Matematik

for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium.

IV

af

Viggo Madsen
cand. mag. Adjunkt.

1918

Matematik

for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium.

IV.

af

Viggo Madsen.
cand. mag. Adjunkt

1918.

Kapitel 1. Komplekse Tal.

1. Vi har set, hvorledes man kan bringe den rette Linies Punkter til at svare en-entydigt til Samlingen af reelle Tal.

Vi vil nu udvide vort Talbegreb, idet vi indfører Tal – de saakaldte *komplekse Tal*, der svarer til Planens Punkter og dette gør vi ved at fastslaa, at det Punkt M, der har Koordinaterne (a, b) skal svare til et komplekst Tal, der betegnes a/ib. a kaldes Tallets reelle Komponent, b den komplekse Komponent. *Samlingen af komplekse Tal vil saaledes svare en-entydigt til Samlingen af Punkter i Planen.* Tallet $a/0i$ svarer til Punktet $(a, 0)$, der ligger paa x-Aksen, og vi fastslaar derfor, at det komplekse Tal $a/0i$ skal være identisk med det reelle Tal a. Man ser saaledes, at Samlingen af komplekse Tal indeholder Samlingen af reelle Tal som et specielt Tilfælde.

Alle komplekse Tal, der ikke er reelle kaldes *imaginære*.

Tallet $0/ib$ skrives i Praksis altid ib og kaldes *rent imaginært*.

Det Punkt $M \equiv (a, b)$, der repræsenterer (afbilder) Tallet a/ib, omtales for Simpelheds Skyld ofte som Tallet a/ib.

Ved Konstruktion af $M \equiv (a, b)$ ses det, at *a/ib er den overfor $(0,0)$ liggende Vinkelspids i et Parallelogram, hvis andre Vinkelspidser er $(a, 0)$ og $(0, b)$.*

2. Et komplekst Tal kan ogsaa bestemmes paa følgende Maade: Man angiver den numeriske Værdi af Længden OM, hvor O

er Begyndelsespunktet, og kaldes denne Værdi for Tallets <u>numeriske Værdi</u>, medens Vinklen fra x-Aksens positive Retning til Retningen OM kaldes Tallets <u>Amplitude</u>.

Naar disse to Størrelser er opgivet, er dermed Tallet bestemt. Hvis derimod Tallet er opgivet, er dermed den numeriske Værdi bestemt, medens Amplituden kun kan bestemmes paa nær et Multiplum af 2π. Dette ses direkte af Tallets geometriske Fremstilling, men kan ogsaa ses af følgende:

Antages et Tal hvis den numeriske Værdi r og Amplituden v, betegnes det r_v. Lad nu $a/ib = r_v$, og lad l betegne Retningen OM. Man har da

$$OM_1 = OM\cos(xl) \quad \text{eller} \quad ^{1)}\; a = r\cos v \quad \text{og}$$
$$OM_2 = OM\sin(xl) \quad \text{eller} \quad ^{2)}\; b = r\sin v$$

Heraf ved Division $\underline{tg\, v = \frac{b}{a}}$, der i Forbindelse med 1) og 2) giver én og kun én Værdi af v beliggende mellem $0°$ og $360°$. Kvadrerer og adderer man de to Ligninger, faar man $r^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = a^2 + b^2$ eller $\underline{r = \sqrt{a^2+b^2}}$, hvor det negative Fortegn bortkastes, da r er en numerisk Størrelse.

I mange Regninger vil det være tilstrækkeligt at angive den Værdi af Amplituden, som ligger mellem $0°$ og $360°$.

Ex: Find numerisk Værdi og Amplitude til Tallet $3/\div 3i$

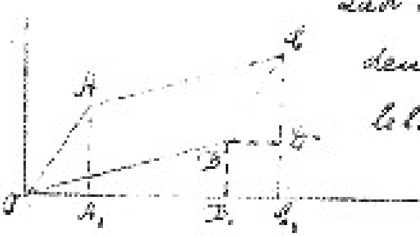
Vi har $\begin{matrix} r\cos v = 3 \\ r\sin v = -3 \end{matrix}$ hvoraf $r = 3\sqrt{2}$ og $tg\, v = \div 1$.

Da $r\cos v$ er positiv, faar man $v = 315 + 360p$, hvor p er et vilkaarligt, idet Tal. Ligningen $tg\,v = \div 1$ giver ligeledes Løsningen $135° + 360p$, som imidlertid maa kasseres, da den gør $r \cos v$ negativ.

Opgave: Find numerisk Værdi og Amplitude for Tallene $^5/_{5i}$, $^{-4}/_{-3i}$ og $^{-5}/_{i\sqrt{3}}$.

Tallene $^a/_{ib}$ og $^a/_{\div ib}$ ligger symmetrisk m. H. t. x-Aksen og kaldes konjugerede.

3. Addition.



1) Lad A og B repræsentere Tallene $^a/_{ib}$ og $^c/_{id}$, med deres O i Nulpunktet. Man tegner Parallelogrammet AOBC og fastsætter derpaa ved Definition, at C skal repræsentere Tallet $^a/_{ib} + {}^c/_{id}$, der er Summen af de to opgivne komplekse Tal.

Summen bliver altsaa den overfor O liggende Vinkelspids i det Parallelogram, hvis andre Vinkelspidser er de to Addender.

2) Heraf ser man, at $^a/_{ib} = {}^a/_{0i} + {}^0/_{ib} = a + ib$. Det komplekse Tal $^a/_{ib}$ vil derfor for Fremtiden blive skrevet $a + ib$.

Ved Sammenligning med §2 ses tillige at $a + ib = r\cos v + i r \sin v$.

3) Lad D være B's Projektion paa CC_1. Da vil

$$\triangle OAA_1 \cong \triangle BCD, \text{ hvoraf } BD = a \text{ og } DC = b.$$

OC_1 bliver da $= a + c$ og $C_1C = b + d$.

C vil derfor repræsentere Tallet $(a+c) + i(b+d)$, og man har

$$a + ib + c + id = (a+c) + i(b+d)$$

Af denne Ligning ser man tillige, at man faar Summen

Resultat, hvad enten reelle Tal adderes efter den gamle eller den nye Additionsdefinition, blir

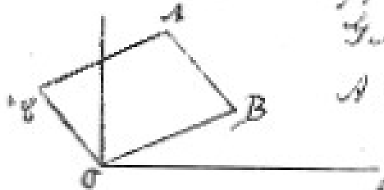
$$a+c = {}^{a}/_{0i} + {}^{c}/_{0i} = {}^{a+c}/_{0i} = a+c$$

Eks: $[3+5i] + [4+2i] + [-7+3i] = 10i$

(I Praksis udelades Parentheserne.)

4. <u>Subtraktion.</u>

Lad A og B representere Tallene $a+ib$ og $c+id$. Vi vil da vise, hvorledes vi konstruerer det Punkt, der representerer Tallenes Differens.



Gjennem O drages en Linie $\parallel AB$ og gjennem A en Linie $\parallel OB$. De to Liniers Skjærings-punkt kaldes C, og vi fastslaar ved Definition, at C skal representere det Tal, der er Differensen mellem Tallene $a+ib$ og $c+id$.

Dersom nu A, B og C betegner de Tal, der representeres ved Punkterne A, B og C, vil

$$A - B = C.$$

Men Figuren viser tillige ifølge § 3, at $C+B=A$.

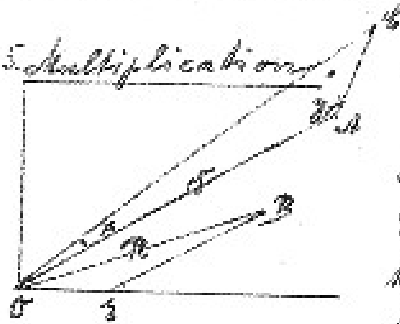
Den ene af disse Ligninger vil saaledes altid medføre den anden, og vi kan altsaa altid undersøge en Subtraktions Rigtighed ved Hjelp af Subtraktionsprøven. Vi ser f. Eks., at $a+ib-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$, da

$$(a-c)+i(b-d)+c+id = (a-c+c)+i(b-d+d) = a+ib.$$

Da Subtraktionsprøven stemmer er følgelig Subtraktionen rigtig.

Eks: $5+3i \div (7+2i) - (-1-4i) + (4-5i) = 3.$

5. Multiplikation.



Lad A repræsentere Tallet $a+ib = r_v$ og lad B repræsentere Tallet $c+id = R_V$. Lad desuden E repræsentere Tallet 1. Vi afsætter da $\angle x = V$ og $\angle y = \angle OEB$. De to Vinkelben, der ikke falder paa OA, skærer hinanden i et Punkt C, der ved Definition fastslaas at repræsentere det Tal, der er Produktet af Tallene A og B.
Man ser, at $\triangle OAC \sim \triangle OEB$, hvoraf $\frac{OC}{R} = \frac{r}{1}$ eller $OC = r\cdot R$.
Desuden ses det, at C faar Amplituden $v+V$.
Vi har altsaa $r_v \cdot R_V = r\cdot R_{v+V}$.
Man multiplicerer altsaa to komplekse Tal ved at multiplicere de numeriske Værdier og addere Amplituderne.

2) $i^2 = 1_{\frac{\pi}{2}} \cdot 1_{\frac{\pi}{2}} = 1_\pi = \div 1$.

3) $r(\cos v + i \sin v) = r\cos v + ir \sin v$,
thi $r\cdot(\cos v + i\sin v) = r_0 \cdot 1_v = r_v = r\cos v + ir\sin v$

4) Vi kan tillige vise, at vi faar samme Resultat, hvad enten reelle Tal multipliceres efter den gamle eller efter den nye Definition. Man har f. Eks.:

$(-6)\cdot 5 = -30$ efter den gamle Definition, og
$(-6)\cdot 5 = 6_\pi \cdot 5_0 = 30_\pi = -30$ efter den ny.
Og $(-6)(-1\frac{1}{2}) = 9$ efter den gamle Definition, og
$(-6)\cdot(-1\frac{1}{2}) = 6_\pi \cdot 1\frac{1}{2}_\pi = 9_{2\pi} = 9$ efter den ny.

5) Man ser desuden – som et første praktisk Resultat af Indførelsen af komplekse Tal – at man nu kan løse Ligningen $x^2 = -a$, hvor a er positiv.
Den er nemlig tilfredsstillet af $x = \pm i\sqrt{a}$, thi
$(i\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{a}_{\frac{\pi}{2}} = a_\pi = -a$ og
$(-i\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}_{\frac{3\pi}{2}} \cdot \sqrt{a}_{\frac{3\pi}{2}} = a_{3\pi} = -a$.

2) Desuden kan en almindelig 2'Grads Ligning løses i Almindelighed

f.Ex: $x^2+2x+5=0$. Ligning kan paa sædvanlig Maade omdannes til $(x+1)^2=-4$, der tilfredsstilles af

$$x+1=\pm 2i \quad \text{eller} \quad x=-1\pm 2i.$$

7) Man kan nu bevise, at $(a+bi)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$, hvilket Resultat faaes ved almindelig flerleddet Multiplication, idet man erindrer, at $i^2=-1$

Da vi imidlertid ikke ved, om en saadan flerleddet Multiplication er tilladelig, naar Faktorerne er komplekse, maa vi føre et Bevis for ovenstaaende Ligning.

Lad $a+ib=r_v$ og $c+id=R_V$. Man har da:

$$a=r\cos v,\quad b=r\sin v,\quad c=R\cos V \text{ og } d=R\sin V.$$

Nu er imidlertid: $(a+ib)(c+id)=r_v\cdot R_V = r\cdot R_{v+V} =$

$$rR\cdot[\cos(v+V)+i\sin(v+V)] =$$
$$rR\cdot[\cos v\cdot\cos V \div \sin v\sin V + i\cdot(\sin v\cdot\cos V+\cos v\sin V)] =$$
$$rR\cos v\cdot\cos V \div r\cdot R\sin v\cdot\sin V + i\cdot(rR\sin v\cdot\cos V + r\cdot R\cos v\sin V) =$$
$$ac\div bd + i(ad+bc)$$

Opgave 1. $(4\div i)(-3+2i)$. Multiplicationen udføres

1) ved Konstruktion paa kvadreret Papir

2) ved at bestemme numerisk Værdi og Amplitude for de to Faktorer, dernæst udregne Produktet og bringe det paa Formen $a+ib$.

3) ved flerleddet Multiplication.

Opgave 2. Samme Opgave for $(-1+3i)(2+5i)$ og for $(-1-2i)(2\div 3i)$

Opgave 3. $(-1+i)^6\div(-2-2\sqrt{3}\,i)^6$

Opgave 4. $(a+ib)(a-ib)+(a+ib)^2+(a-ib)^2$

4. Division. Vi fastsætter ved Definition, at

$$R_V : r_v = \left(\frac{R}{r}\right)_{V-v}.$$ Definitionen ses at være i Overensstemmelse med Divisionsprøven, da

$$\left(\frac{R}{r}\right)_{V-v} \cdot r_v = \left(\frac{R}{r}\cdot r\right)_{V-v+v} = R_V.$$

Paa Grundlag af de udviklede Regler i §1–§4 kan man nu bevise, at alle de Regneregler, som gælder for reelle Tal og-saa gælder for komplekse.

Som et Eksempel skal vi bevise, at $(x+y)\cdot m = xm+ym$ ogsaa gælder, naar de indgaaende Tal er komplekse.

Lad $x=a+ib$, $y=c+id$ og $m=g+ih$. Da er $(x+y)\cdot m =$

$$[a+ib+c+id][g+ih] = [(a+c)+i(b+d)][g+ih] =$$
$$ag+cg-bh-dh+i(bg+dg+ah+hc).$$

Det samme Resultat vil man imidlertid faa ved at udregne $xm+ym$.

Vi skal ikke gaa nærmere ind paa Beviset for den almindelige Omformning, der ofte benyttes i det efterfølgende.

Altsaa: $$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} =$$
$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Opgave 1. $$\frac{3+4i}{3-4i} + \frac{3-4i}{3+4i} + \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} + \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}.$$

Opgave 2. $$\frac{2}{1+i} + \frac{3}{1-i} + \frac{5}{4+4i} + \frac{6}{5-5i}$$

Kapitel 2. Komplekse Tal. (Fortsættelse.)

1. Potensopløftning.

I $(r_v)^n = r^n_{nv}$ (n positiv, hel)

Bevis: $(r_v)^n = r_v \cdot r_v \cdot r_v \cdots$ (n Faktorer) $= r^n_{nv}$.

Vi har altsaa tillige:

$$[r(\cos v + i\sin v)]^n = r^n(\cos nv + i\sin nv).$$

3) $(r_v)^{-n} = r^{-n}_{-nv}$. ($n$ hel og positiv)

Bevis $(r_v)^{-n} = \frac{1}{(r_v)^n} = \frac{1_0}{r^n_{nv}} = \left(\frac{1}{r^n}\right)_{0-nv} = r^{-n}_{-nv}$.

Vi har tillige

$$[r(\cos v + i\sin v)]^{-n} = r^{-n}(\cos(-nv) + i\sin(-nv)) =$$

$$r^{-n}(\cos nv \div i\sin nv).$$

2. Roduddragning.

1) Vi vil först som et Eksempel löse Ligningen $x^5 = 1+i$.

Vi sætter da $x = \rho_\theta$. Da nu $1+i = \sqrt{2}_{45}$, faar man:

$(\rho_\theta)^5 = \sqrt{2}_{45}$ eller $\rho^5_{5\theta} = \sqrt{2}_{45}$. Hvis disse to Tal skal være ligestore, maa de repræsenteres ved samme Punkt i Planen, hvoraf fölger:

$$\rho^5 = \sqrt{2} \quad \text{og} \quad 5\cdot\theta = 45 + 360\cdot p \quad \text{, hvoraf}$$

$$\rho = \sqrt[10]{2} \quad \text{og} \quad \theta = 9 + 72p \quad \text{, og man faar altsaa}$$

(1) $$x = \sqrt[10]{2}\cdot[\cos(9+72p) + i\cdot\sin(9+72p)] \text{, hvor}$$

p er et vilkaarligt helt Tal.

Af Lign (1) ses det, at x faar 5 forskellige Værdier, nemlig naar p sættes $= 0, 1, 2, 3$ og 4.

De 5 Rödder er derfor:

$\sqrt[10]{2}(\cos 9 + i\sin 9)$	for $p = 0$.
$\sqrt[10]{2}(\cos 81 + i\sin 81) = \sqrt[10]{2}(\sin 9 + i\cos 9)$	for $p = 1$
$\sqrt[10]{2}(\cos 153 + i\sin 153) = \sqrt[10]{2}(\div\cos 27 + i\sin 27)$	for $p = 2$
$\sqrt[10]{2}(\cos 225 + i\sin 225) = \sqrt[10]{2}(\div\cos 45 \div i\sin 45)$	for $p = 3$
$\sqrt[10]{2}(\cos 297 + i\sin 297) = \sqrt[10]{2}(\cos 63 \div i\sin 63)$	for $p = 4$.

Alle andre Værdier af p vil vise sig at give en af disse 5 Værdier for x. De kan alle bringes paa Formen $a + ib$, hvor a og b er Decimalbrøker.

Man sætter nemlig blot:

$a = \sqrt[10]{2}\cos 9^\circ$ $\qquad$ $b = \sqrt[10]{2}\sin 9^\circ$

$\frac{1}{10}\log 2 = 0,0301$ $\qquad$ $\frac{1}{10}\log 2 = 0,0301$

$\log\cos 9^\circ = \underline{0,9946-1}$ $\qquad$ $\log\sin 9^\circ = \underline{0,1943-1}$

$\log a = 0,0247$ $\qquad$ $\log b = 0,2244-1$

$a = 1,059.$ $\qquad$ $b = 0,1676.$

Den første Rod bliver altsaa (tilnærmet) $1,059 + i \cdot 0,1676$.
Paa samme Maade kan man behandle de andre Rødder.
Ved Konstruktion af de Punkter, der repræsenterer de 5 Rødder, ser man, at de er Vinkelspidser i en regulær 5-Kant, der er indskrevet i en Cirkel, der har Centrum i (0,0) og har Radius $= \sqrt[10]{2}$.

2) $x^n = a$, hvor n er positiv, hel og a et komplekst Tal.

Lad $a = r_v$ og $x = \rho_\theta$. Man har da

$$(\rho_\theta)^n = r_v, \text{ hvoraf } \rho^n_{n\theta} = r_v$$

de to Tal $\rho^n_{n\theta}$ og r_v vil derfor repræsenteres ved samme Punkt i Planen, hvoraf følger:

$$\rho^n = r \quad \text{og} \quad n\theta = v + 360p \quad \text{eller}$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{og} \quad \theta = \frac{v+360p}{n}, \text{ hvor } p \text{ er}$$

et vilkaarligt, helt Tal.

Med Hensyn til Ligningen $\rho^n = r$, hvor baade ρ og r er positive Tal, ved vi, at Ligningen har én og kun én positiv Rod; det er denne, vi har betegnet med $\sqrt[n]{r}$.

Vi faar altsaa:

$$x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{v+360p}{n} + i\sin\frac{v+360p}{n}\right] \qquad (2)$$

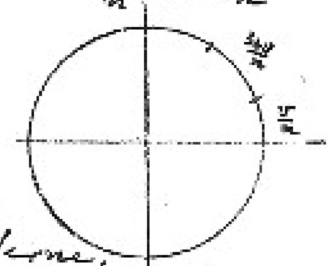
Alle de Tal, som vi faar ved i dette Udtryk at sætte forskellige Tal for p, ligger paa en Cirkel med (0,0) som Centrum og Radius $= \sqrt[n]{r}$.

For $p = 0$ faar vi et Tal, der har Amplituden $\frac{v}{n}$.

For p = 1 faar vi et Tal, der har Amplitude $\frac{v}{n}+\frac{360}{n}$

" p = 2 " " " " " " $\frac{v}{n}+2\cdot\frac{360}{n}$

o. s. v.



Vi ser saaledes, at alle Punkterne fremkommer derved, at vi ud fra Punktet $\sqrt[n]{r}_{\frac{v}{n}}$ deler Cirklen i n ligestore Dele.

De Punkter, der repræsenterer Rödderne, bliver saaledes Vinkelspidser i en regulær indskreven n-kant. Samtidig ser vi, at naar p gennemlöber alle hele Tal, vil (2) give n forskellige Tal, hvorved det er bevist, at $x^n=a$ har n forskellige Rödder, nemlig de, der faas ved at sætte p = Tallene 0, 1, 2 .... n ÷ 1.

3) Den binome Ligning.

Den binome Ligning er et specielt Tilfælde af Ligningen $x^n=a$, idet denne Ligning kaldes saaledes, naar a er reel. Vi vil först betragte Ligningen $x^n=a$, hvor a er et reelt, positivt Tal.

Da $a=a_0$ faar vi ved Indsættelse i (2):

$$x=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{360p}{n}+i\sin\frac{360p}{n}\right) \qquad (3)$$

Som det fremgaar af det foregaaende har (3) n forskellige Rödder, der fremkommer, naar man tillægger p Værdierne 0, 1, 2 .... n ÷ 1.

Rödderne er reelle, dersom $\frac{360p}{n}=0$ eller dersom $\frac{360p}{n}=180$, hvoraf fölger $p=0$ og $p=\frac{n}{2}$.

Det sidste kan kun ske, naar n er lige.

Vi ser altsaa, at $x^n=a$

for n lige har 2 reelle Rödder

for n ulige derimod kun 1 reel Rod.

De övrige Rödder er alle komplekse og Antallet af kom-
plekse Rödder er begge steder lige.

Da den regulære Polygon, hvis Vinkelspidser repræsenterer Rödderne er symmetrisk m.H.t. x-Aksen, vil de komplekse Rödder være konjugerede 2 og 2.

Vi vil dernæst betragte Ligningen $x^n = \div a$, hvor n er hel og positiv, og a er positiv.

Da $-a = a_{180}$ faar vi ved Indsættelse i (2)

$$x = \sqrt[n]{a}\left[\cos\frac{180+360p}{n} + i\sin\frac{180+360p}{n}\right] \qquad (4)$$

Ogsaa her faar vi n forskellige Rödder ved at tillægge p Værdierne $0, 1, 2 \ldots\ldots n \div 1$

Rödderne er reelle, dersom

$$\frac{360p+180}{n} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{360p+180}{n} = 180, \text{ eller dersom}$$

$$p = \div\frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad p = \frac{n-1}{2}$$

Det förste kan aldrig indtræffe, da p skal være hel. Det sidste finder derimod Sted, naar n er ulige.

Vi ser altsaa, at $x^n = -a$

for n lige har 0 reelle Rödder

for n ulige har 1 reel Rod

De övrige Rödder er komplekse og ogsaa her i begge Tilfælde til Stede i et lige Antal.

For $p=0$ faar vi Amplituden $\frac{180}{n}$

for $p=n-1$ " " " $\frac{360(n-1)+180}{n} = 360 - \frac{180}{n}$

De to tilsvarende Punkter vil derfor ligge symmetrisk m.H.t. x-Aksen. Det samme gælder om de Punkter, der bestemmes af $p=1$ og $p=n\div 2$ o.s.v.

Ogsaa her er derfor de komplekse Rödder konjugerede 2 og 2.

Eks. 1. $x^8 = 256$.

Vi har da if. Lign. (3) $x = 2\left(\cos\frac{360p}{8} + i\sin\frac{360p}{8}\right)$ eller

$$x = 2(\cos 45p + i\sin 45p)$$

For $p=0$ faar man da $x = 2$

" $p=\pm 1$ " " $2(\cos 45 \pm i\sin 45) = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$

" $p=\pm 2$ " " $2(\cos 90 \pm i\sin 90) = \pm 2i$

" $p=\pm 3$ " " $2(\cos 135 \pm i\sin 135) = -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$

" $p=4$ " " $2(\cos 180 \pm i\sin 180) = \div 2$

En Konstruktion viser, at de 8 Rødder repræsenteres ved Punkter, der er Vinkelspidser i en regulær 8-kant, der er indskrevet i en Cirkel, der har sit Centrum i (0,0) og har en Radius = 2. Man ser desuden, at Ligningen har 2 reelle Rødder, nemlig +2 og −2, medens de andre 6 er komplekse. De komplekse Rødder viser sig at være konjugerede.

