Matematik

for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium.

II

af

Viggo Madsen,

cand. mag. adjunkt.

1916.

Matematik

for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium.

II

af

Viggo Madsen.

cand. mag. Adjunkt.

1916.

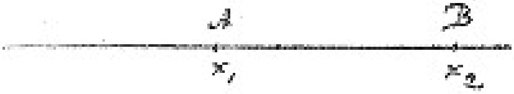
Kapitel 17–24. Trigonometri.

Kapitel 17.

Vi har vist, at der til ethvert Punkt paa en med Begyndelsespunkt og positiv Retning forsynet ret Linie – den saakaldte Abscisseakse – svarer et og kun et Tal – Punktets Abscisse – der angiver Afstanden fra Begyndelsespunktet til Punktet, maalt i cm og forsynet med Fortegn.

Lad nu A og B være to Punkter paa Abscisseaksen med Abscisserne x_1 og x_2. Man kan da bevise følgende vigtige Sætninger:

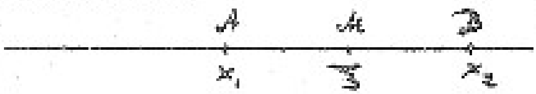
1) Afstanden fra A til B – der betegnes AB – er lig det sidste Punkts Abscisse ÷ det første Punkts Abscisse.



Lad O betegne Begyndelsespunktet; man har da ifølge Kap. 9. Anvendelse 1.

$$AB = AO + OB = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1.$$

2) Midtpunktet M af Liniestykket AB har Abscissen $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Man har nemlig AM = MB og derfor ifølge 1) $\xi - x_1 = x_2 - \xi$

hvoraf $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Opgave 1. A og B er to Punkter paa Abscisseaksen med Abscisserne –3 og 7. Find Abscissen til AB's Midtpunkt. Find de paa AB's Længde, samt Abscisserne til de 4 Punkter, som deler AB i 5 ligestore Dele.

Efter at Opgaven er løst indtegnes Abscisseaksen og alle de omtalte Punkter paa kvadreret Papir, hvorpaa man efterviser, at de fundne Resultater stemmer med Tegningen.

Opgave 2. A og B ligger paa Abscisseaxen og har Abscisserne 8 og $\div 7$. P_1, P_2 og P_3 er Punkter paa Abscisseaxen beliggende saaledes, at

$$\frac{AP_1}{BP_1} = \frac{7}{2} \quad ; \quad \frac{AP_2}{BP_2} = -3 \quad \text{og} \quad \frac{AP_3}{BP_3} = \frac{1}{3}.$$ Find Abscisserne til Punkterne P_1, P_2 og P_3.

Efter at Opgaven er löst, tegnes Abscisseaxen paa kvadreret Papir, og alle omtalte Punkter konstrueres. Derpaa efterviser man, at de fundne Resultater stemmer med Tegningen.

Vinkler.

2. Istedetfor at tale om Vinklen mellem to Linier vil vi i det fölgende tale om Vinklen fra en Linie til en anden. Lad Vinklens Toppunkt kaldes O. Vi vælger da en positiv Retning paa hvert af dens Ben og betegner disse Retninger med Bogstaverne l og l_1. Desuden vælger vi en positiv Omlöbsretning i Planen, i Regelen den, der er vist paa Figuren. Vinklen fra l til l_1 betegnes (ll_1) og kan maales i Grader. Hvorledes dette kan blive gjort, vises i det efterfölgende.

1) Hvis en Vinkel paa $1°$ gaar et helt Antal Gange – f. Eks. a Gange – op i (ll_1), maales Vinklen ved $a°$.
2) Hvis en Brökdel af $1°$ gaar op i (ll_1) – hvis altsaa f. Eks. $\frac{1}{q}°$ gaar p Gange op i Vinklen – maales den ved $\frac{p}{q}°$.
3) Hvis ingen Brökdel af $1°$ gaar op i (ll_1), kan vi hjælpe os ud paa fölgende Maade.

Gennem O tegnes en Række Linier m_1, m_2, m_3 .... saaledes at $(lm_1) = (m_1m_2) = (m_2m_3) = \ldots\ldots = 1°$, og lad os tænke os, at l_1

kommer til at ligge mellem den $p_0$te og den p_0+1te af disse Linier. Vi omtaler dem som den $p_0$te og den p_0+1te Delingsstreg og betegner deres positive Retninger ved a_0 og A_0.

Dernæst afsættes paa samme Maade $\frac{1}{10}^\circ$ ud fra l_0, hvorved l_1 kommer til at ligge mellem den $p_1$te og den p_1+1te Delingsstreg, hvis positive Retninger kaldes a_1 og A_1. Baade a_1 og A_1 vil ligge udenfor $v(a_0A_0)$. Dernæst afsættes en Vinkel paa $\frac{1}{100}^\circ$ ud fra l_1, og vi tænker os, at l_1 kommer til at ligge mellem den $p_2$te og den p_2+1te Delingsstreg, og saaledes fortsætter vi. Man har da

$$p_0+1 > (ll_1) > p_0$$
$$\frac{p_1+1}{10} > (ll_1) > \frac{p_1}{10}$$
$$\frac{p_2+1}{10^2} > (ll_1) > \frac{p_2}{10^2}$$

o. s. v.

og følgelig maales (ll_1) ved Tallet

$$\left\{\begin{array}{llllll} p_0+1 & \frac{p_1+1}{10} & \frac{p_2+1}{10^2} & \dots & \frac{p_n+1}{10^n} & \dots \\ p_0 & \frac{p_1}{10} & \frac{p_2}{10^2} & \dots & \frac{p_n}{10^n} & \dots \end{array}\right.$$

For Resten maa man ikke tro, at der til den opgivne Vinkel kun svarer et Tal, der angiver dens Gradstørrelse. Foruden Tallet ovenfor – vi kan kalde det g – svarer der til den opgivne Vinkel Tallene $g + 360 . p$, hvor p er et vilkaarligt helt, positivt eller negativt Tal. Til en opgiven Vinkel svarer der saaledes uendelig mange Tal.

3. Til et opgivet Gradantal svarer der imidlertid kun én Vinkel.

[1]) Lad Tallet være helt f. Eks $= a^\circ$

Man lægger da a Vinkler paa 1° hver med fælles Top-
punkt, saaledes at der fremkommer en Vinkel, der er
Summen af de a Vinkler.

Den fremkomne Vinkel er a°.

2) Er det opgivne Tal $g = \frac{p}{q}$, hvor $\frac{p}{q}$ er en rational
Brøk, tænker man sig 1° delt i q Dele. (At $\frac{1}{q}$ af en
Vinkel eksisterer er tilstrækkelig nok, selv om den ikke
altid kan konstrueres ved Passer og Lineal.) Af de
fremkomne Vinkler anbringes p med fælles Toppunkt
saaledes at der dannes en Vinkel = Summen af de
p Vinkler. Denne Vinkel er $= \frac{p}{q}^\circ$.

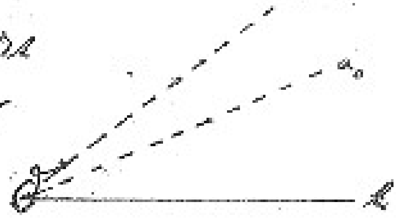
3) Lad der endelig være opgivet det irrationale Tal

$$g = \begin{cases} G_0\ G_1\ G_2 \dots G_n \dots \\ g_0\ g_1\ g_2 \dots g_n \dots \end{cases}$$

Man vælger da et Punkt O som Toppunkt for den søgte
Vinkel og en Linie gennem O forsynet med positiv
Retning l til første Ben.

Vi benytter den sædvanlige Vinkelbetegning i Planen.

Vi afsætter derpaa $v(la_0) = g_0$
og $v(lA_0) = G_0$ og tænker os det
første Vinkelrum malet over
med grønt, medens Vinkel-
rummet $(A_0 l)$ males
over med rødt. Derpaa afsættes



$v(la_1) = g_1$ og $v(lA_1) = G_1$. Linierne a_1 og A_1 vil
begge forløbe udenfor $v(a_0A_0)$, og vi tænker os Vin-
kelrummet (a_0a_1) malet grønt og Vinkelrummet
med A_0A_1 malet rødt.

Derpaa afsætter $v(la_2) = g_2$ og $v(l\mathfrak{A}_2) = G_2$, hvorved a_2 og $\mathfrak{A}_2$ begge vil komme til at ligge indenfor Vinkelen $(a_1\mathfrak{A}_1)$. Vi kalder os da $v(a_1a_2)$ malet grön og $v(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$ malet röd, og saaledes fortsætter vi.

Det röde og det grönne Udsnit vil derved nærme sig mere og mere til hinanden, og der vil være en vis Linie l_1 der danner Grænsen for det röde og det grönne. Kaldes dennes positive Retning Vink. l, vil

$$v(ll_1) = g^0.$$

At denne Linie l_1 virkelig existerer ses af fölgende: Dersom l_1 ikke existerer, maa der være en Vinkel af angivelig Störrelse mellem det röde og det grönne. Lad Tallet α^0 angive den Vinkelstörrelse, skal man da gøre $G_n - g_n <$ ethvert opgivet positivt Tal og altsaa ogsaa $< \alpha^0$. Hvilket er umuligt.

4. Lad Ol være den faste Retning og O Begyndelsespunktet, og lad A og B være to Retninger for Linier gennem O.

Vi kan da maale $v(AB)$ ved et rationalt eller irrationalt Tal g^0, hvilket ses ganske som ovenfor. Vi vedtager da at maale $v(BA)$ ved $-g^0$, og faar altsaa $(AB)+(BA)=0$.

Lad nu C være en tredje Retning, man kan da bevise, at

$$(AC)+(CB) = (AB).$$

1) C ligger indenfor (AB). Sætningen er da indlysende.

2) C ligger udenfor $v(AB)$.

Man har da (se Fig 2)

$$(AC)+(CB) = (AB)+(BC)+(CB) = (AB)$$

Fig 1.

Vi har i det foregaaende gaaet ud fra,

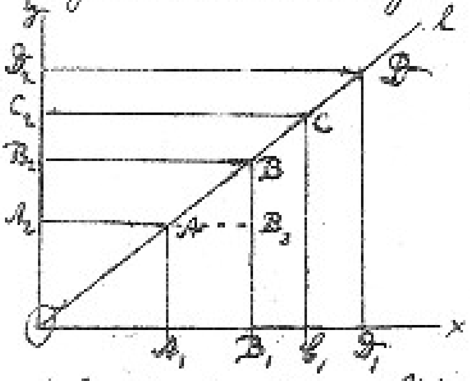
at de foreliggende Vinkler er < 360°.
Kan Vinklerne blive > 360°, skal de to Ligninger skrives:

$$(AB) + (BA) = 360\,p$$

$$\text{og}\quad (AC) + (CB) = (AB) + 360\,p$$

Fig 2.

Kapitel 18. De trigonometriske Funktioner.



1. Lad xoy være et retvinklet Koordinatsystem, og lad l være en vilkaarlig Linie gennem O. l betegner Liniens positive Retning, og Omløbsretningen i Planen er den sædvanlige.
Vi sætter $v(xl) = \alpha$.

Ved cosinus til en Vinkel vil vi da forstaa en Brøk, hvis Nævner er et vilkaarligt Liniestykke afsat ud ad Vinklens andet Ben, og hvis Tæller er dette Liniestykkes Projektion paa Vinklens første Ben.

Dersom A, B, C og D er vilkaarlige Punkter paa l, der projiceres paa x-Aksen i A_1, B_1, C_1 og D_1 og paa y-Aksen i A_2, B_2, C_2 og D_2, har man:

$\cos(xl) = \dfrac{A_1B_1}{AB}$ eller $\cos(xl) = \dfrac{C_1D_1}{CD}$ eller

$\cos(xl) = \dfrac{OA_1}{OA}$. Alle disse 3 Forhold er imidlertid lige store, da parallele Linier afskærer proportionale Stykker paa Linierne ox og ol. Man ser deraf, at der til en opgiven Vinkel svarer en aldeles bestemt cosinus.

Af Ligningen $\cos(xl) = \dfrac{OA_1}{OA}$ ses, at cosinus til en given

Vinkel i en retvinklet Trekant er = den hosliggende Katete : Hypotenusen.

Af Ligningen $\cos(xl) = \frac{A_1B_1}{AB}$ faaes:

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos(xl).$$ Heraf ses:

Projektionen af et Liniestykke er lig Liniestykket gange cosinus til den mellemliggende[*] Vinkel.

Denne Sætning, der er meget vigtig, kaldes Projektionssætningen.

2. Ved sinus til en Vinkel forstaar man en Brøk, hvis Nævner er et vilkaarligt Liniestykke afsat ud ad Vinklens andet Ben, og hvis Tæller er dette Liniestykkes Projektion paa Vinklens første Ben, efter at dette er drejet en Vinkel paa $+90°$.

Man har altsaa:

$\sin(xl) = \frac{A_2B_2}{AB}$, $\sin(xl) = \frac{C_2D_2}{CD}$ eller $\sin(xl) = \frac{OA_2}{OA}$.

At $\sin(xl)$ — ligesom $\cos(xl)$ — er et bestemt Tal, der kun retter sig efter Vinklens Størrelse og ikke efter det Stykke, der afsættes paa Vinklens andet Ben, ses af at

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{C_2D_2}{CD} = \frac{OA_2}{OA},$$ ifølge Sætningen:

Parallele Linier afskære altid proportionale Stykker paa to vilkaarlige Linier.

Af Ligningen $\sin(xl) = \frac{OA_2}{OA}$, som er $= \frac{A_1A}{OA}$ ses, at sinus til en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er = den modstaaende Katete : Hypotenusen.

Man kan nu bevise den meget vigtige Ligning:

[*] Vi beviser senere, at $\cos(xl) = \cos(lx)$, og det er derfor vi har Lov til at benytte Udtrykket mellemliggende Vinkel. Se Hjælpesætning 1 Side 17.

$$\cos^2(x\ell) + \sin^2(x\ell) = 1.$$

Bevis: $\cos^2(x\ell) + \sin^2(x\ell) = \frac{(A_1B_1)^2}{(AB)^2} + \frac{(A_2B_2)^2}{(AB)^2} = \frac{(AB_3)^2}{(AB)^2} + \frac{(B_3B)^2}{(AB)^2} = \frac{(AB_3)^2 + (B_3B)^2}{(AB)^2} = 1$ ifølge Pythagoras' Sætning.

3. Ved tangens til en Vinkel forstaar man Forholdet mellem sinus og cosinus til Vinklen.

Man faar altsaa

$$tg(x\ell) = \frac{\sin(x\ell)}{\cos(x\ell)}$$

Da imidlertid $\sin(x\ell) = \frac{A_1A}{OA}$ og $\cos(x\ell) = \frac{OA_1}{OA}$, faar man:

$$tg(x\ell) = \frac{A_1A}{OA} : \frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1A}{OA_1}.$$

Heraf ser man, at tangens til en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er = den modstaaende Katete : den hosliggende.

4. Ved cotangens til en Vinkel forstaar man Forholdet mellem cosinus og sinus til Vinklen.

Man har altsaa

$$\cot(x\ell) = \frac{\cos(x\ell)}{\sin(x\ell)} = \frac{OA_1}{OA} : \frac{A_1A}{OA} = \frac{OA_1}{A_1A}$$

eller: cotangens til en spids Vinkel i en retvinklet Trekant er = den hosliggende Katete : den modstaaende.

5. Af Definitionerne ses det, at Vinklerne α og $\alpha + 360p$, hvor p er et helt Tal, har samme sinus, samme cosinus, samme tangens og samme cotangens. De 4 trigonometriske Funktioner: sinus, cosinus, tangens og cotangens kaldes derfor periodiske Funktioner.

Af det foregaaende ses det, at

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ og $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, hvoraf $tg\,x \cdot \cot x = 1$.

Disse 4 Formler kaldes de trigonometriske Fundamentalformler. 9.

4. Vi vil – for Forstaaelsens Skyld – finde de trigonometriske Funktioner af nogle simple Vinkler.

1) $\sin 30 = \frac{1}{2}$, $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\, 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ og $\cot 30 = \sqrt{3}$.

For at bevise dette tegnes man en retvinklet Trekant, hvis ene Vinkel er $30°$.

Kaldes Hypotenusen r, vil den mindste Katete blive $= \frac{r}{2}$. Den anden Katete bliver da $x = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Heraf følger:

$$\sin 30 = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{r} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30 = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$tg\, 30 = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ og } \cot 30 = \frac{\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{r}{2}\right)} = \sqrt{3}.$$

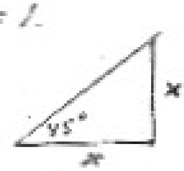
2) Da $\angle y = 60°$ ses det, at

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60 = \frac{1}{2}$, $tg\, 60 = \sqrt{3}$ og $\cot 60 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) Man kan desuden bevise, at

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad tg\, 45 = \cot 45 = 1.$$

Man tegner da en retvinklet Trekant, hvis ene Vinkel er $45°$. Sættes Hypotenusen $= r$, vil de to Kateter kunne findes saaledes: $x^2 + x^2 = r^2$ $\quad x^2 = \frac{r^2}{2}$ $\quad x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

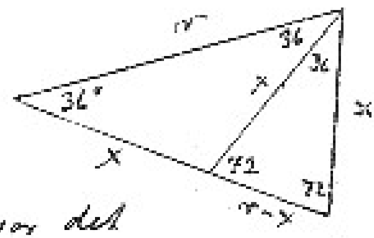


Hermed er $\sin 45 = \frac{\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ osv.

4) $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Vi tænker os tegnet en ligebenet Trekant, hvis Topvinkel er $= 36°$. Halveres derpaa den ene af Grundvinklerne, fremkommer der to ligebenede Trekanter.
Vi sætter Benet $= r$ og Grundlinien $= x$

Halveringslinjens Længde bliver da ogsaa $= x$, og den deler den modstaaende Side i Stykkerne x og $r - x$. Da nu Halveringslinien deler den modstaaende Side i Stykker, der forholder sig som de Vinklen indesluttende Sider, faar man:



$$\frac{x}{r-x} = \frac{r}{x} \text{ eller}$$

$$x^2 = r^2 - rx$$

$$x^2 + rx - r^2 = 0$$

$$x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}\text{, hvor det}$$

negative Fortegn foran Kvadratroden ikke kan benyttes, da x ikke kan være negativ.

Vi faar altsaa $x = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5}$.

Naar x er fundet, lader $\sin 18°$ sig nemt bestemme. Halveres Trekantens Topvinkel, fremkommer der en retvinklet Trekant, hvis ene Vinkel er $18°$. Man faar da: $\sin 18° = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{r} = \frac{-\frac{r}{4} + \frac{r}{4}\sqrt{5}}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\underline{\cos 18°}$ lader sig finde af den samme Trekant eller ogsaa af Formlen

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \quad \text{Sætter her } x = 18°,$$

faar man $\cos^2 18 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1$

$$\cos^2 18 = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{16 - (6 - 2\sqrt{5})}{16}$$

$$\cos^2 18 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}.$$

$$\cos 18 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

$\operatorname{tg} 18$ og $\cot 18$ lader sig nu finde af Formlerne

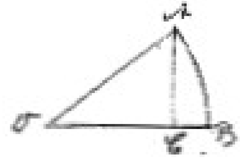
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{og} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

7. Man kan danne sig en Tabel over de trigonometrisk Funktioner af alle spidse Vinkler, og det vil senere blive

vist, at man paa Grundlag af en saadan Tabel kan finde de trigonometriske Funktioner af enhver anden Vinkel. Den Metode, vi her bruger, grunder sig paa Tegning og Udmaaling og giver derfor kun ringe Nöjagtighed (ca. 2 Decimalers Nöjagtighed); mere nöjagtigere Metoder vil blive omtalt senere.

Vi vil vise, hvorledes vi bestemmer f. Eks. cos 33°.

Man tegner da paa kvadreret Papir ved Hjælp af en Vinkelmaaler en Vinkel paa 33° og tegner derpaa med dens Toppunkt som Centrum en Cirkel med en Radius = f. Eks. 10 Kvadratsider. Lad Vinkelbenene skære Cirklen i A og B. Man nedfælder da AC ⊥ OB og tæller Antallet af Kvadratsider, som indeholdes i OC. Dividerer



dette Tal med 10, har man Værdien af cos 33°.

sin 33° findes ved at dividere Antallet af Kvadratsider, som indeholdes i CA, med 10.

