestemmes. Thi trækkes Linierne CG og DG, bliver ∠CGD ret, da en Halvcirkel rummer en ret Vinkel.

2. Hvad forstaaes ved Figurers Ligedannethed? Naar ere Cirkelsegmenter (Cf. omit) ligedannede? Hvis Forholdet imellem to Cirklers Radier er 0,36, hvor store ere da følgende Forhold:

a) imellem to ligedannede Segmenters Chorden,

b) imellem to ligedannede Segmenters Arealer?

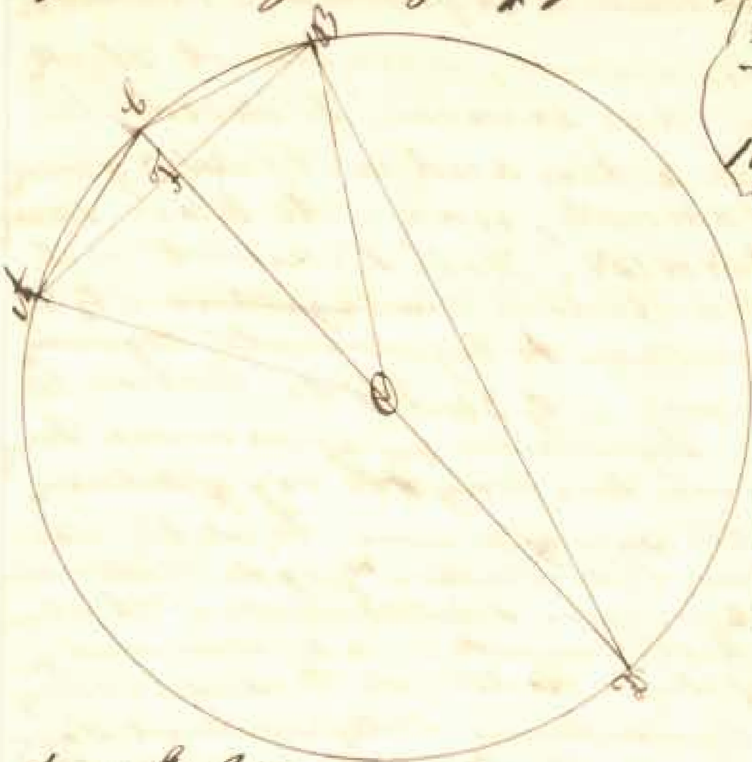
Figurer ere ligedannede, naar ethvert Stykke i den ene har samme Forhold til et tilsvarende i den anden. Cirkelsegmenter ere ligedannede, naar de have samme Gradstörrelse. Hvis Forholdet mellem to Cirklers Radier er ~~lige store~~ = 0,36, er Forholdet mellem to ligedannede Segmenters Chorder ogsaa = 0,36. Thi da Buerne til ligedannede Segmenter ere af samme Gradstörrelse, kan man her benytte sig af Sætningen: „Chorder til Buer af samme Gradstörrelse forholde sig som deres Radier", og da Radiernes Forhold er 0,36, er ogsaa Forholdet mellem Chorderne = 0,36. To Cirkelsegmenter ere i sammensat Forhold af deres Radier og Gradstörrelser, altsaa, naar Segmenterne betegnes med S og S', Gradstörrelserne med G og g, Radierne med R og r, har man $\frac{S}{S'} = \frac{G.R}{g.r}$. Men da Buerne til ligedannede Segmenter ere af samme Gradstörrelse, faar $\frac{S}{S'} = \frac{R}{r} = 0,36$. Altsaa er Forholdet mellem to ligedannede Segmenters Arealer, naar Forholdet mellem Cirklernes Radier er 0,36, ogsaa = 0,36.

indskreven

3. Af en given regelmæssig 2nkants Side og större Radius söges nkantens Side. Anvendes til Beregning af den regelmæssige femkants Side, naar Cirklens Radius er r.

Antager AC og CB at være = Sider i den indskrevne regulære 2n Kant, AB Side i den indskrevne regulære n Kant, kan det bevises, at, naar Siden i 2n Kanten betegnes med k og Siden i n Kanten med K, ~~Naar~~ Cirkelens Radius med r, K er $= \frac{k}{r}\sqrt{4r^2 - k^2}$.