Eks. 2. $x^9 = -2$.

Vi har if. Lign. (4) $x = \sqrt[9]{2}\left(\cos\frac{360p+180}{9} + i\sin\frac{360p+180}{9}\right)$

eller $x = \sqrt[9]{2}\,[\cos(40p+20) + i\sin(40p+20)]$.

$p=0$ og $p=\div 1$ giver nu: $x = \sqrt[9]{2}\,[\cos 20 \pm i\sin 20]$

$p=1$ og $p=-2$ " $x = \sqrt[9]{2}\,[\cos 60 \pm i\sin 60]$

$p=2$ og $p=-3$ " $x = \sqrt[9]{2}\,[\cos 100 \pm i\sin 100] = \sqrt[9]{2}\,[-\sin 10 \pm i\cos 10]$

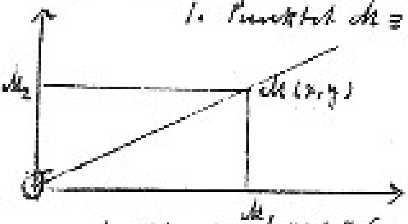
$p=3$ og $p=-4$ " $x = \sqrt[9]{2}\,[\cos 140 \pm i\sin 140] = \sqrt[9]{2}\,[-\cos 40 \pm i\sin 40]$

$p=4$ " $x = \sqrt[9]{2}\,[\cos 180 \pm i\sin 180] = -\sqrt[9]{2}$.

Rødderne kan paa sædvanlig Maade bringes paa Formen $a+ib$, hvor a og b er Decimalbrøker.

Man ser, at $x^9 = \div 2$ har 1 reel (negativ) Rod, nemlig $\div\sqrt[9]{2}$. Desuden har den 8 komplekse, der er konjugerede 2 og 2.

Kapitel 3. Polare Koordinater. (Analytisk Geometri).



1. Punktet $M \equiv (x,y)$ bestemmes ogsaa ved at man vælger en positiv Retning paa OM og kalder denne l. Dernæst sættes $\angle(xl) = v$ og $OM = r$. Naar r – den saakaldte Radius vector – og v – den saakaldte Amplitude er opgivet, er dermed Punktets Beliggenhed bestemt. r og v kaldes Punktets polære Koordinater, O kaldes Polen og x-Aksen Polaraksen.

Ifølge Definitionerne paa cosinus og sinus faar man da:

$$\cos(xl) = \frac{OM_1}{OM} \qquad \sin(xl) = \frac{OM_2}{OM} \quad \text{eller}$$

$$\cos v = \frac{x}{r} \qquad \sin v = \frac{y}{r}, \quad \text{hvoraf}$$

$$x = r\cos v \qquad y = r\sin v$$

Af disse Ligninger faar man $\operatorname{tg} v = \frac{y}{x}$ og $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, af hvilke den første Ligning giver 2 Værdier for v, beliggende mellem $0°$ og $360°$.

2. Som en Anvendelse vil vi finde Formen af Lemniscaten o: af den Kurve, hvis Ligning er $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

1) Kurven er symmetrisk med Hensyn til x-Aksen, da Punkterne (x,y) og $(x,-y)$ samtidig ligger paa Kurven. Den er ogsaa symmetrisk med Hensyn til y-Aksen, da (x,y) og $(-x,y)$ samtidig ligger paa Kurven.

3) Da (x,y) og $(-x,-y)$ samtidig ligger paa Kurven, vil den være punktsymmetrisk m. H. t. O. Punkterne (x,y), $(0,0)$ og $(\div x, \div y)$ ligger nemlig paa samme rette Linie, og Afstanden fra O til de to andre Punkter er begge $= \pm\sqrt{x^2+y^2}$.

3) Vi behøver derfor kun at undersøge Kurvens Form i 1ste Kvadrant. Vi indfører derfor polære Koordinater og indsætter derfor $x = r\cos v$ og $y = r\sin v$ i Kurvens Ligning.

Man faar da $r^4 = a^2r^2\cos 2v$, der viser, at enhver Linie gennem (0,0) skærer Kurven i to Punkter, der begge falder sammen med (0,0). Desuden vil Linien skære Kurven i to Punkter til, og disse bestemmes ved $r = \pm a\sqrt{\cos 2v}$.

4) For at undersøge Forholdene i 1ste Kvadrant skal man betragte Ligningen $r = a\sqrt{\cos 2v}$.

For $v = 0$ faar man $r = a$.

Naar v vokser fra $0°$ til $45°$, vil r stadig aftage og blive $= 0$ for $v = 45°$.

Tegnes derfor en Linie gennem (0,0), som danner en Vinkel med x-Aksen, der er $\pm 45°$, vil denne Linie i begge Tilfælde skære Kurven i 4 Punkter, der alle falder sammen med Begyndelsespunktet. Da r er kompleks for $90 > v > 45$, har Kurven ingen Punkter for disse Værdier af v.

5) <u>Tangentbestemmelse</u>.

Kurvens Ligning differentieres med Hensyn til x. Man faar da

$$2(x^2+y^2)\frac{d(x^2+y^2)}{dx} = a^2\left(2x - 2y\frac{dy}{dx}\right)$$

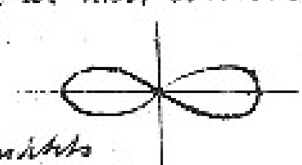
$$(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) = a^2\left(x - y\frac{dy}{dx}\right), \text{ hvoraf}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2x^2y+2y^3+a^2y\right) = a^2x - 2x^3 - 2xy^2 \text{ eller}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3 - 2xy^2}{2x^2y+2y^3+a^2y}$$

Tangenten i (0,0) faar Retningskoefficienten $\pm\infty$, og Tangenten i dette Punkt er derfor $\perp$ x-Aksen.

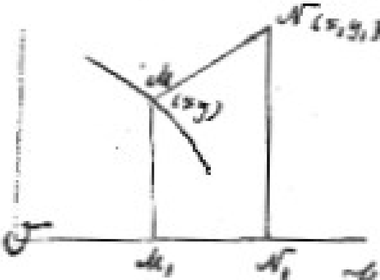
Da enhver Linie gennem (0,0) skærer Kurven i to Punkter, der falder sammen med Begyndelsespunktet, siges Kurven at have et Dobbeltpunkt i dette Punkt. Linierne $y = x$ og $y = -x$ skærer hver for sig Kurven i 4 Punkter, der falder sammen med (0,0). De kaldes Dobbeltpunkts-



Tangenter. Kurven kan nu tegnes og faar et Udseende som vist paa Tegningen.

Opgave: Tegn den Kurve, hvis Ligning er $r = a(1-\cos v)$.
Find tillige dens Ligning i retvinklede Koordinater.

3. Dersom man vælger Polen i Punktet (x_1, y_1) og lægger Polaraksen $\parallel$ x-Aksen, har man, idet $M \equiv (x, y)$ er et vilkaarligt Punkt:



$$\cos(xl) = \frac{N_1M_1}{NM} \quad \text{og} \quad \sin(xl) = \frac{N_2M_2}{NM},$$

eller dersom man sætter $xl = v$ og $NM = r$

$$\cos v = \frac{x - x_1}{r} \quad \text{og} \quad \sin v = \frac{y - y_1}{r}, \text{ hvoraf}$$

$$\underline{x = x_1 + r\cos v} \quad \text{og} \quad \underline{y = y_1 + r\sin v}.$$

Indføres disse Udtryk for x og y i en Kurves Ligning, faar man Kurvens Ligning i polære Koordinater, idet (x_1, y_1) er Pol, og Polaraksen er $\parallel$ x-Aksen.

Kapitel 4. Cirklen.

1. Vi vil give et analytisk Bevis for den Sætning, at der gennem 3 Punkter, der ikke ligger paa samme rette Linie, kan lægges én og kun én Cirkel. Lad de tre opgivne Punkter være A, B og C. Vi lægger Koordinatsystemet saaledes, at A faar Koordinaterne $(0,0)$, $B \equiv (m, 0)$ og $C \equiv (p, q)$.

Lad den søgte Cirkels Ligning være

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \text{ hvor } a, b \text{ og } c \text{ skal}$$

bestemmes, saaledes at Cirklen gaar gennem A, B og C.

Da A skal ligge paa Cirklen, maa $c = 0$. Cirklens Ligning bliver derfor reduceret til $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$

Da tillige B skal ligge paa Cirklen, maa $m^2 + 2am = 0$, hvoraf $a = -\frac{m}{2}$. Cirklens Ligning bliver altsaa

$$x^2 + y^2 - mx + 2by = 0.$$

Hvis denne Cirkel tillige skal gaa gjennem $C \equiv (p,q)$, maa

$$p^2+q^2-mp+2bq=0, \text{ hvoraf}$$

$$b=\frac{mp-p^2-q^2}{2q} \qquad (2)$$

Ligningen for den søgte Cirkel vil derfor være

$$x^2+y^2-mx+2\cdot\frac{mp-p^2-q^2}{2q}\,y=0 \quad \text{eller}$$

$$qx^2+qy^2-mqx+(mp-p^2-q^2)\cdot y=0 \qquad (1)$$

Der gives derfor en og kun én Cirkel gjennem de 3 Punkter, dersom $q \gtrless 0$.

For $q=0$ vil de 3 Punkter ligge paa x-Aksen. I dette Tilfælde vil b ikke kunne bestemmes, som det ses af (2), og det er derfor ikke muligt, at bestemme en Cirkel, som gaar gjennem de 3 Punkter. Indsættes $q=0$ i Ligning (1), faar man i Overensstemmelse hermed $y=0$, hvilket netop er Ligning for x-Aksen.

2. Punkts Potens med Hensyn til en Cirkel.

Lad $O \equiv (x_1,y_1)$ være et opgivet Punkt og l en vilkaarlig Linie gjennem O, der skærer en given Cirkel i A og B.

Ved O's Potens m. H. t. Cirklen forstaar man da Produktet $OA\cdot OB$. Punktet O's Potens m. H. t. Cirklen betegnes ved P_O, og man har derfor $P_O = OA\cdot OB$.

Lad nu Cirklens Ligning være $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Vi vil da sætte $x=x_1+r\cos v$ og $y=y_1+r\sin v$, hvorved vi finder Cirklens Ligning i polære Koordinater, idet O er Pol, og Polaraksen er $\parallel$ x-Aksen. Vi faar da:

$$(x_1+r\cos v)^2+(y_1+r\sin v)^2+2a(x_1+r\cos v)+2b(y_1+r\sin v)+c=0 \quad \text{eller}$$

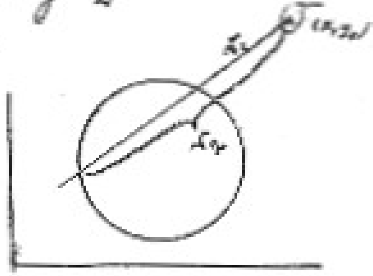
$$r^2+2r\left[x_1\cos v+y_1\sin v+a\cos v+b\sin v\right]+x_1^2+y_1^2+2ax_1+2by_1+c=0$$

Dersom v opgives, vil denne Ligning bestemme to Værdier af

r, der paa Figuren er betegnet ved r_1 og r_2.
r_1 og r_2 er altsaa Rödder i Ligningen,
og fölgelig er

$$P_O = r_1 \cdot r_2 = x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + c$$

der er üafhængig af v. Potensen er fölgelig den samme for alle Linier gennem O.



Et Pünkts Potens m. H. t. en Cirkel er altsaa konstant og findes ved at skrive Cirklens Ligning paa Formen:

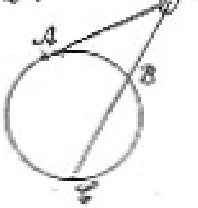
$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Potensen er da $P_O = x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + c$, hvor (x_1, y_1) er Pünktets Koordinater.

3. Heraf fölger en Del simple Sætninger:

1) Naar to Korder skærer hinanden, er Produktet af den ene Kordes to Stykker = Produktet af den anden Kordes to Stykker. Man har altsaa $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

2) Naar to Sekanter skærer hinanden, er Produktet af den ene Sekant og dens üdenfor Cirklen liggende Stykke = den anden Sekant gange dens üdenfor Cirklen liggende Stykke. Man har altsaa $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.



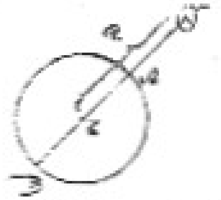
3) Naar en Sekant og en Tangent skærer hinanden, er Tangenten mellemproportional mellem hele Sekanten og dens üdenfor Cirklen liggende Stykke. Man har altsaa $OA^2 = OB \cdot OC$.

4) Dersom O ligger indenfor Cirklen og har Afstanden a fra Centrum, der betegnes C, faar man:

$$P_O = OA \cdot OB = (r-a)(r+a) = r^2 - a^2$$

5) Dersom O ligger üdenfor Cirklen og har Afstanden a fra dens

Centrum, faar man:



$$P_r = OA \cdot OB = (a-r)(a+r) = a^2 - r^2.$$

Af Formlerne 1 og 5 ses det, alle Punkter, der har samme Afstand fra Centrum, har samme Potens m. H. t. Cirklen. For Punkter, der ligger paa Cirkelperiferien er Potensen = 0

6 Naar to Cirkler skærer hinanden, vil ethvert Punkt paa Fælleskorden eller dens Forlængelse have samme Potens m. H. t. de to Cirkler. Fælleskordens Forlængelse er derfor det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra man kan trække lige lange Tangenter til de to Cirkler.

3. Tangentbestemmelse ved Cirklen.

Lad Cirklens Ligning være $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ (1)

Vi differentierer nu m. H. t. x og faar:

$$2(x-a)\frac{d(x-a)}{dx} + 2(y-b)\frac{d(y-b)}{dx} = 0 \quad \text{eller}$$

$$2(x-a) + 2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0, \text{ hvoraf } \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$$

En Tangent med Røringspunktet $(x_1 y_1)$ har altsaa Retningskoefficienten $-\frac{x_1-a}{y_1-b}$ og Ligningen

$$y - y_1 = -\frac{x_1-a}{y_1-b}(x-a) \qquad (2)$$

Lad specielt Cirklen have sit Centrum i Begyndelsespunktet. Dens Ligning faar da ved at sætte $a = b = 0$ i Ligning (1), og den bliver derved $x^2+y^2 = r^2$.

Ligningen for en Tangent med Røringspunktet $(x_1 y_1)$ faas ved at sætte $a = b = 0$ i Ligning (2).

Man faar derved: $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ eller

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \quad \text{eller}$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

Men da $(x_1 y_1)$ ligger paa Cirklen, vil $x_1^2+y_1^2 = r^2$.

Ligningen for Tangenten er derfor $\underline{xx_1 + yy_1 = r^2}$ (3)

Ex: Find Ligningen for de Tangenter til $x^2+y^2=5$, hvis Røringspunkt har Abscissen 1.

4. Tangentens Ligning paa Normalform.

Vi vil bringe (3) paa Formen $x\cos\alpha + y\sin\alpha + d = 0$

Dersom $xx_1+yy_1=r^2$ og $x\cos\alpha+y\sin\alpha+d=0$ skal være Ligning for den samme rette Linie, maa Koefficienterne til x, y og det konstante Led være proportionale. Man har derfor:

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_1}{\sin\alpha} = \frac{-r^2}{d} \quad \text{hvoraf}$$

$$\frac{x_1^2}{\cos^2\alpha} = \frac{y_1^2}{\sin^2\alpha} = \frac{r^4}{d^2} \quad \text{eller}$$

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{r^4}{d^2} \quad \text{eller} \quad \frac{r^2}{1} = \frac{r^4}{d^2}, \text{ hvoraf:}$$

$$\underline{d = \pm r.}$$

Ligningen for Tangenten paa Normalform er derfor:

$$\underline{x\cos\alpha + y\sin\alpha \pm r = 0.}$$

5. Ligningen for en Tangent ∥ en opgiven Linie l.

Lad l have Retningskoefficienten μ. Tangentens Ligning er da $y=\mu x+q$, hvor q skal bestemmes, udtrykt ved μ. Dersom $xx_1+yy_1=r^2$ og $y=\mu x+q$ skal være Ligning for den samme rette Linie, maa

$$\frac{x_1}{\mu} = \frac{y_1}{-1} = \frac{r^2}{-q} \quad \text{hvoraf.}$$

$$\frac{x_1^2}{\mu^2} = \frac{y_1^2}{1} = \frac{r^4}{q^2} \quad \text{eller}$$

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{\mu^2+1} = \frac{r^4}{q^2} \quad \text{eller} \quad \frac{r^2}{\mu^2+1} = \frac{r^4}{q^2}, \text{ hvoraf}$$

$$\underline{q = \pm r\sqrt{\mu^2+1}.}$$

Tangentens Ligning er derfor $\underline{y = \mu x \pm r\sqrt{\mu^2+1}}$

Af denne Ligning ses det, at der altid findes 2 Tangenter til en Cirkel for en opgiven retning.

6. <u>At finde Ligningen for Tangenterne fra Punktet $P \equiv (a,b)$ til Cirklen $x^2+y^2=r^2$.</u>

Ligningen for en vilkaarlig Tangent til Cirklen kan skrives

$$y = \mu x + r\sqrt{\mu^2+1}. \qquad (1)$$

Hvis denne skal gaa gjennem $P \equiv (a,b)$, maa (a,b) tilfredsstille denne, naar x og y erstattes med a og b. Man faar da

$b = \mu a + r\sqrt{\mu^2+1}$, hvoraf μ kan findes:

$$b - \mu a = r\sqrt{\mu^2+1}$$

$$b^2 - 2\mu ab + \mu^2 a^2 = r^2\mu^2 + r^2$$

$$\mu^2(r^2-a^2) + 2\mu ab + r^2 - b^2 = 0 \quad \text{eller}$$

$$\mu^2 + \frac{2ab}{r^2-a^2}\mu + \frac{r^2-b^2}{r^2-a^2} = 0 \quad , \text{hvoraf}$$

$$(2) \qquad \mu = \frac{-ab \pm r\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{r^2-a^2}$$

Indsættes dette i (1) har vi Ligningen for de søgte Tangenter.

Af (2) ses det, at man, naar $r^2 < a^2+b^2$, faar to reelle Værdier for μ; der kan altsaa i dette Tilfælde tegnes to Tangenter fra P til Cirklen. Dette stemmer med, at $OP = \sqrt{a^2+b^2} > r$. P ligger altsaa i dette Tilfælde udenfor Cirklen.

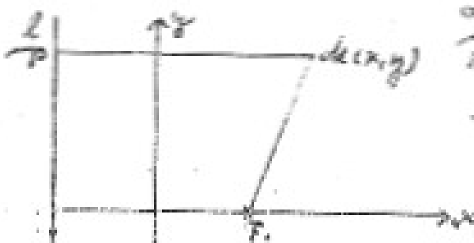
Dersom $r^2 = a^2+b^2$, faar vi kun en Værdi for μ. Der kan derfor kun tegnes en Tangent fra P til Cirklen. Dette stemmer med, at $OP = \sqrt{a^2+b^2} = r$, der viser, at P i dette Tilfælde ligger paa Cirklen.

Dersom $r^2 > a^2+b^2$ er μ komplekt. Der kan ingen Tangenter tegnes fra P. $OP = \sqrt{a^2+b^2} < r$ viser da ogsaa, at P ligger indenfor Cirklen.

Kapitel 5. Parablen.

1. Parablen er det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra et givet Punkt F (Brændpunktet) og en given Linie l (Ledelinien) er numerisk ligestore.

Vi lægger x-Aksen gennem F $\perp$ l med positiv Retning fra l mod F. x-Aksens Skæringspunkt med l kaldes L, og vi vælger LF's Midtpunkt til Begyndelsespunkt. Afstanden LF er bekendt og sættes $= \frac{p}{2}$. Ligning for l er da $x + \frac{p}{4} = 0$ og $F \equiv (\frac{p}{4}, 0)$.



Lad nu $M \equiv (x,y)$ være et vilkaarligt Punkt paa Parablen, og PM være $\perp$ l. Man har da:

$$PM = x + \frac{p}{4} \text{ og } FM = \pm\sqrt{(x-\frac{p}{4})^2 + y^2},$$

og M's Koordinater maa følgelig tilfredsstille Ligningen $x + \frac{p}{4} = \pm\sqrt{(x-\frac{p}{4})^2 + y^2}$ eller

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{16} = x^2 - \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{16} + y^2 \text{ eller}$$

$\underline{y^2 = px}$, hvilket derfor er Parablens Ligning. — O kaldes Parablens Toppunkt, p kaldes Parameteren og FM Brændstraalen til Punktet M.

Brændstraalens Længde er $FM = PM = x + \frac{p}{4}$.

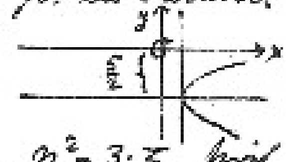
2. Parablen er symmetrisk m. H. t. x-Aksen. Dersom p er positiv, som i Udviklingen ovenfor, vil Parablen kun have Punkter til højre for y-Aksen, thi $y^2 = px$ giver y komplex for x negativ.

Da $y = \pm\sqrt{px}$, ser man, at y vokser numerisk samtidig med x. Parablen bestaar altsaa af 2 symmetriske Grene, der fra (0,0) strækker sig i det uendelige til højre Side, idet de stadig fjerner sig fra x-Aksen.

Tangenten i (0,0) bestemmes ved at differentiere $y^2 = px$

Man faar $2y\cdot\frac{dy}{dx} = p$ eller $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, der er $= \infty$ for $y = 0$.
y-Aksen er derfor Tangent til Parablen i dens Toppunkt.

3. <u>Opgave 1.</u> Bevis, at $y^2 + 5y - 3x + 7 = 0$ er Ligning for en Parabel.



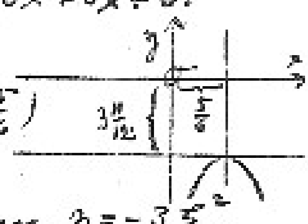
Ligningen skrives
$$y^2 + 5y + \frac{25}{4} = 3x - 7 + \frac{25}{4}$$
$$\left[y + \frac{5}{2}\right]^2 = 3\cdot\left[x - \frac{1}{4}\right].$$

Sættes nu $y + \frac{5}{2} = \eta$ og $x - \frac{1}{4} = \xi$, faar man $\eta^2 = 3\cdot\xi$, hvilket er Ligningen for en Parabel.

Ligningerne $y + \frac{5}{2} = \eta$ og $x - \frac{1}{4} = \xi$ viser, at man har valgt et nyt Koordinatsystem, og at et vilkaarligt Punkt har en Ordinat, der er $\frac{5}{2}$ større i det ny end i det gamle System, medens dets Abscisse er $\frac{1}{4}$ mindre i det ny end i det gamle System.

Det nye System har derfor Akserne $\parallel$ det gamle, og Begyndelsespunkt i Punktet $(\frac{1}{4}, \div\frac{5}{2})$. I dette ligger Parablens Toppunkt, medens dens Brændpunkt ligger i den nye x-Akse $\frac{3}{4}$ en til Højre for Toppunktet.

<u>Opgave 2</u> Samme Opgave for Ligningen $y = \div 3x^2 + 5x \div 6$.



Ligningen skrives:
$$y + 6 = -3\left(x^2 \div \frac{5}{3}x\right)$$
$$y + 6 \div 2\frac{1}{12} = -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right)$$
$$y + 3\frac{11}{12} = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2$$

Sættes nu $\eta = y + 3\frac{11}{12}$ og $\xi = x - \frac{5}{6}$, faar man $\eta = -3\xi^2$.
Vi har hermed indført et nyt Koordinatsystem, der har Begyndelsespunktet i $(\frac{5}{6}, -3\frac{11}{12})$ og Akserne $\parallel$ Akserne i det gamle System. Sættes derpaa $\xi = y_1$ og $\eta = x_1$, faar vi Ligningen
$$x_1 = -3y_1^2 \quad \text{eller} \quad y_1^2 = -\frac{1}{3}x_1,$$
der er Ligning for en Parabel. Heraf ses, dersom vi gaar tilbage til det oprindelige Koordinatsystem, at Kurven er en Parabel, hvis Toppunkt har Koordinaterne $(\frac{5}{6}, -3\frac{11}{12})$. Toppunktstangenten er $\parallel$ x-Aksen.