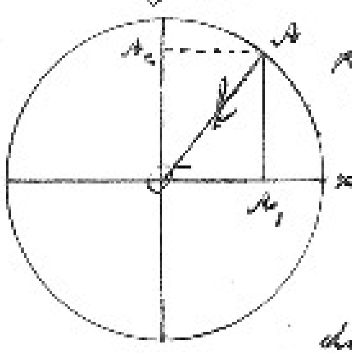
tg 33 er derpaa = $\frac{\sin 33}{\cos 33}$ og cot 33 = $\frac{\cos 33}{\sin 33}$.

Resultatet bliver nöjagtigere, naar Cirklens Radius göres större f. Eks. = 20 eller 30 Kvadratsider. Ved Udmaalingen af Liniestykkerne OC og CA kan man maale med en Nöjagtighed af $\frac{1}{10}$ Kvadratside.

Kapitel 19. Nærmere Undersögelse af de trigonometriske Funktioner.

1. cos(x). Da det Stykke, der ifölge Definitionen paa cos x skal afsættes ud ad Vinklens andet Ben, kan have vilkaarlig Störrelse, vil vi her sætte det = 1 (f. Eks. = 1 cm). Vi tænker os derfor med Vinklens Toppunkt som

Centrum tegnet en Cirkel, hvis Radius = 1 cm*). Benet



x tænkes i det følgende fastliggende ud ad x-Axen, medens l kan in-ge en hvilkensomhelst Stilling. For derefter at undersøge hvorledes cos varierer med Vinklen, lader vi l dreje sig om O udfra en Stilling, hv- det dækker x, og lader den dreje sig en h- Omdrejning i positiv Retning, indtil det atter dækk- x. Lad l's Skæringspunkt med Cirklen være A, hv- Projektioner paa x og y Axe betegnes A_1 og A_2. Man har da: $\cos(xl) = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OA_1}{1\,cm}$ = det Tal, som angiver OA_1's Længde, maalt i cm.

Ved to Diametre ox og oy deles Cirklen i 4 Kvadrant- 1ste Kvadrant er den Fjerdedel af Cirklen, som ligger over x-Axen og til højre for y-Axen. 2det Kvadrant ligger over x-Axen og til venstre for y-Axen. 3die Kva-drant ligger under x Axen og til venstre for y-Axe- 4de Kvadrant under x Axen og til højre for y Axen. l vil ved sin Bevægelse først gennemløbe 1ste Kvadr- derpaa vil den dække oy, hvorved $v(xl) = 90°$. Derpaa gen-nemløber den 2den Kvadrant og falder derpaa sam-men med xo's Forlængelse, hvorved $v(xl)$ bliver = 180° Derpaa bevæger l sig gennem 3die Kvadrant osv.

Man ser nu:

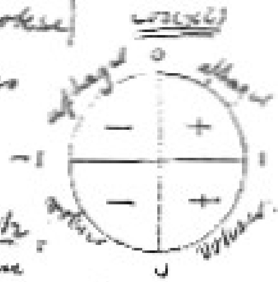
$v(xl)$	= 0	beliggende i 1ste Kvadr.	90	i 2' Kv	180	i 3die Kv	270	i 4de Kv	360
$\cos(xl)$	= 1	positiv	0	negativ	÷ 1	negativ	0	positiv	1

Desuden ser man:

*) Tegningen er for Overskuelighedens Skyld stærkt forstørret.

naar (xl) vokser gennem	1' Kv	2' Kv	3' Kv	4' Kv
vil cos(xl)	aftage	aftage	vokse	vokse

Resultaterne kan passende sammenstilles som i hosstaaende Figur:



2. sin(xl)

Da $OA = 1$ cm faar man: $sin(xl) = \frac{OA_2}{OA} = \frac{OA_2}{1 cm}$, det Tal, som angiver OA_2's Længde maalt i cm.

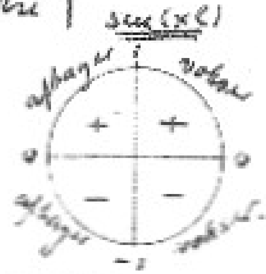
Vi faar derfor:

v(xl)	0°	i 1' Kv	90	i 2' Kv	180	i 3' Kv	270	i 4' Kv	360
sin(xl)	0	+	1	+	0	÷	−1	÷	0

Desuden naar

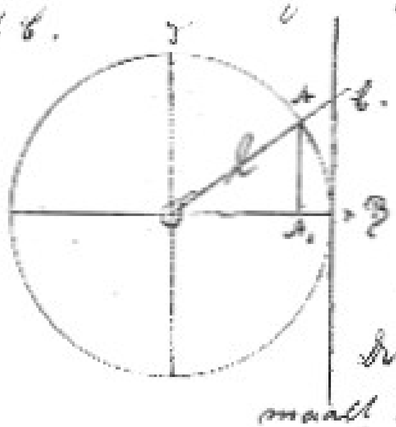
xl vokser gennem	1' Kv	2' Kv	3' Kv	4' Kv
vil sin(xl) =	vokse	aftage	aftage	vokse

Resultaterne kan sammenstilles som i hosstaaende Figur:



3. tg(xl)

Det Punkt, hvori den positive Del af x-Aksen skærer Cirklen, kaldes B. I dette oprejses en Linie – den saakaldte Tangentlinie – vinkelret paa x-Aksen. Den regnes positiv opefter og skærer l i Punktet C.



Man har da

$$\frac{BC}{A_1A} = \frac{OB}{OA_1} \text{ eller}$$

$$\frac{BC}{sin(xl)} = \frac{1}{cos(xl)} \text{ eller}$$

$$BC = \frac{sin(xl)}{cos(xl)} = tg(xl)$$

Det Tal, der angiver BC's Længde maalt i cm er da = tg(xl)

Man faar da:

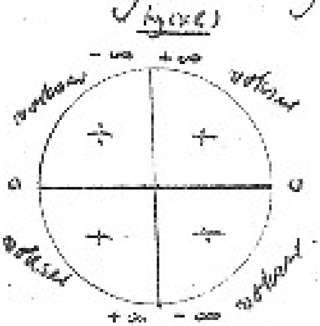
$\angle xl$	0	1' Kv	2' Kv	180	3' Kv	4' Kv	360	voksen gennem 1' Kv	2' Kv	3' Kv	4' Kv
tg(xl)	0	+	−	0	+	÷	0	voksen	voksen	voksen	voksen

<u>tg 90°</u> og <u>tg 270°</u> maa undersøges nærmere:

1) <u>tg 90°</u>: Linien l bliver da $\parallel$ BC, og tg 90 er derfor ganske ubestemt. Men hvis l fra 1ste Kvadrant nærmer sig denne og ubegrænset, ser man, at tg(xl) stadig vokser og kan göres > ethvert opgivet Tal K. Hvis l derimod fra en Stilling i 2den Kvadrant nærmer sig ubegrænset til og, vil tg(xl), som stadig er negativ, blive numerisk större og större, og vi kan göre tg(xl) numerisk > ethvert positivt Tal K. Vi ser altsaa, at Grænseværdien for tg(xl) er +∞, naar xl nærmer sig 90° gennem en voksende Talrække, medens den er ÷∞, naar xl nærmer sig 90° gennem en faldende Talrække. Man plejer at sige, at tg(xl) er numerisk uendelig (skrives ±∞) for xl = 90°.

2) tg 270° behandles paa samme Maade og viser sig ogsaa at være ±∞.

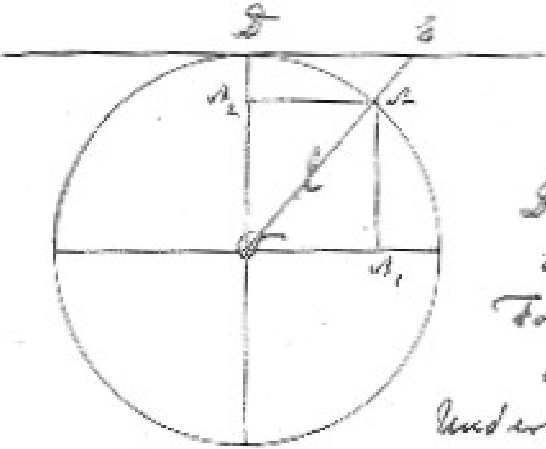
En Oversigt over tg(xl) er vedföjet.



<u>4. cot(xl)</u>

Det Punkt, hvori den positive Del af y-Axen skærer Cirklen, kaldes D. Gennem dette Punkt tegnes en Linie — den saakaldte <u>Cotangenslinie</u> — vinkelret paa y-Axen. Den regnes positiv mod höjre og skærer l i Punktet E.

man faar da $\frac{DZ}{A_2A} = \frac{OD}{OA_2}$ eller $\frac{DZ}{OA_1} = \frac{OD}{OA_2}$ eller



$$\frac{DZ}{\cos(\angle l)} = \frac{1}{\sin(\angle l)},$$ hvoraf

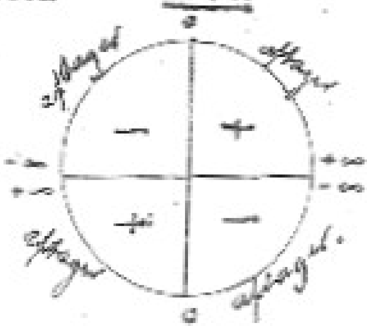
$$DZ = \frac{\cos(\angle l)}{\sin(\angle l)} = \cot(\angle l).$$

DZ's Længde, maalt i cm, er altsaa $= \cot(\angle l)$.

For $(\angle l) = 0$ og $(\angle l) = 180°$ er $\cot(\angle l) = \pm\infty$.

Undersögelsen kan ellers gennemföres paa lignende Maade som før. Resultaterne findes i vedföjede Figur:

$\cot(\angle l)$



Kapitel 20. De trigonometriske Fundamentalformler.

1. Vi har tidligere fundet Formlerne:

$$^{1)}\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

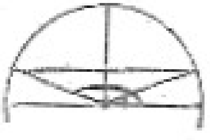
$^{2)}\ tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, $^{3)}\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ og $^{4)}\ tg\,x \cdot \cot x = 1$.

Ved Hjælp af disse Formler kan man, naar en af Funktionerne er opgivet, finde de 3 andre.

Eks: $\sin x = \frac{1}{3}$.

Indsat i 1) faar man $\cos^2 x + \frac{1}{9} = 1$ $\therefore$ $\cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

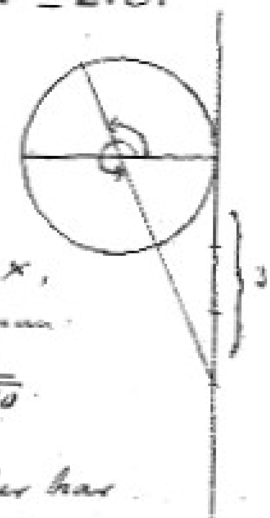
Resultatet passer godt med en Tegning: Der er nemlig to Vinkler, en i 1ste og i 2den Kvadrant, hvis sinus $= \frac{1}{3}$. Den første af dem har $\cos = +\frac{2\sqrt{2}}{3}$, den sidste $= -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



Man faar derpaa af 3) $tg\,x = \frac{1}{\pm 2\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. En Tegning viser, at den før omtalte Vinkel, der ligger i 1ste Kvadrant, har tangens $= \frac{1}{2\sqrt{2}}$, medens Vinklen i 2den Kvadrant har tangens $= -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Af 4) faas: $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot \cot x = 1$ $\quad$ o: $\cot x = \pm 2\sqrt{2}$.

Ex: $tg\,x = -3$



Indsat i 4) faar man $\cot x = -\frac{1}{3}$.

Man har desuden $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -3.$$

Af den sidste Ligning faar man $\sin x = -3\cos x$, som indsættes i den første. Derved faar man

$$9\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{o: } \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\sin x$ er da $= \mp\frac{3}{\sqrt{10}}$.

En Tegning viser, at der er to Vinkler, der har $tg = -3$, nemlig een i 2den og en i 4de Kvadrant.

Den første har $\sin = \frac{3}{\sqrt{10}}$ og $\cos = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, medens den anden har $\sin = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ og $\cos = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Man ser heraf, at man kun behøver at danne Tabel over en af de trigonometriske Funktioner, de andre kan da beregnes ved Hjælp af Formlerne ovenfor.

2. Af de 4 Fundamentalformler kan dannes andre, af hvilke nogle har særlig Interesse.

Ligning 1) giver $\underline{\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$ og $\underline{\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$, der giver $\sin x$ udtrykt ved $\cos x$ og omvendt.

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},$$ der giver $tg\,x$ udtrykt ved $\sin x$.

Løser denne Ligning med Hensyn til $\sin x$, faar man:

$$tg^2 x\,(1-\sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$tg^2x = \sin^2 x\,(1+tg^2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x} \quad \text{eller} \quad \underline{\sin x = \frac{tg\,x}{\pm\sqrt{1+tg^2x}}}$$

Paa samme Maade faar man

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$. Löser denne med Hensyn til $\cos x$, faar man $\underline{\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2x}}}$

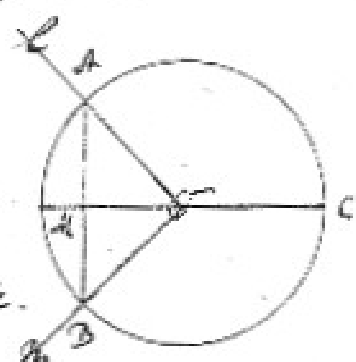
Vi har her udtrykt $\sin x$ og $\cos x$ ved $tg\,x$.

<u>Kapitel 21. Trigonometriske Funktioner af Summer og Differenser af Vinkler.</u>

<u>Hjælpesætning 1.</u> $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ ¹⁾

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ²⁾

Bevis: Lad os betragte en positiv Vinkel xl og en negativ Vinkel xm, der er numerisk ligestore, og som begge har første Ben liggende ud ad x-Axens positive Del. Lad l skære Cirklen i A og m i B. Hvis x-Axens positive Del skærer Cirklen i C, har man $⌣CA = ⌣BC$.



x-Axen gaar derfor gennem $⌣AB$'s Midtpunkt, og da den tillige gaar gennem Centrum, maa den være $\perp$ Korden AB i dens Midtpunkt M.

Man har da: $\cos(xm) = \cos(xl) = OM$.

og $\sin(xm) = MB$, $\sin(xl) = MA$.

Sætter man nu $v(xl) = \alpha$ vil $v(xm) = -\alpha$ og man faar

1) $\underline{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$

2) $\underline{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$ Divideres 2) med 1) faar man $\underline{tg(-\alpha) = -tg\,\alpha}$. Divideres 1) med 2) $\underline{\cot(-\alpha) = -\cot\alpha}$.

<u>Ombyttes α med $-\alpha$, gaar</u> altsaa <u>cos over til cos, sin til</u>

÷ sin, tg til ÷ tg og cot til ÷ cot.

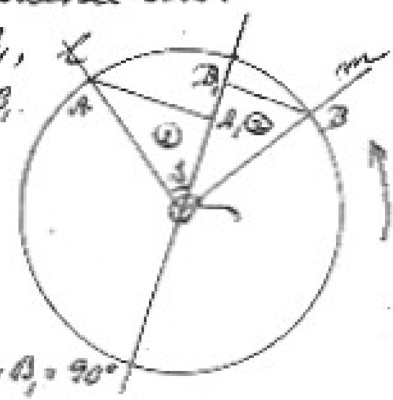
Hjælpesætning 2. $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$??

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$??

Bevis: Lad l skære Cirklen i A, og lad os konstruere en Linie m, saaledes at $\sphericalangle(ml) = 90°$. Dens Skæringspunkt med Cirklen betegnes ved B. Beviset falder i 2 Dele:

I. x-Aksen skærer den mindste af Buerne AB.

Lad A's Projektion paa x-Aksen være A_1, og B's Projektion paa x-Aksen være B_1.



Man har nu $\triangle 1 \cong \triangle 2$.

Kaldes nemlig i $\triangle 1$ $\sphericalangle O = v$, hvor $90 > v > 0$ bliver $\sphericalangle A = 90 - v$ og $\sphericalangle A_1 = 90°$.

I $\triangle 2$ bliver $\sphericalangle O = 90 - v$, $\sphericalangle B = v$ og $\sphericalangle B_1 = 90°$.

Da desuden $OA = OB$ bliver de to Trekanter kongruente.

Heraf følger, idet vi regner Liniestykkerne numerisk.

$$OB_1 = A_1A \text{ og} \qquad (1)$$
$$B_1B = OA_1$$

Vi gaar nu tilbage til de opgivne Vinkler og regner alle Liniestykker og Vinkler med Fortegn. Sættes da den opgivne $\sphericalangle(xl) = \alpha$, bliver $(xm) = (xl) + (lm) = \alpha - 90$.

Ligningerne (1) viser da, at

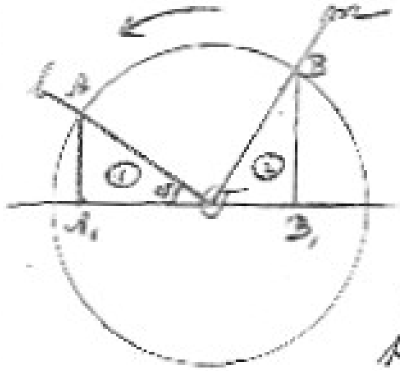
$$\cos(\alpha - 90) = \sin\alpha \text{ og}$$
$$\sin(\alpha - 90) = \div\cos\alpha$$

Eller hvis man bruger Hjælpesætning 1: $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$.

II. x-Aksen skærer ikke den mindste af Buerne AB.

Paa lignende Maade som før faar man:



Sættes i △ ∠v = v, hvor 90 > v > 0, faar man: △① ≅ △②, hvoraf

$OB_1 = A_1A$

$B_1B = OA_1$, hvis man regner numerisk. Gaar vi nu tilbage til de opgivne Vinkler og regner med Fortegn, faar vi:

$\cos(\alpha - 90) = \sin\alpha$

$\sin(\alpha - 90) = \div \cos\alpha$, eller ved

Hjælpesætning 1: $\underline{\cos(90-\alpha) = \sin\alpha}$

$\underline{\sin(90-\alpha) = \cos\alpha}$

Ved Division af de to Ligninger faar man:

$\underline{tg(90-\alpha) = \cot\alpha}$

$\cot(90-\alpha) = tg\,\alpha$. Heraf ser man:

<u>sinus til en Vinkel = cosinus til Komplementet.</u>

<u>cosinus til en Vinkel = sinus til Komplementet.</u>

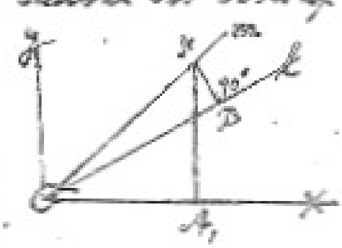
o. s. v.

<u>3. Hovedsætningen:</u> $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$.

Lad l og m være to vilkaarlige Linier gennem O med positive Retninger l og m. Lad $xm = u$, $xl = v$. Da vil $(lm) = (lx) + (xm) = -v + u = u - v$.

Paa m vælges Punktet A, saaledes at $OA = 1$ cm. A's Projektion paa x kaldes A_1 og paa l kaldes Projektionen B.

OB kan nu opfattes som Projektionen af saavel OA som af den brudte Linie OA_1A.



1) $\underline{OB} = \cos(lm) = \underline{\cos(u-v)}$

2) $OB = OA_1 \cdot \cos(xl) + A_1A \cos(ly)$ eller

$OB = \cos(xm)\cos(xl) + \sin(xm)\cos(ly)$.

Men $\angle ly = \angle lx + \angle xy = -v + 90 = 90 - v$.

Deraf: $OB = \cos u \cos v + \sin u \cos(90 - v)$, eller ifølge Hjælpesætning 2: $\underline{OB = \cos u \cos v + \sin u \sin v}$.

Sættes nu de to Udtryk for OB ligestore, faar man:

$$\underline{\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.} \qquad (1)$$

4. Vi anbringer nu l i en saadan Stilling, at $\angle xl = \div v$. (lm) bliver da $= \angle lx + \angle xm = v + u$. Da Beviset i 3 er ført uafhængig af l's Beliggenhed, vil (1) ogsaa gælde naar vi ombytter v med $\div v$. Man faar da:

$$\cos(u + v) = \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \text{ eller:}$$

$$\underline{\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.}$$

Vi kunde ogsaa have anbragt m og l i saadanne Stillinger, at $\angle xm = 90 - u$ medens $\angle xl = v$. Da Beviset ogsaa er ført for denne Beliggenhed af Linierne, vil (1) gælde naar man ombytter u med $90 - u$. Derved faas:

$$\cos(90 - u - v) = \cos(90 - u)\cos v + \sin(90 - u)\sin v, \text{ eller}$$

$$\underline{\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v.}$$

Ombyttes heri v med $-v$ faar man:

$$\underline{\sin(u \div v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.}$$

5. $\underline{\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}}$ Ligningen bevises saaledes

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Man dividerer nu i Tæller og Nævner med $\cos x \cos y$.