Betegnes CF med p, har man ifølge Sætningen: "Enhver af Catheterne er mellemproportional mellem Hypothenusen og sin egen Projection paa samme," Propor-



309017
35
1545085
927051
10815595

$\sqrt{12{,}236068} = 3{,}4\,50$

9
323
64
256
6768
689
6201
567

tionen $\frac{k}{p} = \frac{2r}{k}$ eller $2rp = k^2$, hvoraf $p = \frac{k^2}{2r}$. Ifølge Sætningen: "Perpendiculairen er mellemproportional mellem begge Catheternes Projectioner," har man $\frac{p}{\frac{1}{2}K} = \frac{\frac{1}{2}K}{2r-p}$ eller $\frac{1}{4}K^2 = 2rp - p^2$. Ved at indsætte Værdien for p faaes $\frac{1}{4}K^2 = k^2 - \frac{k^4}{4r^2} = \frac{4k^2r^2 - k^4}{4r^2}$ hvoraf $K^2 = \frac{4k^2r^2 - k^4}{r^2}$ eller $K = \sqrt{\frac{k^2(4r^2-k^2)}{r^2}} = \frac{k}{r}\sqrt{4r^2-k^2}$. Man kan benytte sig af denne Formel til at beregne den regelmæssige Femkants Side naar Radius er r. Thi man har Tikantssiden $= ch\,36^\circ = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$, altsaa Femkantssiden $= ch\,72^\circ = \frac{\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)}{r}\sqrt{4r^2 - \frac{1}{4}r^2(5+1-2\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{1}{4}(16-(6-2\sqrt{5}))}$ $= \frac{1}{4}r(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}309017\,r\sqrt{12{,}236068} = 1{,}0815595\,r$.

Geometriske Opgaver

ved Hovedexamen i Juli 1875

for

Hans Petersen.

1) I et Trapez ere de parallele Sider, $a = 2'9''6'''$, $b = 3'5''8'''$ og deres Afstand $h = 1'7''3'''$. $a = 402'''$, $b = 500'''$, $h = 231'''$. Ifølge Formlen,

$$T = \frac{1}{2}h(a+b) \cdot \frac{402+500}{2}\,231 = \frac{902}{2} \cdot 231 = 451 \cdot 231 = 5\,7'\;3\,7''\;69\,7'''$$

$b =$ 3 | 12 | 36 | 5 | 41 | 12 | 82 | 41 | 492 | 8 | 500

$a =$ 2 | 12 | 24 | 9 | 33 | 12 | 66 | 33 | 396 | 6 | 402

$h =$ 1 | 12 | 12 | 7 | 19 | 12 | 38 | 19 | 228 | 3 | 231

$402 + 500 = 902 : 2 = 451.$

451
231
451
1353
902
144) 104181 (723 ; 144) 723 (5 7' 3 7''
1008 ; 720
338 ; 3
288
581
432 7'''
69

I en Trekant skal drages en Linie parallel med en Side og lig $\frac{2}{3}$ af samme Side; hvorledes udføres Konstruktionen geometrisk? I hvilket Forhold staar den afskaarne Trekants Areal til den hele Trekants Areal? No 2

Først afsætte vi en Trekant og deler dens tre Sider i 3 ligestorere Stykker. Derpaa afsætte vi fra C paa begge Benene de to Stykker af de tre og faa derved Punkterne B og D. Derpaa trække vi en Linie imellem dem. Dette er den forlangte Linie; thi den er parallel med A E og er netop de $\frac{2}{3}$ af A E. Den afskaarne Trekants Areal forholder sig til den hele Trekants Areal som $\frac{4}{9}$.

Geometriske Opgaver

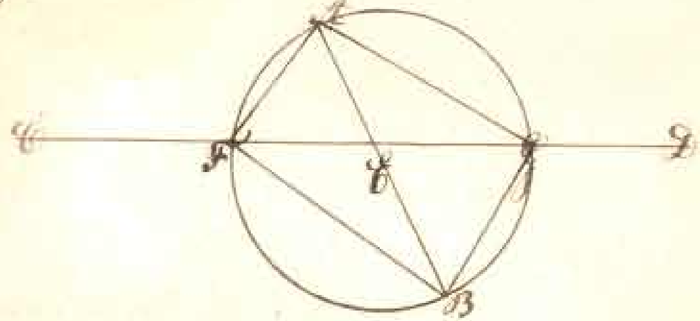
ved

Hovedexamenen i Juni 1875

L H Finnemann

№ 1

Ved Construktion at bestemme et Punkt i en given ret Linie saaledes, at Linierne derfra til to givne Punkter i samme Plan som den givne Linie danne en Vinkel paa 90° med hinanden. (Punkternes Afstand ses altsaa under en Synsvinkel paa 90°)