Parablen ligger under denne.

Opgave 3. Vis, at $y = ax^2 + bx + c$ og $x = ay^2 + by + c$ fremstiller Parabler og angiv, hvorledes de er beliggende i Koordinatsystemet.

5. Tangentbestemmelse ved Parablen.

Vi differentierer $y^2 = px$ m. H. t. x og faar da

$$2y\frac{dy}{dx} = p \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$$

En Tangent med Røringspunktet (x_1, y_1) har derfor Retningskoefficienten $\frac{p}{2y_1}$ og Ligningen $y - y_1 = \frac{p}{2y_1}(x - x_1)$ eller

$$2yy_1 - 2y_1^2 = px - px_1 \quad \text{eller da } y_1^2 = px_1$$

$$2yy_1 - 2px_1 = px - px_1 \quad \text{eller}$$

$$\underline{2yy_1 = p(x + x_1)} \qquad (1)$$

Eks: Find Ligningen for de Tangenter til $y^2 = 5x$, hvis Røringspunkt har Abscissen 2.

6. Tangentens Ligning paa Normalform.

Dersom $2yy_1 = p(x + x_1)$ og

(2) $x\cos\alpha + y\sin\alpha + d = 0$ skal fremstille den samme rette Linie, maa: $\frac{p}{\cos\alpha} = \frac{-2y_1}{\sin\alpha} = \frac{px_1}{d}$. Heraf findes:

$y_1 = -\frac{p\,tg\,\alpha}{2}$ og $x_1 = \frac{d}{\cos\alpha}$, der begge indsættes i $y_1^2 = px_1$. Man faar da:

$$\frac{p^2 tg^2\alpha}{4} = \frac{pd}{\cos\alpha} \quad \text{hvoraf} \quad \underline{d = \frac{p\sin^2\alpha}{4\cos\alpha}}.$$

Indsættes dette i (2) faar man

$$\underline{x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{p\sin^2\alpha}{4\cos\alpha} = 0},$$

der er Ligning for Parabeltangenten paa Normalform.

7. Ligningen for en Tangent $\parallel$ en opgiven Linie l.

Lad l have Retningskoefficienten μ. Tangentens Ligning kan la skrives: $y = \mu x + q$ (3)

hvor q skal bestemmes, udtrykt ved μ. Dersom denne Ligning skal bestemme samme ret Linie som $2yy_1 = p(x+x_1)$ maa

$$\frac{1}{2y_1} = \frac{\mu}{p} = \frac{q}{px_1}.$$ Heraf findes:

$y_1 = \frac{p}{2\mu}$ og $x_1 = \frac{q}{\mu}$, der begge indsættes i

$y_1^2 = px_1$. Derved faar man:

$\frac{p^2}{4\mu^2} = \frac{pq}{\mu}$ eller $\underline{q = \frac{p}{4\mu}}$. Dette indsættes nu i (3), hvorved man faar: $\underline{y = \mu x + \frac{p}{4\mu}}$, som derfor er Ligningen for en Tangent $\parallel$ l. (4)

Der gives altsaa én og kun én Tangent til Parablen $\parallel$ enhver opgivet ret Linie, naar denne blot ikke er $\parallel$ x-Aksen (hvorved μ bliver $= 0$).

8. <u>Find Ligningen for Tangenter fra Punktet (a,b) til Parablen $y^2=px$.</u>

Ligningen for en vilkaarlig Tangent til Parablen er $2yy_1 = p(x+x_1)$. Dersom (a,b) skal ligge paa denne, har man 1) $2by_1 = p(a+x_1)$. Desuden er 2) $y_1^2 = px_1$. Af disse to Ligninger lader x_1 og y_1 sig bestemme.

Af 2) faas saaledes $x_1 = \frac{y_1^2}{p}$, som indsat i 1) giver:

$$2by_1 = p\left(a + \frac{y_1^2}{p}\right) \text{ eller}$$

$$y_1^2 - 2by_1 + pa = 0, \text{ hvoraf}$$

3) $$y_1 = b \pm \sqrt{b^2 - pa}.$$

Heraf ser man, at der findes to Tangenter fra (a,b) til Parablen, saafremt $b^2 > pa$, 1 Tangent, hvis $b^2 = pa$. Derimod kan der ikke tegnes Tangenter fra (a,b) til Parablen, dersom $b^2 < pa$.

9. <u>Skæring mellem Parablen $y^2=px$ og en ret Linie l.</u>

Lad l have Ligningen $y = \alpha x + q$, hvor vi foreløbig antager $\underline{\alpha \gtrless 0}$.

Elimination af y giver: $\alpha^2x^2 + 2\alpha qx + q^2 = px$ eller

$$x^2 + \frac{2\alpha q - p}{\alpha^2} x + \frac{q^2}{\alpha^2} = 0 \qquad (5)$$

Af denne Ligning finder man Abscisserne til Skæringspunkterne. De tilsvarende Ordinater findes dernæst ved Indsættelse i $y = \alpha x + q$.

Løses (5) m. H. t. x, faar man: $x = \div \frac{2\alpha q - p}{2\alpha^2} \pm \sqrt{\frac{4\alpha^2 q^2 + p^2 \div 4\alpha p q}{4\alpha^4} \div \frac{q^2}{\alpha^2}}$

eller $x = \frac{-2\alpha q + p \pm \sqrt{p^2 - 4\alpha p q}}{2\alpha^2}$

Man ser heraf, at en ret Linie, der ikke er ∥ x-Aksen, skærer Parablen i 2, 1 eller 0 Punkter, eftersom $p \gtreqless 4\alpha q$.
I det mellemste Tilfælde er Linien Tangent til Parablen. Da $p = 4\alpha q$, bliver nemlig $q = \frac{p}{4\alpha}$, og l's Ligning kan derfor skrives $y = \alpha x + \frac{p}{4\alpha}$. Men dette ses netop ved Sammenligning med (4) at være Ligningen for en Tangent til Parablen.

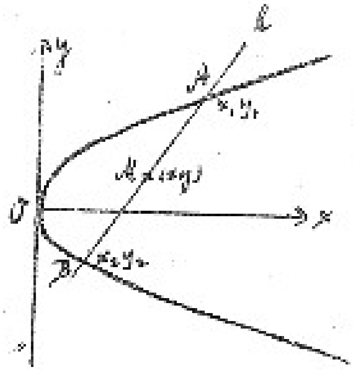
10. Vi har endnu tilbage at undersøge Tilfældet $\underline{\alpha = 0}$.
Ligningen for l bliver da $y = q$. Indsættes dette i $y^2 = px$, faar man $q^2 = px$ eller $x = \frac{q^2}{p}$.
En ret Linie ∥ x-Aksen vil saaledes skære Parablen i ét og kun ét Punkt.
Vi har derved bevist Sætningen: <u>En ret Linie, der skærer Parablen i ét Punkt og ikke er ∥ x-Aksen er Tangent til Parablen.</u>

11. Konstruktion af Parablen

Parablens Definition anviser et Middel til at konstruere et vilkaarligt Antal Punkter af Parablen.
Med et vilkaarligt Linie $m > \frac{p}{4}$ tegnes en Cirkel om F som Centrum. Derpaa tegnes en Linie ∥ l i Afstanden m og beliggende til samme Side for l som F. Den skærer Cirklen i to Punkter, som begge ligger paa Parablen. Ved at lade m variere i Størrelse kan man tegne saa mange Punkter af Parablen, som man vil.

12. Diametre.

Vi vil søge det geometriske Sted for Midtpunktet af ∥ Parabelkorder. Lad α være et konstant Tal $\neq 0$. Ligningen (3) $y = \alpha x + q$ vil da, naar q varierer, være Ligning for et System af ∥ Linier, der alle har Retningskoefficienten α.



Lad l være en vilkaarlig af disse Linier. Vi søger da Skæring mellem denne og (2) $y^2 = px$.
Af (2) faar man $x = \frac{y^2}{p}$, som indsat i (3) giver $y = \frac{\alpha}{p} \cdot y^2 + q$ eller $y^2 - \frac{p}{\alpha} y + \frac{pq}{\alpha} = 0$ (6)
Dersom de to Skæringspunkter betegnes $A \equiv (x_1 y_1)$ og $B \equiv (x_2 y_2)$, vil y_1 og y_2 være Rødder i (6). Dersom AB's Midtpunkt betegnes $M \equiv (x\,y)$, vil

$$\underline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{2\alpha},$$ der er konstant, da α er det.

Vi ses deraf, at Midtpunktet af alle Parabelkorder, der har Retningskoefficienten α, ligger paa Linien $y = \frac{p}{2\alpha}$. Omvendt vil ethvert Punkt af $y = \frac{p}{2\alpha}$, som tillige ligger paa Parablens konkave Side, være Midtpunkt for den Korde, der kan tegnes gennem Punktet ∥ l.

<u>Det geometriske Sted for Midtpunktet af ∥ Parabelkorder, der har Retningskoefficienten α, er saaledes den Del af Linien $y = \frac{p}{2\alpha}$, hvis Punkter ligger paa Parablens konkave Side.</u>

Samlingen af ∥ Korder kaldes et <u>Kordesystem</u>, og $y = \frac{p}{2\alpha}$ kaldes <u>Kordesystemets Diameter</u>. Alle Parablens Diametre er ∥ x-Aksen.

Enhver Linie $y = k$ kan opfattes som Diameter for et Kordesystem, hvis Retningskoefficient er $\frac{p}{2k}$. $\boxed{\text{NB §13 se Side 30}}$

<u>Opgave</u>. Af en Parabel er opgivet Brændpunkt og Ledelinie samt en Diameter. Konstruer en af Kordesystemets Korder.

Opgave 2. Af en Parabel er opgivet Brændpunkt, Ledelinie samt Retningen af et Kordesystem. Konstruér Systemets Diameter.

14. Opgave. Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra man kan tegne Parabeltangenter, der er ⊥ hinanden.

Ligningen for en vilkaarlig Tangent er $y = \mu x + \frac{p}{4\mu}$

" " " derpaa ⊥ " er $y = -\frac{x}{\mu} - \frac{p\mu}{4}$.

Subtraheres de to Ligninger, faar man

$$0 = x\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) + \frac{p}{4}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) \quad \text{eller}$$

$\underline{x + \frac{p}{4} = 0}$, da $\mu + \frac{1}{\mu}$ ikke kan blive 0.

Det geometriske Sted er derfor Ledelinien.

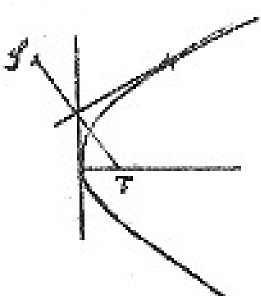
15. Det geometriske Sted for Brændpunktets Projektion paa en Tangent er Toppunktstangenten.

Ligningen for en vilkaarlig Tangent er ²) $y = \mu x + \frac{p}{4\mu}$. Ligningen for en Linie gennem Brændpunktet og ⊥ denne er

$$y = -\frac{1}{\mu}\left(x - \frac{p}{4}\right) \quad \text{eller} \quad {}^{3)}\ y = -\frac{1}{\mu}x + \frac{p}{4\mu}$$

Ligningerne ²) og ³) kan imidlertid kun være rigtige samtidig, dersom $x = 0$; thi ellers maatte $\mu = -\frac{1}{\mu}$ ɔ: $\mu^2 = -1$ eller μ kompleks.

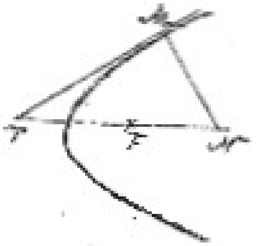
16. Det geometriske Sted for det Punkt S, der er symmetrisk med Brændpunktet m. H. t. en Tangent, er Ledelinien.



Lad $S \equiv (\xi, \eta)$. F's Projektion paa Tangenten har da ifølge §15 x Koordinaten 0. Da nævnte Punkt tillige er Midtpunkt for SF, vil $0 = \frac{\xi + \frac{p}{4}}{2}$ ɔ: $\xi + \frac{p}{4} = 0$, der netop er Ledeliniens Ligning.

17. Lad $M \equiv (x_1, y_1)$ være et vilkaarligt Punkt paa Parablen, og lad Tangenten og Normalen til den skære x-Aksen i T og N. Punkterne M, T og N kan da vises at ligge paa

en Cirkel, hvis Centrum ligger i Brændpunktet.



Ligningen for Tangenten $2yy_1 = p(x+x_1)$
" " x-Aksen $y = 0$ $\Big\}$ $T \equiv (-x_1, 0)$

Ligningen for Normalen $y - y_1 = -\frac{2y_1}{p}(x - x_1)$
" " x-Aksen $y = 0$ $\Big\}$ $N \equiv (\frac{p}{2} + x_1, 0)$

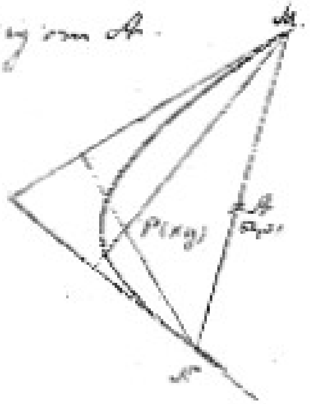
Man har derfor

$$TF = \frac{p}{4} + x_1 \quad \text{og} \quad FN = \frac{p}{2} + x_1 - \frac{p}{4} = \frac{p}{4} + x_1.$$

Desuden er Brændstraalen $FM = \frac{p}{4} + x_1$.

Heraf følger $FM = TF = FN$, hvormed Sætningen er bevist.

<u>16. Opgave</u>: MN er en Korde i Parablen $y^2 = px$ gennem et givet Punkt $A \equiv (a, 0)$. MP er i Parablens Tangent i M, og NP i Tangenten i N. Find det geom. Sted for Punktet P, naar MN drejer sig om A.



Da M og N ligger paa Parablen, kan man sætte $M \equiv (\frac{y_1^2}{p}, y_1)$ og $N \equiv (\frac{y_2^2}{p}, y_2)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ligning MP er da: 1)} & y - y_1 = -\frac{2y_1}{p}\left(x - \frac{y_1^2}{p}\right) \\ \quad\text{"} \quad \text{NP} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{2)} & y - y_2 = \div \frac{2y_2}{p}\left(x - \frac{y_2^2}{p}\right) \\ \text{Desuden er} \quad \text{3)} & \dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{p} - a} = \dfrac{y_2}{\frac{y_2^2}{p} - a} \end{array}\right\} \overline{III}$$

da M, A og N ligger paa samme rette Linie.

Vi har saaledes opstillet 3 Ligninger, der indeholder to variable Parametre y_1 og y_2, som nu skal bortskaffes.

3) kan skrives:

$$\frac{y_1 y_2^2}{p} - a y_1 = \frac{y_1^2 y_2}{p} - a y_2 \quad \text{eller}$$

$$\frac{y_1 y_2}{p}(y_2 - y_1) = \div a(y_2 - y_1) \quad \text{eller}$$

$$3) \quad \underline{y_1 y_2 = \div ap}, \text{ da } y_2 \gtrless y_1$$

Subtraheres nu 2) fra 1), faar man

$$y_2 - y_1 = \div \frac{2x}{p}[y_2 - y_1] \div \frac{2y_1 y_2}{p^2}[y_2 - y_1]$$

eller, da $y_2 \gtrless y_1$

$$1 = -\frac{2x_1}{p^2} + \frac{2y_1y_2}{p^2} \quad \text{eller da } y_1y_2 = -ap \text{ ifølge 4)}$$

$$1 = -\frac{2x}{p} + \frac{2a}{p} \quad \text{eller} \quad \underline{x = a \div \frac{p}{2}}.$$

Det geometriske Sted er altsaa en ret Linie $\parallel$ y-Aksen. Hvis A falder i Brændpunktet, faar man $a = \frac{p}{4}$ og $x = -\frac{p}{4}$. Ledelinien bliver da det geometriske Sted.

Opgaver.

1. Optegn Parablen $y^2 = 4x$ og den rette Linie l: $y = 2x - 4$. Kaldes Skæringspunkterne A og B skal man finde: 1) A og B's Koordinater, 2) Ligningen for Parabeltangenterne i A og B, 3) Koordinaterne til Tangenternes Skæringspunkt og 4) Ligningen for Diameteren til det Kordesystem, som er $\parallel l$.

2. Optegn Parablen $y^2 = 4x$. Find 1) Ligningerne for Tangenterne fra $(2,3)$, 2) Ligningerne for disse Tangenters Normaler og 3) Arealet af den Firkant, som begrænses af de to Tangenter og de to Normaler.

3. Fra Punktet $(-4,1)$ trækkes Tangenter til $y^2 = 2x$. Find Ligningen for en Cirkel gennem det givne Punkt og de to Punkter, hvori Tangenterne skærer y-Aksen. Ligger Brændpunktet indenfor, udenfor eller paa denne Cirkel?

4. Find de Arealer, der begrænses af Kurverne $x^2 + y^2 = 16$ og $y^2 = 6x$.

5. Find Ligningen for Normalerne fra $(3\frac{2}{3}, 4)$ til Parablen $y^2 = 2x$.

6. Parablen $y^2 = px$ har Brændpunktet F. En Linie $l \parallel$ x-Aksen skærer Ledelinien i L og Parablen i K. Midtpunktet af LK kaldes P. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af FP, naar l bevæger sig.

7. Givet Parablen $y^2 = px$ med Brændpunktet F. En ret Linie l bevæger sig, saaledes at den stadig er $\parallel$ x-Aksen. Den skærer Ledelinien i L og Parablen i K. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet af FL og OK. O er Parablens Toppunkt.

8. Til et vilkaarligt Punkt P paa Parablen $y^2=px$ er tegnet Brændstraalen. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem denne og en Linie gennem Begyndelsespunktet ∥ Tangenten til P.

9. Til et bevægeligt Punkt P paa $y^2=px$ trækkes Brændstraalen. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem denne og en Linie gennem (0,0) ∥ Normalen til P.

10. Find det geometriske Sted for Paraboltoppunktets Projektion paa en Paraboltangent.

11. Opgivet Parablen $y^2=px$. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af de Parabelkorder, som gaar gennem det faste Punkt (0,a).

12. En Linie gaar gennem en Parabels Brændpunkt, om hvilket den drejer sig. Den skærer Parablen i A og B. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem Tangenterne i A og B.

13. Gennem Toppunktet O af en Parabel trækkes en vilkaarlig Korde OA. Paa denne oprejses i A en Linie vinkelret, og denne skærer Parablens Akse i B. Bevis, at AB's Projektion paa Aksen er konstant.

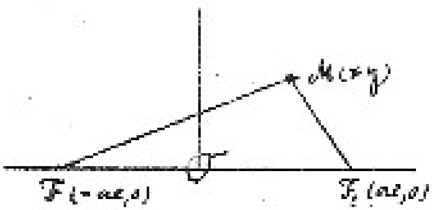
14. Gennem Toppunktet O i en Parabel trækkes to paa hinanden vinkelrette Parabelkorder OA og OB. Bevis, at AB gaar gennem et fast Punkt, naar den rette Vinkel AOB drejer sig om O.

Tilføjelse §13. ved at søge Skæring mellem $y=k$ og $y^2=px$. Man faar da $k^2=px$ eller $x=\frac{k^2}{p}$. Skæringspunktet har altsaa Koordinaterne $(\frac{k^2}{p}, k)$. Lign. for Tangenten i dette Punkt er $2yk=p(x+\frac{k^2}{p})$, hvoraf man ser, at Tangentens Retningskoefficient er $=\frac{p}{2k}$. Tangenten til Diameterens Skæringspunkt med Parablen er altsaa ∥ det til Diameteren hørende Kordesystem.

Kapitel 6. Ellipsen.

<u>1. Ellipsen er det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to faste Punkter – numerisk taget – har en opgiven Sum $2a$.</u>

De faste Punkter betegnes F og F_1, og vi lægger Koordinatsystemet saaledes, at Begyndelsespunktet O falder sammen med FF_1's Midtpunkt og saaledes, at OF_1 falder sammen med x-Aksens positive Retning. F_1 og F kaldes Ellipsens højre og venstre Brændpunkt. Dersom $M \equiv (x, y)$ er et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted, har man ifølge Ellipsens Definition: $\underline{FM + F_1M = 2a}$. (1)



Vi giver nu F_1 Koordinaterne $(ae, 0)$, hvorved F faar Koordinaterne $(-ae, 0)$, hvor e er et opgivet Tal, som kaldes Ellipsens <u>Eksentricitet</u>, og som altid er < 1, da $FF_1 < FM + F_1M$, hvoraf

$$2ae < 2a \text{ eller}$$
$$e < 1.$$

Vi har nu $\quad ^{1)}\; FM^2 = (x+ae)^2 + y^2$

og $\quad \underline{F_1M^2 = (x-ae)^2 + y^2}$, hvoraf ved Subtraktion

$^{2)}\; FM^2 \div F_1M^2 = 4aex$. Men ifølge Ellipsens Definition

er $\quad ^{3)}\; \underline{FM + F_1M = 2a}$. Divideres 3) op i 2), faar man:

$FM \div F_1M = 2ex$, der dernæst sammenholdes med

$^{3)}\; \underline{FM + F_1M = 2a}$. Adderes disse to Ligninger, faar man

(2) $\quad \underline{FM = a + ex}$, medens Subtraktion giver

$\underline{F_1M = a - ex}$. FM og F_1M kaldes <u>Brændstraaler til M</u>,

og deres Længder kan findes af disse Ligninger.

Vi indsætter nu $FM = a + ex$ i Ligning 1):

$$(a+ex)^2 = (x+ae)^2 + y^2$$
$$a^2 + 2aex + e^2x^2 = x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2$$

$$y^2 = a^2 - x^2 + e^2x^2 - a^2e^2$$

$$y^2 = (a^2 - x^2) - e^2(a^2 - x^2) \quad \text{eller}$$

$$y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2) \qquad (3)$$

hvilket er Ligningen for Ellipsen.

2. Kurvens Form.

1) Kurven er symmetrisk m. H. t. x-Aksen, thi dersom (x,y) ligger paa Kurven, vil $(x,-y)$ ogsaa göre det.

2) Kurven er ogsaa symmetrisk m. H. t. y-Aksen, thi dersom (x,y) ligger paa Kurven, vil $(-x,y)$ ogsaa göre det.

3) Den er desuden punktsymmetrisk m. H. t. O, thi dersom (x,y) ligger paa Kurven, vil $(-x,-y)$ ogsaa göre det; og (x,y) og $(-x,-y)$ ligger paa samme rette Linie gennem O, fra hvilket de ligge har Afstanden $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

4) Da $e<1$, maa $x^2 \leq a^2$ eller $a \geq x \geq -a$. Kurven har derfor ingen Punkter, hvis Abscisser er numerisk $> a$.

$x = \pm a$ giver indsat i Kurvens Ligning $y = 0$

Punkterne $A_1 \equiv (a,0)$ og $A \equiv (-a,0)$ vil derfor ligge paa Ellipsen og kaldes dens *Toppunkter*, og man har $\frac{FF_1}{AA_1} = e$.

5) Maksimum for y faas for $x = 0$, der indsat i (3) giver

$$y^2 = a^2(1-e^2)$$

Naar den störste Værdi af y betegnes ved b, har man:

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

a og b kaldes *Ellipsens Halvakser*, og da $e<1$, vil $b<a$.

a kaldes derfor den *halve Storakse*, b den *halve Lilleakse*.

6) Det er nu tilstrækkeligt at bestemme Kurvens Form indenfor 1ste Kvadrant, og vi bruger hertil Ligningen:

$$y = \sqrt{(1-e^2)(a^2-x^2)}$$

For $x = a$ er $y = 0$. Naar x aftager fra a til 0, vil y vokse fra 0 til b.

Vi mangler da kun – for at kunne tegne Ellipsen nøie bestemme dens Tangent i (a,0) og i (0,b).

Ved at differentiere Ligning (3) faar man:

$$2y\frac{dy}{dx} = (1-e^2)\cdot(-2x) \quad \text{eller}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^2-1)\cdot x}{y}$$

For Punktet (a,0) er derfor $\frac{dy}{dx} = \infty$ og for Punktet (0,b) er $\frac{dy}{dx} = 0$.