Paa samme Maade faar man: $\underline{\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}}$

Eks. $\sin 12 = \sin(30 - 18) = \sin 30 \cos 18 - \cos 30 \sin 18 =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{8}$$

Ex 2. Find $\cos 15$, $\cos 75$ og $\operatorname{tg} 105$.

Kapitel 22. Reduktion af trigonometriske Funktioner til Funktioner af Vinkler mellem 0 og 45.

Hjælpesætning 1.

sinus til en Vinkel = sinus til Supplementvinklen.

cos, tg og cot til en Vinkel = $-$cos, $-$tg og $-$cot til Supplementvinklen.

$\sin(180-\alpha) = \sin 180 \cos\alpha - \cos 180 \sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\sin\alpha = \sin\alpha$

$\cos(180-\alpha) = \cos 180 \cos\alpha + \sin 180 \sin\alpha = -\cos\alpha$.

Ved Division: $\operatorname{tg}(180-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ og $\cot(180-\alpha) = -\cot\alpha$.

Hjælpesætning 2.

cosinus til en Vinkel = cosinus til Eksplementvinklen.

sin, tg og cot til en Vinkel = $-$sin, $-$tg og $-$cot til Ekplementvinklen

$\sin(360-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(360-\alpha) = \cos\alpha$ o.s.v.

Bevises ganske som Hjælpesætning 1.

3. Hovedsætningen. De trigonometriske Funktioner af opgivne Vinkler kan omdannes til trigonometriske Funktioner af Vinkler mellem 0 og 45.

1) Vinklen ligger i 1' Kvadrant og er $> 45°$.
Man ombytter da Vinklen med Komplementet.
Eks: $\sin 76 = \cos 14$.

2) Vinklen ligger i 2' Kvadrant.
Man ombytter med Supplementet.
Eks: $\operatorname{tg} 114 = \div \operatorname{tg} 66 = -\cot 24$.

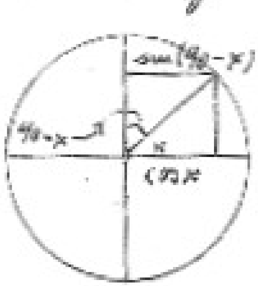
3) Vinklen ligger i 3' Kvadrant.
Man ombytter med Supplementet.
Eks $\cos 200° = -\cos(-20) = -\cos 20°$

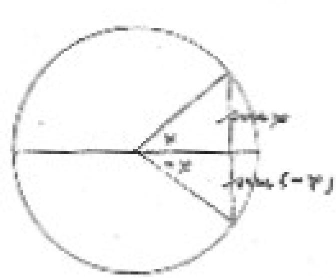
4) Vinklen ligger i 4' Kvadrant
Man ombytter med Eksplementet.

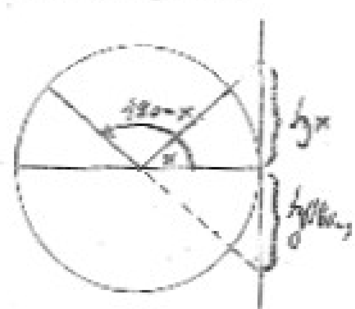
Eks: $\sin 307 = -\sin 53 = -\cos 37°$.

Hvis Vinklen er $> 360°$, subtraherer man $360°$ saa mange Gange, at det resterende Gradeantal ligger mellem 0 og 360.
Hvis Vinklen er < 0, adderes 360 saa mange Gange, at det resterende Gradeantal ligger mellem 0 og $360°$.
Heraf ses det, at Tabellerne over de trigonometriske Funktioner kun behöver at gaa fra 0 til $45°$; og da alle trigonometriske Funktioner kan beregnes, naar én af dem er opgivet, behöver man kun at beregne Tabel over f. Eks. $\sin x$ for $0 \leq x \leq 45$.
Af praktiske Hensyn har man dog beregnet Tabeller over alle Funktionerne i hele förste Kvadrant.

Anm: Indholdet af de 4 Halvsætninger lader sig let huske ved en geometrisk Fremstilling af Forholdene i 1ste Kvadrant.
Fig 1. viser f. Eks, at $\sin(90-x) = \cos x$
Fig 2. viser, at $\sin(-x) = \div \sin x$ og at $\sin(360-x) = -\sin x$
Fig 3. at $\operatorname{tg}(180-x) = -\operatorname{tg} x$.
Men til Bevis for Sætningerne duer Tegningerne ikke, da de kun gælder for Vinkler i 1ste Kvadrant.







Kapitel 23: Funktioner af $2x$, $\frac{x}{2}$ og $3x$.

1. $\underline{\sin 2x} = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = \underline{2 \sin x \cos x}$

$^{1)}$ $\cos 2x = \cos(x+x) = \underline{\cos^2 x - \sin^2 x}$. Da nu $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, faar man ved Indsættelse: $^{2)}$ $\underline{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$.

Da ligeledes $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, faar man ved Indsættelse $^{3)}$

$^{3)}$ $\underline{\cos 2x} = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \underline{2\cos^2 x - 1}$

Endelig har man $\underline{\operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg}(x+x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

Opgave: $\sin 36 = 2\sin 18 \cos 18 = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 (10+2\sqrt{5})}}{8}$

$= \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

2. Funktioner af $\frac{x}{2}$.

Af Formlen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ faas ved at erstatte x med $\frac{x}{2}$

$$\cos 2\cdot\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{x}{2}, \text{ hvoraf } \underline{\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}$$

Af Formlen $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ faas paa samme Maade: $\underline{\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$

Man faar deraf:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} : \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \underline{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$$

<u>Diskussion af Formlen $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.</u>

$^{1)}$ <u>Dersom x er opgivet</u> gives der kun én Værdi for $\frac{x}{2}$, og vi maa saaledes kun benytte det ene af Kvadratrodens Fortegn.

Eks: Hvis $180 > x > 0$, vil $90 > \frac{x}{2} > 0$ o: $\frac{x}{2}$ ligger i 1ste Kvadrant. Vi skal altsaa læse + foran Kvadratroden. Hvis $360 > x > 180$, vil $180 > \frac{x}{2} > 90$ o: $\frac{x}{2}$ ligger i 2den Kvadrant. Vi skal altsaa læse ÷ foran Kvadratroden.

$^{2)}$ <u>Dersom $\cos x$ er opgivet</u> f. Eks. $= \frac{1}{2}$, vil en Tegning vise, at der er to Vinkler i de 4 første Kvadranter, der har denne Værdi af cosinus. Af disse ligger den ene x_1 i 1ste, den anden x_2 i 4' Kvadrant. $\frac{x_1}{2}$ ligger da i 1ste, $\frac{x_2}{2}$ i 2det Kvadrant, hvilket viser, at vi skal bære $\pm$ foran Kvadratroden.

Man har endnu et Par Formler for $tg\frac{x}{2}$:

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{2\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

De to Formler har den Fordel, at der ikke indgaar Kvadratrødder i dem.

3. Funktioner af $3x$.

$$\sin 3x = (2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x =$$
$$2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$$
$$3\sin x\cos^2 x \div \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x$$

eller $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Paa samme Maade finder man Formler for $\cos 3x$ og $tg\,3x$.

Opgave 1. Find $\sin x$ udtrykt ved $tg\frac{x}{2}$.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$$

Divideres der paa med $\cos^2\frac{x}{2}$ i Tæller og Nævner, faar man:

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Opgave 2. Find $\cos x$ udtrykt ved $tg\frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Kapitel 24. Logaritmiske Udtryk.

1. At gøre et Udtryk logaritmisk vil sige at omdanne det til

en Række af Faktorer og Divisorer, der hver for sig kun indeholder ét Led. De følgende Formler benyttes hyppig til at göre Udtryk logarithmiske.

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = \div 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}.$$

I Ord udtrykkes den første saaledes:

<u>Summen af to sinusser = 2 · sinus til Vinklernes halve Sum · cos til deres halve Differens.</u>

De andre kan udtrykkes paa lignende Maade.

De bevises alle paa samme Maade, og vi vil derfor nöjes med at bevise Nr. 4.

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y - (\cos x\cos y + \sin x\sin y)$$
$$= -2\sin x\sin y$$

Sættes nu $x+y = p$ og $x-y = q$ vil

$x = \frac{p+q}{2}$ $y = \frac{p-q}{2}$. Ved at indsætte dette, faar man:

$$\cos p - \cos q = \div 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Eks.: $\sin 57 \div \cos 9^\circ = \sin 57 - \sin 81 = 2\cos\frac{57+81}{2}\cdot\sin\frac{57-81}{2} =$

$$2\cos 69\sin(-12) = -2\cos 69\sin 12.$$

2. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$.

Bevis:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y} =$$
$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.$$

Paa samme Maade faar man:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

3. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, naar
$$A + B + C = 180^\circ.$$

Bevis: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(A+B)$, da C og $A+B$ er Supplementvinkler. Man faar da:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin 2\cdot\frac{A+B}{2} =$$
$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$
$$2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] =$$
$$2\sin\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right) =$$
$$4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

da $\frac{C}{2}$ og $\frac{A+B}{2}$ er Komplementer.

Opgave 1. Bevis, at $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C$, naar
$$A + B + C = 180.$$

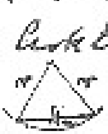
Opgave 2. Bevis, at $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$, naar $A + B + C = 180$.

Kapitel 25. Regulære Polygoner.

1. Ved en regulær Polygon forstaar man en Polygon, hvis Sider og Vinkler er ligestore. Vi beskæftiger os i det følgende kun med konvekse Polygoner.

En regulær n-Kant konstrueres, ved at man tegner en vilkaarlig Cirkel og deler dens Periferi i n ligestore Dele; derpaa forbindes de paa hinanden følgende Delingspunkter med Korder, hvorved den regulære n-Kant fremkommer. Den fremkomne Polygon har nemlig alle Sider og alle Vinkler ligestore.

Kaldes Cirklens Radius r, vil n-Kantens Side blive:



$k_n = 2r\sin\frac{180}{n}$, der i visse Tilfælde kan udtrykkes rationalt eller ved Kvadratrod. Man kan bevise, at i disse og kun i disse Tilfælde lader Cirklen sig dele i n ligestore Dele ved Passer og Linial. Vi skal dog ikke gaa nærmere ind paa Beviset for denne Paastand.

Ved Hjælp af Formlen $k_n = 2r\sin\frac{180}{n}$ kan man nu finde Længden af Siden i en Del regulære Polygoner:

En regulær Trekant: $k_3 = 2r\sin 60 = \underline{r\sqrt{3}}$

- - - - Firkant (Kvadratet): $k_4 = 2r\sin 45^\circ = \underline{r\sqrt{2}}$

- - - - Femkant: $k_5 = 2r\sin 36 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

- - - - Sekskant: $k_6 = 2r\sin 30 = \underline{r}$

- - - - Tikant: $k_{10} = 2r\sin 18 = \underline{\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)}$

- - - - Femtenkant: $k_{15} = 2r\sin 12 = \frac{r}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$

Hvorledes disse Figurer konstrueres er bekendt nok for Trekantens, Firkantens og Sekskantens Vedkommende.

$\underline{k_{10}}$ kan konstrueres saaledes: $k_{10} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2}$. Man sætter da $y = \frac{r}{2}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}}$ eller $y^2 = \frac{5}{4}r\cdot r$ og konstruerer y som Mellemproportional mellem $\frac{5}{4}r$ og r. k_{10} er derpaa $= y \div \frac{r}{2}$.

$\underline{k_5}$ konstrueres ved at afsætte k_{10} to Gange som Korde i Cirklen, saaledes at der fremkommer en Bue paa 72°. Dennes Korde er k_5.

$\underline{k_{15}}$ er Korde til 24°. Den kan derfor konstrueres som Korde til den Bue, der er Differensen mellem to Buer paa 60° og 36°. Man maa derfor først konstruere k_6 og k_{10}.

2. Naar man gaar ud fra den regulære Trekant, Firkant, Femkant og Femtenkant, kan man ved at halvere Buerne konstruere en regulær 6-Kant, 8-Kant, 10-Kant og 30-Kant og derpaa ved ny Halvering en regulær 12-Kant, 16-Kant 20-Kant og 60-Kant. Fortsætter saaledes, ser man,

at man ved Passer og Lineal kan dele Cirkelperiferien i $3\cdot 2^m$, 2^m, $5\cdot 2^m$ og $15\cdot 2^m$ ligestore Dele.

At Kordene til de frembragte Buer kan beregnes ved Kvadratrödder, ses saaledes.

Kaldes den Centervinkel, der spænder over k_n, for $2x$, vil den Centervinkel, som spænder over k_{2n} være x.

Man har da: ¹) $k_n = 2r\sin x$ og

²) $k_{2n} = 2r\sin\frac{x}{2}$. Vi vil finde k_{2n} udtrykt ved k_n og r.

$$k_{2n} = 2r\sin\frac{x}{2} = 2r\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = r\sqrt{2-2\cos x} =$$
$$r\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2 x}} = r\sqrt{2-\sqrt{4-4\sin^2 x}}$$

Men af ¹) faar man

$2\sin x = \frac{k_n}{r}$. Indsættes dette, faar man:

$$\underline{k_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{k_n}{r}\right)^2}}}$$

Opgave: Find k_{12}, k_{24}, k_{48}, k_8, k_{16} og k_{32}.

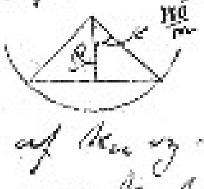
3. Den vinkelrette fra Centrum paa k_n kaldes ρ_n.

Man ser ved Hjælp af en Tegning, at $\underline{\rho_n = r\cdot\cos\frac{180}{n}}$

Eks: $\rho_5 = r\cos 36 = r\sqrt{1-\sin^2 36} =$

$$r\sqrt{1 \div \frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\rho_6 = r\cos 30 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

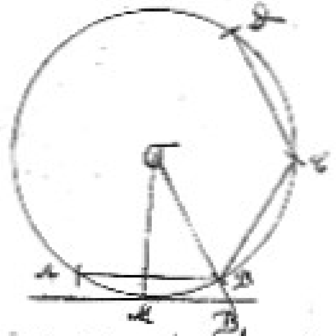


Man kan ogsaa udtrykke ρ_n ved Hjælp af k_n og r. Kaldes den Centervinkel, som spænder over k_n for $2x$ har man

$$k_n = 2r\sin x \quad \text{og} \quad \rho_n = r\cos x$$

$$ɔ: \rho_n = r\sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{r}{2}\sqrt{4-4\sin^2 x} = \underline{\frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{k_n}{r}\right)^2}}$$

4. Lad ABCD... være en indskreven, regulær Polygon, og lad O være Cirklens Centrum og M være Midtpunktet af ⌣AB. Tangenten i M skærer OB's Forlængelse i et Punkt B_1, saaledes at $OB_1 = \frac{r}{\cos\left(\frac{180}{n}\right)}$. Tangenten til ⌣BC's Midtpunkt vil skære OB i samme Afstand fra O, og de to Tangenter vil altsaa skære hinanden i B_1. Tangenterne til Buernes Midtpunkter vil derfor begrænse en Polygon, der bliver regulær, thi 1) er alle dens Vinkler ligestore, da de spænder over ligestore Buer og 2) er alle dens Sider $= 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}$.



Man ser heraf, at hvis man deler en Cirkel i n ligestore Dele og trækker Tangenter til Cirklen i Delingspunkterne, fremkommer der en regulær Polygon. Dens Side kaldes t_n, naar Sideantallet er n, og man har

$$t_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180}{n}.$$

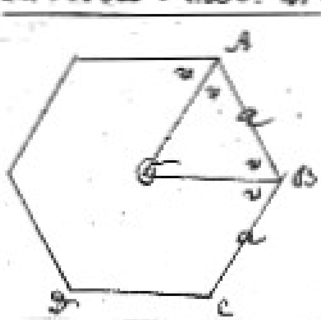
Eks: $t_{12} = 2r\,\mathrm{tg}\,15° = 2r\,\frac{1-\cos 30}{\sin 30} = 2r\,\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2r(2-\sqrt{3})$

Opgave 1. Find t_8, t_{16}, ρ_8 og ρ_{16}.

Opgave 2. Find Radius i en regulær 8-Kants indskrevne Cirkel, naar Ottekantens Areal $= 1\,m^2$

Opgave 3. Bevis, at $\frac{t_n}{k_n} = \frac{r}{\rho_n}$.

5. Enhver regulær Polygon har en indskreven og en omskreven Cirkel. De to Cirkler har samme Centrum.



Lad ABCD... være en regulær Polygon, hvis Vinkel vi kan kalde 2v. ∠A's Halveringslinie kaldes v_A, ∠B's kaldes v_B o.s.v. v_A og v_B tegnes og deres Skæringspunkt kaldes O. Fra O tegnes den Vinkelrette paa AB, der rammer den i dens Midtpunkt, da Trekanten er ligebenet. Sættes $AB = a$, bliver $OB = \frac{a}{2\cos v}$.

V_C skærer V_B i samme Afstand fra O – ses ved en lignende Beregning – hvoraf man ser, at alle Halveringslinierne skærer hinanden i O.

Da $OA = OB = OC = \ldots\ldots = \frac{a}{2\cos v}$, bliver O Centrum for Polygonens omskrevne Cirkel.

Da O ligger i alle Halveringslinierne, vil O faa samme Afstand fra alle Polygonens Sider. Man kan derfor tegne en Cirkel med O som Centrum, som gaar alle Sidemidtpunkterne. At den tillige rörer Siderne i deres Midtpunkter, fölger af Sætningen:

Naar en Linie er vinkelret paa Radius i dennes Skæringspunkt med Cirklen, er den Tangent til Cirklen i dette Punkt.

<u>Anm:</u> Opgaven paa Side 28 kan godt regnes uden at anvende Formlen for k_{2n}.

Man benytter da praktisk fölgende Hjælpesætning:

Hvis x er en spids Vinkel, og $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2-a}$ vil $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2+a}$. (Ses ved Hjælp af Formlen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.)

Man har nu $k_{12} = 2r\sin 15$

Men $\sin 15 = \sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, hvoraf

$$k_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

$k_{24} = 2r\sin 7\frac{1}{2}$ Men $\sin 7\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 15}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Deraf $k_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

osv

Kapitel 26. To Ligninger med to ubekendte.

1. Begge Ligninger er af 1ste Grad med Hensyn til de to ubekendte. Ligningerne kan da altid bringes paa Formen:

$$1)\quad ax + by = c$$

$$2)\quad a_1x + b_1y = c_1$$

Man eliminerer först x. Dette sker ved at multiplicere 1) med a_1 og 2) med a. Derved faas:

$$aa_1x + a_1by = a_1c$$

$$aa_1x + ab_1y = ac_1$$

Ved Subtraktion faar man da

$$(a_1b - ab_1)y = a_1c - ac_1,$$ og heraf saafremt

$a_1b \gtrless ab_1$,
$$3)\quad y = \frac{a_1c - ac_1}{a_1b - ab_1}$$

Derpaa elimineres y af de to opgivne Ligninger. Dette sker ved at multiplicere 1) med b_1 og 2) med b. Man faar da:

$$ab_1x + bb_1y = b_1c$$

$$a_1bx + bb_1y = bc_1,$$

Ved Subtraktion faas, idet man trækker den överste Ligning fra den nederste:

$$(a_1b - ab_1)x = bc_1 - b_1c,$$ og heraf saafremt

$a_1b \gtrless ab_1$,
$$4)\quad x = \frac{bc_1 - b_1c}{a_1b - ab_1}$$

Vi vil först betragte det Tilfælde, hvor $a_1b \gtrless ab_1$. Det ovenfor staaende viser da, at hvis der findes et Rodsæt, som tilfredsstiller 1) og 2), maa det være Rodsættet 3) og 4). Vi er derfor sikker paa, at der ikke findes andre Lösninger af de to Ligninger end disse. Men det var jo muligt at 1) og 2) slet ikke tilfredsstilledes af noget Rodsæt. Vi maa derfor ved Indsættelse vise, at 3) og 4) virkelig passer i de opgivne Ligninger. Vi indsætter da först i 1) og faar

$$a\cdot\frac{bc_1 - b_1c}{a_1b - ab_1} + b\cdot\frac{a_1c - ac_1}{a_1b - ab_1} = \frac{abc_1 - ab_1c + a_1bc - abc_1}{a_1b - ab_1} =$$

$$\frac{a_1bc - ab_1c}{a_1b - ab_1} = \frac{c\,(a_1b - ab_1)}{a_1b - ab_1} = c, \text{ da } a_1b \gtrless ab_1$$

Paa samme Maade indsætter vi i 4).