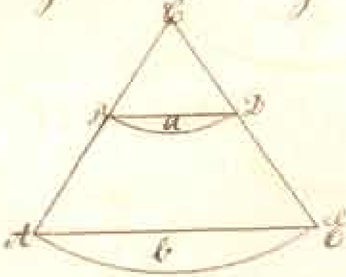


Imellem de to givne Punkter A og B trækes en ret Linie, som halveres i E. Med E som Centrum og EA (eller EB) som Radius slaas en Cirkel gjennem AB. Denne Cirkel skjærer den givne Linie CD i to Punkter F og G. Et af disse Punkter er det forlangte Punkt. AFB er en ret Vinkel, fordi den rummes i en Halvcirkel. Det samme er Tilfældet med Vinklen AGB.

№ 2

Hvad forstaas ved Figurers Ligedannethed? Naar ere Cirkelsegmenterne (Afsnit) ligedannede? Hvis Forholdet imellem to Cirklers Radier er 0,36, hvor store ere da følgende Forhold:

a) imellem to ligedannede Segmenters Korder,
b) imellem to ligedannede Segmenters Arealer?

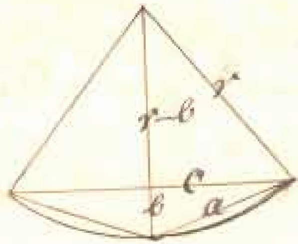


To Figurer ere ligedannede, naar alle Punkter i den ene have samme givne Forhold, som de tilsvarende i den anden.
Cirkelsegmenter ere ligedannede, naar Buerne have samme Gradstørrelser.
CBD og CAE er ensvinklede Trekanter; deres ensliggende Sider ere altsaa proportionale
$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE}$ men $\frac{CD}{CE} = 0,36$ altsaa er ogsaa $\frac{BD}{AE} = 0,36$
Segmenterne a og b ere ligedannede.
Ligedannede Figurers Forhold er lig Quadratet af et Par ensliggende Liniers Forhold. Altsaa:
$\left(\frac{BD}{AE}\right)^2 = \frac{a}{b} = 0,36^2 = 0,1296.$

36
36
216
108
1296

№ 3

Af en given indskreven regelmassig 2nkants Side og störste Radius söges nkantens Side. Anvendes til Beregning af den regelmassige Femkants Side, naar Cirklens Radius er r.



$$c^2 = r^2 - (r-b)^2 = r^2 - (r^2 - 2rb + b^2) = 2rb + b^2$$

$c^2 = a^2 - b^2$; altsaa

$$a^2 - b^2 = 2rb + b^2$$

$$2b^2 + 2rb - a^2 = 0$$

$$b^2 + rb - \tfrac{1}{2}a^2 = 0$$

$$b = -\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{2}a^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - \left(-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{2}a^2}\right)^2}$$

$$2c = 2\left(\sqrt{a^2 - \left(-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{2}a^2}\right)^2}\right)$$

Geometrisk Opgave

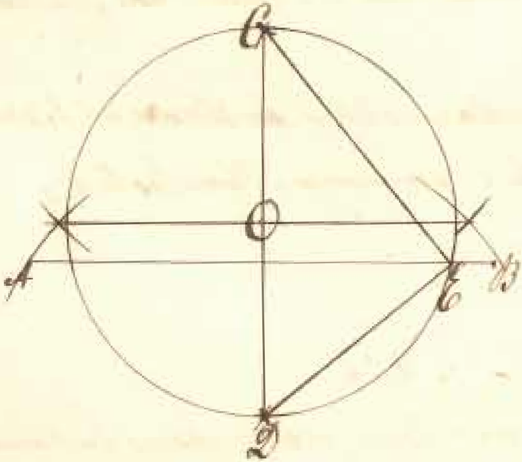
ved

Hovedexamen i Juli 1875.

Joh: Jensen.
IV^de Klasse

No 1.

Ved Konstruktion at bestemme et Punkt i en given ret Linie saaledes, at Linier derfra til to givne Punkter i samme Plan som den givne Linie danne en Vinkel paa 90° med hinanden. (Punkternes Afstand ses altsaa under en Synsvinkel paa 90°.)