Kurven lader sig nu tegne. Den faar vedstaaende Form.

3. Konstantligningen.

Vi havde ovenfor $b^2 = a^2(1-e^2)$, hvoraf $1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ (4)

Det dobbelte af Ellipsens Ordinat til Brændpunktet kaldes Parametren og betegnes ved p.

Punktet $(ae, \frac{p}{2})$ ligger saaledes paa Ellipsen, og dersom dets Koordinater indsættes i (3), faar man:

$$\frac{p^2}{4} = (1-e^2)(a^2-a^2e^2) \text{, hvoraf}$$

$$\frac{p}{2} = a(1-e^2) \quad \text{eller} \quad 1-e^2 = \frac{p}{2a} \qquad (5).$$

Ved at sammenholde (4) og (5), faar man

$1-e^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$, den saakaldte Konstantligning, der viser, hvorledes Ellipsens Konstanter a, b, e og p afhænger af hinanden.

Ved Hjælp af denne Ligning kan b konstrueres, naar a og e er opgivne, eller, hvad der er det samme, naar Brændpunkter og Toppunkter er givne. Man har nemlig: $b^2 = a^2 - a^2e^2$, hvoraf man ser, at en Cirkel med F_1 som Centrum og ae som Radius vil skære y-Aksen i Punktet (0,b).

4. Andre Ligninger for Ellipsen.

Som Ligning for Ellipsen har vi fundet $y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$. (3)
Men ifølge Konstantligningen er $1-e^2 = \frac{b^2}{a^2}$. Indsættes dette faar man: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ eller

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2-x^2) \quad \text{eller} \quad \underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (6)$$

hvilket er den almindeligst brugte Form for Ellipsens Ligning. For $a = b$ gaar Ellipsen over til at blive en Cirkel, som ses ved at indsætte $a = b$ i Ligning (6).

Da $1-e^2 = \frac{p}{2a}$ faar man ved Indsættelse i (3)

$$y^2 = \frac{p}{2a}(a^2-x^2).$$

Opgave 1. Vis, at Ligningen $3x^2+4y^2=12$ fremstiller en Ellipse og bestem dens Konstanter.

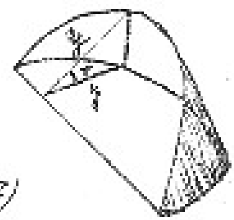
Opgave 2. Samme Opgave for Ligningen $4x^2+3y^2=12$.
Ligningen omdannes til $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, der ved Sammenligning med (6) giver $a=\sqrt{3}$ $b=2$. Men (6) er udledt under den Forudsætning at $a > b$, hvilket ikke her er Tilfældet. Indsættes de fundne Værdier for a og b i Konstantligningen, faar man da ogsaa e kompleks.
Vi maa derfor sætte $x=\eta$ og $y=\xi$ og faar da

$$\frac{\xi^2}{4}+\frac{\eta^2}{3}=1,$$ der viser, at den opgivne Ligning er Ligning for en Ellipse, hvis Storakse ligger ud ad y-Aksen, i hvilken ogsaa Brændpunkterne ligger. Man faar da $a=2$ $b=\sqrt{3}$ og ved Indsættelse i Konstantligningen $e=\frac{1}{2}$ og $p=3$.

Opgave 3. Vis, at $5x^2+2x+7y^2-7y=10$ er Ligning for en Ellipse. Find dernæst dens Beliggenhed i Koordinatsystemet samt dens Konstanter.

5. Ellipsen som Projektion af en Cirkel.

Vi vil sammenligne Ellipseligningen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$
med Ligningen $Y^2 = a^2 - x^2$, som
er Ligning for en Cirkel over Ellipsens Storakse som Diameter.
Vi betragter de to Punkter (x, y) og (x, Y), der ligger henholdsvis paa Ellipsen og paa Cirklen og har samme Projektion paa x-Aksen. Ved at dividere de to Ligninger med hinanden faar man: $\frac{y^2}{Y^2} = \frac{b^2}{a^2}$ eller $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$. (7)



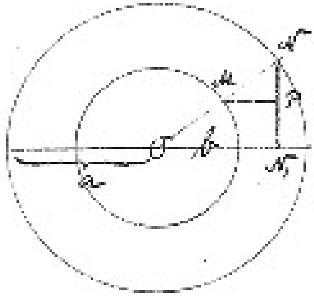
Dersom man nu drejer Cirklen om Storaksen en Vinkel v, hvis cosinus er $= \frac{b}{a}$ og dernæst projicerer den paa Ellipsens Plan, vil Ordinaten Y's Projektion paa denne være
$Y \cos v = Y \cdot \frac{b}{a}$; men dette Udtryk er ifølge (7) netop $= y$.
Cirklens Projektion paa Ellipsens Plan er derfor netop den opgivne Ellipse.
I Almindelighed gælder det, at Projektionen af en Cirkel paa et Plan, der ikke er ∥ Cirklens Plan, er en Ellipse.
Vi konstruerer nemlig blot en Plan ∥ den opgivne gennem Cirklens Centrum. Cirklen faar da Ligningen $x^2 + Y^2 = a^2$, dersom Koordinatsystemet lægges som før. Projektionen af Punktet (x, Y) har da Koordinaterne x og $Y \cos v$, og dersom vi betegner disse med x og y, faar man $y = Y \cos v$, hvoraf $Y = \frac{y}{\cos v}$, der indsættes i Cirklens Ligning.
Derved faar man $x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 v} = a^2$ eller

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 v} = 1,$$

der er Ligning for en Ellipse med Halvakserne a og $a \cos v$.

<u>6. Konstruktion af Ellipsen.</u>

A. Over Storaksen og Lilleaksen som Diametre tegnes to Cirkler.



Dersom man nu gennem O tegner en vilkaarlig Radius, der skærer de to Cirkler i M og N og projicerer M paa Ordinaten til N, fremkommer der et Punkt P, som ligger paa Ellipsen; thi $\frac{N_1P}{N_1N} = \frac{b}{a}$ eller $\frac{N_1P}{y} = \frac{b}{a}$, hvoraf $N_1P = y\cdot\frac{b}{a}$; men dette er ifølge (7) $= y$.

Ad denne Vej lader en Ellipse sig konstruere Punkt for Punkt, naar dens Akser er opgivet.

Lad $P \equiv (x\,y)$, da vil $x = a\cos\varphi$ og $y = b\sin\varphi$, hvor $\varphi = \angle N_1ON$, den saakaldte <u>ekscentriske Anomali</u>. De to Ligninger benyttes ofte med Fordel i Stedet for Ellipsens Ligning. Skrives de $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ og $\frac{y}{b} = \sin\varphi$, vil man ved at kvadrere og addere dem faa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

B. Definitionsligningen $FM + F_1M = 2a$ kan benyttes til punktvis Konstruktion af en Ellipse, hvis Brændpunkter og Toppunkter er opgivet.

Man tegner blot en Cirkel om F som Centrum og en Cirkel til om F_1 som Centrum, idet man sørger for, at deres Radiers Sum er $= 2a$. De to Skæringspunkter for de saaledes bestemte Cirkler ligger da paa Ellipsen. Ved at variere Radiernes Længde, saaledes at deres Sum dog stadig er $= 2a$, kan man konstruere saa mange Punkter af Ellipsen, som man vil.

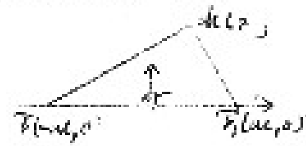
<u>Kapitel 7. Hyperbler.</u>

<u>1. Hyperblen er det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to faste Punkter – numerisk taget – har en given Differens $2a$.</u>

De faste Punkter betegnes F og F_1, og Koordinatsystemet lægges saaledes, at Begyndelsespunktet O falder sammen med FF_1's Midtpunkt, og saaledes at OF_1 falder sammen med x-Aksens positive Retning.

F_1 og F kaldes højre og venstre Brændpunkt. Dersom $M=(x,y)$ er et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted, har man ifølge Hyperblens Definition: $FM - F_1M = \pm 2a$, (1)
hvor man læser $+2a$, naar M ligger i 1ste eller 4de Kvadrant, ellers $\div 2a$. Vi giver dernæst F_1 Koordinaterne $(ae, 0)$, hvorved F faar Koordinaterne $(-ae, 0)$, hvor e er et opgivet Tal, som kaldes Hyperblens Excentricitet, og som altid er >1, da $FF_1 > FM - F_1M$, hvoraf

$$2ae > 2a \quad \text{eller} \quad e > 1.$$



Vi har nu $FM^2 = (x+ae)^2 + y^2$ (2)
$F_1M^2 = (x-ae)^2 + y^2$ hvoraf ved Subtraktion: $FM^2 - F_1M^2 = 4aex$, der dernæst sammenholdt med (1): $FM - F_1M = \pm 2a$. Ved at dividere denne Ligning op i den foregaaende faas:
$FM + F_1M = \pm 2ex$, der sammenholdes med (1): $FM - F_1M = \pm 2a$. Adderes disse Ligninger, faar man $FM = \pm(a+ex)$, medens Subtraktion giver: $F_1M = \pm(ex \div a)$

FM og F_1M kaldes Brændstraaler til M, og deres Længder kan findes af disse Ligninger. Man læser $+$ foran Parentesen, naar M ligger i 1ste eller 4de Kvadrant, ellers $\div$.

Man indsætter nu $FM = \pm(a+ex)$ i Ligning (2) og faar:

$$(a+ex)^2 = (x+ae)^2 + y^2$$

$$a^2 + 2aex + e^2x^2 = x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2$$

$$y^2 = e^2x^2 - x^2 + a^2 - a^2e^2$$

$$y^2 = x^2(e^2-1) - a^2(e^2-1) \quad \text{eller}$$

$$y^2 = (e^2-1)(x^2-a^2), \qquad (3)$$

hvilket er Ligningen for Hyperblen.

2. Kurvens Form.

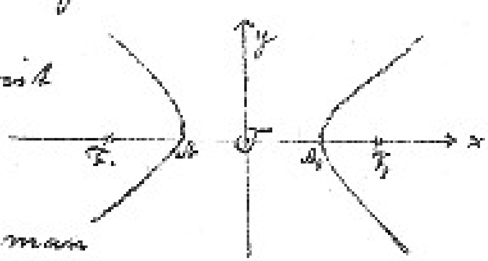
1) Ved en lignende Fremgangsmaade som ved Ellipsen ses det, at Kurven er symmetrisk m. H. t. x-Akse og y-Akse og punktsymmetrisk m. H. t. O.

2) Da $e > 1$, maa $x^2 > a^2$, hvoraf fölger $x \geqq a$ eller $x \leqq \div a$. Kurven har altsaa ingen Punkter, hvis Abscisser ligger mellem $+a$ og $\div a$. $x = \pm a$ giver indsat i (3) $y = 0$. Punkterne $A_1 \equiv (a, 0)$ og $A \equiv (-a, 0)$ ligger derfor paa Hyperblen og kaldes dens Toppunkter, og man har $\frac{OF_1}{OA_1} = e$.

3) Vi behöver kun at undersöge Kurvens Form i 1ste Kvadrant og benytter dertil Ligningen $y = \sqrt{(e^2-1)(x^2-a^2)}$. Hvoraf ses det, at $x = a$ giver $y = 0$. Naar x vokser fra a mod $+\infty$, vil ogsaa y vokse mod $+\infty$.

4) Ved Differentiation af Ligning (3) ses man, at Tangenten i $A_1 \equiv (a, 0)$ er $\perp$ x-Aksen.

Kurvens Form er da som vist i hosstaaende Figur.



3. Konstantligningen.

Indsættes i (3) $x = 0$, faar man $y^2 = -a^2(e^2-1)$, der i Overensstemmelse med Kurvens Form giver y kompleks. Man sætter nu $b^2 = a^2(e^2 \div 1)$ og faar $$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$$

a og b kaldes Hyperblens Halvakser, men der er ikke her som ved Ellipsen gjort nogen Forudsætning om, at $a > b$.

Det dobbelte af Ordinaten til Brændpunktet kaldes *Parameteren* og betegnes med p.
Som ved Ellipsen faar man da $e^2-1=\frac{p}{2a}$, hvoraf *Konstantligningen*

$$e^2-1=\frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{2a} \qquad (4)$$

b kan konstrueres af Ligningen $b^2=a^2e^2-a^2$, naar a og e kendes, eller, hvad der er det samme, naar Brændpunkter og Toppunkter er opgivne. Man tegner blot med A_1 som Centrum og ae som Radius en Cirkel, der da vil skære y-Aksen i Punktet $(0,b)$

4. Andre Ligninger for Hyperblen.

Ved at indsætte $e^2-1=\frac{b^2}{a^2}$ i Ligning (3) faar man som ved Ellipsen $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ hvoraf

$$\frac{x^2}{a^2}\div\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

For $a=b$ faar man den saakaldte *ligesidede Hyperbel*, hvis Ligning er $x^2-y^2=a^2$.
Da $e^2-1=\frac{p}{2a}$ ifølge (4), faar man ved at indsætte i (3)

$$y^2=\frac{p}{2a}(x^2-a^2).$$

5. Konstruktion af Hyperblen.

Definitionsligningen $FM-F_1M=\pm 2a$ kan benyttes til at konstruere Hyperblen punktvis. Man tegner nemlig om F og F_1 som Centrer to Cirkler, hvis Radier har Differensen $2a$. De to fremkomne Skæringspunkter ligger da paa Hyperblen. Ved dernæst at variere Radiernes Længde, saaledes at deres Differens stadig er $2a$, kan man bestemme ligesaa mange Punkter af Hyperblen, som man vil.

Kapitel 8. Tangentbestemmelse ved Ellipsen og Hyperblen. Skæring mellem de to Kurver og en ret Linie.

1. Tangentbestemmelse.

Ligningen for en Ellipse og en Hyperbel, taget under et, kan skrives:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Vi differentierer m. H. t. x og faar:

$$\frac{2x}{a^2} \pm \frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0, \text{ hvoraf } \frac{dy}{dx} = \mp\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

En Tangent med Røringspunktet $(x_1 y_1)$ har da Retningskoefficienten $\mp\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ og derfor Ligningen

$$y - y_1 = \mp\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1), \text{ hvoraf ved Division}$$

med $\mp\frac{b^2}{y_1}$ $\qquad \mp\frac{y y_1}{b^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x x_1}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2}$ eller

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2}.$$ Men da $(x_1 y_1)$

ligger paa (1) vil $\qquad \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

Ligningen for Tangenten vil derfor være:

$$\underline{\frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = 1}. \qquad (2)$$

2. Ligningen for en Tangent ∥ en opgiven Linie l.

Lad l have Ligningen $y = \mu x + q$, hvor q skal bestemmes udtrykt ved μ, som er opgivet.

Skal denne Ligning fremstille samme rette Linie som (2), maa

$$\frac{x_1}{-\mu a^2} = \frac{\pm y_1}{b^2} = \frac{1}{q}, \text{ hvoraf}$$

$$x_1 = -\frac{\mu a^2}{q} \text{ og } y_1 = \pm\frac{b^2}{q}. \text{ Indsættes dette i}$$

$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ faar man: $\qquad \frac{a^2\mu^2}{q^2} \pm \frac{b^2}{q^2} = 1$, hvoraf

$$q = \pm\sqrt{a^2\mu^2 \pm b^2}, \text{ der indsat i } y = \mu x + q$$

giver $\qquad \underline{y = \mu x \pm \sqrt{a^2\mu^2 \pm b^2}} \qquad (3)$

Man læser + under Rodtegnet for Ellipsen, ÷ for Hyperblen.
Ligningen viser, at man altid kan tegne to Tangenter til en Ellipse ∥ en opgiven ret Linie. Ved Hyperblen kan dette imidlertid kun gøres, saafremt $a^2\mu^2 > b^2$ eller saafremt $|\mu| > \frac{b}{a}$.

<u>3. Opgave:</u>

Find Ligningen for Tangenterne fra $(3,2)$ til $\frac{x^2}{25} \div \frac{y^2}{6} = 1$.
Ligningen for en Tangent med Retningskoefficienten μ er

$$y = \mu x \pm \sqrt{25\mu^2 \div 6}.$$

Paa denne skal imidlertid $(3,2)$ ligge. Man har derfor

$$2 = 3\mu \pm \sqrt{25\mu^2 - 6} \quad \text{, hvoraf}$$

$$(2-3\mu)^2 = 25\mu^2 - 6$$

$$\mu^2 + \frac{3}{4}\mu \div \frac{5}{8} = 0 \quad \text{, hvoraf} \quad \mu = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \div\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Ligningen for de to Tangenter er derfor

$$y - 2 = \tfrac{1}{2}(x-3) \quad \text{og} \quad y - 2 = -\tfrac{5}{4}(x-3) \quad \text{eller}$$

$$\underline{x - 2y + 1 = 0} \quad \text{og} \quad \underline{5x + 4y \div 23 = 0}$$

<u>4. Skæring mellem Ellipse & Hyperbel og en ret Linie l.</u>

Lad l have Ligningen $y = \alpha x + q$.
Ellipsen og Hyperblen har, taget under ét, Ligningen $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Elimination af y giver:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{(\alpha x + q)^2}{b^2} = 1.$$

$$x^2\left[\frac{1}{a^2} \pm \frac{\alpha^2}{b^2}\right] \pm \frac{2\alpha q}{b^2}\cdot x \pm \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a)$$

$$x^2\left[b^2 \pm a^2\alpha^2\right] \pm 2\alpha a^2 q\cdot x \pm q^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$x^2 \pm \frac{2\alpha a^2 q}{b^2 \pm a^2\alpha^2}\cdot x + \frac{\pm q^2 a^2 - a^2 b^2}{b^2 \pm a^2\alpha^2} = 0$$

$$x = \frac{\mp \alpha a^2 q \pm ab\cdot\sqrt{b^2 \pm a^2\alpha^2 \mp q^2}}{b^2 \pm a^2\alpha^2} \qquad (4)$$

Heraf ser man, at en ret Linie skærer Ellipsen eller Hyperblen i 2, 1 eller 0 Punkter, eftersom Ligning (4) har 2, 1 eller 0 reelle

Rödder. Ligningen har en reel Rod, dersom

$$b^2 \pm a^2\alpha^2 \mp q^2 = 0 \quad \text{eller}$$

$$q = \pm\sqrt{a^2\alpha^2 \pm b^2}$$ og i dette Tilfælde faar

(1) Ligningen $y = \alpha x \pm \sqrt{a^2\alpha^2 \pm b^2}$, der ved Sammenligning med (3) ses at være Tangent til Kurven, ≠ en Linie, hvis Retningskoefficient er α.

Vi mangler endnu at undersöge det Tilfælde, hvor Koefficienten til x^2 i Ligning (a) er $= 0$.

Man har da: $\frac{1}{a^2} \pm \frac{\alpha^2}{b^2} = 0$.

Denne Ligning kan aldrig tilfredsstilles for Ellipsen, da en Sum af to Kvadrater aldrig kan blive 0, med mindre de begge to er det.

For Hyperblen har vi derimod $\frac{1}{a^2} - \frac{\alpha^2}{b^2} = 0$ ɔ: $\alpha = \pm\frac{b}{a}$

Gennem hvert Punkt i Planen kan der altsaa trækkes to rette Linier med Retningskoefficienterne $\pm\frac{b}{a}$, som skære Hyperblen i ét uendelig fjernt Punkt.

Blandt disse to Systemer af Linier vil vi finde dem, der skærer Hyperblen i to uendelig fjerne Punkter.

De skal i Ligningen (a) saavel Koefficienten til x^2 som til x være 0. Man skal altsaa samtidig have:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{\alpha^2}{b^2} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{2\alpha q}{b^2} = 0 \quad ɔ:$$

$$\alpha = \pm\frac{b}{a} \quad \text{og} \quad q = 0.$$

De to rette Linier $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x$ vil altsaa skære Hyperblen i 2 uendelig fjerne Punkter. De to Linier kaldes Hyperblens Asymptoter.

Tillige ser man: Dersom en ret Linie har et og kun et Punkt fælles med en Ellipse er den Tangent til Kurven.

Dersom en ret Linie har et og kun et Punkt fælles med Hyperblen og ikke er $\neq$ en af Asymptoterne, er den Tangent til Kurven.

Af Ligning (3) ses let, at man for alle Hyperbeltangenter har $|\mu| \geq \frac{b}{a}$. For $\mu = \pm \frac{b}{a}$ gaar (3) over til Ligningen $y = \pm \frac{b}{a} x$. Asymptoterne kan derfor betragtes som Tangenter, hvis Röringspunkt ligger uendelig fjernt. Alle andre Hyperbeltangenter danner spidse Vinkler med x-Aksen, som er större end Vinklen fra x-Aksen til Asymptoterne.

5. Tangentens Ligning paa Normalform

Vi vil bringe $\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1$ paa Formen $x\cos\alpha + y\sin\alpha + d = 0$. Hvis de to Ligninger skal fremstille samme rette Linie maa

$$\frac{\cos\alpha}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\left(\pm\frac{y_1}{b^2}\right)} = \frac{d}{-1} \quad \text{eller}$$

$$\frac{a\cos\alpha}{\left(\frac{x_1}{a}\right)} = \frac{b\sin\alpha}{\left(\pm\frac{y_1}{b}\right)} = \frac{d}{-1}$$

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{\left(\frac{x_1^2}{a^2}\right)} = \frac{b^2\sin^2\alpha}{\left(\frac{y_1^2}{b^2}\right)} = d^2$$

$$\frac{a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha}{\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2}} = d^2,$$

eller da Röringspunktet (x_1, y_1) ligger paa Kurven og altsaa $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ vil

$$d^2 = a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha$$

$$d = \pm\sqrt{a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha}$$

Ligningen paa Normalform er derfor

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha \pm \sqrt{a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha} = 0 \qquad (5)$$

Man læser + under Rodtegnet for Ellipsen, ÷ for Hyperblen.

Kapitel 9. Diametren.

1. Vi vil søge det geometriske Sted for Midtpunktet af ∥ Korder i en Ellipse eller en Hyperbel.

Lad l være en ret Linie med Ligningen ¹) $y = \alpha x + q$, hvor α er konstant under den efterfølgende Undersøgelse, medens q varierer. Ligningen for Ellipse og Hyperbel er ²) $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

Elimination af y fører som i Kap. 8. til Ligningen:

$$³)\quad x^2 \pm \frac{2\alpha a^2 q}{b^2 \pm a^2\alpha^2}\, x + \frac{\pm q^2 a^2 - a^2 b^2}{b^2 \pm a^2\alpha^2} = 0$$

Lad l skære Kurven i $A \equiv (x_1, y_1)$ og $B \equiv (x_2 y_2)$.
x_1 og x_2 vil da være Rødder i Ligning ³).
Dersom nu AB's Midtpunkt betegnes $M \equiv (x, y)$,
har man $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \mp \frac{\alpha a^2 q}{b^2 \pm a^2\alpha^2}$ (a)
Da M ligger paa l, er tillige $y = \alpha x + q$ (b)
Elimineres q af (a) og (b), faar man

$$x = \mp \frac{a^2\alpha}{b^2 \pm a^2\alpha^2}(y - \alpha x) \quad \text{eller}$$

$$x b^2 \pm a^2\alpha^2 x = \mp a^2\alpha y \pm a^2\alpha^2 x, \text{ hvoraf}$$

$$x b^2 = \mp a^2\alpha y \quad \text{eller} \quad \underline{y = \mp \frac{b^2}{a^2\alpha} \cdot x} \qquad (c)$$

der er Ligningen for det søgte geometriske Sted.
Man ser heraf, at Midtpunktet for en vilkaarlig Korde med Retningskoefficienten α ligger paa den rette Linie

$$y = \mp \frac{b^2}{a^2\alpha} \cdot x.$$

Omvendt vil ethvert Punkt paa Linien $y = ÷ \frac{b^2}{a^2\alpha} x$, som tillige ligger indenfor Ellipsen være Midtpunkt for den Korde, der kan tegnes gennem Punktet i den givne Retning.
For Hyperblen gælder følgende:
Hvis α er valgt saaledes, at Korderne forbinder et Punkt af den ene Hyperbelgren med et Punkt af den anden, vil ethvert Punkt paa Linien $y = \frac{b^2}{a^2\alpha} x$ være Midtpunkt for en Korde, der kan

betegnes gennem Punktet i den givne Retning.