Vi behandler derpaa det Tilfælde, hvor $a_1b = ab_1$. Vi kan da ikke benytte ovenstaaende Fremgangsmaade, da man ikke mer har Lov til at dividere med $a_1b - ab_1$, der nu er $= 0$.

$a_1b = ab_1$ kan nu skrives saaledes: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, og naar man saa kalder den fælles Talværdi af disse Forhold for k, faar man:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k \text{ eller}$$

$$a = ka_1$$

$$b = kb_1.$$ Vi indsætter dette i 1) og faar:

5) $ka_1x + kb_1y = c$.

Der kan nu hende ét af to: Enten er a) $c = kc_1$, eller b) $c \gtrless kc_1$:

a) Dersom $c = kc_1$, giver 5) $ka_1x + kb_1y = kc_1$, eller ved Division med k: $a_1x + b_1y = c_1$; Ligning 3) kan altsaa dannes af 1) ved Division med k. De to opgivne Ligninger er altsaa identiske og tilfredsstilles af alle de Rødder, der tilfredsstiller den ene af dem. Da man i denne kan vælge y vilkaarlig og derpaa löse Ligningen med Hensyn til x, ser man, at Ligningerne i dette Tilfælde har uendelig mange Rødder.

b) Dersom $c \gtrless kc_1$, giver 5) $ka_1x + kb_1y \gtrless kc_1$, eller

$$a_1x + b_1y \gtrless c_1.$$ De to Ligninger er derfor i Strid med hinanden og tilfredsstilles ikke af noget

Rodsæt. Vi ser altsaa, at
hvis $a_1 b \gtrless a b_1$, har de to Ligninger $\begin{matrix} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{matrix}$, ét og kun ét Rodsæt.

Hvis $a_1 b = ab_1$, maa vi adskille to Tilfælde:

1) Hvis $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, er den ene Ligning udledt af den anden (Ligningerne er identiske). Ligningerne har da uendelig mange Rodsæt.

2) Hvis $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \gtrless \frac{c}{c_1}$ er de to Ligninger i Strid med hinanden, og der er ingen Rodsæt, der tilfredsstiller dem.

Eks:
$$\begin{aligned} ax + 12y &= a + 2 \\ 3x + ay &= a - 2 \end{aligned}$$
Vi eliminerer først y:
$$\begin{aligned} a^2x + 12ay &= a^2 + 2a \\ 36x + 12ay &= 12a - 24 \end{aligned}$$

Subtr: $(a^2 - 36)x = a^2 \div 10a + 24$, hvoraf

hvis $a^2 \gtrless 36$ d: hvis a hverken er $+6$ eller -6

$$\underline{x} = \frac{a^2 - 10a + 24}{a^2 - 36} = \frac{(a-6)(a-4)}{(a+6)(a-6)} = \underline{\frac{a-4}{a+6}}$$

Vi eliminerer derpaa x:
$$\begin{aligned} 3ax + 36y &= 3a + 6 \\ 3ax + a^2y &= a^2 - 2a \end{aligned}$$
Vi subtraherer den øverste fra den nederste og faar:

$(a^2 - 36)y = a^2 - 5a - 6$, eller hvis a ikke er ± 6.

$$\underline{y} = \frac{a^2 - 5a - 6}{a^2 - 36} = \frac{(a+1)(a-6)}{(a+6)(a-6)} = \underline{\frac{a+1}{a+6}}$$

Vi har blot tilbage at undersøge 1) $a = 6$ og 2) $a = \div 6$

1) $\underline{a = 6}$ indsættes i de opgivne Ligninger, man faar da

1) $6x + 12y = 8$
2) $3x + 6y = 4$

man ser her, at 2) er dannet af 1) ved Multiplikation med 2. Begge Ligninger tilfredsstilles altsaa af de samme Rodsæt. Ligningerne er identiske og har uendelig mange Rodsæt.

3) $\underline{a = -\frac{1}{2}}$ indsættes derpaa i de givne Ligninger.

$$-6x + 12y = \div 4$$
$$3x - 6y = \div 8$$

Multipliceres den nederste Ligning med -2, faar man $-6x + 12y = 16$. Den er altsaa i Strid med den første, og der findes ingen Rodsæt, der tilfredsstiller dem.

2. <u>En af Ligningerne i det mindste er af 1ste Grad med Hensyn til en af de ubekendte.</u>

Man løser da denne Ligning med Hensyn til bemeldte ubekendte og søger at forkorte det fremkomne Udtryk saameget som muligt. Derpaa indsættes i den anden Ligning.

Eks: 1) $x^2 + 2y^2 + 5x - 3y = 1$

2) $2xy + 2y - 2x^2 + x + 3 = 0$. Lign 2) løses med Hensyn til y, og man finder:

$$y = \frac{2x^2 - x - 3}{2x + 2} = \frac{(2x-3)(x+1)}{2(x+1)},$$

der kan forkortes, naar $x \gtrless \div 1$.

<u>Dersom $x \gtrless -1$</u> faar man $y = \frac{2x-3}{2}$, som indsættes i 1). Derved faar man:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{4x^2 - 12x + 9}{4} + 5x - 3 \cdot \frac{2x-3}{2} = 1 \text{ eller}$$
$$6x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \quad \therefore \; \underline{x = \frac{2 \pm 2i\sqrt{5}}{3}}$$

Dette indsættes derpaa i $y = \frac{2x-3}{2}$. Derved faas:

$$y = \frac{\frac{4 \pm 4i\sqrt{5}}{3} - 3}{2} = \frac{4 \pm 4i\sqrt{5} - 9}{6} = \frac{-5 \pm 4i\sqrt{5}}{6}$$

Man har endnu at betragte:

$x = \div 1$. Denne Værdi indsættes i begge de to opgivne Ligninger. Man faar da

1) $1 + 2y^2 - 5 - 3y = 1$ og

2) $-2y + 2y - 2 - 1 + 3 = 0$ Man ser heraf, at 2) tilfredsstilles, naar blot $x = \div 1$, uanset hvilken Værdi man tillægger y.

Ligning 1) giver:

$$2y^2 - 3y - 5 = 0 \quad \text{d: } y = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ \div 1 \end{cases}$$

Vi faar da som Facit:

x	-1	-1	$\frac{2 \pm 2i\sqrt{5}}{3}$
y	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{-5 \pm 4i\sqrt{5}}{6}$

3. Symmetriske Ligninger.

En Ligning kaldes symmetrisk med Hensyn til x og y, naar den ikke forandres ved Ombytning af x og y.

Eks. 1) $x + y = a$
2) $x \cdot y = b$

Vi finder x af den øverste og indsætter i den nederste. Man faar da: $(a-y) \cdot y = b$ eller $y^2 - ay + b = 0$

d: $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ Indsættes dette i 1) faar man $x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} \div b}$

x og y er altsaa Rødder i Ligningen $z^2 - az + b = 0$

Da disse to Rødder har Summen a og Produktet b, ser man, at disse Rødder ogsaa tilfredsstiller 1) og 2).

Symmetriske Ligninger løses i Almindelighed ved at man omdanner dem saaledes, at de kun indeholder $x+y$ og $x \cdot y$. Dermed er Løsningen reduceret til at finde $x+y$ og $x \cdot y$; x og y findes da ved Hjælp af Sætningen i Eks. 1.

Eks. 2.

$$1)\quad x^2+y^2+2x+2y=2$$
$$2)\quad x+y+xy=\div 1$$

1) omskrives til $(x+y)^2 - 2xy + 2(x+y) = 2$

Man sætter dernæst $x+y=u$ og $x \cdot y = v$ og faar:

$$1)\quad u^2-2v+2u=2$$
$$2)\quad u+v=\div 1$$

Man finder da v af den sidste Ligning og indsætter i den næstsidste:

$$v=-u\div 1$$

Indsat:

$$u^2 \div 2(-u-1)+2u=2 \quad \text{eller}$$
$$u^2+4u=0 \qquad \therefore\ u=\begin{cases}0\\ \div 4\end{cases}$$

Indsættes dette i 2) faar man $v=\begin{cases}-1\\ 3.\end{cases}$

Opgaven deler sig nu i 2 Dele.

I. $x+y=0$, $x \cdot y=-1$

x og y er da Rødder i Ligningen $z^2-0\cdot z \div 1=0$

$\therefore\ z=\pm 1$

II. $x+y=-4$, $x\cdot y=3$

x og y er da Rødder i

$z^2+4z+3=0$

$\therefore\ z=\begin{cases}-1\\ -3.\end{cases}$

Facit bliver derefter:

x	$\div 1$	-1	-1	-3
y	-1	$\div 1$	-3	-1

Denne Methode kan dog ogsaa føre til Ligninger af højere Grad, hvor man saa enten maa gætte sig til Rødderne eller slaa ind paa en anden Methode.

Stk 3. 1) $x^3+y^3 = 52\sqrt{2}$

2) $x\cdot y = \div 6$

Omdanner man 1) til $(x+y)^3 - 3xy(x+y) = 52\sqrt{2}$

og sætter $x+y=u$ $x\cdot y = v$, faar man:

$$u^3 - 3uv = 52\sqrt{2} \quad \text{eller da } v = \div 6$$

$$u^3 + 18u = 52\sqrt{2}$$

Da Ligningen er af tredje Grad i u, maa vi slaa ind paa en anden Methode.

Af 2) findes $x = \frac{-6}{y}$, som indsættes i 1).

$$-\frac{216}{y^3} + y^3 = 52\sqrt{2} \quad \text{eller}$$

$$y^6 - 52\sqrt{2}\cdot y^3 - 216 = 0$$

$$y^3 = 26\sqrt{2} \pm \sqrt{1352+216} = 26\sqrt{2} \pm \sqrt{1568}$$

$$y^3 = 26\sqrt{2} \pm 28\sqrt{2} = \begin{cases} 54\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Man faar da:

1) $y^3 = 54\sqrt{2} = 27\cdot(\sqrt{2})^3 \quad ɔ: y = 3\sqrt{2}$

2) $y^3 = -2\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^3 \quad ɔ: y = -\sqrt{2}$

Ved at indsætte i $x = \frac{-6}{y}$ faaes

$$x = \frac{-6}{3\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad \text{og} \quad x = \frac{-6}{-\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

NB Det er en Regel, at man ved en saadan Indsættelse altid indsætter i en 1ste Grads Ligning, hvis en saadan forefindes. Hvis man ikke gör det, risikerer man at indföre fremmede Rödder, som derefter skal bortskaffes.

Facit bliver

x	$-\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
y	$3\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$

Anm: Man kunde ogsaa have opløftet 2) til 3die Potens.

Man havde da faaet

$$x^3+y^3=52\sqrt{2} \quad \text{og} \quad x^3y^3=-216.$$

x^3 og y^3 er da Rødder i Ligningen $z^2-52\sqrt{2}\,z-216=0.$

Kapitel 27. 3 Ligninger med 3 Ubekendte.

1. Alle 3 Ligninger kan bringes paa Formen

$$ax+by+cz=d.$$

Eks:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 3x+2y-3z=21 \\ 2)\ 5x-8y+4z=62 \\ 3)\ -2x+3y+10z=10. \end{array}\right\}$$

Man eliminerer én af de Ubekendte, idet man vælger den, hvis Koefficienter er lettest at regne med. Lad os f. Eks. her eliminere x.

Man multiplicerer 1) med 5 $\qquad 15x+10y-15z=105$

og 2) med 3 $\qquad \underline{15x-24y+12z=186}$

Derpaa subtraheres: $\qquad$ 4) $\underline{34y-27z=-81}$

For at skaffe os én Ligning til mellem y og z eliminerer x mellem 1) og 3).

Man multiplicerer 1) med 2 $\qquad 6x+4y-6z=42$

og 3) med 3 $\qquad \underline{-6x+9y+30z=30}$

Derpaa adderes: $\qquad$ 5) $\underline{13y+24z=72}$

Vi har nu faaet 2 Ligninger med 2 Ubekendte, nemlig

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ 34y-27z=-81 \\ 5)\ 13y+24z=72 \end{array}\right\}$$

Det er nu lettest at eliminere z.

4) multipliceres med 8 og 5) med 9. Derved faas:

$$272y \div 216z=-648$$

$$\underline{117y+216z=648} \quad \text{Adderes Ligningerne}$$

ne, faar man: $389y = 0$ $\therefore$ $\underline{y = 0}$
Indsættes dette i 4) eller 5) faas: $\underline{z = 3}$
Indsættes dernæst Værdierne for y og z i 1), 2) eller 3), faar man $\underline{x = 10}$
Det kan af og til hænde, at en eller flere af de tre Ligninger kan udledes af de andre. Man har altsaa egentlig kun for faa Ligninger og faar derfor, at Ligningerne tilfredsstilles af uendelig mange Nødsæt.
Det kan ogsaa træffe sig, at Ligningerne er i Strid med hinanden. Der bliver da ingen Løsninger.
Det almindelige er imidlertid, at 3 Ligninger af 1ste Grad med 3 ubekendte har ét og kun ét Nødsæt.
Vi skal dog ikke gaa nærmere ind paa Beviset derfor.
2. Et Tilfælde, der hyppig indtræffer i den analytiske Geometri, er at de to Ligninger er af 1ste Grad med Hensyn til de to ubekendte, medens den tredje er af højere Grad. Man løser da de to første Ligninger med Hensyn til de de omtalte to ubekendte og indsætter derpaa i den tredje Ligning.

Eks:
$$\left.\begin{array}{l} {}^{1)}\; x + 3y + 2z = 13 \\ {}^{2)}\; 2x + 4y + z = 13 \\ {}^{3)}\; x^2 + xy + z^2 = 12 \end{array}\right\}$$

1) og 2) løses med Hensyn til x og z, idet y flyttes over paa den anden Side af Lighedstegnet.

$$x + 2z = 13 - 3y$$
$$2x + z = 13 - 4y \quad \text{hvoraf}$$

$${}^{4)}\; z = \frac{13 - 2y}{3} \quad \text{og} \quad {}^{5)}\; x = \frac{13 - 5y}{3}.$$ Dette indsæt-

Nu i 3)

$$\frac{169-130y+25y^2}{9}+\frac{13y-5y^2}{3}+\frac{169-52y+4y^2}{9}=12$$

$$169-130y+25y^2+39y-15y^2+169-52y+4y^2=108$$

$$14y^2-143y+230=0$$

Hvoraf findes $y = \begin{cases} 2 \\ \frac{115}{14} \end{cases}$

Opgaven deler sig nu i 2 Dele

I $y=2$, der indsat i 4) og 5) giver $z=3$ og $x=1$	II $y=\frac{115}{14}$, der indsat i 4) og 5) giver $z=-\frac{5}{7}$ og $x=-\frac{131}{14}$.

Facit bliver altsaa

x	1	$-\frac{131}{14}$
y	2	$\frac{115}{14}$
z	3	$-\frac{5}{7}$

En almindelig Regel er det saa, at naar man har 3 Ligninger med 3 Ubekendte, bør man ved Elimination skaffe sig 2 Ligninger med to Ubekendte, hvorefter man bør skaffe sig en Ligning med en Ubekendt. Til Tider kan dog andre Metoder være at foretrække – se Eks 2.

3. Hvis man i Regningens Løb multiplicerer en af de givne Ligninger med en Faktor, der kan blive Nul – f. Eks. med $x-a$ – kan man risikere at indføre fremmede Rødder i Løsningen. De eventuelle fremmede Rødder maa da ved Opgavens Slutning udskilles – ved at gøre Prøve – og bortkastes derpaa.

Som et Eksempel vil vi løse følgende to Ligninger:

$$\left.\begin{aligned} {}^{1)}\ & \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-3} = 0 \\ {}^{2)}\ & x^2 + 5xy \div 8x \div 5y = 3 \end{aligned}\right\}$$

Man multiplicerer i 1) paa begge Sider med $(x-2)(y-3)$, hvorefter 1) bliver til $y - 3 + x - 2 = 0$ eller

$y + x - 5 = 0$ som er tilfredsstillet af Rodsættet $x = 2, y = 3$. Hvis nu dette Rodsæt passer i 2), og det gör det, vil $x = 2$ $y = 3$ tilfredsstille Ligningerne

$$^{3)}\quad y + x = +5$$

$$^{2)}\quad x^2 + 5xy - 8x - 5y = 3$$

uden at tilfredsstille de oprindelige Ligninger.

Af $^{3)}$ $y = +5 - x$, indsat i 2)

$$x^2 + 25x - 5x^2 - 8x \div 25 + 5x = 3$$

$$4x^2 - 22x + 28 = 0$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 7 = 0 \qquad x = \begin{cases} 2 \\ \frac{7}{2} \end{cases}$$

Indsættes dette i 3), faar man:

$$y = \begin{cases} 3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

Rodsættet $x = 2$ $y = 3$ passer ikke i de oprindelige Ligninger og er altsaa <u>et fremmed Rodsæt.</u>

Facit bliver derfor

$$\underline{x = \frac{7}{2},\ y = \frac{3}{2}}$$

Kapitel 28. Brudne Eksponenter.

Vi vil give en Definition paa $a^{\frac{p}{q}}$ for dermed at fuldstændiggöre vort Potensbegreb. Man sætter da $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, hvilken Definition föjet til de 4, som blev fremsat i Kap 1, giver os Besked om, hvad vi

skal forstaa ved a^m, naar m er et rationalt Tal. 42.
For at Definitionen for $a^{\frac{p}{q}}$ skal være tilladelig, maa vi dog paavise, at den nye Definition ikke kommer i Strid med de gamle i de Tilfælde, hvor $a^{\frac{p}{q}}$ allerede har haft en Betydning. Vi maa derfor undersøge det Tilfælde, hvor q gaar op i p.

Eks: $a^{\frac{20}{5}}$ har hidtil haft Betydningen a^4. Anvendes den nye Definition, faar man $a^{\frac{20}{5}} = \sqrt[5]{a^{20}} = a^4$.

Vi maa derefter undersøge, hvorledes man skal regne med brudne Eksponenter, og det viser sig da, at man kan regne efter de samme Regler, som gælder for hele Eksponenter.

1) Man multiplicerer to Potenser af samme Tal ved at addere Eksponenterne.

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} \;??$$

Bevis: $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} =$
$\sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs}+\frac{rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$

2) Man dividerer to Potenser af samme Tal ved at subtrahere Eksponenterne.

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} \;??$$

Bevis: $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} : \sqrt[qs]{a^{rq}} =$
$\sqrt[qs]{a^{ps-rq}} = a^{\frac{ps-rq}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs}-\frac{rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}.$

3) Man opløfter et Produkt til en Potens ved at opløfte hver Faktor for sig.

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} \quad ??$$

Bevis: $(ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$.

4) Man opløfter en Brøk til en Potens ved at opløfte Tæller for sig og Nævner for sig.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}} \quad ??$$

Bevis: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.

5) Man opløfter en Potens til en ny Potens ved at multiplicere Eksponenterne.

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}} \quad ??$$

Bevis: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} =$

$$\sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}}.$$

6) Vi kan nu fuldstændiggøre vort Rodbegreb, idet vi viser at $\sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}}$. At denne Ligning er rigtig ses ved at gøre Rodprøve:

$$\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} = a. \qquad \text{Eks: } \sqrt[\frac{3}{4}]{8} = 2^4 = 16.$$

Vi har derved defineret $\sqrt[n]{a}$, naar n er rationel og forskellig fra 0.

Eks 1: $2^{1\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} : \left(2^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = 2^{1\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{4}} : 2^{-1} = 2^{2\frac{1}{4}}$.

Eks 2:

$$a^{\frac{-20}{m^2-4}} : a^{\frac{5}{m+2}} : a^{\frac{5}{2-m}}$$

Kapitel 28. Logaritmer.

1. Vi vil först bevise, at Ligningen $10^x = 2$ har en positiv Rod.

1) Der gives intet helt Tal, som tilfredsstiller Ligningen, thi $10^1 > 2 > 10^0$.
2) Der gives heller ingen Brök, der gör det. Lad nemlig $\frac{p}{q}$ være en Brök, der er forkortet saa meget som muligt. Man skulde da have $10^{\frac{p}{q}} = 2$ eller $10^p = 2^q$, hvilket er umuligt, da venstre Side af Lighedstegnet er delelig med 5, hvad höjre Side ikke er.