Efterat have trukket den givne Linie AB og afsat Punkterne C og D, trækkes Linien CD; denne halveres, og med Skjærings-punktet O som Centrum og CO eller CD som Radius beskrives en Cirkel, som skærer AB i E. Fra E trækkes Linier fra til C og D, og Vinklen CED er da den rette Vinkel og E er da det Punkt, der søges. Vinklen CED er 90°, fordi en Halvcirkel rummer en ret Vinkel. —

No 2.

Hvad forstaas ved Figurers Ligedannethed? Naar ere Cirkelsegmenter (Afsnit) ligedannede? Hvis Forholdet imellem to Cirklers Radier er 0,36, hvor store ere da følgende Forhold:

a) imellem to ligedannede Segmenters Chorder,

b) imellem to ligedannede Segmenters Arealer?

Ved Figurers Ligedannethed forstaas, at disses Stykker ere proportionale i samme Maalestok.

No 3.

Af en given indskreven regelmæssig nkants Side og største Radius søges n kantens Side. Anvendes til Beregning af den regelmæssige Femkants Side, naar Cirklens Radius er r.

Her skal man bruge Formelen for Chorden til den dobbelte Bue, $K = \frac{k}{r}\sqrt{4r^2 - k^2}$. Naar denne Formel anvendes til Beregningen af den regelmæssige Femkants Side, har man $k = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$. Ved at indsætte dette i den første Formel, faar man $K = \frac{\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)}{r}\sqrt{4r^2 - \left(\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)\right)^2} =$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4r^2 - \frac{1}{4}r^2(6-2\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\cancel{r}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4r^2 - \frac{6}{4}r^2 + \frac{1}{2}r^2\sqrt{5}} =$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{10}{4}r^2 + \frac{2}{4}r^2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{r^2\left(\frac{10}{4} + \frac{2}{4}\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)$.
$\sqrt{3\sqrt{5}}$.

Den regelmæssige Femkants Side eller Chorden til $72^\circ = \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)\sqrt{3\sqrt{5}}$.

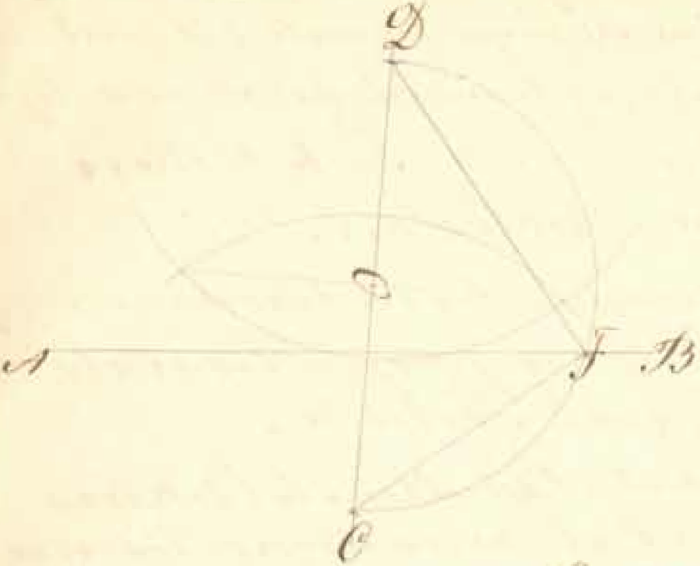
Geometrisk Opgave

ved

Hovedexamen 1875.

Valdemar Petersen.

IV^de. Klasse.



Man drager en given ret Linie og drager en Linie fra det givne Punkt C til det andet givne Punkt D. Denne Linie CD halveres derpaa og fra I Halveringspunktet slaas en Bue - Halvcirkel fra C til D med $\frac{1}{2}$ CD til Radius. $\frac{1}{2}$ CD er altsaa lig OD eller OC. Det Punkt hvori AB skjæres af af Halvcirkelen forbindes med Linien CD's Ende, punkter C og D ved Linierne FC og FD. F er da det givne Punkt.

Ved Figurens Ligedannethed forstaas, at Figurerne ere proportionale i et givet Forhold, og de siges derfor at være ligedannede i dette Forhold eller i denne Maalestok.

Cirkelsegmenter ere ligedannede, naar de ere proportionale i et givet Forhold.

Er Forholdet imellem to Cirklers Radier 0,36 haves Proportionen

$$\frac{r}{R} = \frac{0,36}{1}$$

Et Afsnit er $= U - t - \frac{1}{2}(rb - \frac{1}{2}gh)$