Hvis α derimod er valgt saaledes, at Korderne forbinder Punkter paa samme Hyperbelgren, vil ethvert Punkt paa Linien $y = \frac{b^2}{a^2\alpha}\cdot x$, der tillige ligger paa samme Side af Kurven som et af Brændpunkterne, være Midtpunkt for en Korde ∥ den opgivne Retning.

Det geometriske Sted for Midtpunktet af ∥ Korder, der har Retningskoefficienten α, er derfor en Del af (eventuelt hele) Linien $y = \mp\frac{b^2}{a^2\alpha}\cdot x$, idet der læses ÷ for Ellipsen, + for Hyperblen.

Samlingen af ∥ Korder kaldes et <u>Kordesystem</u>, og den rette Linie (c) kaldes <u>Kordesystemets Diameter</u>. Det ses af (c), at alle Diametre gaar gennem (0,0), som derfor kaldes Kurvens Centrum.

2. Lad en Diameter skære Kurven i $(x_1 y_1)$. Man har da $y_1 = \mp\frac{b^2}{a^2\alpha}\cdot x_1$. Kordesystemets Retningskoefficient er da $\alpha = \mp\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$.

Den Tangent, der har $(x_1 y_1)$ til Røringspunkt, har imidlertid Ligningen $\frac{x x_1}{a^2} \pm \frac{y y_1}{b^2} = 1$ og derfor Retningskoefficienten $\mp\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$. <u>Tangenten til en Diameters Skæringspunkt er derfor ∥ Diameterens Kordesystem.</u>

3. Lad Σ betegne et System af ∥ Korder, og lad D_Σ betegne Kordesystemets Diameter. Hvis nu Vinklen fra x-Aksen til Kordernes positive Retning er θ, vil Ligningen for D_Σ være $y = \mp\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\theta}\cdot x$. Dersom Vinklen fra x-Aksen til D_Σ's positive Retning er φ, har man

$$\operatorname{tg}\varphi = \mp\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\theta}, \text{ hvoraf}$$

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta = \mp\frac{b^2}{a^2} \qquad (d)$$

<u>Produktet af en Diameters og det tilhørende Kordesystems Retningskoefficienter er altsaa $= \mp\frac{b^2}{a^2}$.</u>

Lad nu II være et Kordesystem $\neq D_I$, og lad den tilhørende Diameter være D_{II}. Denne vil da faa en Retningskoefficient $tg\,v$, der bestemmes af Ligningen

$$tg\,v \cdot tg\,\psi = \mp \frac{b^2}{a^2}$$

Ved Sammenligning med (d) faar man $tg\,v = tg\,\theta$.

<u>Naar derfor en Diameter er $\neq$ en anden Diameters Kordesystem vil den anden Diameter være $\neq$ den førstes Kordesystem.</u>

To saadanne Diametre, der er $\neq$ hinandens Kordesystemer kaldes <u>konjugerede Diametre</u>. Deres Retningskoefficienter har ifølge det ovenstaaende Produktet $\mp \frac{b^2}{a^2}$.

4. Lad to konjugerede Diametre have Retningskoefficienterne $tg\,\theta$ og $tg\,\psi$. Da er $tg\,\psi \cdot tg\,\theta = \mp \frac{b^2}{a^2}$

For <u>Ellipsen</u> er $tg\,\psi \cdot tg\,\theta = \div \frac{b^2}{a^2}$, hvoraf ses, at den ene af Vinklerne θ og ψ maa være spids, den anden stump, hvad man ogsaa let kan indse ved en Tegning.

For <u>Cirklen</u> er $a = b$ og derfor $tg\,\psi \cdot tg\,\theta = \div 1$. For Cirklen er altsaa de konjugerede Diametre vinkelret paa hinanden.

For <u>Hyperblen</u> er $tg\,\psi \cdot tg\,\theta = \frac{b^2}{a^2}$, hvoraf ses, at θ og ψ enten begge er spidse eller begge stumpe.

For <u>den ligesidede Hyperbel</u> er $a = b$ og derfor $tg\,\psi \cdot tg\,\theta = 1$ hvoraf $tg\,\psi = cot\,\theta$ $\quad tg\,\psi = tg(90 - \theta)$ hvoraf

$$\psi = 90 - \theta + 180p. \quad \text{eller} \quad \psi + \theta = 90 + 180p.$$

De konjugerede Diametre danner altsaa Vinkler med x-Aksen, af hvilke de to spidse er Komplementer.

<u>Opgaver</u>

1. Bevis, at der mellem en Hyperbel og dens Asymptoter afskæres ligestore Stykker paa en vilkaarlig Retlinie
2. Bevis, at en Hyperbeltangents Røringspunkt ligger ligelangt fra

de Punkter, hvori Tangenten skærer Asymptoterne.

3. Bevis, at Afstandene fra Asymptoterne til et vilkaarligt Punkt paa Hyperblen har et konstant Produkt. Benyt dette til at finde Ligningen for en ligesidet Hyperbel, naar dens Asymptoter tages til Koordinatakser.

4. Bevis, at den Trekant, der begrænses af Asymptoterne og en vilkaarlig Hyperbeltangent, har konstant Areal.

5. Find Produktet af Afstandene fra en vilkaarlig Ellipsetangent til Brændpunkterne, udtrykt ved b (den lille Halvakse).

6. Bevis, at Summen af Kvadraterne af to konjugerede Halvdiametre i en Ellipse er konstant. (Benyt: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ som Ligning for Ellipsen.)

7. Bevis, at det Areal, der begrænses af to konjugerede Halvdiametre og en Ellipsebue, er konstant. (Benyt, at Ellipsen kan opfattes som Projektion af en Cirkel).

8. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af Ellipsekorder gennem Punktet (m, n). (Ellipsen opfattes som Projektion af en Cirkel).

9. En Samling Ellipser har $AA_1 = 2a$ til Storakse. Vis, at Tangenter til disse Ellipser skærer hinanden i et Punkt i AA_1's Forlængelse, dersom deres Røringspunkter har samme Abscisse.

10. Af en Ellipse er opgivet Brændpunkterne F og F_1 og Toppunkterne A og A_1. Konstruer Tangenter til Ellipsen fra et Punkt i AA_1's Forlængelse.

Kapitel 10. Ledelinier.

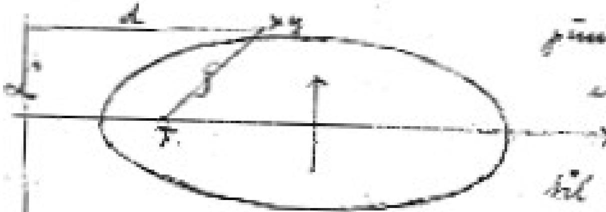
1. Parablens Ledelinie har Ligningen $x + \frac{p}{4} = 0$.

Parablen er defineret som det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra Ledelinie og Brændpunkt er numerisk lige store.

2. Ellipsen. Linierne $x = \frac{a}{e}$ og $x = -\frac{a}{e}$ kaldes Ellipsens Ledelinier. Det er to Linier ⊥ x-Aksen, der skærer denne i to Punkter, der ligger udenfor Liniestykket AA_1, hvor A og A_1 er Ellipsens Toppunkter. Dette ses af, at $\frac{a}{e} > a$, da e ved Ellipsen er < 1.

Ledelinien $x = \frac{a}{e}$ kan konstrueres, idet man skriver $x = \frac{a^2}{ae}$, hvoraf x konstrueres som 4de Proportional til ae, a og a. Paa lignende Maade kan den anden Ledelinie konstrueres.

Ellipsen er geometrisk Sted for de Punkter, hvis Afstande fra et Brændpunkt og den tilhørende Ledelinie har et Forhold, hvis numeriske Værdi er $= e$, hvor e er Ellipsens Eksentricitet.



Lad F og d være venstre Brændpunkt og venstre Ledelinie af en opgiven Ellipse og lad $(x\,y)$ være Koordinater til et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted. Dersom d og ρ er Punktets Afstande fra d og F, har man

$$\frac{\rho}{d} = e \qquad (a)$$

Men $\rho = \pm\sqrt{(x+ae)^2+y^2}$ og $d = x + \frac{a}{e}$

Man har da

$$\frac{\pm\sqrt{(x+ae)^2+y^2}}{x+\frac{a}{e}} = e \quad \text{, hvoraf}$$

$$\pm\sqrt{(x+ae)^2+y^2} = ex + a$$

$$(x+ae)^2+y^2 = (ex+a)^2$$

$$x^2+2aex+a^2e^2+y^2 = e^2x^2+2aex+a^2$$

(b) $y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$, der er Ligning for den opgivne Ellipse. Man ser heraf:

1) Ethvert Punkt, for hvilket $\frac{\rho}{d} = e$, ligger paa Ellipsen.

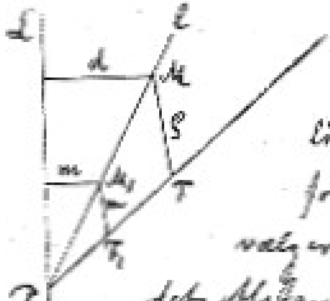
2) Ethvert Punkt paa Ellipsen tilfredsstiller Ligning (b) og derigennem alle de foregaaende Ligninger og følgelig – naar man regner numerisk – ogsaa Ligning (a).

3. Hyperblen. Linierne $x = +\frac{a}{e}$ og $x = -\frac{a}{e}$ kaldes Hyperblens Ledelinier. De to Linier er $\perp$ x-Aksen, som de skærer inden Hyperblens Toppunkter, da $e > 1$.

De kan konstrueres paa samme Maade som Ellipsens Ledelinier.

Hyperblen er geometrisk Sted for de Punkter, hvis Afstande fra et Brændpunkt og den tilhørende Ledelinie har et Forhold, der numerisk er $= e$, hvor e er Hyperblens Ekscentricitet. Sætningen bevises som den tilsvarende Sætning ved Ellipsen.

Kapitel II. Konstruktioner.



1. Skæring mellem et Keglesnit og en ret Linie l.

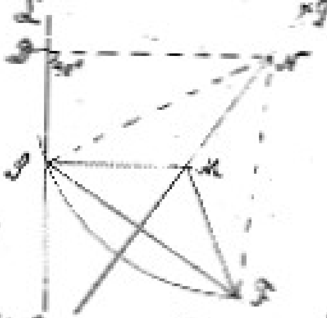
1) Parablen. Lad F og L være Brændpunkt og Ledelinie for den opgivne Parabel. Skæringspunktet for L og l kaldes P, og det forbindes med F. Man vælger da et vilkaarligt Punkt M_1 paa l, og kalder dets Afstand fra L for m. Med M_1 som Centrum og m som Radius tegner man derpaa en Cirkel, som skærer PF i 2, 1 eller 0 Punkter. De eventuelle Skæringspunkter kaldes F_1, og en Linie gennem F $\parallel F_1M_1$ vil da skære l i et Punkt M, der ligger paa Parablen; thi man har ved Hjælp af ligedannede Trekanter, at $\frac{d}{m} = \frac{PM}{PM_1} = \frac{\rho}{m}$, hvoraf $d = \rho$. En ret Linie vil altsaa skære en Parabel i 2, 1 eller 0 Punkter.

2) Ellipse eller Hyperbel. Lad der være opgivet et Brændpunkt F med tilhørende Ledelinie L samt Ekscentriciteten e.

Konstruktionen sker som ovenfor; blot maa Cirklen med M, som Centrum have Radius $m \cdot e$.

2. Tangentkonstruktioner.

1) Parablen. Tangenten fra et opgivet Punkt P.



Opgivet Brændpunktet F og Ledelinien L.

a) Man tænker sig Opgaven løst og nedfælder en Linie ⊥ fra F paa Tangenten gennem P. Den vinkelrette vil da skære L i et Punkt S, der er symmetrisk med F m. H. t. Tangenten. Man har derfor $PS = PF$.

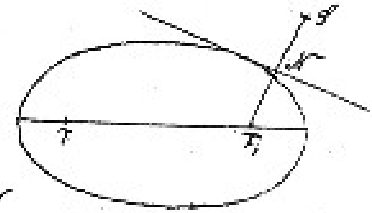
b) Opgaven løses nu saaledes: Med P som Centrum og PF som Radius tegner man en Cirkel, der skærer L i 2, 1 eller 0 Punkter. De eventuelle Skæringspunkter kaldes S, og SF's Midtnormal vil da gaa gennem P og være den søgte Tangent. Dens Røringspunkt er det Punkt M, hvori den skæres af en Linie gennem $S \perp L$. Dette ses af, at $SM \perp L$ og at $SM = FM$, hvoraf det er klart, at M ligger paa Parablen. Dette er imidlertid ikke Tilfældet med noget andet Punkt paa Linien MP; thi dersom f. Eks. N laa paa Parablen, maatte $NF = ND$, hvilket er umuligt, da $NF = NS > ND$.

Fra et Punkt til en Parabel kan der altsaa – alt efter Punktets Beliggenhed tegnes 2, 1 eller 0 Tangenter.

Tangenten ∥ en opgiven Linie l.

Den vinkelrette fra F paa l skærer L i et Punkt, der kaldes S. SF's Midtnormal er da den søgte Tangent, hvad man beviser som ovenfor. Der kan altsaa tegnes én og kun én Tangent til en opgiven Parabel ∥ en opgiven ret Linie, naar Linien blot ikke er ∥ Parablens Akse.

Hjelpesætning: For Ellipse og Hyperbel gælder følgende Sætning: Det geometriske Sted for det Punkt S, der er symmetrisk med det ene Brændpunkt m.H.t. en Tangent, er en Cirkel med det andet Brændpunkt som Centrum og 2a til Radius. (En saakaldt Ledecirkel. Hver af Kurverne har altsaa to Ledecirkler).



Vi søger først det geometriske Sted for F_1's Projektion paa en Tangent.

Ligningen for Tangenten er:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + \sqrt{a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha}\,,$$ der

ogsaa kan skrives: 1) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = -\sqrt{a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha}$.

Ligningen for en Linie gennem F_1 $\perp$ Tangenten er:

$y = tg\alpha(x-ae)$; der omformes til

$$2)\quad x\sin\alpha - y\cos\alpha = ae\sin\alpha$$

Man kvadrerer og adderer dernæst de to Ligninger 1) og 2), og faar: 3) $x^2+y^2 = a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha + a^2e^2\sin^2\alpha$. Men

$1-e^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}$ hvoraf $a^2e^2 = a^2 \mp b^2$. Indsættes dette i 3), faar man $x^2+y^2 = a^2\cos^2\alpha \pm b^2\sin^2\alpha + a^2\sin^2\alpha \mp b^2\sin^2\alpha$

eller 4) $x^2+y^2=a^2$

Det geometriske Sted er altsaa en Cirkel over Storaksen som Diameter.

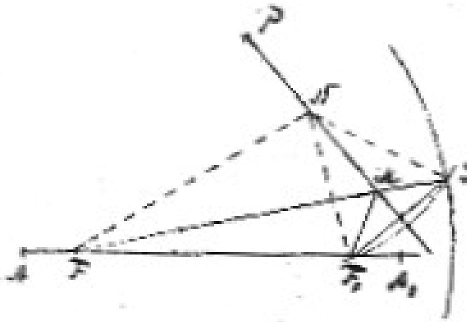
Lad nu $S\equiv(\xi,\eta)$ og lad $N\equiv(x,y)$ være F_1's Projektion paa Tangenten. Da N er Midtpunkt for F_1S, faar man:

$$x = \frac{\xi+ae}{2} \quad y = \frac{\eta}{2}\,,$$ der indsættes i 4)

Derved faar man $(\xi+ae)^2+\eta^2 = 4a^2$.

Det geometriske Sted for S er altsaa en Cirkel med Centrum i F og Radius 2a.

3) Ellipsen. Tangenten for et vilkaarligt Punkt P.



Vi tænker os opgivet de to Brænd-punkter F og F_1 samt Storaksen og vi tænker os Opgaven løst:

Dersom man nedfælder den vinkelrette fra F_1 paa Tangenten fra P, vil den skære Ledecirkel, som har sit Centrum i F i et Punkt S, der er symmetrisk med F_1 m. H. t. Tangenten. Derfor er $PS = PF_1$. Opgaven løses derpaa saaledes: Med F som Centrum og $2a$ som Radius tegnes en Cirkel (den ene Ledecirkel). En Cirkel med P som Centrum og PF_1 til Radius skærer denne i 2, 1 eller 0 Punkter. De eventuelle Skæringspunkter kaldes S og SF_1's Midtnormal gaar da gennem P og er den søgte Tangent. Dens Røringspunkt er det Punkt M, hvori Tangenten skærer FS. Dette ses af, at

$FM + F_1M = FM + MS = 2a$, hvoraf man ser, at M ligger paa Ellipsen. Dette er imidlertid ikke Tilfældet med noget andet Punkt paa Linien MP; thi dersom f. Eks. N laa paa Ellipsen, vilde $FN + F_1N = 2a$ eller $FM + NS = 2a$, hvilket er umuligt, da $FS = 2a$.

Man kan altsaa fra et Punkt til en Ellipse – alt efter Punktets Beliggenhed – tegne 2, 1 eller 0 Tangenter.

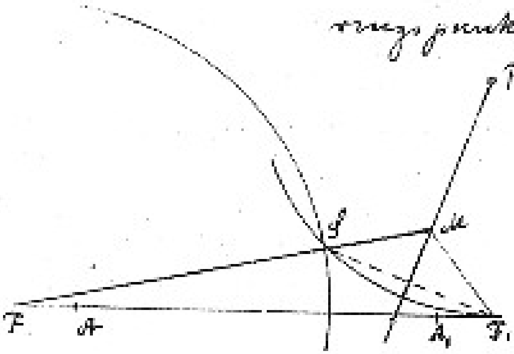
<u>Tangenten ∥ en opgiven Linie l.</u>

Den vinkelrette fra F_1 paa l skærer den Ledecirkel, hvis Centrum ligger i F, i to Punkter, som kaldes S. F_1S's Midtnormal er da den søgte Tangent. Der er altid 2 Løsninger.

3) <u>Hyperblen. Tangenten fra Punktet P.</u>

Om F som Centrum tegnes den ene Ledecirkel (Radius $2a$).

Med P som Centrum og PF_1 til Radius tegnes endnu en Cirkel, der skærer Ledecirklen i 2, 1 eller 0 Punkter. De eventuelle Skæringspunkter kaldes S, og Midtnormalen til SF, er da Tangent til Hyperblen i det Punkt, hvori den skærer FS. Beviset föres som ved Ellipsen, og man kan tillige let konstruere en Tangent, der er ∥ en opgiven Linie l.



Konstruktion af Hyperblens Assymptoter.

Lad Brændpunkterne F og F_1 og Toppunkterne A og A_1 være opgivet. Man konstruerer da först b ved Hjælp af Ligningen $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$, hvoraf $b = \sqrt{a^2e^2 - a^2}$. Man tegner dernæst gennem Toppunktet A_1 to Ordinater $A_1B = b$ og $A_1B_1 = + b$, og dersom O er Hyperblens Centrum, vil OB og OB_1 være de to Assymptoter.

Fölgesætninger:

Af Konstruktionerne fremgaar det, at Parabeltangenten halverer Vinklen mellem Brændstraale og Diameteren til Röringspunktet.

Ved Ellipsen eller Hyperblen halverer Tangenten Vinklen mellem Brændstraalerne til Röringspunktet.

Opgaver.

1. Konstruer en Parabel af 1) to Punkter og Brændpunktet; 2) to Punkter og Ledelinien; 3) to Tangenter og Brændpunktet; 4) to Tangenter og Ledelinien; 5) en Tangent, et Punkt og Brændpunktet; 6) Toppunktstangenten, en vilkaarlig Tangent og dennes Röringspunkt.
2. Konstruer en Ellipse eller en Hyperbel af et Brændpunkt og 1) et Röringspunkt og to Tangenter, 2) en Tangent og to Punkter, 3) tre Punkter, 4) tre Tangenter.

Kapitel 12.

1. Liniebündter.

Lad 1) $y - \alpha x - q = 0$ og 2) $y - \alpha_1 x - q_1 = 0$ være Ligninger for to rette Linier l og l_1, og lad $\underline{\alpha \gtrless \alpha_1}$. Man siger da, at de to rette Linier bestemmer et Liniebündt, hvis Ligning er

3) $(y - \alpha x - q) + k(y - \alpha_1 x - q_1) = 0$, hvor k er et vilkaarligt reelt Tal, og man kan vise, at denne Ligning under ét giver Ligningen for Samlingen af rette Linier, der kan tegnes gennem l og l_1's Skæringspunkt P, naar k efterhaanden gennemløber de reelle Tals Række, saaledes at der til enhver opgiven Værdi af k svarer en Linie i Bündtet, og at der til enhver Linie i Bündtet svarer en reel Værdi af k.

1) For en opgiven Værdi af k er 3) Ligning for en ret Linie, thi 3) er af 1ste Grad i x og y, og denne Linie gaar gennem P, da P's Koordinater gør begge Parenteser i 3) til 0, uafhængig af k's Værdi. (P kaldes Bündtets Toppunkt)

2) Til en vilkaarlig Linie i Bündtet svarer der en reel Værdi af k; thi lad denne Linie være bestemt ved, at den foruden at gaa igennem P tillige gaar gennem $Q = (x_1, y_1)$. Man kan da bestemme k saaledes, at 3) bliver Ligning for en ret Linie gennem Q. Hvis k nemlig bestemmes af Ligningen 4) $(y_1 - \alpha x_1 - q) + k(y_1 - \alpha_1 x_1 - q_1) = 0$ og derpaa indsættes i 3), faar vi Ligningen for en Linie i Bündtet, der tillige gaar gennem Q.

k kan dog ikke bestemmes, dersom (x_1, y_1) ligger paa l_1, thi da er $y_1 - \alpha_1 x_1 - q_1 = 0$. I dette Tilfælde kan man skrive 3) saaledes:

$$\frac{y - \alpha x - q}{k} + y - \alpha_1 x - q_1 = 0,$$ der viser, at $k = \pm\infty$ giver Ligningen $y - \alpha_1 x - q_1 = 0$. Man siger derfor, at $k =$ numerisk uendelig svarer til Linien l_1.

Dersom $\alpha = \alpha_1$, vil 3) fremstille en Samling af $\parallel$ Linier med Retningskoefficienten α, idet

$$y - \alpha x - q + k(y - \alpha x - q_1) = 0 \quad \text{uafhængig af } k\text{'s}$$

Værdi har Retningskoefficienten $\frac{\alpha + k\alpha}{1+k} = \alpha$.

Ex: Find Ligningen for det Liniebundt, som bestemmes af Linierne $3x + 2y - 5 = 0$ og $4x - y - 3 = 0$. Find Koordinaterne til dets Toppunkt, og bestem Ligningen for den Linie i Bundtet, som gaar gennem Punktet $(-1, 2)$.

Opgave 1. Et Liniebundt er bestemt af Linierne $y + 2x + 5 = 0$ og $y - 3x - 2 = 0$. Bestem de Linier i Bundtet, hvis Afstand fra Begyndelsespunktet er $= \frac{1}{5}$.

Opgave 2. Et Liniebundt er bestemt af Linierne $2x + 3y = 12$ og $4x - y = 10$. Find Koordinaterne til Bundtets Toppunkt. Konstruer de opgivne Linier og de Linier i Bundtet, som gaar gennem $(-3,0), (-2,0), (-1,0), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0)$. Bestem de Værdier af k som svarer til de tegnede Linier.

2. Cirkelbundter.

[1] Lad $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ og $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$ være Ligning for to Cirkler C og C_1. Vi vil da bestemme det geometriske Sted for de Punkter, hvis Potens m.H.t. de to Cirkler har et konstant Forhold, der betegnes ved $\div k$, hvor k er et vilkaarligt reelt Tal. Lad $P \equiv (x, y)$ være et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted. P's Potens m.H.t. de to Cirkler er da

$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c$ og $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1$, og Ligningen for det geometriske Sted er derfor:

$$\frac{x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c}{x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1} = \div k \quad \text{eller}$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c + k(x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1) = 0, \qquad (1)$$

der, naar $k \gtrless \div 1$, ses at være Ligning for en Cirkel, da x^2 og y^2 begge har Koefficienten $1+k$, og Leddet xy mangler.