Ligningen har altsaa ingen rational Rod. Vi vil da söge at bestemme et irrationalt Tal, der tilfredsstiller Ligningen.

3) Vi deler Intervallet fra 0 til 1 og finder to paa hinanden følgende Tal blandt Tallene $10^0, 10^{0,1}, 10^{0,2} \ldots 10^{0,9}, 10^1$, mellem hvilke 2 ligger. Det viser sig, at $10^{0,4} > 2 > 10^{0,3}$.
At $10^{\frac{4}{10}} > 2$, ses af, at $10^4 > 2^{10}$, og at $10^{\frac{3}{10}} < 2$, ses af, at $10^3 < 2^{10}$.

Man deler dernæst Intervallet fra 0,3 til 0,4 og danner Rækken $10^{0,30}, 10^{0,31} \ldots 10^{0,39}, 10^{0,40}$, hvorefter man finder to paa hinanden følgende af disse Tal, mellem hvilke 2 er beliggende. Det viser sig, at $10^{0,31} > 2 > 10^{0,30}$.
At $10^{0,31} > 2$, kan vises paa følgende Maade:

$$2^{10} < 11 \cdot 10^2. \text{ Heraf følger:}$$

$$2^{100} < 11^{10} \cdot 10^{20} = 161051^2 \cdot 10^{20} < 200000^2 \cdot 10^{20} = 4 \cdot 10^{30} < 10^{31}. \text{ Men naar } 10^{31} > 2^{100}, \text{ vil}$$

$$10^{0,31} > 2.$$

Man deler dernæst Intervallet fra 0,30 til 0,31 og danner Talrækken $10^{0,300}, 10^{0,301} \ldots 10^{0,309}, 10^{0,310}$. Det viser vidtlöftige Regninger, der dog ikke volder nogen teoretiske Vanskeligheder, viser det sig, at $10^{0,302} > 2 > 10^{0,301}$, og saaledes kan man fortsætte.

Vi kan nu opstille de to Talrækker $\begin{cases} 1 & 0,4 & 0,31 & 0,302 \cdots A_n \cdots \\ 0 & 0,3 & 0,30 & 0,301 \cdots a_n \cdots \end{cases}$ (1)

At der herved er bestemt et og kun et Tal, fremgaar straks, at Talrækkerne tilfredsstiller de Fordringer, der stilles til Tilnærmelsesrækker. Det irrationale Tal, de bestemmer kaldes log 2 (læs Logaritmen til 2).

At dette Tal tilfredsstiller Ligningen $10^x = 2$, ses saaledes:

Vi opstiller Rækkerne $\begin{cases} 10^1 & 10^{0,4} & 10^{0,31} & \dots & 10^{A_n} \dots \\ 10^0 & 10^{0,3} & 10^{0,30} & \dots & 10^{a_n} \dots \end{cases}$ (2)

og beviser, at de er Tilnærmelsesrækker.

1) Den överste Række er faldende, thi Eksponenterne danner en faldende Række. Paa samme Maade ses det, at den nederste Række er stigende.

2) Ethvert Led i den överste Række er större end det tilsvarende Led i den nederste Række, thi $10^{A_n} > 2 > 10^{a_n}$.

3) Endelig er $10^{A_n} - 10^{a_n} < \varepsilon$, for alle Værdier af n, der er tilstrækkelig store.

For at bevise dette maa vi först bevise en Hjælpesætning.

<u>2. Hjælpesætning</u>. Naar p er et helt, positivt Tal kan $\sqrt[p]{10} \div 1$ göres $< \varepsilon$, for alle tilstrækkelig store Værdier af p.

Man indser straks, at $\sqrt[p]{10} > 1$, thi $10 > 1^p$. Man kan derfor sætte $\sqrt[p]{10} = 1 + \alpha$, hvor α er positiv.

Man har da $10 = (1+\alpha)^p > 1 + p\alpha$ ifölge (2,10).

Heraf ses $9 > p\alpha$ og $\alpha < \frac{9}{p}$. Indsættes dette i $\sqrt[p]{10} - 1 = \alpha$, faar man $\sqrt[p]{10} - 1 < \frac{9}{p}$, der kan göres $< \varepsilon$, naar p vælges tilstrækkelig stor.

3. Man kan nu bevise, at $10^{A_n}-10^{a_n}$ kan göres $< \varepsilon$, naar n vælges tilstrækkelig stor.

Man har $A_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ ɔ: $A_n = a_n + \frac{1}{10^n}$. Derpaa:

$$10^{A_n}-10^{a_n} = 10^{a_n+\frac{1}{10^n}} - 10^{a_n} = 10^{a_n}\cdot 10^{\frac{1}{10^n}} - 10^{a_n} =$$

$$10^{a_n}\left[10^{\frac{1}{10^n}}-1\right]$$ Sættes nu $10^n = p$, bliver p et Tal, der kan vælges saa stort, som man vil. Vi faar da:

$$10^{A_n}-10^{a_n} = 10^{a_n}\left[10^{\frac{1}{p}}-1\right] = 10^{a_n}\left[\sqrt[p]{10}-1\right]$$

$$< 10^{A_0}\left[\sqrt[p]{10}-1\right],$$ der kan göres $< \varepsilon$, da $\sqrt[p]{10}-1$ kan göres $< \frac{\varepsilon}{10^{A_0}}$.

4. Rækkerne (3) er altsaa Tilnærmelsesrækker og bestemmer altsaa et og kun et Tal. At dette er Tallet 2, ses af, at vi for alle n har

$$10^{A_n} > 2 > 10^{a_n}$$ hvoraf

$|10^{A_n}-2| < 10^{A_n}-10^{a_n} < \varepsilon$ og

$|10^{a_n}-2| < 10^{A_n}-10^{a_n} < \varepsilon$. Begge Talrækker har derfor Grænseværdien 2.

5. Almindeligt kan man vise, at $10^x = b$, hvor b er positiv, har en Rod.

Hvis b ikke er en hel eller brudden Potens af 10, har Ligningen ingen rational Rod.

1) Man finder da först to paa hinanden fölgende hele Tal a_0 og A_0, der har den Egenskab, at $\underline{10^{A_0} > b > 10^{a_0}}$.

2) Derpaa tideles Intervallet fra a_0 til A_0, og man finder blandt disse Tal to paa hinanden fölgende Tal a_1 og A_1, der har den Egenskab, at $\underline{10^{A_1} > b > 10^{a_1}}$, og

saaledes fortsætter man.

Man kan da opstille Tilnærmelses-rækkerne $\begin{cases} A_0 & A_1 \dots A_n \dots \\ a_0 & a_1 \dots a_n \dots \end{cases}$

der bestemmer et og kun ét Tal, som vi vil kalde log b.

At det tilfredsstiller Ligningen $10^x = b$, ses ved at opstille Rækkerne

$$\begin{cases} 10^{A_0} & 10^{A_1} \dots 10^{A_n} \dots \\ 10^{a_0} & 10^{a_1} \dots 10^{a_n} \dots \end{cases}$$

, der som før ses at være Tilnærmelsesrækker.

At de begge har Grænseværdien b ses af, at man for alle Værdier af n har

$$10^{A_n} > b > 10^{a_n}$$

Anm: I Praksis beregner man ikke Logaritmerne paa den her anførte Maade. Der gives andre og langt simplere Metoder, der er udviklet med dette Formaal for Øje.

6. Af det foregaaende fremgaar det, at <u>Logaritmen til et Tal er den Eksponent, man maa give 10 for at faa Tallet.</u>

Ligningen ${}^{1)}\log b = x$ er altsaa da og kun da rigtig, naar ${}^{2)}10^x = b$. Vi kan altsaa gøre en Prøve paa, om Ligningen $\log b = x$ er rigtig ved at undersøge, om $10^x = b$. Denne Prøve kaldes <u>Logaritmeprøven</u> og benyttes hyppig i det følgende.

Indsættes log b i Stedet for x i Ligning 2), faar man:

$$\underline{10^{\log b} = b}$$

, der er en Ligning, der benyttes i de efterfølgende 4 Logaritmesætninger.

Indsættes 10^x i Stedet for b i Ligning 1), faar man:

$$\underline{\log 10^x = x}$$

, som, udtrykt i Ord, siger, at <u>Logaritmen til en Potens af 10 er = Eksponenten.</u>

Eks: $\log 10000 = \log 10^4 = 4$, $\log 10 = 1$

$\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$, $\log 1 = 0$

$\log 0{,}1 = \div 1$.

7. De 4 Logaritmesætninger.

1) Logaritmen til et Produkt = Summen af Faktorernes Logaritmer. $\log(a\cdot b) = \log a + \log b$??

Bevis ved Logaritmeprøven:

$$10^{\log a+\log b} = 10^{\log a}\cdot 10^{\log b} = a\cdot b.$$

2) Logaritmen til en Brøk = Tællerens Logaritme ÷ Nævnerens Logaritme. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$??

Bevis: $$10^{\log a-\log b} = 10^{\log a} : 10^{\log b} = \frac{a}{b}.$$

3) Logaritmen til en Potens = Eksponenten gange Rodens Logaritme. $\log a^n = n\cdot\log a$??

Bevis: $$10^{n\log a} = \left(10^{\log a}\right)^n = a^n.$$

4) Logaritmen til en Rod = Logaritmen til Tallet under Rodtegnet, divideret med Rodeksponenten.

$$\log\sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n} \quad ??$$

Bevis: $$10^{\frac{\log a}{n}} = \sqrt[n]{10^{\log a}} = \sqrt[n]{a}.$$

Eks. 1. $\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$

Eks. 2. $2\log 5 \div 4\log 2 + \log\frac{2}{5} + \log 40 =$

$$\log\frac{5^2\cdot\frac{2}{5}\cdot 40}{2^4} = \log 5^2 = 2\log 5.$$

Opgave: Find x af Ligningen

$$\log x = 2\log a - \tfrac{1}{3}\log b + 2.$$

8. Karakteristik og Mantisse.

Ved Karakteristikken i en Logaritme forstaar man største hele Tal i Logaritmen.

Ved Mantissen i en Logaritme forstaar man det Tal, der maa lægges til Karakteristikken for at faa Logaritmen. Heraf ses det, at Mantissen altid er et positivt

Tal mellem 0 og 1. Da Mantissen i Reglen er et irrationalt Tal, pleyer man at angive den med Tilnærmelse som en Decimalbrök med 4 eller 5 Decimaler.[x]
Vi tænker os nu 3 Tal: T_1, T_n og $T_{\div n}$, som alle skrives med de samme Ziffer i samme Orden:
T_1 skal have et Ziffer för Kommaet, og dette Ziffer maa ikke være 0. T_2 skal have n Ziffer för Kommaet, og det förste af disse maa ikke være 0. $T_{\div n}$ skal være en Decimalbrök der har n Nuller för det förste fra 0 forskellige Ziffer.
1) $\log T_1$ har Karakteristikken 0 og Mantissen $= \log T_1$.
Bevis:

$$10 > T_1 > 1$$
$$\log 10 > \log T_1 > \log 1$$
$$1 > \log T_1 > 0.$$

„Nul" er derfor största hele Tal i Logaritmen.
2) $\log T_n$ har Karakteristikken $n-1$ og Mantissen $\log T_1$.
Bevis: Da T_n og T_1 indeholder de samme Ziffer i samme Orden, vil $T_n = 10^{n-1} \cdot T_1$

$$\therefore \log T_n = \log 10^{n-1} + \log T_1 = n-1+\log T_1.$$

$n-1$ er derfor största hele Tal i Logaritmen, da $1 > \log T_1 > 0$.
3) $\log T_{\div n}$ har Karakteristikken $\div n$ og Mantissen $\log T_1$.
Bevis: Da $T_{\div n}$ og T_1 indeholder de samme Ziffer i den samme Orden, vil $T_{\div n} = T_1 : 10^n$

$$\therefore \log T_{\div n} = \log T_1 - \log 10^n = \log T_1 \div n.$$

Heraf ser man, at $\log T_{\div n}$ ligger mellem $-n$ og $-n+1$.
Största hele Tal i Logaritmen er derfor $\div n$

[x] $\log x = 2,6483$. Karakteristikken er 2; Mantissen 0,6483.
$\log x = \div 2,6483 = 3 \div 2,6483 - 3 = 0,3517 - 3$ $\therefore$ Karakt. $= -3$; M. $= 0,3517$.

Man ser heraf fölgende:
<u>Naar et Tal har n Ciffre för Kommaet, vil Karakteristikken i dets Logaritme være $n \div 1$.</u>
<u>Naar et Tal er en Decimalbrök, der begynder med n Nuller, vil Karakteristikken i dets Logaritme være $\div n$.</u>
<u>Mantissen afhænger ikke af Kommaets Plads.</u>
log 713,8 , log 7,138 og log 0,007138 har saaledes samme Mantisse. De tre Logaritmers Karakteristik er 2 , 0 og ÷ 3.

9. Paa disse Sætninger stötter man sig, naar man vil anvende en Logaritmetabel. Erlangs Logaritmetabel indeholder Mantisserne for Logaritmen til alle Tal, der ligger mellem 1 og 10 og har indtil 3 Decimaler.
Vil man f. Eks finde log 734,5, ser man, at Karakteristikken er 2. Desuden ved man, at den har samme Mantisse som log 7,345. Denne findes i Tabellen at være 0,8660. Man har altsaa log 734,5 = 2,8660.
Skal man finde log 0,00634, ser man, at Karakteristikken er = ÷ 3. Desuden er Mantissen = Mantissen til log 6,34, der findes i Tabellen og viser sig at være 0,8021. Man har altsaa log 0,00634 = 0,8021 ÷ 3.
Hvis man har opgivet Logaritmen til et Tal f. Eks. log x = 3,6784, slaar man op i Antilogaritmetabellen paa Mantissen 0,6784. Derved bestemmes Ciffrene i x, der viser sig at være 4769. Da Karakteristikken i den opgivne Logaritme er 3, skal x have 4 Ciffre för Kommaet. Man faar altsaa x = 4769.

Hvis man har opgivet $\log x = 0{,}3742-1$, slaar man op i Antilogaritmetabellen paa Mantissen $0{,}3742$ og faar derved bestemt Cifferene i x, der viser sig at være 2367. Da Karakteristikken i den opgivne Logaritme er $\div 1$, vil x være en Decimalbrök, der begynder med et Nul. Man har derfor $x = 0{,}2367$.

Eks. 1. $x = \sqrt[5]{\div 0{,}5618}$. Da de negative Tal ikke har nogen Logaritme*), maa man omskrive det opgivne Udtryk.

$$x = \sqrt[5]{-0{,}5618} = \sqrt[5]{(-1)\cdot 0{,}5618} = \sqrt[5]{-1}\cdot\sqrt[5]{0{,}5618} = \div\sqrt[5]{0{,}5618}.$$

Man sætter nu
$$y = \sqrt[5]{0{,}5618}$$
$$\log y = \frac{\log 0{,}5618}{5} = \frac{0{,}7496-1}{5} = \frac{4{,}7496-5}{5}$$
$$\log y = 0{,}9499 \div 1 \quad \text{hvoraf}$$
$$y = 0{,}8910.$$

Deraf fölger $\underline{x = \div 0{,}8910}$.

Eks. 2 $x = \sqrt[3]{2{,}634 \div \frac{0{,}26^2}{\sqrt[3]{0{,}6}}}$

Da man ikke kender nogen Regler, efter hvilke man kan finde Logaritmen til en Sum eller en Differens, maa man först beregne $y = \frac{0{,}26^2}{\sqrt[3]{0{,}6}}$

$$\log y = 2\cdot\log 0{,}26 - \tfrac{1}{3}\log 0{,}6$$
$$= 2\cdot(0{,}4150-1) - \tfrac{1}{3}(0{,}7782-1) =$$
$$= 0{,}8300-2 \div \tfrac{1}{3}(2{,}7782-3)$$
$$= 0{,}8300-2 \div (0{,}9261-1)$$
$$= 1{,}8300-3 \div 0{,}9261+1$$
$$\log y = 0{,}9039 \div 2, \quad \text{hvoraf } \underline{y = 0{,}08015}.$$

*) $10^x = \div 3$ tilfredsstilles hverken af noget positivt eller noget negativt Tal.

[Anm: I Praksis opskrives denne Beregning simplest

$$2 \cdot \log 0{,}26 = 2 \cdot (0{,}4150 - 1) = 0{,}8300 \div 2$$

$$\tfrac{1}{3} \log 0{,}6 = \tfrac{1}{3}(0{,}7782 - 1) = \frac{2{,}7782 - 3}{3} = 0{,}9261 \div 1$$

$$\log y = 0{,}9039 - 2$$

$$y = 0{,}08015\,]$$

Man har derpaa $x = \sqrt[3]{2{,}634 \div 0{,}08015}$

$x = \sqrt[3]{2{,}55385}$. Da Logarithmetabellen ikke kan give os log til Tal med mer end 4 Ziffer, skriver man tilnærmet

$$x = \sqrt[3]{2{,}554}$$

$$\log x = \tfrac{1}{3} \cdot \log 2{,}554 = \frac{0{,}4072}{3}$$

$$\log x = 0{,}1357 \text{, hvoraf}$$

$$\underline{x = 1{,}366}$$

Ex 3. Undertiden kan man lette Regningerne ved at opløse det foreslagte Udtryk i Faktorer.

$$x = \sqrt{5{,}347^2 \div 2{,}561^2}$$

$$x = \sqrt{(5{,}347 + 2{,}561)(5{,}347 \div 2{,}561)}$$

$$x = \sqrt{7{,}908 \cdot 2{,}786}$$

$$\log 7{,}908 = 0{,}8980$$

$$\log 2{,}786 = 0{,}4450$$

$$2 \log x = 1{,}3430$$

$$\log x = 0{,}6715 \qquad \underline{x = 4{,}694.}$$

Ex 4. En cylindrisk Brønd, hvis Diameter $= 1{,}212^m$ er fyldt med Vand til en Høide af 8,263 m. Den skal tømmes ved Hjælp af en keglestubformig Spand, hvis Høide er = 35,22 cm, hvis øverste indvendige Diameter = 28,64 cm, medens den indvendige Bund Diameter = 22,85 cm. Hvor mange Spande Vand er der i Brønden?

en Keglestubs Volumen = $\frac{1}{3}\pi h\left[(R+r)^2 - Rr\right]$, hvor R og r ^{63} er Radier i Grundfladerne, medens h er Keglestubbens Höjde.

Da Cylinderens Volumen = $\pi r^2 h$, vil Volumen af det Vand, som staar i Brönden være

$$\pi \cdot 0{,}606^2 \cdot 8{,}263 \text{ m}^3 = \pi \cdot 0{,}606^2 \cdot 8{,}263 \cdot 10^6 \text{ cm}^3.$$

Spandens Volumen = $\frac{1}{3}\pi \cdot 35{,}22\left[25{,}74^2 \div 14{,}32 \cdot 11{,}42\right]$.

Det søgte Antal Spande bliver derfor:

$$x = \frac{\pi \cdot 0{,}606^2 \cdot 8{,}263 \cdot 10^6}{\frac{1}{3}\pi \cdot 35{,}22 \cdot \left[25{,}74^2 - 14{,}32 \cdot 11{,}42\right]}$$

$$x = \frac{3 \cdot 0{,}606^2 \cdot 8{,}263 \cdot 10^6}{35{,}22 \cdot \left[25{,}74^2 - 14{,}32 \cdot 11{,}42\right]}$$

Man sætter nu

$$y = 25{,}74^2 \qquad z = 14{,}32 \cdot 11{,}42$$

$$\log y = 2 \cdot 1{,}4106 \qquad \log 14{,}32 = 1{,}1559$$

$$\log y = 2{,}8212 \qquad \log 11{,}42 = 1{,}0576$$

$$\underline{y = 662{,}5} \qquad \log z = 2{,}2135$$

$$\underline{z = 163{,}5}$$

Indsat:

$$x = \frac{3 \cdot 0{,}606^2 \cdot 8{,}263 \cdot 10^6}{35{,}22 \cdot \left[662{,}5 - 163{,}5\right]} = \frac{3 \cdot 0{,}606^2 \cdot 8{,}263 \cdot 10^6}{35{,}22 \cdot 499.}$$

En praktisk Opstilling af de efterfølgende Regninger ser saaledes ud:

$$\begin{aligned}
\log 3 &= 0{,}4771 \\
2 \cdot \log 0{,}606 &= 0{,}5650 - 1 \\
\log 8{,}263 &= 0{,}9172 \\
\log 10^6 &= \underline{6} \\
\log T &= 6{,}9593
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 35{,}22 &= 1{,}5468 \\
\log 499 &= \underline{2{,}6981} \qquad 4{,}2449
\end{aligned}$$

$$\log x = 2{,}7144$$

$$\underline{\underline{x = 518{,}1 \text{ Spande.}}}$$

Opgave 1. Find x af Ligningen $(\log x + 2,451)^5 = \div 0,011$.
Opgave 2. Beregn ved Hjælp af Logaritmer Værdien af Brøken: $\dfrac{2x^2+5x-3}{2+5y-3y^2}$, naar $x = 3,871$ og $y = -2,63$.