For $k=0$ vil (1) blive Ligning for Cirklen C, for $k=\pm\infty$ for Cirklen C_1.

For $k=\div 1$ vil (1) være Ligning for en ret Linie – den saakaldte <u>Radikalakse</u> – der altsaa er geometrisk Sted for de Punkter, der har ligestor Potens m. H. t. de to opgivne Cirkler. Den indeholder tillige Samlingen af Punkter, hvorfra man kan tegne ligestore Tangenter til de to Cirkler.

3) Lad $C=0$ og $C_1=0$ være forkortede Udtryk for Ligningerne for de to opgivne Cirkler C og C_1. Man siger da, at

$$x^2+y^2+2ax+2by+c+k(x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1)=0$$ eller

med forkortede Betegnelser: $$C+k\cdot C_1=0 \qquad (2)$$

er Ligning for det Cirkelbundt, der bestemmes af de to Cirkler. Naar k gennemløber de reelle Tals Række, vil (2) efterhaanden fremstille Ligningen for alle Bundtets Cirkler, undtagen for $k=\div 1$, hvor (2) kan skrives $C-C_1=0$, der er Ligning for en ret Linie – de to opgivne Cirklers Radikalakse.

Hvis C og C_1 skærer hinanden i Punkterne A og B, vil enhver af Bundtets Cirkler gaa gennem A og B, da disse Punkters Koordinater samtidig gør C og C_1 til Nul. Af samme Grund vil Radikalaksen gaa gennem A og B, og de to Cirklers Fælleskorde vil derfor ligge paa Radikalaksen.

Man ser tillige, at der til enhver Cirkel gennem A og B svarer en reel Værdi af k; thi lad en saadan Cirkel være bestemt ved at den – foruden at gaa gennem A og B – tillige skal gaa gennem Punktet $Q\equiv(x_1,y_1)$. Hvis k da bestemmes af Ligningen

$$x_1^2+y_1^2+2ax_1+2by_1+c_1+k(x_1^2+y_1^2+2a_1x_1+2b_1y_1+c_1)=0$$

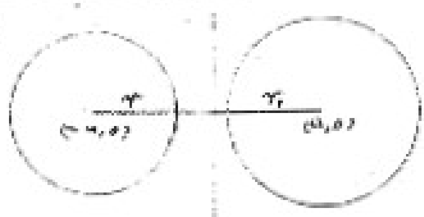
og derpaa indsætter i (2), faar man Ligningen for en Cirkel i Bündtet, som tillige gaar gennem Q.

Dersom C og C_1 skærer hinanden, vil (2) under et være Ligning for Samlingen af Cirkler gennem A og B og tillige for $k = \div 1$ være Ligning af de to Cirklers Radikalakse.

Hvis C og C_1 ikke skærer hinanden, vil $C + kC_1 = 0$ tilfredsstilles af de komplekse Værdier af x og y, som samtidig tilfredsstiller de to Ligninger $C = 0$ og $C_1 = 0$.

I dette Tilfælde vil hver enkelt Cirkel i Bündtet være geometrisk Sted for de Punkter, hvis Potenser m.H.t. de to opgivne Cirkler har Forholdet $\div k$, hvor k er det reelle Tal, der svarer til vedkommende Cirkel.

3) <u>To Cirklers Radikalakse er $\perp$ deres Centerlinie.</u>



Lad de to Cirkler have Radierne r og r_1, og lad os lægge Koordinatsystemet saaledes, at deres Centrer faar Koordinaterne $(-a,0)$ og $(a,0)$.

De to Cirklers Ligninger er da

$$(x+a)^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad \text{og} \qquad (x-a)^2 + y^2 - r_1^2 = 0.$$

Ligningen for deres Radikalakse er derfor

$$4ax + r_1^2 - r^2 = 0 \qquad \text{eller} \quad x = \frac{r^2 - r_1^2}{4a},$$ der er Ligning for en Linie $\perp$ Centerlinien.

4) <u>Tre Cirklers Radikalakser gaar gennem samme Punkt (Radikalcentret).</u>

Lad Cirklerne I, II og III have Ligningerne $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ og $C_3 = 0$, der er skrevet paa en saadan Form, at x^2 og y^2 overalt har Koefficienten 1. De tre Radikalakser har da Ligningerne

$$C_1 - C_2 = 0 \qquad C_2 - C_3 = 0 \qquad \text{og} \quad C_3 - C_1 = 0.$$

Men $C_1 = C_2$ $C_2 = C_3$ og $C_3 = C_1$.
Skæringspunktet for de to første kaldes P. Indsættes dets Koordinater i de 3 Ligninger, vil de gøre $C_1 = C_2$ og $C_2 = C_3$, hvoraf følger, at de ogsaa vil gøre $C_3 = C_1$. P vil saaledes ogsaa ligge paa den tredje Radikalakse.

Opgaver:

1. Konstruer Radikalaksen for to Cirkler, der ikke skære hinanden.
2. Konstruer et Punkt, hvorfra der kan tegnes lige lange Tangenter til 3 opgivne Cirkler.
3. Opgivet de to Cirkler $x^2+y^2-1=0$ og $x^2+y^2-4x-4y=17$. Find Ligningen for det Cirkelbundt, de bestemmer og find Ligningen for deres Radikalakse. Find dernæst Ligningen for den af Bundtets Cirkler, der tillige gaar gennem (0,0). Find dernæst Koordinaterne til de opgivne Cirklers Skæringspunkter og vis, at de tilfredsstiller Radikalaksens Ligning samt Ligningen for den af Bundtets Cirkler, der gaar gennem (0,0). Endelig skal man konstruere de 3 Cirkler og Radikalaksen.
4. Opgivet Cirklerne $x^2+y^2=16$ og $x^2+y^2-x-y=10$. Find Ligningen for det Cirkelbundt, de bestemmer, samt for deres Radikalakse. Find de komplekse Rødder, som tilfredsstiller de opgivne Ligninger og vis, at de tilfredsstiller Radikalaksens Ligning. Konstruer de to Cirkler og deres Radikalakse samt den af Bundtets Cirkler, der tillige gaar gennem (0,0).

Kapitel 13. Om hele Tal. (Talteori)

1. Dersom D og d er to hele, positive Tal, og $D > d$, kan man altid bestemme et helt Tal q, saaledes at $d(q+1) > D \geq d\cdot q$.
Dersom $D = dq$, siges D at være delelig med d, og man siger tillige i dette Tilfælde, at Divisionen $D:d$ gaar op og giver Kvotient

uden q. Hvis dette ikke er Tilfældet, har man

$$(1) \qquad D = dq + r \,, \quad \text{hvor} \quad 0 < r < d.$$

r kaldes den __principale Divisionsrest__, og man siger, at Divisionen $D : d$ giver Kvotienten q og Resten r.

I Ligningen $D = dq + r$ kan man imidlertid, naar D og d er givne, vælge q vilkaarligt og derpaa bestemme r. Paa denne Maade kan man faa uendelig mange Rester, der imidlertid danner en Differensrække med Differensen d.

Er nemlig $D = dq + r$, saa kan man ogsaa skrive:

$$D = d(q-1) + d + r$$

$$D = d(q-2) + 2d + r \quad \text{osv, hvoraf Sætningen fremgaar.}$$

Ex: Ved at Dividere 17 med 7 kan man faa Resterne

$$\ldots\ldots \div 11 \,, \div 4 \,, 3 \,, 10 \,, 17 \,, 24 \,, 31 \ldots\ldots$$ Af disse er 3 den principale Rest. Den er tillige den __numerisk mindste Rest__.

Ved at Dividere 17 med 6 kan man faa Resterne

$$\ldots\ldots \div 7 \,, \div 1 \,, 5 \,, 11 \,, 17 \,, 23 \ldots$$

Her er 5 den principale Rest, $\div 1$ den numerisk mindste Rest.

2. __Hvis et Tal t gaar op i Divisor og Dividend, vil det ogsaa gaa op i Resten.__

Dersom t gaar op i D og d, maa der eksistere to hele Tal D_1 og d_1, saaledes at $D = t \cdot D_1$ og $d = t \cdot d_1$.

Ligning (1) kan nu skrives $r = D - dq = tD_1 - td_1 q = t(D_1 - d_1 q)$, hvorved Sætningen er bevist.

3. __Hvis et Tal t gaar op i Divisor og Rest, gaar det ogsaa op i Dividenden.__

Man har da $d = t \cdot d_1$ og $r = t \cdot r_1$, der indsat i (1) giver

$$D = td_1 q + tr_1 = t(d_1 q + r_1) \,, \quad \text{hvorved Sætningen}$$

er bevist.

4. Störste fælles Maal.

Ved störste fælles Maal for to eller flere Tal forstaar man det störste Tal, som gaar op i Tallene.

1) Störste fælles Maal for 2 Tal D og d bestemmes saaledes:

Lad $D > d$; man dividerer da d op i D og bestemmer Divisionens principale Rest r_1. Denne divideres dernæst op i d, hvorved man faar den principale Rest r_2, som derpaa divideres op i r_1, og saaledes fortsætter man, indtil Divisionen gaar op.

At dette engang maa ske, ligger i, at $d > r_1 > r_2 > r_3 \dots$ osv.

Da Resterne saaledes stadig aftager, maa man engang komme til Resten 1, hvis ikke Divisionen er gaaet op før. Men den Division, som udføres med Tallet 1, vil altid gaa op.

To hele Tal har altsaa altid et störste fælles Maal. Hvis dette er 1, siges Tallene at være indbyrdes primiske.

I det efterfølgende Bevis er vi gaaet ud fra, at den fjerde Division gaar op. Beviset er dog fuldt almindeligt og kan føres paa samme Maade, uafhængigt af Divisionernes Antal.

Regningerne kan opskrives som i hosstaaende Skema, og vi vil da bevise, at den sidste Divisor – her r_3 – er störste fælles Maal for D og d.

$$
\begin{array}{llll}
d)\ D\ (q & & & \\
\underline{dq} & & & \\
r_1)\ d\ (q_1 & & & \\
\quad \underline{r_1 q_1} & & & \\
\quad r_2)\ r_1\ (q_2 & & & \\
\qquad \underline{r_2 q_2} & & & \\
\qquad r_3)\ r_2\ (q_3 & & & \\
\qquad\quad \underline{r_3 q_3} & & & \\
\qquad\quad 0. & & &
\end{array}
$$

1) r_3 er fælles Maal for D og d.

Bevis: r_3 gaar nemlig op i r_2 og derfor i Rest og Divisor i den næstsidste Division; r_3 gaar da ogsaa op i Dividenden r_1. r_3 gaar altsaa op i r_2 og r_1 og derfor i Rest og Divisor i tredjesidste Division. Fortsættes dette Ræsonnement, ser man, at r_3 gaar op i D og d.

2) Et Tal $t > r_3$ kan umulig gaa op i baade D og d.

Beviis: Thi dersom et Tal $t > r_3$ gaar op i D og d, vil det gaa op i Dividend og Divisor i förste Division, hvoraf fölger, at det ogsaa maa gaa op i Resten r_1. Det gaar nu op i r_1 og d og fölgelig i Divisor og Dividend i den anden Division; det gaar da ogsaa op i Resten r_2. Fortsættes dette Raisonnement, ser man, at t maa gaa op i r_3, hvilket er umuligt, da $t > r_3$.

r_3 er derfor största fælles Maal for D og d.

2) Ethvert fælles Maal for D og d maa gaa op i deres st. f. Maal.

Beviis. Lad t gaa op i D og d; det gaar altsaa op i Dividend og Divisor ved den förste Division og maa altsaa ogsaa gaa op i r_1. t gaar altsaa ogsaa op i Divisor og Dividend i den anden Division og man fölgelig gaa op i r_2. Fortsættes dette Raisonnement, ser man, at t ogsaa maa gaa op i r_3.

3) Dersom D og d har största fælles Maal f, vil mD og md have största fælles Maal m.f.

Ligningen $D = dq + r$ medförer nemlig $mD = md.q + mr$, der viser, at naar Divisor og Dividend multipliceres med m, vil ogsaa Resten blive multipliceret med m.

Ved Hjelp af Skemaet Side 60 ser man nu, at dersom man i den förste Division multiplicerer Divisor og Dividend med m, vil ogsaa Resten r_1 blive multipliceret med m. Divisor og Dividend i den anden Division blive altsaa multipliceret med m, hvilket derfor ogsaa bliver Tilfældet med r_2. Fortsættes dette Raisonnement, ser man, at ogsaa r_3 bliver multipliceret med m.

4) Hvis D og d divideres med det fælles Maal m, vil ogsaa deres största fælles Maal blive dividert med m.

$D = dq + r$ medfører Ligningen $\frac{D}{m} = \frac{d}{m} \cdot q + \frac{r}{m}$, der viser, at dersom Divisor og Dividend divideres med et fælles Maal m, vil ogsaa Resten blive divideret med m. Sætningen lader sig nu bevise paa lignende Maade som den foregaaende. Dersom D og d har st. f. Maal f, vil altsaa $\frac{D}{f}$ og $\frac{d}{f}$ have største fælles Maal 1. Man ser da, at hvis to Tal divideres med deres st. f. Maal, vil de fremkomne Tal være indbyrdes primiske.

5. St. f. Maal for tre Tal D, D_1 og D_2

Vi bestemmer først st. f. Maal for D og D_1 og kalder det m. Derpaa bestemmer st. f. Maal for m og D_2. Er dette f, vil f være st. f. Maal for alle 3 Tal.

Bevis: 1) f gaar op i alle de tre Tal; thi f gaar op i m, der er st. f. Maal for D og D_1. f vil da (se Skemaet Side 60) gaa op i Divisor og Dividend ved den sidste Division; det gaar da ogsaa op i Rest og Divisor ved den næstsidste Division. Fortsættes Ræsonnementet, ser man, at f gaar op i D og D_1.

2) Et Tal $t > f$ kan umulig gaa op i alle tre Tal.

Thi dersom t gaar op i D D_1 og D_2 maa det if. 4,2 gaa op i m. Da det gaar op i m og D_2, maa det tillige gaa op i f, hvilket er umuligt, da $t > f$.

f er altsaa st. f. Maal for de 3 Tal.

Det er nu let at indse, hvorledes man kan bestemme st. f. Maal for et vilkaarligt Antal Tal.

5. Naar et Tal t gaar op i et Produkt af to Tal og er primisk med det ene, gaar det op i det andet.

Lad t gaa op i $a \cdot b$ og lad t være primisk med a. Vi vil da bevise, at t gaar op i b.

t og a har nemlig, da de er indbyrdes primiske, st. f. Maal 1. $b \cdot b$ og $a \cdot b$ har derfor – ifølge 4³) – st. f. Maal b. Men t gaar op i bb og i ab (ifølge det givne), og t maa derfor ogsaa gaa op i deres st. f. Maal, som er b.

6. <u>Naar en uforkortelig Brøk $\frac{a}{b}$ er lig en Brøk $\frac{c}{d}$, maa c og d være samme Multiplum af a og b.</u>

¹) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ medfører ²) $ad = bc$. Da nu a gaar op i ad, maa det ogsaa gaa op i det ligesaastore Tal $b \cdot c$. Men da det er primisk med b, maa det gaa op i c. Man har derfor

$c = m \cdot a$, der indsat i ²) giver $ad = m \cdot a \cdot b$, hvoraf $d = m \cdot b$. Dermed er Sætningen bevist.

7. <u>Naar to indbyrdes primiske Tal a og b hver for sig gaar op i Tallet t, maa ogsaa deres Produkt ab gaa op i t.</u>

Da a gaar op i t, har man ³) $t = m \cdot a$.

Da nu b gaar op i t – eller, hvad der er det samme – i $m \cdot a$, og da det er primisk med a, maa det gaa op i m. Man har derfor $m = m_1 \cdot b$. Indsættes dette i ³), faar man:

$t = m_1 \cdot a \cdot b$, hvormed Sætningen er bevist.

8. <u>Ved mindste fælles Multiplum for to eller flere Tal forstaar man det mindste Tal, hvori Tallene gaar op.</u>

<u>Mindste fælles Multiplum for to Tal.</u>

Lad de to opgivne Tal a og b have st. f. Maal f.

Da er $a = f \cdot a_1$ og $b = f \cdot b_1$.

Samlingen af Tal, hvori a gaar op, kan da skrives $c \cdot f \cdot a_1$, medens Samlingen af Tal, hvori b gaar op, kan skrives $d \cdot f \cdot b_1$. Betingelsen for, at et Tal af 1ste Gruppe er lig et Tal af sidste Gruppe, er, at man kan bestemme saadanne Værdier af c og d, at $c \cdot f \cdot a_1 = d \cdot f \cdot b_1$. Heraf faar man:

$ca_1 = db_1$, eller $\frac{a_1}{b_1} = \frac{d}{c}$. Ved at anvende Sætningen i §6 faar man da $d = m \cdot a_1$ og $c = m \cdot b_1$.
Samlingen af Tal, hvori baade a og b gaar op, kan da skrives $m \cdot f \cdot a_1 \cdot b_1$.
Det mindste Tal, hvori a og b gaar op, findes ved i dette Udtryk at give m den mindst mulige Værdi, hvilket er $m = 1$. Dersom M betegner mindste fælles Multiplum for a og b, har man: $M = f \cdot a_1 \cdot b_1$, hvoraf

$$Mf = f \cdot a_1 \cdot f \cdot b_1 = a \cdot b$$

<u>Produktet af to Tal er derfor lig Produktet af deres største fælles Maal og deres mindste fælles Multiplum.</u>
Skal man derfor finde m. f. Multiplum M for to Tal a og b, bestemmer man først deres største fælles Maal f. Da er

$$Mf = ab, \text{ hvoraf } M = \frac{ab}{f}.$$

<u>Mindste fælles Multiplum for 3 Tal.</u>
Man bestemmer m. f. Multiplum for to af Tallene og bestemmer derpaa m. f. Multiplum for dette og det tredje af Tallene. Det sidst fremkomne Tal er da m. f. Multiplum for de tre opgivne Tal. Lad a, b og c være de tre opgivne Tal, lad M_1 være m. f. Multiplum for a og b, medens M er m. f. Multiplum for M_1 og c. Vi saa ovenfor, at $M_1 = f \cdot a_1 \cdot b_1$, medens Samlingen af Tal, hvori baade a og b gik op, kunde skrives $m \cdot f \cdot a_1 \cdot b_1$. Heraf ser man, at Samlingen af Tal, hvori a og b gaar op er den samme som Samlingen af Tal, hvori M_1 gaar op. Af den sidste Samling har vi taget det mindste Tal, hvori tillige c gaar op.

<u>9. Primtal.</u>
<u>Ved et Primtal forstaar man et Tal, der er > 1, og som kun er deleligt med 1 og med sig selv.</u>

De förste Primtal er $2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19 \ldots\ldots$

Ifölge Definitionen paa Primtal ses det, at <u>to Primtal altid er indbyrdes primiske.</u>

Ethvert Tal >1, der ikke er et Primtal, kaldes et <u>sammensat Tal.</u>

Et sammensat Tal vil derfor være Produkt af mindst to Primtal.

<u>Naar et sammensat Tal t gaar op i en Tal D, vil alle dets Primfaktorer gaa op i D.</u>

Lad nemlig t indeholde Primfaktoren p. Da er

$t = p \cdot t_1$ og $D = t \cdot q$, hvoraf fölger $D = p \cdot (t_1 q)$, der viser, at p gaar op i D.

<u>Rækken af Primtal er uendelig.</u>

Lad os nemlig tænke os, at $2, 3, 5, 7 \ldots p$ var de eneste eksisterende Primtal. Tallet $t = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p + 1$ vilde da ved Division med ethvert af de eksisterende Primtal give Resten 1 og saaledes ikke være delelig med noget af disse. Det kan da heller ikke være deleligt med noget sammensat Tal og er fölgelig et nyt Primtal. Men dette strider mod vor Forudsætning, der netop gik ud paa, at Primtalsrækken standsede ved p. Primtalsrækken er derfor uendelig.

<u>Dersom et Primtal p gaar op i et Produkt, gaar det op i mindst en af Faktorerne.</u>

Dersom p gaar op i abc, kan man skrive dette Produkt som $a \cdot (bc)$ Enten gaar da p op i a, og dermed er Sætningen bevist eller ogsaa er p primisk med a, hvorfor det maa gaa op i bc. Dersom nu p gaar op i b, er Sætningen bevist; men gaar det ikke op i b er det primisk med b og maa altsaa gaa op i c

Beviset er uafhængigt af Faktorernes Antal.

Et Primtal kan kun oplöses i et System af Primfaktorer.

Lad $t = A$ og $t = B$ være Betegnelser for, at Tallet t er opløst i 2 Systemer af Primfaktorer. Man har da $A = B$.

Da et Primtal ümuelig kan gaa op i et Produkt af Primtal, hvor imellem det ikke selv findes, ser man, at en vilkaarlig Primfaktor, der findes i A, ogsaa maa findes i B og omvendt.

Lad et Primtal p findes som Faktor i det ene System, f. Eks. i A, saaledes at A er delelig med p^n men ikke med nogen højere Potens af p. Man har da $A = p^n \cdot A_1$, hvor A_1 ikke er delelig med p. Heraf følger $p^n \cdot A_1 = B$, der viser, at B er delelig med p^n. B maa da indeholde som Faktor p^n eller en p i en Potens, der er højere end n f. Eks. i Potensen $n+q$.

Man har da $p^n \cdot A_1 = p^{n+q} \cdot B_1$ eller $A_1 = p^q \cdot B_1$, der viser, at A_1 er delelig med p, hvad der strider mod vor Forudsætning. B maa altsaa være delelig med p^n og ikke med nogen højere Potens af p.

Enhver Primfaktor, der forekommer i det ene System, maa derfor ogsaa forekomme med samme Potens i det andet, hvormed Sætningen er bevist.

Ved at opløse Tal i Primfaktorer kan man – som vist i Mellemskolepensummet – bestemme deres st. f. Maal og mindste fælles Multiplum.

Eks: 3 Tal t_1, t_2 og t_3 er givne, idet

$$t_1 = 10^{n+1} \cdot 15^{2n} \cdot 11$$
$$t_2 = 20^n \cdot 25^n \cdot 7$$
$$t_3 = 30^n \cdot 5 \quad \text{, hvor } n \text{ er hel og } \geq 1.$$

Man har da: $f = 2^n \cdot 5^{n+1}$ $\quad M = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{3n} \cdot 7 \cdot 11$

Er Produktet af de tre Tal lig Produktet af deres st. f. M. og deres m. f. Multiplum?

Kapitel 14. Ubestemte Ligninger af 1ste Grad

1. Vi vil finde de hele Værdier af x og y, som tilfredsstiller Ligningen $ax + by = c$, hvor a, b og c er rationale Tal

Opgaven kan simplificeres noget.

1) Man kan antage, at a, b og c er hele Tal, da man altid kan bortskaffe Brøkerne af den opgivne Ligning ved at multiplicere med Brøkernes Generalnævner.

2) Man kan antage, at a og b er indbyrdes primiske. En fælles Faktor for a og b maa nemlig ogsaa gaa op i c*) og kan bortpaa bortdivideres. Ligningen $3x + 6y = 7$ kan saaledes ikke tilfredsstilles, naar x og y skal være hele Tal.

3) Vi kan endnu forudsætte, at baade a og b er positive. Hvis nemlig a er negativ i den opgivne Ligning, kan man multiplicere med $\div 1$ paa begge Sider af Lighedstegnet. Hvis Koefficienten til y derved bliver negativ, kan man sætte $y = \div y_1$.

2. Med disse Forudsætninger vil vi vise, at $ax + by = c$ altid tilfredsstilles af et helt Værdisæt af x og y.

Man kan reducere Opgaven til at løse en Ligning af samme Form som $ax + by = c$ men med mindre Koefficienter.