Opgave 3. Beregn $x = \sqrt[5]{\log 0,2753}$.
Opgave 4. Beregn $x = 0,7^{\log 0,7}$.

Kapitel 30. Eksponentielle Ligninger.

Alle Ligninger deles i to Slags:
1) De algebraiske o: saadanne, hvor den ubekendte kun forekommer som Addend, Subtrahend, Faktor, Divisor, opløftet til Potens og under Rodtegn og
2) de transcendente.

Af disse sidste skal vi her nævne de eksponentielle, hvor den ubekendte findes i Eksponenten. Vi vil senere komme til at omtale en anden Slags transcendente Ligninger, nemlig de trigonometriske.
1. Hvis den opgivne Ligning indeholder ét Led paa hver Side af Lighedstegnet, bør man tage Logaritmen paa begge Sider af Lighedstegnet.

Ex. 1. $5^x = 4$.

$$x \log 5 = \log 4 \qquad x = \frac{\log 4}{\log 5} = \frac{0,6021}{0,6990}. \qquad (1)$$

$$\log 0,6021 = 0,7797 - 1$$
$$\log 0,6990 = 0,8445 \div 1$$
$$\log x = 0,9352 - 1 \qquad o: x = 0,8614$$

Resultatet kan ogsaa findes af (1) ved at udføre Divisionen; man tager da saa mange Decimaler med, som man vilde have faaet ved Logaritmeregning, hvad der er en Regel, som vi altid bruger, naar vi regner med Tilnærmelse.

Eks 2. $x^{\log x} = \dfrac{\sqrt[4]{0,1}}{x}$

Man tager Logaritmen paa begge Sider.

$$(\log x)^2 = \tfrac{1}{4}\log 0,1 \div \log x$$
$$(\log x)^2 = -\tfrac{1}{4} \div \log x$$
$$(\log x)^2 + \log x + \tfrac{1}{4} = 0$$

Løses denne Ligning med Hensyn til $\log x$, faar man

$$\log x = \div\tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

Man kunde ogsaa have regnet saaledes:

$$\log x = -\tfrac{1}{2} = \div 0,5$$
$$\log x = 1 \div 0,5 - 1 = 0,5000 - 1$$
$$\underline{x = 0,3162}$$

Eks 3. $2^x \cdot 3^{1-x} \cdot 5^{2-x} = 7^{2x+1}$

$$x\log 2 + (1-x)\log 3 + (2-x)\log 5 = (2x+1)\log 7.$$

Denne Ligning er af 1ste Grad i x og løses derfor med Hensyn til x:

$$x\cdot[\log 2 - \log 3 - \log 5 - 2\log 7] = \div\log 3 - 2\log 5 + \log 7$$
$$x = \frac{\log 3 + 2\log 5 \div \log 7}{\log 3 + \log 5 + 2\log 7 \div \log 2} =$$
$$\frac{\log(3\cdot 5^2) - \log 7}{\log(3\cdot 5\cdot 7^2 : 2)} = \frac{\log 75 \div \log 7}{\log 367,5}$$
$$\therefore x = \frac{1,8751 \div 0,8451}{2,5653} = \frac{0,0300}{2,5653}$$
$$\log 0,03 = 0,4771 - 2$$
$$\log 2,5653 = \underline{0,4091}$$
$$\log x = 0,0680 - 2 \qquad \therefore \underline{x = 0,01170}$$

2. Hvis Ligningen har mere end 1 Led paa hver Side af Lighedstegnet, og det ikke lykkes at omskrive den, saa

tales, at den har denne simple Form, maa man pröve at indföre en ny Ubekendt i Stedet for et eller andet Exponentielt Udtryk, for derpaa at löse Ligningen med Hensyn til dette.

Ex. 4. $3^{x+1} - 5\cdot 3^{3-x} = 12$

$$3^x\cdot 3 \div 5\cdot \frac{3^3}{3^x} = 12$$ Man sætter nu $3^x = y$

og faar $3y \div 5\cdot \frac{3^3}{y} = 12$

$$3y^2 - 5\cdot 3^3 = 12y$$

$$y^2 - 4y \div 45 = 0 \qquad y = 2 \pm \sqrt{49} = \begin{cases} 9 \\ \div 5 \end{cases}$$

Ligningen deler sig da i to:

1) $3^x = 9$ eller $3^x = 3^2$ ⊙: $\underline{x = 2}$ og

2) $3^x = \div 5$, der ikke er tilfredsstillet af noget reelt Tal.

<u>Anm:</u> Ved Regning med Logaritmer maa man erindre, at man ikke kan tage Logaritmen til et negativt Tal, da de negative Tal ikke har nogen reel Logaritme. Man kan heller ikke finde Logaritmen til en Sum eller Differens ved först at beregne Leddenes Logaritmer.

Opgaver: 1. $\frac{x^{\log x}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{10}$

2. $\frac{1 \div \log x}{1 \div \log\sqrt{x}} = \frac{1}{3\log x}$

3. $(5x)^{\log(5x)} = (3x)^{\log(3x)}$

4. $4\cdot 2^{3x+1} - 5\cdot 3^{2x} = 3^{2x-1} + 5\cdot 2^{3x-2}$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \frac{13}{6}$

6. $\frac{1}{5 - 2^x} + \frac{2}{1 + 2^x} = \frac{14}{9}$

7. $\log(x - 1 + 2\sqrt{6}) = 3 - \log(x - 1 - 2\sqrt{6})$. Gör Pröve!

Kapitel 31. Trigonometriske Ligninger.

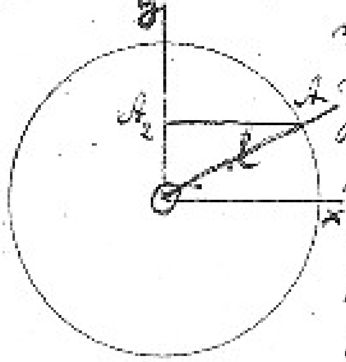
De trigonometriske Grundligninger.

1. $\sin x = a$

Saafremt $1 \geqq a \geqq \div 1$, vil denne Ligning altid være tilfredsstillet af en Vinkel, der ligger i 1ste eller 4 Kvadrant.

Dette indses saaledes:

Lad xoy være et retvinklet Koordinatsystem, hvor Enhedsretningen er valgt som sædvanlig. Om O som Centrum tegnes en Cirkel med Radius 1. Vi afsætter derpaa ud ad y-Aksen Stykket $OA_2 = a$ og tegner gennem A_2 en Linie $\perp$ y-Aksen. Den har et Skæringspunkt A med Cirkelen, som ligger tilhøjre for y. Linien OA tegnes og man vælger dens positive Retning fra O til A og kalder denne l.



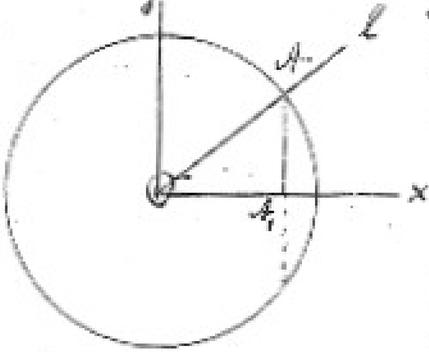
Betegner man $\angle xl$'s Gradantal ved v, vil $x = v$ være den søgte Rod i Ligningen $\sin x = a$.

Hvis a er positiv, vil v være en Vinkel i 1ste Kvadrant, hvis a derimod er negativ vil v være en Vinkel i 4de Kvadrant. Ved at forlænge AA_2 til Skæring med Cirkelperiferien, ser man, at den fuldstændige Løsning af Ligningen $\sin x = a$ er
$$x = \begin{cases} v + 360p \\ 180 - v + 360p \end{cases},$$
hvor p er et vilkaarligt helt Tal.

2. $\cos x = a$.

Saafremt $1 \geqq a \geqq \div 1$, vil Ligningen være tilfredsstillet af en Vinkel i 1ste eller 2den Kvadrant.

Dette bevises ved at afsætte $OA_1 = a$ ud ad x-Aksen og oprejse en Linie i $A_1 \perp x$-Aksen. Denne Linie skær vil Cirklen i et Punkt, der ligger over x Aksen,



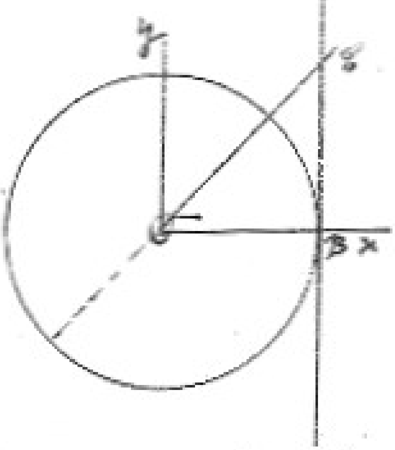
og som vi vil kalde A. OA's positive Retning kaldes l og regnes altsaa fra O til A. Hvis nu $\angle xl$'s Gradeantal er $= v°$, vil $x = v$ være Rod i Ligningen, og hvis a er positiv, ligger v i 1ste Kvadrant, medens v ligger i 2den Kvadrant, hvis a er negativ. Forlænges AA_1 til Skæring med Cirklen, ser man, at den fuldstændige Løsning af Ligningen

$\cos x = a$ er $x = \pm v + 360p$, hvor p er et vilkaarligt, helt Tal.

3. $\underline{tg\, x = a}$, hvor a er et vilkaarligt Tal.

Ligningen vil altid være tilfredsstillet af en Vinkel, der ligger i 1ste eller i 4de Kvadrant.

Lad Ox skære Cirklen tilhøjre for y-Aksen i Punktet B. Man tegner da en Linie gennem $B \perp Ox$ — den saakaldte Tangenslinie —, vælger dens Retning positiv opad og afsætter $BC = a$ ud ad denne Linie. Man vælger derpaa OC's positive Retning fra O til C og kalder denne Retning l. Lad nu $\angle xl = v°$; da vil $x = v$ være Rod i den forelagte Ligning. Hvis a er positiv, ligger v i 1ste Kvadrant, hvis a er negativ derimod i 4de Kvadrant. Forlænges CO ud over O til Skæring med Cirklen, ser



man, at $\operatorname{tg} x = a$ har den fuldstændige Løsning

$$x = v + 180p,$$

hvor p er et vilkaarligt, helt Tal.

4. $\cot x = a$, hvor a er et vilkaarligt Tal. Man viser, som i 3, at der altid er en Vinkel v, der ligger i 1ste eller 2den Kvadrant, og som tilfredsstiller Ligningen. Den fuldstændige Løsning er derfor

$$x = v + 180p.$$

Eks. 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ $\qquad x = \begin{cases} 30 + 360p \\ 150 + 360p \end{cases}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad x = \pm 60 + 360p$

$\operatorname{tg} x = 1$ $\qquad x = 45 + 180p.$

Eks. 2. 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vi finder først den Vinkel i 1ste Kvadrant, som tilfredsstiller Ligningen $\sin x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Det er $x_1 = 60°$. Ved Hjælp af en Tegning ses det, at den fuldstændige Løsning af $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ er $x = \begin{cases} -60 + 360p \\ 180-(-60) + 360p \end{cases}$

eller $x = \begin{cases} -60 + 360p \\ 240 + 360p. \end{cases}$

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ligningen $\cos x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tilfredsstilles af $x_1 = 45$. Ved Hjælp af en Tegning ser man da, at $x = \pm 135 + 360p$ er den fuldstændige Løsning af den opgivne Ligning.

3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Ligningen $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3}$ tilfredsstilles af $x_1 = 60$. Heraf følger: $\underline{\underline{x = -60 + 180p.}}$

Kapitel 32.

A. Trigonometriske Ligninger med 1 ubekendt.

Hyppig lader denne Slags Ligninger sig kun løse ved Forsøg, hvad der f. Eks. gælder saa simpel en Ligning som $\sin x + x = a$.

Naar man faar forelagt en trigonometrisk Ligning med 1 ubekendt, kan man prøve en af følgende Metoder:

1. Man erstatter de indgaaende Funktioner med en og samme Funktion og løser derpaa Ligningen med Hensyn til denne.

Eks. 1. $\dfrac{\sin x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \div \operatorname{tg} x + \cot x = 0$.

Man bortskaffer først $\operatorname{tg} x$ og $\cot x$. Derved faas:

$$\frac{\sin x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \div \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

$$\sin x + \cos^2 x \div \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

$$\sin x - \sin^2 x + 2\cos^2 x = 0$$

Man kan nu bortskaffe $\cos x$:

$$\sin x - \sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$3\sin^2 x \div \sin x - 2 = 0$$

$$\sin^2 x - \tfrac{1}{3}\sin x - \tfrac{2}{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \pm \frac{5}{6} = \begin{cases} 1 \\ \div \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$\sin x = 1$ medfører $\underline{x = 90 + 360p}$

$\sin x = -\frac{2}{3}$ medfører $x = \begin{cases} -41{,}81 + 360p \\ 221{,}81 + 360p. \end{cases}$

2. Hvis Ligningen kun indeholder $\sin x$ og $\cos x$ og efter at være bragt paa hel Form er homogen af n'te Grad i $\cos x$ og $\sin x$, indføres $\operatorname{tg} x$, ved at man divi-

deres med $\cos^n x$.

At en Ligning er homogen i $\sin x$ og $\cos x$ af $n$te Grad vil sige, at hvert af Ligningens Led indeholder n Faktorer, der enten er $\sin x$ eller $\cos x$.

Ved at multiplicere et eller flere Led med $\cos^2 x + \sin^2 x$, der som bekendt er $= 1$, kan man ofte gøre en Ligning homogen, selv om den ikke er det iforvejen.

Eks. 2. $\sin^3 x + 2\cos x - 3\cos^3 x = 0$

Ligningen kan gøres homogen af 3die Grad ved at multiplicere $2\cos x$ med $\cos^2 x + \sin^2 x$. Man faar da

$$\sin^3 x + 2\cos x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) - 3\cos^3 x = 0$$
$$\sin^3 x + 2\cos x \sin^2 x \div \cos^3 x = 0$$

Man dividerer nu med $\cos^3 x$ og faar:

$$\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0.$$ Dette kan skrives:

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \quad \text{eller} \quad \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x + 1) + (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

eller: $(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1) = 0$

Ligningen deler sig nu i to:

1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ ɔ: $\operatorname{tg} x = \div 1$, $x = -45 + 180p$

2) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \div 1 = 0$ hvoraf $\operatorname{tg} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \dfrac{-1 \pm 2{,}2360}{2}$

eller $\operatorname{tg} x = \begin{cases} 0{,}6180 \\ \div 1{,}618 \end{cases}$

Den fuldstændige Løsning af den foreslagte Ligning er derfor

$$x = -45 + 180p;\quad x = 31{,}72 + 180p;\quad x = -58{,}28 + 180p.$$

3. Det lykkes ofte ved at opløse i Faktorer at dele den foreslagte Ligning i simplere Ligninger.

Eks. 3. $2\sin x + \cos x \div \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} = 0$

Vi bortskaffer $\operatorname{tg} x$. Derved faas

$$2\sin x + \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{2} = 0$$

$$4\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin x - \cos x = 0$$

$$2\cos x\left[2\sin x + \cos x\right] - \left[2\sin x + \cos x\right] = 0$$

$$\left[2\sin x + \cos x\right]\left[2\cos x - 1\right] = 0.$$

Ligningen spalter sig nu i to, nemlig:

1) $2\sin x + \cos x = 0$ og 2) $2\cos x - 1 = 0$

Ligningen er homogen af 1ste Grad i $\sin x$ og $\cos x$. Vi dividerer da med $\cos$

$$2\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{x = -26{,}57 + 180p}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x = \pm 60 + 360p}$$

Eks 4. $\sin 5x + \sin 7x + \sin 9x = 0.$

Vi omdanner $\sin 5x + \sin 9x$ efter Formlen:

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$. Man faar da:

$$2\sin 7x\cos 2x + \sin 7x = 0$$

$$\sin 7x\left[2\cos 2x + 1\right] = 0.$$

Heraf faas: 1) $\sin 7x = 0$; $7x = 180p$ ɔ: $\underline{x = \frac{p}{7}\cdot 180}$

og 2) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm 120 + 360p$ ɔ: $\underline{x = \pm 60 + 180p}$

<u>4. Man kan ofte med Held udtrykke de indgaaende Funktioner ved $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$</u>, idet man erindrer, at

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

og

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 \div \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Eks 5. $2\cos x \div 3\sin x = 1.$

Vi indfører $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ og faar:

$$2\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \div \frac{6\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$2-2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} \div 6\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$$

$$3\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 6\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} \div 1 = 0$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = -1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{3}} = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{12}}{3} = \frac{-3 \pm 3{,}46410}{3}$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \begin{cases} 0{,}1547 \\ \div\frac{6{,}464}{3} \end{cases} \quad \text{hvoraf}$$

$$\frac{x}{2} = \begin{cases} 8{,}79 + 180p \\ \div 65{,}105 + 180p \end{cases} \qquad x = \begin{cases} 17{,}58 + 360p \\ \div 130{,}21 + 360p. \end{cases}$$

Man kunde ogsaa have löst den forelagte Ligning ved at indsætte $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ og derpaa bortskaffe Rodtegnet af den fremkomne Ligning. Man kan da löse med Hensyn til $\sin x$, men Metoden er uheldig, forsaavidt som man kan indföre fremmede Rödder ved Potensopløftningen. Disse maa da bagefter bortskaffes.

Eks 6. $12\sin x - 11\cos x = 8$

Eks 7. $\sin x - 2\cos x = 5$. Vis, at denne Ligning overhovedet ikke kan tilfredsstilles.

Eks 8. $1-\cos^3 x = 2\sin^2 x$

Eks 9. $\sin 3x = 2\cos^3 x$

Eks 10. $\sin x + \cos x = \sin x \cdot \cos x$. (Indfør $\sin 2x$)

Eks 11. $\sin x(\sin x - \cos x) = \frac{4}{25}$.

Eks 12. $\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\mathrm{tg}\,x = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$

Eks 13. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$.

B. Trigonometriske Ligninger med flere ubekendte.

1) $x + y = 60$

2) $\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3}$

Man eliminerer x og faar:

$$\frac{\sin(60-y)}{\sin y} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60 \cos y - \cos 60 \sin y = \sqrt{3} \sin y$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y \div \frac{1}{2} \sin y = \sqrt{3} \sin y$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} \operatorname{tg} y = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} y$$

$$\sqrt{3} - \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} y \quad \Rightarrow$$

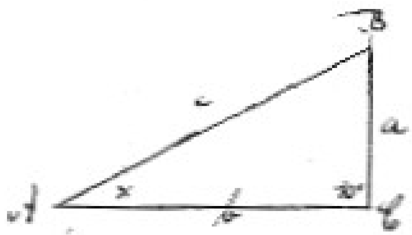
$$\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)} = \frac{6-\sqrt{3}}{11}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{6 \div 1{,}7320}{11} = \frac{4{,}268}{11}$$

$\underline{\underline{y = 21{,}20 + 180p}}$ Indsættes dette i 1)

$\underline{\underline{x = 38{,}80 \div 180p}}$

Kapitel 33. Den retvinklede Trekant.



Lad ABC være en retvinklet Trekant. Man har da ifølge Definitionerne paa de trigonometriske Funktioner:

$\sin x = \frac{a}{c}$ hvoraf: $a = c \sin x$

$\cos x = \frac{b}{c}$ " $b = c \cos x$

$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$ " $a = b \cdot \operatorname{tg} x$

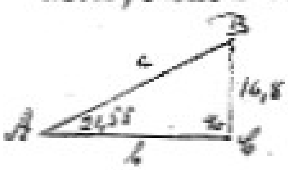
Heraf ser man, at

<u>en Katete er lig Hypotenusen gange sinus til den Vinkel, der ligger overfor Kateten.</u>

Desuden er en Katete lig Hypotenusen gange cosinus til den mellemliggende Vinkel.