Lad $a < b$, man dividerer da a op i b og c og faar

$$b = ap + b_1, \qquad c = aq + c_1,$$

hvor b_1 og c_1 ere de principale Divisionsrester. Indsættes dette i 1), faar man

$$ax + apy + b_1 y = aq + c_1, \quad \text{eller}$$

$$3) \quad a(x + py \div q) = c_1 - b_1 y$$

Dersom man nu kan finde en hel Værdi for y, som gør $c_1 - b_1 y$ til et Multiplum af a, eller – hvad der er det samme – dersom man kan løse Ligningen $c_1 - b_1 y = az$ i hele Tal, da kan 3) forkortes

*) hvis Ligningen overhovedet skal kunne løses i hele Tal

med a, hvorefter x af I kan findes som et helt Tal.
Opgaven er dermed reduceret til at løse Ligningen $c_1 - b_1 y = az$ i hele Tal, eller – hvad der er det samme – til at løse Ligningen $\text{II} \quad az + b_1 y = c_1$ i hele Tal.
Denne Ligning er af samme Form som I, men har mindre Koefficienter end I, da $b_1 < b$.
Da b_1 tillige er $< a$, kan II behandles paa samme Maade som I, og Opgaven reduceres til at løse en ny Ligning af samme Form som II men med mindre Koefficienter, og saaledes kan vi fortsætte, indtil vi naar en Ligning, hvor Koefficienten til een af de ubekendte er 1. Lad denne Ligning være $u + k.v = l$, hvor u og v er de ubekendte. Man sætter da $v = 0$ og faar $u = l$, hvorved denne Ligning er løst i hele Tal. Alle de tidligere opstillede Ligninger af Formen $ax + by = c$ saavel som den opgivne Ligning kan dernæst løses i hele Tal.
Koefficienterne i Ligning II og de senere opstillede Ligninger af samme Form findes ved at dividere a op i b, ved dernæst at dividere den principale Rest b_1 op i a o.s.v. Koefficienterne bliver derfor de Rester, som man faar, naar man søger st. f. d. for a og b. Da disse er indbyrdes primiske, vil den sidste Divisor nødvendigt være 1, hvad der er benyttet i Ræsonnementet ovenfor.
3. Man kan nu bevise, at $ax + by = c$ tilfredsstilles af uendelig mange hele Rodsæt.
Lad $x = \alpha$, $y = \beta$ være det ene hele Rodsæt, som vi ifølge 2 ved tilfredsstiller $\text{I} \quad ax + by = c$.
Man har da $\text{I} \quad a\alpha + b\beta = c$. Lad nu x og y betyde et vilkaarligt Rodsæt, som tilfredsstiller I. Man har da

$ax+by=c$. Ved Subtraktion af disse Ligninger faar man:

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0\text{, hvoraf}$$

$$a(x-\alpha)=b(\beta-y)\quad\text{eller}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\beta-y}{x-\alpha}.$$ Da a er primisk med b, vil $\frac{a}{b}$ være uforkortelig, og man har

$$\left.\begin{array}{l}\beta-y=m\cdot a\\ x-\alpha=m\cdot b\end{array}\right\}\text{ hvoraf }\begin{array}{l}x=\alpha+mb\\ y=\beta-ma\end{array}$$

At de fundne Rodtal tilfredsstiller den opgivne Ligning, naar m er et vilkaarligt helt Tal, ses ved at gøre Prøve. Man faar da:

$$a(\alpha+mb)+b(\beta-ma)=a\alpha+b\beta,$$ der er $=c$ ifølge Ligning 4).

Ex. 1) $16x+25y=37$ skal løses i hele Tal

$16x+16y+9y=2\cdot16+5$

$16(x+y-2)=5-9y$, der kan løses i hele Tal, dersom

$5-9y=16z$ eller 2) $9y+16z=5$ kan løses i hele Tal.

$9y+9z+7z=5$

$9(y+z)=5-7z$, der kan løses i hele Tal, dersom

$5-7z=9v$ eller 3) $7z+9v=5$ kan løses i hele Tal

$7z+7v+2v=5$

$7(z+v)=5-2v$, der kan løses i hele Tal, dersom

$5-2v=7t$ eller 4) $2v+7t=5$ kan løses i hele Tal

$2v+6t+t=4+1$

$2(v+3t-2)=1-t$, der kan løses i hele Tal, dersom

$1-t=2u$ eller 5) $t+2u=1$ kan løses i hele Tal.

Her har imidlertid t Koefficienten 1, og man sætter derfor $u=0$ og faar $t=1$. Indsætter dette i 4) faar man $v=-1$. Ved dernæst at indsætte i 3) $z=2$. Indsætter dette i 2), faar man $y=\div 3$, som indsat i 1) giver $x=7$. Den fuldstændige Løsning er da $\begin{cases}x=7+25m\\ y=-3-16m\end{cases}$

I Praksis benyttes man med Fordel de numerisk mindste Rester i Stedet for de principale Rester.

Ex 2. Find de positive hele Værdier af x og y, som tilfredsstiller Ligningen $\quad {}^{I}\; 9x + 34y = 210.$

$$9x + 36y - 2y = 9 \cdot 23 + 3$$

$$9(x + 4y - 23) = 2y + 3,$$ der kan løses i hele Tal,

dersom $2y + 3 = 9z$ eller ${}^{II}\; \underline{9z - 2y = 3}$ kan løses i hele Tal.

Denne Ligning er imidlertid tilfredsstillet af $z = 1$ og $y = 3$.

Indsættes dette i I, faar man $x = 12$. Den fuldstændige Løsning er derfor $\underline{x = 12 + 34m} \qquad \underline{y = 3 - 9m}$.

Skal baade x og y være positive, faar man:

$$12 + 34m > 0 \qquad 3 - 9m > 0$$

$$\therefore \quad m > -\frac{6}{17} \qquad m < \frac{1}{3}, \text{ hvoraf}$$

$$\frac{1}{3} > m > -\frac{6}{17}$$

Den eneste Værdi m kan have, er derfor $m = 0$.

$x = 12 \quad y = 3$ er da den fuldstændige Løsning af den forelagte Opgave.

Ex 3. Find de hele Værdier af x og y, som tilfredsstiller Ligningen $\quad 7x - 32y = 6.$

Vi sætter først $y = -y_1$ og faar da: $7x + 32y_1 = 6$.

$$7x + 35y_1 - 3y_1 = 7 - 1$$

$7(x + 5y_1 - 1) = 3y_1 - 1$, der kan løses i hele Tal, hvis

$3y_1 - 1 = 7z$ eller $3y_1 - 7z = 1$ kan løses i hele Tal.

Fortsættes nu paa sædvanlig Maade, faar man

$$x = 10 + 32m \qquad y_1 = -2 - 7m \quad \text{eller}$$

$$\underline{x = 10 + 32m} \qquad \underline{y = 2 + 7m}$$

Kapitel 15. Den almindelige Ligning af n^{te} Grad i x.

1. Ligningen $A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} \cdots + A_{n-1}x + A_n = 0$, hvor n er positiv og hel, og hvor alle Koefficienterne $A_0, A_1 \cdots A_n$ er uafhængige af x, kaldes den almindelige Ligning af n^{te} Grad i x.
Vi gaar i det følgende ud fra, at $A_0 \gtrless 0$ og dividerer paa begge Sider af Lighedstegnet med A_0. Ligningen faar da Formen

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

hvor $f(x)$ er en Betegnelse for Udtrykket paa Ligningens venstre Side. Naar Ligningen af n^{te} Grad er bragt paa denne Form, hvor x^n har Koefficienten 1, siges Ligningen at være *ordnet*.
Ved en Rod i Ligningen forstaar vi et Tal, der tilfredsstiller Ligningen, naar det indsættes i denne i Stedet for x.

2. *En Ligning af n^{te} Grad har højst n forskellige Rødder.*
Lad $\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3 \dots \alpha_n$ være de n forskellige Rødder i $f(x)=0$. Ligningen kan da ikke yderligere have Roden α_{n+1} (alle α^{er} er forskellige).

Bevis: Da $x=\alpha_1$ er Rod i $f(x)=0$, vil $f(\alpha_1)=0$, og følgelig vil $x-\alpha_1$ gaa op i $f(x)$. Man kan da skrive: $f(x) = (x-\alpha_1) f_1(x)$, hvor $f_1(x)$ er et helt Polynomium af $n-1^{te}$ Grad.
Men ogsaa $x=\alpha_2$ gør $f(x)$ og dermed $(x-\alpha_1)f_1(x)$ til Nul, og man har derfor $(\alpha_2-\alpha_1) f_1(\alpha_2)=0$. Da her $\alpha_2 \gtrless \alpha_1$, maa $f_1(\alpha_2)=0$, hvoraf man ser, at $(x-\alpha_2)$ gaar op i $f_1(x)$. Man har da:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot f_2(x),$$ hvor $f_2(x)$ er et helt Polynomium af $n-2^{den}$ Grad.

Men ogsaa $x=\alpha_3$ er Rod i $f(x)=0$ og gør derfor $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)$ til Nul. Man har altsaa $(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)f_2(\alpha_3)=0$ eller $f_2(\alpha_3)=0$, da alle α^{er} er forskellige. $(x-\alpha_3)$ gaar derfor op i $f_2(x)$, og man har $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) f_3(x)$, hvor $f_3(x)$

er et Polynomium af Graden $n-3$.
Fortsættes saaledes, faar man $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)f_n(x)$, hvor $f_n(x)$ er af 0^{te} Grad og altsaa lig en Konstant, der kan betegnes ved k. Vi har da

$$x^n+a_1x^{n-1}\ldots a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n).k \qquad (2)$$

og heraf kan k bestemmes; thi k fremkommer ved at Dividere $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_{n-1}x+a_n$ med $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. Ifølge Divisionsprøven maa da højre Side i (2) efter Udmultiplication give Led for Led, hvad der staar paa venstre Side. Heraf ses, at $k=1$, og vi faar nu

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots a_{n-1}x+a_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=0 \quad (3$$

Dersom nu $x=\alpha_{n+1}$ skal være Rod i $f(x)=0$, maa den gøre en af Parentesserne til Nul, hvilket er umuligt, da alle α'er er forskellige. Sætningen er dermed bevist.
3. Det lader sig nu bevise, at <u>enhver Ligning af n^{te} Grad har mindst 1 Rod</u>, men vi vil dog her forbigaa Beviset for denne Sætning. Vi kan nu bevise følgende Sætning:
4. <u>En ordnet n^{te} Grads Ligning har altid n og kun n Rødder.</u>
Ligningen $f(x)=0$ har mindst 1 Rod. Dersom denne betegnes α_1, har man $f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$, hvor $f_1(x)$ er et helt Polynomium af $n-1^{te}$ Grad. Man har da

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)=0$$

Ligningen $f_1(x)=0$ er af $n-1^{te}$ Grad og har følgelig mindst 1 Rod. Kaldes denne α_2, faar man

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x), \text{ hvor } f_2(x) \text{ er af } n-2^{nden}$$

Grad. Fortsættes paa denne Maade, faar man (som under 2)

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n), \text{ hvor dog ikke}$$

alle α'er behøver at være forskellige.

Fastslaar vi nu som Definition, at α er en p-dobbelt Rod i $f(x)=0$, dersom $f(x)$ er delelig med $(x-\alpha)^p$ og ikke med nogen höjere Potens af $(x-\alpha)$, og dersom vi lader en p-dobbelt Rod tælle for p Rödder, ses det, at en ordnet n^{te} Grads Ligning har n og kün n Rödder.

5. Koefficienterne ûdtrykt ved Rödderne.

Naar Rödderne i den opgivne Ligning er $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, har man $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.
Udföres Multiplicationen og ordnes Leddene, kan man sætte x^{n-1} ûdenfor en Parentes i alle de Led, hvori den forekommer som Faktor og derpaa sætte x^{n-2} ûdenfor en Parentes i alle de Led, hvori den findes som Faktor o.s.v.
De to Sider af Lighedstegnet vil da Led for Led være det samme.
Ved at sammenligne Koefficienterne til x^{n-1} faar man:

$$\div a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdots \alpha_n$$

Summen af Rödderne er altsaa lig Koefficienten til x^{n-1} med modsat Fortegn.

Sammenlignes Koefficienterne til x^{n-2}, faar man:

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n \text{, eller}$$

Summen af Produkterne af Rödderne taget 2 og 2 paa alle mulige Maader er lig Koefficienten til x^{n-2}.

Sammenlignes Koefficienterne til x^0, faar man

$$\pm a_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \cdot \alpha_n \text{, hvor Fortegnet +}$$

svarer til n lige, Fortegnet $\div$ til n ûlige.

Produktet af Rödderne er saaledes nümerisk lig Ligningens sidste Led. Den almindelige Sætning lyder saaledes:

Summen af Produkterne af Rödderne taget p og p paa alle mulige Maader er nümerisk lig Koefficienten til x^{n-p}.

6 Opgave. Find den Ligning, hvis Rödder er Kvadratet paa Röd-derne i Ligningen $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Kaldes Rödderne i den givne Ligning α β og γ, har man

$\alpha+\beta+\gamma = \div a$ $\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b$ og $\alpha\beta\gamma = -c$.

Dersom den søgte Ligning er $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ vil

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -A$ $\quad \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = B$ og $\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \div C$.

Vi vil bestemme Koefficienterne A, B og C.

1) <u>A</u> ?? $\quad \div A = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = a^2-2b$,

hvoraf $\quad \underline{A = 2b-a^2}$

2) <u>B</u> ?? $\quad B = \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2 - 2\alpha^2\beta\gamma$

$= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = b^2+2c\cdot(-a) = b^2-2ac$

hvoraf $\quad \underline{B = b^2-2ac}$

3) <u>C</u> ?? $\quad -C = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = c^2$ hvoraf

$\underline{C = \div c^2}$. Den søgte Ligning er derfor:

$$x^3+(2b-a^2)x^2+(b^2-2ac)x-c^2=0.$$

<u>Opgaver</u>: 1. Bestem p saaledes, at den ene af Rödderne i $2x^3+x^2\div 5 = p$ er Middeltal mellem de to andre. Lös derpaa Lign.

2. α, β og γ er Rödder i Ligningen $2x^3-3x^2+4x+5=0$. Find 1) $(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$ og 2) $(\alpha^2-2)(\beta^2-2)(\gamma^2-2)$.

3. α, β og γ er Rödder i $x^3+ax^2+bx+c=0$. Find den Ligning, hvis Rödder er $\alpha+2\beta$, $\beta+2\gamma$ og $\gamma+2\alpha$.

4. Ligningen $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ har to Dobbeltrödder. Find b og c udtrykt ved a og d.

5. Rödderne i $x^3+ax^2+bx+c=0$ danner paa hinanden følgende Led i en Differensrække. Find en Ligning mellem a, b og c.

6. Bestem p saaledes, at den ene Rod i $x^3+5x^2+3x+p=0$ er Mellemproportional mellem de to andre og lös derpaa Ligningen.

6. Sætninger, der gælder for specielle Former af n^{te} Grads Ligningen.

1) For n^{te} Grads Ligninger, hvis Koefficienter er reelle gælder følgende:
Dersom $\alpha + i\beta$ er p-dobbelt Rod i Ligningen, vil $\alpha - i\beta$ ogsaa være p-dobbelt Rod.

At $\alpha + i\beta$ er p-dobbelt Rod i $f(x) = 0$ vil sige, at

$$f(x) = [x - (\alpha + i\beta)]^p \cdot \varphi(x)$$

Ligningen er en Identitet, og højre Side vil altsaa efter Udmultiplication ved forud blive lig venstre Side. Da i ikke findes blandt Koefficienterne i $f(x)$, maa højre Side efter Udmultiplicationen kun indeholde i opløftet til lige Potenser. Ligningen kan derfor ikke forandres, naar man overalt ombytter i med $\div i$. Man faar da

$$f(x) = [x - (\alpha - i\beta)]^p \cdot \varphi_1(x)$$, hvor $\varphi_1(x)$ er dannet af $\varphi(x)$ ved at ombytte i med $\div i$.

$\alpha \div i\beta$ er altsaa under den givne Forudsætning p-dobbelt Rod i $f(x) = 0$.

2) For n^{te} Grads Ligninger, hvor x^n har Koefficienten 1 og alle andre Koefficienter er hele Tal gælder Sætningen:
Ligningens rationale Rødder er hele Tal, som gaar op i Ligningens sidste Led. Ligningen har altsaa ingen Rødder, som er rationale Brøker.

a) Den rationale Rod $\frac{p}{q}$ kan ikke være Rod i Ligningen:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots a_{n-1} x + a_n = 0$$

idet nemlig $\frac{p}{q}$ være forkortet saa meget som muligt. Hvis nu $\frac{p}{q}$ var Rod i Ligningen, maatte

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots\dots a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0 \quad \text{eller}$$

$$p^n + a_1 p^{n-1} \cdot q + \dots\dots a_{n-1} \cdot p \cdot q^{n-1} + a_n q^n = 0 \quad \text{eller}$$

$$\div p^n = a_1 p^{n-1} \cdot q + \dots\dots a_{n-1} \cdot p \cdot q^{n-1} + a_n \cdot q^n.$$ Men her er

højre Side deleleg med q, der nemlig kan gaa op i venstre Side, da q er primisk med p.

Ligningens rationale Rødder er altsaa hele Tal.

6) Lad det hele Tal t være Rod i Ligningen. Vi vil da bevise, at det gaar op i a_n. Naar t er Rod i Ligningen, er

$$t^n + a_1 \cdot t^{n-1} + \dots\dots \; a_{n-1} \cdot t + a_n = 0 \text{, hvoraf}$$

$$t^n + a_1 \cdot t^{n-1} + \dots\dots \; a_{n-1} \cdot t = -a_n \text{; der viser, at}$$

t gaar op paa venstre Side. Det maa da ogsaa gaa op i a_n.

7. Lad $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \dots\dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ være en almindelig Ligning af $n$te Grad.

Dersom $x = \alpha$ er Rod i Ligningen, vil $x - \alpha$ gaa op i $f(x)$.

Dersom $\alpha \pm i\beta$ er Rødder i Ligningen, vil

$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x-\alpha)^2 - (i\beta)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ gaa op i $f(x)$.

Man kan nu i specielle Tilfælde løse Ligninger af højere Grad.

Eks 1. $x^3 + x - 10 = 0$

Dersom Ligningen har rationale Rødder, maa det være hele Tal, som gaar op i 10. Man prøver derfor, om et af Tallene ± 1, ± 2, ± 5 og ± 10 skulde være Rod i Ligningen. Hvis det ikke viser sig at være Tilfældet, har Ligningen ingen rationale Rødder.

Prøven viser, at $x = 2$ er Rod. Man ved da, at $x - 2$ gaar op i Ligningens venstre Side. Ligningen kan da skrives:

$$(x-2)(x^2 + 2x + 5) = 0.$$

Rødderne er derfor $\qquad x = \begin{cases} 2 \\ -1 \pm 2i \end{cases}$.

Eks 2. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 2x - 12 = 0$ har Roden $1 - i\sqrt{3}$. Løs Ligningen.

Ligningen har da ogsaa Roden $1 + i\sqrt{3}$, og Produktet

$[x-(1+i\sqrt{3})][x-(1-i\sqrt{3})] = (x-1)^2 \div (i\sqrt{3})^2 = x^2-2x+4$ vil altsaa gaa op i Ligningens venstre Side. Man dividerer da x^2-2x+4 op i denne venstre Side. Ligningen kan da skrives:

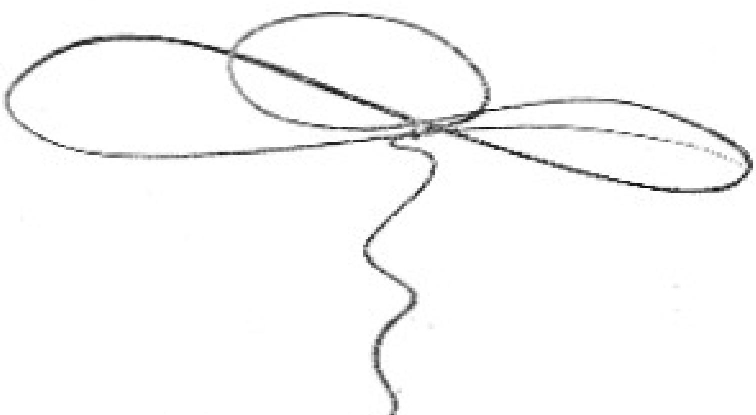
$$(x^2-2x+4)(2x^2-x-3)=0$$

hvoraf $\quad x = 1 \pm i\sqrt{3} \quad$ og $x = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \div 1 \end{cases}$.

<u>Opgaver:</u>

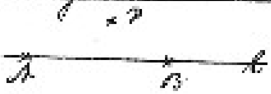
1. Løs Ligningen $\quad x^4-5x^3-x^2-25x-6=0$.
2. $x^5-2x^4-4x^3+12x^2+3x-10=0$ har Roden $2+i$. Løs den fuldstændigt.
3. Dan den 4^{de} Grads Ligning, hvis Rødder er
$$\cos 72° \pm i \sin 72° \text{ og } \cos 144° \pm i \sin 144°.$$
4. Vis, at de to Ligninger
$$2x^3+5x^2+16x+7=0 \text{ og}$$
$$2x^3-5x^2-x+1=0 \text{ har en Rod fælles.}$$

Løs derpaa begge Ligningerne.



Tillæg til Stereometrien

Til § 3. 2°. Gennem en Linie l og et udenfor liggende Punkt P kan der lægges en og kun én Plan. Vi vælger to Punkter A og B paa l. PAB er da den



søgte Plan, thi den indeholder l helt, da den indeholder 2 af dens Punkter. At denne Plan er den eneste, der kan lægges gennem P og l ses saaledes: Dersom man kunde lægge endnu en Plan gennem P og l, vilde de to Planer faa 3 Punkter fælles, hvilket er umuligt.

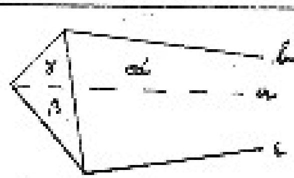
3° bevises paa samme Maade.

6°. Gennem et Punkt P kan der tegnes en og kun en Linie $l_1 \neq$ en opgiven Linie l. Vi konstruerer Planen (Pl). I denne kan der tegnes en Linie $l_1 \neq l$ og l_1 er da den søgte Linie. At l_1 er den eneste Linie gennem P, der er $\neq l$ ses saaledes: Var der endnu en Linie l_2 gennem $P \neq l$, vilde l og l_2 bestemme en Plan, der havde 3 Punkter fælles med Planen (Pl), hvilket er umuligt.

7°. Gennem et Punkt P kan der tegnes én og kun én Linie $\perp$ en opgiven Linie l og skærende denne. Vi konstruerer Planen (Pl) og tegner i denne en Linie l_1 fra $P \perp l$. At dette er den eneste Linie, der gaar gennem P, skærer l og er $\perp l$, ses

saaledes: Dersom l_2 havde de samme Egenskaber som l_1, vilde der fremkomme en Trekant med 2 rette Vinkler, hvilket er umuligt.

8°. Tre Planer, af hvilke ikke to er $\neq$, har tre Skæringslinier, der enten skærer hinanden i eet Punkt eller ogsaa to og to er $\neq$.



Lad $a \neq b$. Linien c, som er Skæringslinie for α og β kan da ikke skære a, thi Skæringspunktet maatte da ligge i alle 3 Planer og altsaa ogsaa i b; a og b maatte da skære hinanden, hvilket er umuligt. Paa samme Maade ses det, at c ikke kan skære b. Vi har altsaa $c \neq a$ og $c \neq b$.

2) lad a skære b i Punktet P.

P maa da ligge i alle 3 Planer og derfor ogsaa i c. De tre Skæringslinier vil derfor skære hinanden i P.

9°. En Linie a er ∥ en Plan α, naar den er ∥ en Linie b i Planen.

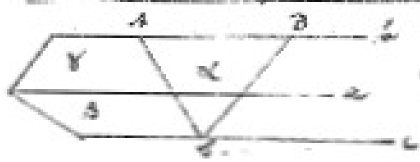
a og b bestemmer en Plan, som vi vil kalde β. Hvis nu a skærer α, maa det være i α og β's Skæringslinie, hvilket er b. Men det er umuligt, da a ∥ b.

10° Hvis a er ∥ α, vil enhver Plan gennem a skære α i en Linie b, der er ∥ a.

Givet: a ∥ α !! Bevis b ∥ a ??

a ligger nemlig i Plan med b og kan ikke skære b, da den derved vilde skære α.

11°. Hvis to Linier er ∥ samme tredje, er de indbyrdes ∥.



Givet: a ∥ b og a ∥ c !! Bevis b ∥ c ??

Plan (ab) kaldes γ. Plan (ac) kaldes β.

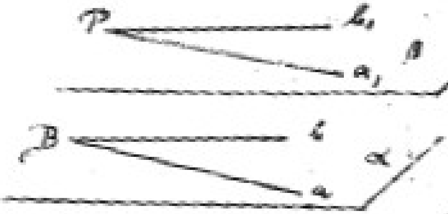
Gennem to Punkter i b og et i c lægger vi en ny Plan α, og vi vil vise, at denne Plan skærer β i c. Hvis dette nemlig ikke er Tilfældet, lad da α skære β i Linien c_1. De tre Planer α, β og γ vil nu ifølge 8° faa Skæringslinier, der er ∥, da a ∥ b. Man har da to Linier, nemlig c og c_1, der begge gaar gennem Punktet C, og begge er ∥ a, hvilket er umuligt. α vil derfor skære β i c. Men de tre Skæringslinier a, b og c vil da ifølge 8° være ∥.

12°. Gennem en given Linie a kan der lægges én og kun én Plan ∥ en anden given Linie b, der ikke er ∥ a. Gennem et vilkaarligt Punkt P af a lægges en Linie c ∥ b. Planen (ac) er da den søgte

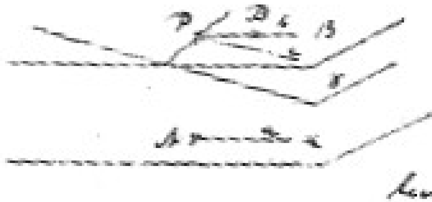
Plan; b er nemlig ∥ Pl (ac), da den er ∥ en Linie i Planen. At Pl (ac) er den eneste Plan gennem a

$\neq b$, ses saaledes. Dersom ..
$\neq b$, vilde denne ifølge 1° skære af Planen.
er var $\neq b$. Man havde da gjennem P to Linier c og c_1, der begge var $\neq b$, hvilket er umuligt.

§ 3. 1° Gjennem et Punkt P udenfor en Plan α, kan der lægges én og kun én Plan $\neq \alpha$. Man vælger et vilkaarligt Punkt B i α og trækker gjennem dette to Linier a og b, der begge ligger i α. Gjennem P trækkes $a_1 \neq a$ og $b_1 \neq b$. Disse to Linier a_1 og b_1 bestemmer den søgte Plan β.



1) At $\beta \neq \alpha$ bevises saaledes: Lad nemlig α og β skære hinanden i Linien c. a_1 kan da ikke ligeskære c, da den i saa Fald vilde skære α, som den er $\neq$. a_1 er derfor $\neq c$. Men paa samme Maade indses man, at $b_1 \neq c$. Vi har altsaa gjennem P to Linier a_1 og b_1, der begge er $\neq c$, hvilket er umuligt. Altsaa er $\beta \neq \alpha$. 2) At den saaledes konstruerede Plan β er den eneste Plan gjennem P $\neq$ vises saaledes: Dersom nemlig tillige γ gik gjennem P og var $\neq \alpha$, kunde man i α vælge et vilkaarligt Punkt A og i β et Punkt B liggende udenfor Skæringslinien mellem β og γ. Planen APB vil da skære Planerne α, β og γ i Linierne a, b og c. Men $b \neq a$, b kan ikke skære a uden at skære α; β kunde da ikke være $\neq$. Paa samme Maade ser man, at $c \neq a$. Man havde da gjennem P to Linier b og c, der begge var $\neq a$, hvilket er umuligt. β er derfor den eneste Plan gjennem P $\neq \alpha$.



2°. En Plan, der skærer den ene af to $\neq$ Planer, vil og-den anden, og Skæringslinierne bliver ≠.

Hvis γ nemlig ikke skærer α, maa γ være ≠ α. Man kunde da gennem et Punkt A paa β og γ's Skæringslinie to Planer γ og β, der begge var ≠ α, hvilket er umuligt. Skæringslinierne mellem β og γ og mellem α og γ kan ikke skære hinanden, da dette vilde medføre, at α og β skar hinanden. Vi har herved bevist Sætningen: Naar en Plan skærer ≠ Planer, vil Skæringslinierne være ≠.

3°. Hvis to Planer er ≠ med en og samme tredje, er de indbyrdes parallele. De tre Planer kaldes α, β og γ.

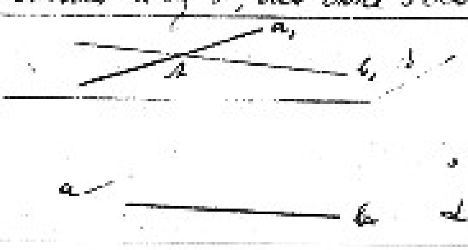
Opgivet: α ≠ γ og β ≠ γ!! Bevis: α ≠ β??

Hvis α ikke er ≠ β maa de skære hinanden. Hvis A er et Punkt af deres Skæringslinie, har man to Planer gennem A ≠ γ, hvilket er umuligt. Altsaa er α ≠ β.

4°. Naar en ret Linie l skærer den ene af to ≠ Planer, skærer den ogsaa den anden. Opgivet: l skærer α!! Bevis: l skærer ogsaa β??

Man vælger et vilkaarligt Punkt B i β. Planen (Bl) vil da skære α i Linien a og β i Linien b. Hvis l ikke skærer β, maa l ≠ b. Man har da to Linier l og a gennem samme Punkt og parallele med b, hvilket er umuligt (ifølge Paralleløksiomet). l vil derfor skære β.

5. Gennem et Punkt A kan der lægges en og kun én Plan ≠ to givne Linier a og b, der ikke selv er ≠. Gennem A lægges a_1 ≠ a og b_1 ≠ b. a_1 og b_1 bestemmer da den søgte Plan β. At dette er den eneste Plan gennem A ≠ de to givne Linier, indses saaledes:



Hvis der var endnu en Plan – vi kan kalde den γ – som gik gennem A og var $\parallel a$ og b, saa vilde denne Plan nødvendigvis indeholde en af Linierne a_1 og b_1. Lad os gaa ud fra, at den ikke indeholder a_1. Planen (aa_1) vil da skære γ i en Linie a_2, som er $\parallel a$. Vi havde da gennem A to Linier, der begge var $\parallel a$, hvilket er umuligt.

Skæring mellem en Omdrejningskegle og en Plan.

1) Planen skærer alle Frembringerne. Fig. 22 i Stereometrien.

Fra A – Keglens Toppunkt – nedfældes en Linie $\perp$ Snitplanet, og man lægger derpaa et Plan (I) gennem denne Linie og Keglens Akse. I er da $\perp$ Snitplanen, som den skærer i Linien BC. Man tegner derpaa $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel, samt den af Trekantens udvendige Røringscirkler, som rører Siden a. Cirklernes Røringspunkter med BC kaldes F og F_1, medens Cirklernes Centrer kaldes O og O_1. Hvis man nu lader Linierne AB og AC samt de to Cirkler dreje sig 180° om Keglens Akse, vil man ad denne Vej faa frembragt Keglefladen med to indskrevne Kugler. At disse tangerer Snitplanen i F og F_1 ses saaledes: En Linie fra O $\perp$ Snitplanen vil forblive helt i Plan I, da denne er $\perp$ Snitplanen. Den omtalte Linie vil derfor falde sammen med OF.

Vi vil nu bevise, at Snitkurven er en Ellipse. Gennem et vilkaarligt Punkt M af Snitkurven trækkes en Frembringer, som rører Kuglerne i K og L, der ligger paa hver sin af de Cirkler, hvori Kuglerne rører Keglefladen. De omtalte Cirklers Planer er begge $\perp$ Keglens Akse. Da Tangenterne fra et Punkt til en Kugle er ligestore, regnet fra Toppunkt til Røringspunktet, vil $FM = MK$ og $F_1M = ML$. Ved Addition faar man: $FM + F_1M = KL$, der er konstant, da det afskæres af en vilkaarlig Frembringer af to Planer, der er $\perp$ Keglens Akse. Kurven er altsaa en Ellipse med CB som Storakse, og man har $FM + F_1M = a$. Kurvens Ekcentricitet er $e = \frac{FF_1}{CB} = \frac{c-b}{a}$.

Naar Keglens Toppunkt bevæger sig langs Aksen ud i det uendelige, gaar Keglefladen over til at blive en Omdrejningscylinderflade. Beviset for, at en saadan Cylinderflade skæres i en Ellipse af en vilkaarlig Plan, der ikke er ⊥ Aksen, kan føres ordret som ovenstaaende Bevis.

2) <u>Snitplanen er ∥ to Frembringere</u> (∥ en Sekantplan). Planen vil da skære begge Keglens Net, og <u>Kurven bliver en Hyperbel</u>.

Med samme Betegnelser som før har man (Fig. 23 i Stereometrien)

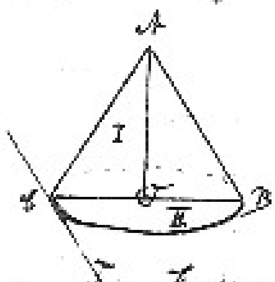
$F_1M = MK$ og $FM = ML$. Ved Subtraktion faar man:

$FM - F_1M = ML - MK = \pm KL$, der er konstant. Kurven er altsaa en Hyperbel med BC som Storakse, og man har $FM - F_1M = \pm a$, eftersom M er et Punkt paa den ene eller den anden Hyperbelgren.

Ekscentriciteten $e = \frac{FF_1}{BC} = \frac{FC + CB + BF_1}{a} = \frac{a-a+c}{a} = \frac{b+c}{a}$.

3) <u>Snitplanen er ∥ én og kun én Frembringer</u> (o: ∥ en Tangentplan).

<u>Hjælpesætning:</u> Keglens Tangentplan langs en Frembringer er ⊥ den Plan I, som dannes af Frembringeren og Aksen. — II er en Plan ⊥ Aksen, og II skærer derfor Keglefladen i en Cirkel. Lad CB være Skæringslinien mellem I og II, og lad CT være Tangent til Cirklen i C. CT er da ⊥ Radius OC og tillige ⊥ Keglens Akse AO. CT er altsaa Normal til Plan I, og da Keglens Tangentplan langs AC indeholder CT, er denne Tangentplan ⊥ Plan ABC.

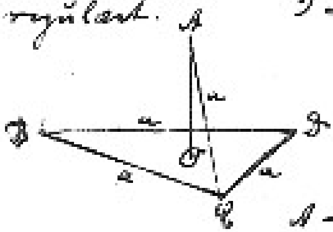


<u>Hovedsætningen:</u> Naar Snitplanen er ∥ en Tangentplan, bliver den frembragte Kurve <u>en Parabel</u> (Fig. 24 i Stereometrien). Da Snitplanen er ∥ Tangentplanen langs Frembringeren OG, maa det ligesom Tangentplanen være ⊥ den Plan I, som dannes af OG og Keglens Akse. Tangentplan og Snitplan skæres altsaa af Plan I i ∥ Linier, og

dennem den sidste af Skæringslinierne er AE; vil AE ∥ OG. I Plan I tegnes dernæst en Cirkel, der rører OG, OA og AE, den sidste i F, og naar nu de to Frembringere og Cirklen drejes 180° om Keglens Axe, faar man derved frembragt Keglefladen og den indskrevne Kugle, som rører Snitplanet i F. Kugleflade og Keglefladen rører hinanden i Cirklen DE, hvis Plan staaer ⊥ II. Da baade II og Snitplanene er ⊥ Plan I, vil deres Skæringslinie l ogsaa være det. Beviset for, at Kurven er en Parabel, kan nu føres som i Stereometrien.

Konstruktion af det regulære Tetraeder.

Lad BCD være en ligesidet Trekant med Siden a, og lad os kalde dens omskrevne Cirkels Centrum for O. Gennem O tegnes dernæst en Linie ⊥ Plan BCD og i denne Linie bestemmes Punktet A, saaledes at AC = a. Dernæst tegnes AB og AD. Vi vil nu bevise, at det fremkomne Legeme er regulært.

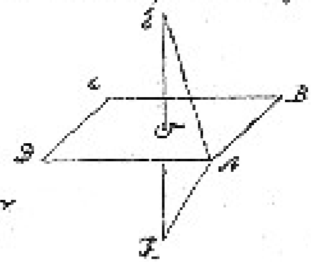


1) Legemet er begrænset med regulære Trekanter, thi AC = AB = AD = a, da de er Skraalinier, der afvige lige meget. 2) At tillige alle Toplansvinkler er ligestore, ses saaledes:

A-BCD er en regulær Pyramide, thi 1) BCD er regulær og 2) den vinkelrette fra A træffer Centrum for △BCD's omskrevne Cirkel. Toplansvinklerne mellem Pyramidens Sideflader vil da bestemmes af Formlen $\sin\frac{v}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{u}{2}}$ og er følgelig ligestore. Ligeledes er B-ACD en regulær Pyramide, thi 1) △ACD er regulær og 2) Højden fra B vil træffe Centret for △ACD's omskrevne Cirkel. At dette sidste er rigtigt ses af, at de tre Skraalinier BA, BC og BD er ligestore, hvorfor deres Afvigelser fra den vinkelrette ogsaa er lige store. Toplansvinklerne mellem Sidefladerne i denne Pyramide bestemmes da ogsaa af Formlen $\sin\frac{v}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{u}{2}}$. Alle Toplansvinkler er altsaa ligestore.

Konstruktion af det regulære Oktaeder.

Lad ABCD være et Kvadrat med Side a og Centrum O. Gennem O tegnes en Linie ⊥ Planen ABCD, og vi bestemmer de to Punkter E og F, som ligger i denne Linie, og hvis Afstand fra A er a. Oktaedrets 6 Vinkelspidser er derved bestemt. Vi vil nu bevise, at det fremkomne Legeme er regulært.



Legemet er begrænset af lutter ligesidede Trekanter. Ethvert af de 6 Punkter f. Eks. B kan betragtes som Toppunkt for en regulær, firsidet Pyramide; thi △OAE ≅ △OAB, hvoraf følger AECF ≅ ABCD. Pyramidens Grundflade bliver altsaa et Kvadrat. Højden fra B vil træffe Grundfladen AECF i Centrum; thi Skraalinierne BE, BC, BF og BA er ligestore og maa derfor afvige ligemeget fra den vinkelrette Fodpunkt. Alle Legemets Toplansvinkler vil derfor bestemmes af Formlen $\sin\frac{v}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{w}{2}}$ og vil følgelig være ligestore. Det er dermed bevist, at det fremkomne Legeme er regulært.

Nogle historiske Bemærkninger.

Allerede en ægyptisk Papyrus „Ahmes' Regnebog" (1700–2000 f. Kr.) indeholder Løsning af simple matematiske Opgaver f. Eks. Ligninger af 1ste Grad med 1 Ubekendt, Selskabsregning og enkelte Differens- og Kvotientrækker. Ægypterne skal have været dygtige i Løsning af (simple) Konstruktionsopgaver.

Grækerne: Pythagoras † ca. 500 f. Kr., levede i Storgrækenland, hvor han grundlagde en Skole, der bl. a. beskæftigede sig med Matematik. P. har opdaget de irrationale Tal og har konstrueret de 5 regulære Legemer. Han og hans Disciple kendte Vinkelsummen i en Trekant og kan løse en 2 Grads Ligning ved Konstruktion. P har opdaget den pythagoræiske Læresætning.

Euclid ca 300 f. Kr., levede i Alexandria. Han har skrevet en omfat-
tende Lærebog, de saakaldte „Elementer". Den bestaar af 13 Bøger, der
indeholder en Fremstilling af hele den bekendte græske Matematik.
Det meste af det geometriske Mellemskolestof findes behandlet her,
men der findes ogsaa videregaaende Ting: Læren om irrationale
Tal og Stereometri f. Eks. Pyramidens og Keglens Volumen samt en gen-
nemført Teori om regulære Legemer. Desuden en indgaaende Behand-
ling af Proportioner.

Archimedes † 212 f. Kr., levede i Syracus. Hans Skrift om „Cirklens Maa-
ling" angiver $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$. Han har løst mange Opgaver, som nu
løses ved Integralregning; han har f. Eks. fundet Arealet af et Parabel-
segment og dettes Tyngdepunkt samt Tyngdepunktet for et vilkaarligt
Segment af det Legeme (Omdrejningsparaboloiden) som dannes, naar
en Parabel drejer sig 180° om sin Akse. I Skriftet „Om Legemer, der fly-
der paa en Vædske" udvikler han den fra Fysikken kendte Sætning om
Opdriften, der især kaldes „det archimediske Princip".

Apollonius ca 200 f. Kr., levede i Alexandria. Han har skrevet 8 Bøger
om Keglesnit, der under ren geometrisk Form beviser de fleste Sæt-
ninger om Keglesnit, der i Artiumspensummet nu bevises ved ana-
lytisk Geometri. Bøgerne rummer desuden mange videregaaende Sæt-
ninger. Ogsaa Archimedes og Euclid har skrevet om Keglesnit.

Menelaos ca 100 e. Kr. er Astronom. Han levede i Alexandria og har
særlig beskæftiget sig med sfærisk Geometri.

Ptolemaios ca 150 e. Kr. er ligeledes Astronom og levede i Alexandria.
Hans Værk „Stor Sammenstilling" er kendt under Navnet „Almagest".
Det giver en Udsigt over græsk Astronomi og den Matematik, som Da-
tidens Astronomer havde Brug for. Han benytter den ptolemæiske
Sætning til at beregne Længderne af Korder i en given Cirkel, naar

den Centervinkel, der spænder over Korden er opgivet. Da $\sin\frac{v}{2} = \frac{k}{2r}$, har han samme Nytte af sine Kordetabeller, som vi af sinus Funktionen.

Heron fra Alexandria ca 200 e Chr. har udgivet Værker, der dog ikke betyder noget videnskabeligt Fremskridt. Heri hans Løsning om Trekantens Areal: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Diofant ca 300 e Chr. har udviklet den græske Aritmetik, hvis første Elementer findes hos Euclid og sikkert er af endnu ældre Dato. Hans Arbejder om Talteori er Grundlag for Fermats senere Arbejde paa dette Omraade.

Araberne har bevaret den græske Matematik gennem Oversættelser. De arabiske Matematikere forstod og benyttede den græske Matematik, men udviklede ikke Videnskaben videre. De indførte dog Funktionerne sinus og tangens og lægger hermed Grunden til Trigonometrien. Arabiske Matematikere har udregnet sinus og tangensTabeller.

Det første virkelige Fremskridt fra Grækernes Standpunkt sker i Italien ca 1500, hvor Tredjegradsligningen løses af Scipio del Ferro og Tartaglia. Disse Matematikere kunde dog ikke løse 3die gradsligningen i alle Tilfælde, men deres Løsning maa suppleres med den lidt senere levende franske Matematiker Vietas Løsning af Ligningen i det saakaldte irreduktible Tilfælde.

Italieneren Ferrari (1522-1565) har løst Fjerdegradsligningen, idet han fører Løsningen tilbage til Løsning af en 3die Grads Ligning. Nordmanden Abel (1802-29) har bevist, at Ligninger af 5te Grad og derover i Almindelighed ikke kan løses ved Rodstørrelser.

John Neper (1550-1617) er Opfinder af Logaritmerne, idet han dog anvendte et andet Grundtal for Logaritmerne, end vi nu bruger.

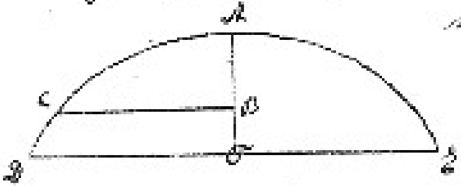
Briggs (1561-1630), der ogsaa er Englænder, var Napiers Medarbejder. Han har indført vore almindelige Logaritmer, der har 10 til Grundtal.

Pierre de Fermat (1601-1665) har behandlet talteoretiske Problemer og har opstillet mange vigtige Sætninger, af hvilke nogle endnu venter paa Bevis. Dette gælder f. Ex. Sætningen, at $x^n+y^n=z^n$ ikke kan løses i hele Tal, naar n er hel og >2. Fermat bestemmer Maksimum og Minimum af Funktioner, der har Formen $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_n$ og $y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}\dots+a_n}{b_0x^p+b_1x^{p-1}\dots+b_p}$. De almindelige Regler er i Tilslutning til Fermat givet af Huygens. De karakteristiske Bestemmelser minder meget om vore Metoder og Regler til Bestemmelse af $\frac{dy}{dx}$ for de to Funktioner. Fermat bestemmer tillige Tangenten til en opgiven Kurve ved at bestemme Kurvens Subtangent i det betragtede Punkt. Da $S_t = y:\frac{dy}{dx}$ ses Sammenhængen med vor Bestemmelse. Han bestemmer de Kurvearealer, der nu betegnes ved $\int_0^a x^n dx$, hvor n er positiv, negativ, hel eller brudden. Han benytter derved Metoder, der ligner den, vi har benyttet i Infinitesimalregningen Side 50 nederst.

Huygens (1629-95) Opfinder af Pendul-Uhret. Hans Hovedværk „Horologium oscillatorium" indeholder en Beskrivelse af Opfindelsen samt vidtgaaende matematiske Udviklinger (bl. a. om Svingningernes Ligetidighed, naar et tungt Punkt svinger paa en Cykloide (se nedenfor)), om Inertimomenter m. m. Han har med stor Elegance løst mange Opgaver, som nu løses ved Anvendelse af Infinitesimalregning.

Blaise Pascal (1623-62). For at vise, hvilke Opgaver man har kunnet løse før Infinitesimalregningens Opfindelse, skal nævnes Pascals Behandling af Cykloiden. Cykloiden beskrives af et fast Punkt paa en Cirkels Periferi, naar Cirklen ruller uden at glide paa en ret

Linie. Figuren viser en Bue af Kurven med dens Symmetrilinie OA og et Stykke BE af den Linie, paa hvilken Cirklen ruller. $OA = 2r$,



hvor r er Radius i den rullende Cirkel, og $BE = 2\pi r$. C er et vilkaarligt Punkt paa Cykloiden, og $CD \perp OA$. Pascal har nu fundet 1) Areal og Tyngdepunkt for den krumliniede Trekant ABC, 2) Volumen og Tyngdepunkt af det Legeme, som dannes, naar den samme Trekant drejes 180° om OA eller om OB og 3) den krumme Overflade af disse Legemer og disse Overfladers Tyngdepunkter. Pascal har yderligere beskæftiget sig med aritmetiske Spørgsmaal f. Eks. Kombinationer, Binomialkoefficienter. Desuden er han den første, der har anvendt delvis Integration, som han dog har givet en anden Form, end vi, da han ikke kender vor Betegnelse for Integral og maa tale om en Kurves Areal, hvor vi taler om et Integral. P. har opdaget Induktionsbeviset.

René Descartes (Cartesius) (1596-1650) er Grundlægger af den analytiske Geometri. De nye Teorier findes i hans Bog „La geometrie", der udkom 1637. Den analytiske Geometri er en aritmetisk Behandling af Geometrien, idet Punkterne bestemmes ved deres Afstande fra to faste Linier (Koordinatakserne). Den er Grundlaget for store Dele af vor moderne Geometri. „La geometrie" er letfattelig og elegant skrevet, og de Metoder, den fremsatte, blev hurtig Almeneje for Datidens Mathematikere.

Newton (1642-1727) og Leibniz (1646-1716) har uafhængig af hinanden opdaget Differential- og Integralregningen. Med Newtons og Leibniz's Arbejder paa dette Omraade begynder en ny Tidsalder for Matematiken, og mange Forskere har arbejdet videre paa det Grundlag, som derved er skabt. Newton har i sit Hovedværk „Principia"

leveret det matematiske Bevis for de keplerske Love for Planetbevægelsen, som Kepler har opstillet paa Grundlag af Tyge Brahes Observationer. De nu benyttede Tegn for Differentialkvotient og Integral „$\frac{dy}{dx}$ og $\int$" skyldes Leibniz.
Gauss (1777–1855) har fremstillet den eksakte Teori om komplekse Tal. Danskeren Caspar Wessel (1745–1818) har allerede tidligere skrevet en Afhandling herom, men denne Afhandling blev ignoreret af Samtiden.
Den moderne Behandling af irrationale Tal ved Tilnærmelsesrækker skyldes Georg Cantor (født 1845).

Odense, den 15 Juli 1918.