Den ene Katete er = den anden Katete gange tangens til den Vinkel, der ligger overfor den første.

Opgave 1. I $\triangle ABC$ er $\angle C = 90°$, $a = 16,8$ m og $\angle A = 21,55°$. Find de andre Sider og Vinkler, den omskrevne Cirkels Radius, samt Trekantens Omkreds og Areal.



Man har $16,8 = b \cdot tg\, 21,55$ eller

$$b = \frac{16,8}{tg\, 21,55}$$

$$\log 16,8 = 1,2253$$
$$\log tg\, 21,55 = 0,5965 - 1$$
$$\log b = 1,6288 \qquad \therefore\ b = 42,54 \text{ m}$$

$16,8 = c \cdot \sin 21,55$ eller $c = \dfrac{16,8}{\sin 21,55}$

$$\log 16,8 = 1,2253$$
$$\log \sin 21,55 = 0,5650 - 1$$
$$\log c = 1,6603 \qquad \therefore\ c = 45,74 \text{ m}$$

Da den omskrevne Cirkel har sit Centrum i c's Midtpunkt, er $R = \frac{c}{2} = 22,87$ m

Trekantens Omkreds er $= 16,8 + 42,54 + 45,74 = 105,08$ m.

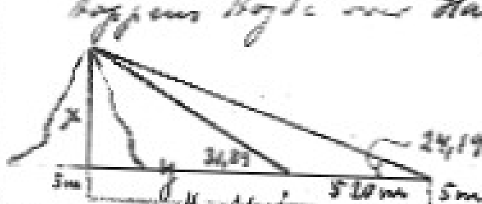
Trekantens Areal $= \frac{1}{2} \cdot 16,8 \cdot 42,54 = 8,4 \cdot 42,54 = 357,336\ m^2$

Opgave 2. Fra Endepunkterne af et vandret Liniestykke, der ligger 5 m over Havfladen, ses en Bjergtop, der ligger i samme Retning under Højdevinkler paa 24,19° og 31,89°. Det vandrette Liniestykke er 520 m langt. Find Bjergtoppens Højde over Havfladen.

Man har $^{1)}\ x = y \cdot tg\, 31,89$

og $^{2)}\ x = (y + 520) \cdot tg\, 24,19$

Man finder y af 1) og indsætter i 2).



Derved faar man: $x = \dfrac{520 \cdot tg\,24,19 \cdot tg\,31,89}{tg\,31,89 - tg\,24,19}$.

Dette Udtryk göres logaritmisk ved Hjælp af Formlen

$$tg\,u - tg\,v = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cdot \cos v}$$ Man faar da

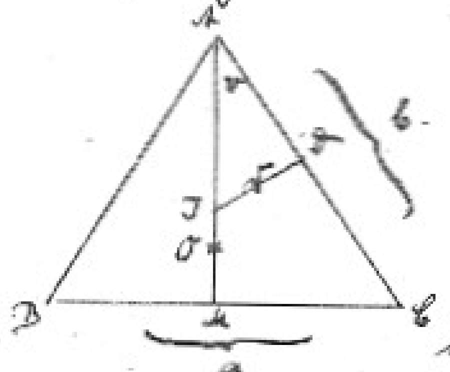
$$x = \frac{520 \cdot tg\,24,19 \cdot tg\,31,89}{\left(\dfrac{\sin 7,7}{\cos 24,19 \cdot \cos 31,89}\right)} = \frac{520 \cdot \sin 24,19 \cdot \sin 31,89}{\sin 7,7}.$$

Heraf:

$$\begin{aligned} \log 520 &= 2,7160 \\ \log \sin 24,19 &= 0,6125 - 1 \\ \log \sin 31,89 &= \underline{0,7229 - 1} \\ & \quad 2,0514 \\ \log \sin 7,7 &= \underline{0,1271 - 1} \\ \log x &= 2,9243 \end{aligned}$$ ɔ: $\underline{x = 840\text{ m}}$.

Toppens Höjde over Havfladen er derfor $\underline{845,0\text{ m}}$.

Opgave 3. I en ligebenet Trekant, hvis Toppunkt er A, er det opgivet, at $h_a + r = n \cdot R$. Find Toppunktsvinklen, udtrykt ved n og bestem Grænserne for n.



Lad den halve Topvinkel være v, medens O er Centrum for den omskrevne, I for den indskrevne Cirkel.

Man ser straks, at $\underline{h_a = b\cos v}$

Tegnes $ID \perp AC$, vil $DC = MC = \frac{a}{2}$, hvoraf fölger: $AD = b \div \frac{a}{2}$. Man har da: $\underline{r} = (b - \frac{a}{2})\,tg\,v = \underline{(b \div b\sin v)\cdot tg\,v}$.

I $\triangle OMC$ er $\angle O = 2v$ og $OC = R$. Man har da

$$\sin 2v = \frac{a}{2R} \quad \text{eller} \quad 2\sin v\cos v = \frac{b\sin v}{R}$$

Heraf
$$\underline{R = \frac{b}{2\cos v}}$$

Vi indsætter nu de fundne Udtryk i $h_a + r = nR$.

Deraf faar man:

$$b\cos v + b(1-\sin v)\cdot \operatorname{tg} v = n\cdot\frac{b}{2\cos v}, \text{ eller}$$

$$\cos^2 v + (1-\sin v)\sin v = \frac{n}{2}$$

$$1-\sin^2 v + (1-\sin v)\sin v = \frac{n}{2}$$

$$2\sin^2 v \div \sin v + \frac{n}{2} - 1 = 0$$

$$\sin^2 v - \frac{1}{2}\sin v + \frac{n-2}{4} = 0$$

$$\sin v = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{n-2}{4}}.$$

$$\sin v = \frac{1 \pm \sqrt{9-4n}}{4}.$$

Diskussion: Vi ser at $4n \leqq 9$ ɔ: $n \leqq 2\frac{1}{4}$, da man ellers vil faa $\sin v$ komplex. Men dette er ikke tilstrækkeligt til, at man kan bestemme v af Ligningen. Da v nemlig er bestemt ved sin Sinus, og da v skal være en Vinkel mellem 0 og 90°, maa man tillige forlange, at n har en saadan Værdi, at

$$1 > \frac{1 \pm \sqrt{9 \div 4n}}{4} > 0 \quad (1).$$

Vi omskriver (1) til $\quad 1 > \dfrac{1 \pm 3\sqrt{1 \div \frac{4}{9}n}}{4} > 0.$

1) Man ser strax, at

$$1 > \frac{1 + 3\sqrt{1-\frac{4}{9}n}}{4} > 0,$$ thi n er ifølge Opgavens Natur et positivt Tal, hvoraf følger, at

$$1 > \sqrt{1-\tfrac{4}{9}n} \geqq 0$$

$\sin v = \dfrac{1+\sqrt{9-4n}}{4}$ giver derfor altid en Løsning for v, naar blot $n \leqq 2\frac{1}{4}$.

2) Tillige er det klart, at $1 > \dfrac{1-3\sqrt{1-\frac{4}{9}n}}{4}$. Derimod er den sidste Størrelse kun større end Nul, hvis

$$1 > 3\sqrt{1-\tfrac{4}{9}n} \quad \text{ɔ: dersom}$$

$$1 > 9-4n \quad \text{ɔ: dersom}$$

$4n > 8$ eller $n > 2$.

$\sin v = \frac{1-\sqrt{4-4n}}{4}$ vil derfor kun give Løsning, saafremt $2\frac{1}{3}n > 2$.

Øv. Find v for $n = 2{,}1$ og $n = 1\frac{1}{2}$.

Kapitel 34. Den skævvinklede Trekants Grundformler.

Vi kender fra den elementære Geometri Formlen $A+B+C = 180°$, der udtrykker, at Trekantens Vinkelsum er 180°. Dette er den ene af Trekantens Grundformler, og den kan bruges til at beregne en af Vinklerne, naar de to andre er opgivet. Men ud fra to opgivne Stykker lader de andre sig ellers ikke bestemme. Først naar 3 Stykker – som dog ikke maa være 3 Vinkler – er opgivne, lader de andre Stykker sig beregne, og hertil kan man benytte nedenstaaende 3 Grundformler.

1. sinus-Relationen.

1) Lad $\triangle ABC$ være en spidsvinklet Trekant. Man kan da finde to Udtryk for h_a nemlig:

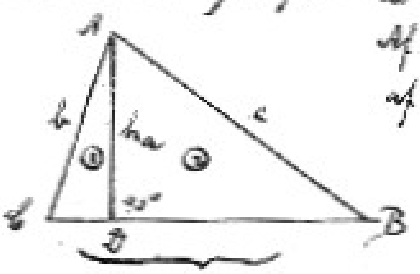


Fig 1.

Af ①: $h_a = b \sin C$ og

af ②: $h_a = c \sin B$

Heraf faas: $b \sin C = c \sin B$

eller $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. (a)

Havde man i Stedet for h_a tegnet h_b, vilde man sammme Maade faa $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, der sammenholdt med (a) giver:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$, hvilket er

den saakaldte sinus-Relation.

2) At Relationen ogsaa gælder, naar Trekanten er stump-vinklet, ses saaledes:

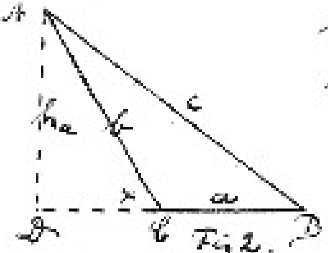


Fig 2.

$$h_a = b\sin x = b\sin(180 - C) = b\sin C$$
$$h_a = c\sin B.$$

Formlen lader sig da bevise som før.

2. cosinus Relationen

1) $\triangle ABC$ er spidsvinklet (se Fig 1).

Man har da
$$c^2 = h_a^2 + BD^2 = h_a^2 + (a - CD)^2$$
$$c^2 = b^2\sin^2 C + (a \div b\cos C)^2$$
$$c^2 = b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C$$
$$c^2 = b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + a^2 - 2ab\cos C.$$
$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.}$$

Denne Ligning kaldes cosinus-Relationen.

2) At Formlen ogsaa gælder for en stump vinklet Trekant, ses ved at betragte Fig. 2.

Derved faas: $c^2 = h_a^2 + BD^2 = h_a^2 + (a + CD)^2$

men $CD = b\cos x = b\cos(180 \div C) = \div b\cos C.$

Indsættes dette, faar man:
$$c^2 = b^2\sin^2 C + (a - b\cos C)^2,$$
der som før fører til Ligningen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, der altsaa ogsaa gælder, naar $\angle C$ er stump.

De analoge Formler
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ og}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
bevises paa samme Maade.

3. Tangensrelationen.

1) Ved Betragtning af Fig 1. faar man:

$$\operatorname{tg} C = \frac{h_a}{CD} = \frac{h_a}{a - DB} = \frac{c\sin B}{a - c\cos B}$$

Denne Formel kaldes Tangens-Relationen.

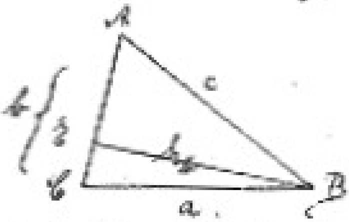
2) At den ogsaa gælder, naar $\angle C$ er stump, ses af Fig. 2.

$$\operatorname{tg}(180 \div C) = \frac{h_a}{CD} = \frac{h_a}{BD - a} = \frac{c\sin B}{c\cos B \div a}.$$

Men $\operatorname{tg}(180 - C) = \div \operatorname{tg} C$, og man faar derfor, som før

$$\operatorname{tg} C = \frac{c\sin B}{a \div c\cos B}.$$

Tangensrelationen har en dobbelt Form, idet man ved at nedfælde Höjden h_b vilde have faaet:



$$\operatorname{tg} C = \frac{h_b}{CE} = \frac{h_b}{b - AE} = \frac{c\sin A}{b - c\cos A}$$

Der findes to analoge Formler for $\operatorname{tg} A$ og to for $\operatorname{tg} B$. —

Opgave 1. I en Trekant er den ene Vinkel dobbelt saa stor som den anden. Find en Ligning mellem Trekantens Sider.

Opgave 2. Bevis Formlen

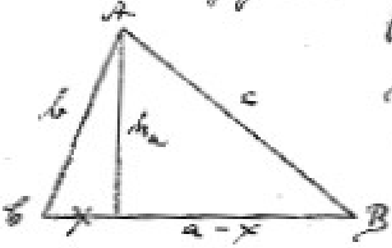
$$\frac{b - 2a\cos C}{a\sin C} + \frac{a - 2c\cos B}{c\sin B} + \frac{c - 2b\cos A}{b\sin A} = 0.$$

Opgave 3. De tre Sider i en Trekant er a, aq og aq^2. De overfor disse liggende Vinkler kaldes x, y og z. Bevis, at y umulig kan være $= 2x$.

Opgave 4. I $\triangle ABC$ er $a = 3$ cm, $c = \sqrt{7}$ cm og $\angle B = 63{,}26°$. Find Siden b.

Kapitel 35. Beregning af Trekantens Areal.

1. Vi vil finde et Udtryk for Trekantens Areal, naar de tre Sider er opgivet.



Ved Hjælp af Pythagoras' Sætning faar man:

$$b^2 = h_a^2 + x^2 \quad (1)$$

$$c^2 = h_a^2 + (a-x)^2$$

Subtraheres de to Ligninger, faar man: $b^2 - c^2 = -a^2 + 2ax$, hvoraf

$$x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

Dette indsættes i (1):

$$b^2 = h_a^2 + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right]^2, \text{ hvoraf}$$

$$h_a^2 = b^2 \div \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} \text{ eller}$$

$$h_a^2 = \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{[2ab+a^2+b^2-c^2][2ab-a^2-b^2+c^2]}{4a^2} = \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)\cdot(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$$

Sættes nu $a+b+c = 2s$, faar man:

$$h_a^2 = \frac{2s\cdot(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)}{4a^2} \text{ eller}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s\div c)}$$

Trekantens Areal er da $\underline{T = \frac{1}{2}h_a\cdot a = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$, der kaldes <u>Herons Trekantsformel</u>.

2. En anden Formel er følgende:

$\underline{T = \frac{1}{2}ab\sin C}$, der bevises saaledes:

$T = \frac{1}{2}h_a\cdot a = \frac{1}{2}\cdot b\sin C\cdot a = \frac{1}{2}ab\sin C$. At Formlen ogsaa

gælder for $\angle C$ stump, som paa sædvanlig Maade.
Der findes to analoge Formler, nemlig

$$T = \tfrac{1}{2} bc \sin A \quad \text{og} \quad T = \tfrac{1}{2} ac \sin B.$$

3. Ved Hjælp af sinus-Relationen faar man:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ hvoraf } \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Man faar da ved Indsættelse

$$\underline{T} = \tfrac{1}{2} ab \sin C = \underline{\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}}$$

Ved disse Formler bevises følgende Sætninger:

4. <u>Naar to Trekanter har en Vinkel ligestor, vil deres Arealer forholde sig som Produktet af de Vinklen indesluttende Sider.</u>

Lad $\triangle ABC$ og $\triangle A_1B_1C_1$ have $\angle C = \angle C_1$, da vil:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{\frac{1}{2} a_1 b_1 \sin C} = \frac{ab}{a_1 b_1}$$

5. <u>Naar to Trekanter er ensvinklede, vil deres Arealer forholde sig som Kvadratet paa et Par ensliggende Sider.</u>

Man har nemlig $\dfrac{T}{T_1} = \dfrac{\left(\dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}\right)}{\left(\dfrac{a_1^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}\right)} = \dfrac{a^2}{a_1^2}$.

<u>Opgave 1</u>. Beregn $\triangle ABC$'s Areal, naar $a = 9$ cm, $b = 7$ cm og $c = 6$ cm.

<u>Opgave 2</u>. Opgivet en Trekant og et Punkt P i den ene af Siderne. Man skal konstruere en Linie gennem P, der deler Trekanten i 2 Arealer, der forholder sig som 4 : 5.

<u>Opgave 3</u>. Opgivet en Trekant. Konstruer en Trekant, der
Sætningen gælder ogsaa, hvis $C_1 = 180 - C$.

har et dobbelt saa stort Areal og er ensvinklet med den opgivne Trekant.

__Opgave 4.__ $\triangle ABC$ er opgivet. Dens Areal $= 120\, m^2$.
A_1 er et Punkt paa BC beliggende saaledes, at $BA_1 = 2A_1C$.
B_1 - - - - - - - - CA - - - - - - - - - - - - $CB_1 = 3B_1A$
C_1 - - - - - - - - AB - - - - - - - - - - - - $AC_1 = C_1B$.
Find $\triangle A_1B_1C_1$'s Areal.

__Opgave 5.__ Opgivet $\triangle ABC$. Konstruer en Linie $\parallel BC$, som tillige halverer Trekantens Areal.

__Kapitel 36. Beregning af Trekantens Sider og Vinkler.__

__1. 1ste Trekants Tilfælde.__

__Opgivet Siderne a, b og c. Beregn Trekantens Vinkler.__

Man løser cosinus-Relationen med Hensyn til $\cos C$ og faar:
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$ Ved Hjælp af denne og de analoge kan Vinklerne beregnes.

Eks 1. $a = 6\,cm$, $b = 5\,cm$, $c = 8\,cm$.
Ved Indsættelse faar man $\cos C = \frac{\div 3}{60} = \div \frac{1}{20}$.
Man sætter da $\cos C_1 = \frac{1}{20}$. $\log \cos C_1 = 0 \div 1{,}3010 = 0{,}6990 \div 2$
eller $C_1 = 87{,}13$. Heraf følger: $\angle C = 92{,}87°$
Endvidere er $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{53}{80}$, hvoraf $\angle A = 48{,}50°$.
Endelig er $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{25}{32}$, hvoraf $\angle B = 38{,}64°$
Til Kontrol paa Regningernes Rigtighed tjener, at
$$\angle A + B + C = 180{,}01°.$$

Opgaven kan løses, selvom man kun kender Forholdet mellem Siderne. Indsættes nemlig Tallene pa, pb og pc i Stedet for a, b og c i de tre Formler, faar man de samme Værdier for de tre cosinus'er. Hermed er tillige bevist, at to Trekanter er ensvinklede, naar de har alle tre Sidepar proportionale.

Anm: Formlen $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ viser, at dersom

$c^2 < a^2+b^2$ vil $\angle C$ være spids, dersom

$c^2 = a^2+b^2$ - $\angle C = 90$ og dersom

$c^2 > a^2+b^2$ " $\angle C$ være stump og omvendt.

Opgave 1. I $\triangle ABC$ er $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ og $\frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{14}}$. Find Vinklerne.

Opgave 2. I $\triangle ABC$ er $h_a = \sqrt{5}$ $h_b = \sqrt{6}$ og $h_c = \sqrt{7}$. Find Vinklerne.

Dersom de opgivne Tal ikke er saa simple som i de anførte Eksempler, gör man bedst i at regne efter logaritmiske Formler.

Saaledes faar vi at erindre, at Trekantens Areal baade er $= \frac{1}{2} ab \sin C$ og $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Sættes disse to Udtryk ligestore, faar man Formlen

$$\sin C = \frac{2 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a \cdot b}$$ og de analoge.

Da Formlen giver to Værdier for C nemlig en spids Vinkel og en stump Vinkel, er det en Regel, at man altid först udregner Trekantens to mindste Vinkler d: de to Vinkler, der ligger overfor de to mindste Sider. Man vil da paa Kunne se, om Trekantens störste Vinkel er spids eller stump ved Hjælp af Formlen $A+B+C = 180$.

Eks $a = 3{,}261$ $b = 4{,}563$ $c = 4{,}222$.

Fölgende Opstilling vil vise sig praktisk:

$a = 3{,}261$	$\log a = 0{,}5133$	$\log s = 0{,}7798$
$b = 4{,}563$	$\log b = 0{,}6592$	$\log(s-a) = 0{,}4412$
$c = 4{,}222$	$\log c = 0{,}6255$	$\log(s-b) = 0{,}1643$
$2s = 12{,}046$		$\log(s-c) = 0{,}2555$
$s = 6{,}023$		$2 \log T = 1{,}6408$
$s-a = 2{,}762$		$\log T = 0{,}8204$
$s-b = 1{,}460$		$\log 2 = 0{,}3010$
$s-c = 1{,}801$		
$2s = 12{,}046$		$1{,}1214$

Heraf har man fundet $\log 2\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 1{,}1214$.
Man faar nu:

$$\begin{array}{lll} 1{,}1214 & 1{,}1214. & 1{,}1214 \\ \log(bc) = \underline{1{,}2847} & \log(ab) = \underline{1{,}1725} & \log(ac) = \underline{1{,}1388} \\ \log\sin A = 0{,}8367-1 & \log\sin C = 0{,}9489-1 & \log\sin B = 0{,}9826-1 \\ \underline{A = 43{,}36} & \underline{C = 62{,}745} & \underline{B = 73{,}90} \end{array}$$

Til Kontrol tjener, at $A+B+C = 180{,}005$.
Anm: Formlen $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ og de analoge indeslutter den Forudsætning, at Trekanten eksisterer. Hvis man derfor opgiver tre Linielængder a, b og c, maa man først undersøge, om disse 3 Linielængder kan være Sider i en Trekant. Man maa derfor forlange, at den største af dem skal være < de to andres Sum. Kun under denne Forudsætning lader ovenstaaende Formel sig benytte.

2. 2det Trekantstilfælde.

Opgivet $\angle C$, a og b.

Man finder $\angle A$ ved Hjælp af Tangens-Relationen.

$$\operatorname{tg} A = \frac{a\sin C}{b \div a\cos C}.$$

Derpaa findes ved Hjælp af Sinus-Relationen.

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A} \quad \text{og} \quad \sin B = \frac{b\sin C}{c}.$$

Eks: $\angle C = 72{,}36°$ $a = 43{,}25$ $b = 36{,}33$.

I $\angle A$??

$$\operatorname{tg} A = \frac{43{,}25\sin 72{,}36}{36{,}33 - 43{,}25\cos 72{,}36}$$

Man sætter $y = 43{,}25\cos 72{,}36$

$$\begin{array}{rl} \log 43{,}25 = & 1{,}6360 \\ \log\cos 72{,}36 = & \underline{0{,}4815-1} \\ \log y = & 1{,}1175 \\ & \underline{y = 13{,}11} \end{array}$$

Dette indsættes, og man faar

$$\operatorname{tg} A = \frac{43{,}25 \sin 72{,}36}{36{,}33 - 13{,}11} = \frac{43{,}25 \sin 72{,}36}{23{,}22}$$

$\log 43{,}25 = 1{,}6360$
$\log \sin 72{,}36 = 0{,}9790 - 1$
$1{,}6150$
$\log 23{,}22 = 1{,}3659$
$\log \operatorname{tg} A = 0{,}2491$ $\quad \sphericalangle A = 60{,}60$

2) c ??

$$c = \frac{43{,}25 \sin 72{,}36}{\sin 60{,}60}$$

$\log 43{,}25 = 1{,}6360$
$\log \sin 72{,}36 = 0{,}9790 - 1$
$1{,}6150$
$\log \sin 60{,}60 = 0{,}9401 - 1$
$\log c = 1{,}6749$ $\quad c = 47{,}30$

3) ∢B ??

$$\sin B = \frac{36{,}33 \sin 72{,}36}{47{,}30}$$

$\log 36{,}33 = 1{,}5603$
$\log \sin 72{,}36 = 0{,}9790 - 1$
$1{,}5393$
$\log 47{,}30 = 1{,}6749$
$\log \sin B = 0{,}8644 - 1$ $\quad \sphericalangle B = 47{,}04$

Til Kontrol tjener $A + B + C = 180°$.

Anm: Naar Tallene er gunstige simple, kan man med Fordel bruge Formlen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

3. 3die Trekantstilfælde

Opgivet ∢C c og a

De ubekendte Stykker findes ved Hjælp af sinus-Relationen. Man har $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$, hvoraf ∢A findes. Derpaa er $\sphericalangle B = 180 - (A + C)$, og endelig findes b af Ligningen $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$.

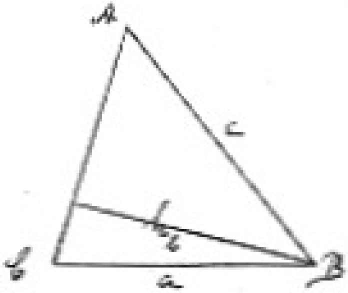
Vi vil diskutere Formlen $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ noget nöjere

1) C spids.

a) $c < a \sin C$ eller hvad der er det samme $c < h_c$.

Trekanten eksisterer ikke, hvad man kan se ved at forsøge at konstruere den. Formlen (1) giver i Overensstemmelse hermed $\sin A > 1$; A kan altsaa ikke bestemmes.

b) $c = a \sin C$ eller $c = h_c$. Ved Konstruktion ser man,



at man faar 1 Løsning, der er retvinklet ved A. I Overensstemmelse hermed giver (1)

$$\sin A = 1 \quad \supset: \quad A = 90°$$

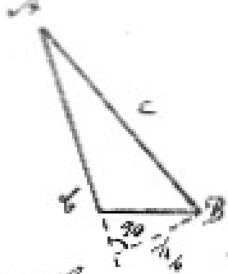
c) $a > c > a \sin C$ eller $a > c > h_c$. Ved Konstruktion faar man 2 Løsninger. Formel (1) giver da ogsaa to Værdier for A, nemlig en spids og en stump Vinkel (Supplementet til den første.).

d) $a = c$. Ved Konstruktion faar man en Løsning, der er ligebenet. Formel (1) giver $\sin A = \sin C$ eller $A = C$ og $A = 180 - C$. Den sidste maa dog forkastes, da den vil gøre Vinkelsummen i Trekanten ≥ 180.

e) $c > a$. Ved Konstruktion faar man 1 Løsning. (1) giver ogsaa i dette Tilfælde to Værdier for A, men af disse kan kun den spidse bruges; thi da $c > a$, vil $C > A$, og C er spids.

2) $\angle C$ stump.

Ved Konstruktion ser man, at man faar én Løsning, hvis $c > a$, ellers ingen.



Dette Resultat faar man ogsaa af (1); thi da C er stump, maa A være spids og $< 180 - C$. Da maa $\sin A < \sin(180 - C) = \sin C$, hvoraf atter følger $c > a$, som det ses af (1).

Eks 1. $\angle C = 27{,}24^\circ \quad a = 11{,}47 \quad c = 9{,}89$.

1) A?? $\sin A = \dfrac{a \sin C}{c} = \dfrac{11{,}47 \cdot \sin 27{,}24}{9{,}89}$

$$\begin{array}{rcl} \log 11{,}47 & = & 1{,}0595 \\ \log \sin 27{,}24 & = & 0{,}6606 - 1 \\ \hline & & 1{,}7201 - 1 \\ \log 9{,}89 & = & 0{,}9952 \\ \hline \log \sin A & = & 0{,}7249 - 1 \end{array} \qquad \angle A = \begin{cases} 32{,}06 \\ 147{,}94 \end{cases}$$

2) B?? Da $B = 180 - (A + C)$, faar man: $\angle B = \begin{cases} 120{,}70 \\ 4{,}82 \end{cases}$

Opgaven deler sig nu i to:

I $A = 32{,}06$. $B = 120{,}70$.

$b = \dfrac{a \sin B}{\sin A} = \dfrac{11{,}47 \cdot \sin 120{,}70}{\sin 32{,}06} \qquad b = \dfrac{c \sin B}{\sin C} = \dfrac{9{,}89 \sin 120{,}70}{\sin 27{,}24}$

eller $b = \dfrac{11{,}47 \sin 59{,}30}{\sin 32{,}06} \qquad b = \dfrac{9{,}89 \sin 59{,}30}{\sin 27{,}24}$

$$\begin{array}{rcl} \log 11{,}47 & = & 1{,}0595 \\ \log \sin 59{,}30 & = & 0{,}9344 - 1 \\ \hline & & 0{,}9939 \\ \log \sin 32{,}06 & = & 0{,}7249 - 1 \\ \hline \log b & = & 1{,}2690 \end{array} \xleftarrow{\text{Kontrol}} \begin{array}{rcl} \log 9{,}89 & = & 0{,}9952 \\ \log \sin 59{,}30 & = & 0{,}9344 - 1 \\ \hline & & 0{,}9296 \\ \log \sin 27{,}24 & = & 0{,}6606 - 1 \\ \hline \log b & & 1{,}2690 \end{array}$$

$\underline{b = 18{,}58}$

II $A = 147{,}94 \quad B = 4{,}82$

$b = \dfrac{11{,}47 \sin 4{,}82}{\sin 32{,}06} \qquad b = \dfrac{9{,}89 \cdot \sin 4{,}82}{\sin 27{,}24}$

$$\begin{array}{rcl} \log 11{,}47 & = & 1{,}0595 \\ \log \sin 4{,}82 & = & 0{,}9244 - 2 \\ \hline & & 0{,}9839 - 1 \\ \log \sin 32{,}06 & = & 0{,}7249 - 1 \\ \hline \log b & = & 0{,}2590 \end{array} \xleftarrow{\text{Kontrol}} \begin{array}{rcl} \log 9{,}89 & = & 0{,}9952 \\ \log \sin 4{,}82 & = & 0{,}9244 - 2 \\ \hline & & 0{,}9196 - 1 \\ \log \sin 27{,}24 & = & 0{,}6606 - 1 \\ \hline \log b & = & 0{,}2590 \end{array}$$

$\underline{b = 1{,}815}$

Facit er derefter:

A	32,06°	147,94°
B	120,70°	4,82°
b	18,58	1,815

Eks 2. $\sphericalangle C = 67{,}24°$, $a = 12{,}47$, $c = 9{,}36$.

Bevis, at Opgaven ingen Løsninger har.

Eks 3. $\sphericalangle C = 42{,}71°$, $a = 32{,}56$, $c = 45{,}97$.

4. 4de Trekantstilfælde

Opgivet en Side og to Vinkler.

Man benytter Sinus-Relationen.

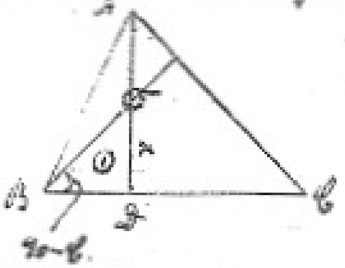
Eks 1. A, B og C er tre Punkter paa en vandret Slette. Man har maalt AB med Landmaalerkæde, og den viser sig at være 525 m lang. $\sphericalangle A = 63{,}45°$ og $\sphericalangle B = 79{,}14°$. Find AC og BC.

Eks 2. A, B og C er tre Punkter paa en vandret Slette. Fra Punktet D paa AB vil man ramme C ved indirekte Skydning over en Höj, der dækker Udsigten. Man maaler $AD = 215$ m, $DB = 130$ m $\sphericalangle A = 87{,}63°$ og $\sphericalangle B = 79{,}62°$. Find Længden af CD og Störrelsen af $\sphericalangle ADC$.

Kapitel 37. Beregning af Trekantens övrige Stykker.

1. Trekantens Höjder.

En Trekants tre Höjder skærer hinanden i et Punkt.



Lad h_a og h_c skære hinanden i O. Vi vil beregne $OD = x$.

Af $\triangle$ faaes: $x = BD \cdot tg(90 - C) = BD \cot C$.

Men af $\triangle ADC$ faaes:

$$\cot C = \frac{DC}{h_a},$$ hvoraf ved Indsættelse:

$$x = \frac{BD \cdot DC}{h_a}.$$

Lad nu h_c og h_a skære hinanden i O_1 og lad $O_1D = y$. Ved en Beregning, der er ganske den samme, som den, vi lige har forlænget, findes $y = \frac{BE \cdot BD}{h_a}$. Altsaa er $x = y$.

Beregning af h_a, naar Trekantens 3 Sider er opgivet.

Man har $T = \frac{1}{2} h_a \cdot a$ og $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Heraf følger: $\frac{1}{2} h_a \cdot a = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ eller

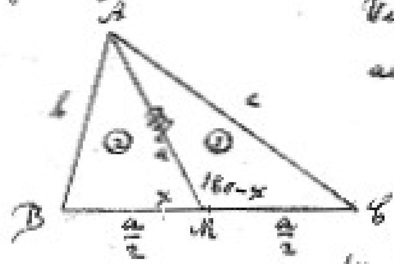
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

2. Trekantens Medianer.

Trekantens tre Medianer skærer hinanden i eet Punkt.

Beviset for Sætningen findes i I Side 42.

Beregning af m_a, naar a, b og c er opgivet.



Ved Hjælp af cosinus-Relationen, anvendt paa △ 1.

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot m_a \cos(180 - x)$$

eller, da $\cos(180 - x) = -\cos x$

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a\, m_a \cos x$$

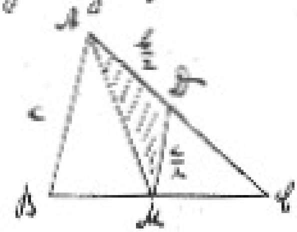
Af △ 2 faar paa samme Maade $b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} \div a\, m_a \cos x$

Adderes disse Ligninger, faar man:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}, \text{ hvoraf}$$

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Beregning af m_a, naar ∢A, b og c er opgivet.



Gennem M, som er BC's Midtpunkt, tegnes MD ∥ AB. I △AMD er

$AD = \frac{b}{2}$ ∢D = 180 − A og $MD = \frac{c}{2}$

Ved at anvende cosinus-Relationen paa denne Trekant faar man:

$$m_a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \div 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} \cos(180 - A) \text{ hvoraf:}$$

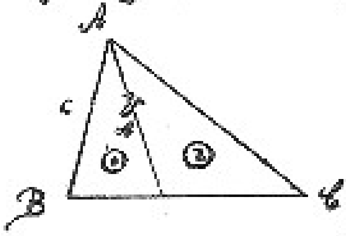
$$m_a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{bc}{2} \cos A$$

3. Trekantens Halveringslinier.

Trekantens Halveringslinier skærer hinanden i eet Punkt.

Lad nemlig v_A og v_B skære hinanden i O. O maa da lige langt fra Trekantens 3 Sider og følgelig lige langt fra a og b. Det maa da ogsaa ligge i v_C, der er geometrisk Sted for de Punkter, der har samme Afstand fra a og b, og som samtidig ligger indenfor Trekantens Omkreds.

Beregning af v_A, naar $\angle A$, b og c er opgivet.



Vi finder to Udtryk for $\triangle ABC$'s Areal.

1) $T = \frac{1}{2} bc \sin A$

2) $T = \triangle_1 + \triangle_2 = \frac{1}{2} c\, v_A \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} b \cdot v_A \sin\frac{A}{2}$

Heraf faaes:

$$\frac{1}{2} c\, v_A \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} b \cdot v_A \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

eller $$v_A = \frac{bc \sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\frac{A}{2}},$$ hvoraf

$$v_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

4. Den omskrevne Cirkels Radius.

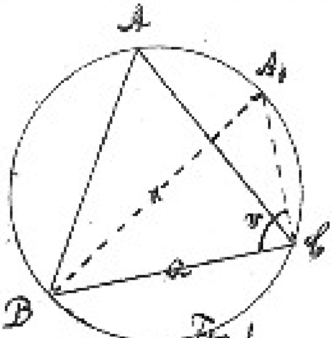


Fig 1

Fra B tegnes gennem Centrum en Linie, hvis andet Skæringspunkt med Cirklen kaldes A_1. Da nu $\angle v = 90°$ og $\angle A_1 = A$, faar man

$$\underline{a = 2R \sin A}$$

At denne Ligning ogsaa gælder, naar $\angle A$ er stump, ses af Figur 2.

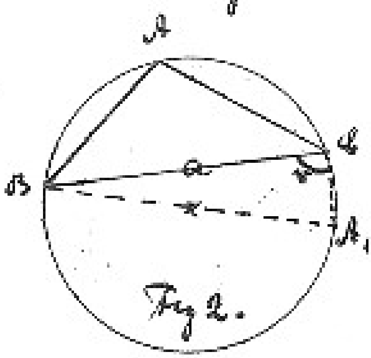


Fig 2.

BA_1 er ogsaa her tegnet gennem Centrum. Da $\angle v = 90°$ og $\angle A_1 = 180 - A$, faar man:

$$a = 2R\sin(180 - A) = 2R\sin A.$$

Der findes 2 analoge Formler, nemlig:

$$b = 2R\sin B \text{ og } c = 2R\sin C.$$

Nogle Arealformler, hvori R indgaar.

1) $4RT = abc$, hvor T er Trekantens Areal.

Bevis: $T = \frac{1}{2} ab \sin C$, men $c = 2R \sin C$, hvoraf $\sin C = \frac{c}{2R}$.

Indsættes dette, faar man:

$$T = \frac{abc}{4R}, \text{ hvoraf } 4RT = abc.$$

3) $T = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Bevis: $T = \frac{1}{2} ab \sin C$. Heri indsættes $a = 2R \sin A$ og $b = 2R \sin B$. Derved faas: $T = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Beregning af R, naar a, b og c er givet.

Man benytter Formlen:

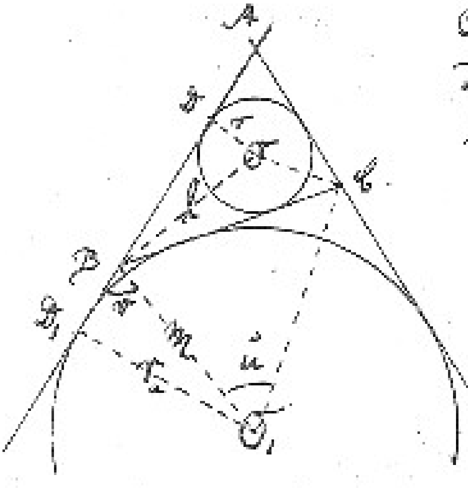
$$4RT = abc,$$ hvori man indsætter

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ Derved faas:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

5. Den indskrevne Cirkels Radius.

Beregning af r, naar a, B og C er givet.



Lad O være den indskrevne Cirkels Centrum og $OD \perp AB$. Af $\triangle ODB$ faas da:

$$r = l \sin \frac{B}{2} \quad (1)$$

l findes af $\triangle OBC$, hvor $\angle O = 180 - \frac{B+C}{2} = 180 - \frac{180 - A}{2} = 90 + \frac{A}{2}$.

Ved Hjælp af sinus Relation faar man:

$$\frac{l}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{a}{\sin(90 + \frac{A}{2})}$$

$$\frac{l}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}} \text{ hvoraf } l = \frac{a \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

Dette indsættes nu i (1), hvorved man faar:

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

En Arealformel, der indeholder r.

$T = rs$, hvor s er Trekantens halve Perimeter.

Bevis: $T = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \frac{1}{2} rc + \frac{1}{2} r \cdot a + \frac{1}{2} r \cdot b$

$$= r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s.$$

Beregning af r, naar a, b og c er opgivet.

$$T = rs \quad \text{men} \quad T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Heraf $\quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

6. De udvendige Røringscirklers Radier.

Beregning af r_a naar a, B og C er opgivet.

Lad O_1 være Centrum i den af Røringscirklerne, som rører a. Det er dennes Radius, vi har betegnet ved r_a. Lad Radien O_1D_1 være tegnet i AB's Forlængelse.

Af $\triangle O_1BD_1$ faas: $\quad r_a = m \sin v = m \sin(90 - \frac{B}{2}) = m \cos\frac{B}{2}$ (2)

m findes derpaa ved at anvende Sinus-Relationen paa $\triangle O_1BC$. Her er $\angle u = 180 - (90 - \frac{B}{2}) - (90 - \frac{C}{2}) = \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$. Man faar derfor:

$$\frac{m}{\sin(90 - \frac{C}{2})} = \frac{a}{\sin(90 - \frac{A}{2})} \quad \text{eller}$$

$$\frac{m}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}, \text{ hvoraf } m = \frac{a \cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

Indsættes dette i (2), faar man

$$r_a = \frac{a \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

Der findes analoge Formler for r_b og r_c.

En Arealformel, der indeholder r_a.

$T = r_a(s-a)$

Bevis: $\quad T = \triangle O_1AB + \triangle O_1AC \div \triangle O_1BC =$

$$\frac{1}{2} r_a \cdot c + \frac{1}{2} r_a \cdot b \div \frac{1}{2} r_a \cdot a =$$

$$r_a \cdot \frac{c+b-a}{2} = r_a(s-a).$$

Der er to analoge Formler, nemlig $T = r_b(s-b)$ og $T = r_c(s-c)$.

Beregning af r_a, naar a, b og c er opgivet.

Man har $T = r_a(s-a)$, men $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Heraf faas: $r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$.

Opgave 1. $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$. Find T, R, r, r_a, r_b og r_c

Opgave 2. $a = 5$, $b = 6$, $c = 9$. Find h_a, m_a og v_A.

Opgave 3. Bevis, at $T = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$