Matematik

for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium.

III.

af

Viggo Madsen,
cand. mag. Adjunkt.

1917.

Matematik.

for det matematisk - naturvidenskabelige Gymnasium.

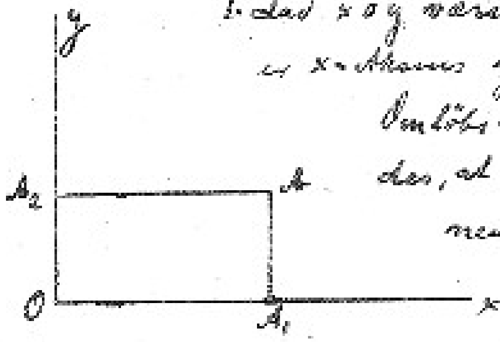
III.

af

Viggo Madsen.
cand. mag. Adjunkt.

1917.

Kapitel 1.

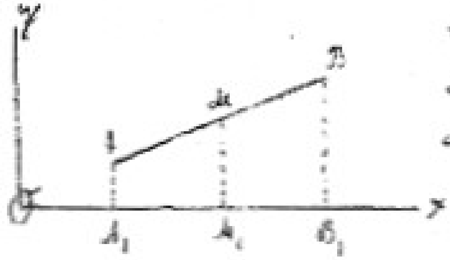


1. Lad x o y være et Koordinatsystem, hvor x og y er x-Axens og y-Axens positive Retninger. Omløbsretningen i Planen er valgt saaledes, at $\sphericalangle(xy) = 90°$. Til ethvert Punkt i Planen svarer der to Koordinater, der bestemmes saaledes: Lad A være et vilkaarligt Punkt i Planen og lad dets Projektioner paa x og y Axer være A_1 og A_2. Det Tal, der angiver OA_1's Længde maalt i cm kaldes A's x-Koordinat eller Abscisse, og det Tal, der angiver OA_2's Længde maalt i cm kaldes A's y Koordinat eller Ordinat. Koordinaterne er saaledes ubenævnte Tal, og naar Punktets Beliggenhed er opgivet er dermed dets Koordinater bestemt. Omvendt vil der til et opgivet Sæt Koordinater (a, b) svare ét og kun ét Punkt. Dette konstrueres saaledes: Vi afsætter $OA_1 = a$ cm ud ad x-Axen fra O og $OA_2 = b$ cm ud ad y-Axen opad fra O. Gennem A_1 tegnes derpaa en Linie $\parallel$ y-Axen og gennem A_2 en Linie $\parallel$ x-Axen. Disse to Linier skærer hinanden i et Punkt, som vi kan kalde A. A har da Koordinaterne a og b. Man ser heraf:

at til et opgivet Sæt Koordinater svarer der altid ét og kun et Punkt i Planen og omvendt.

At Punktet A har Koordinaterne a og b, betegnes i det efterfølgende: $A \equiv (a, b)$.

2. Lad der være opgivet to Punkter $A \equiv (x_1 y_1)$ og $B \equiv (x_2 y_2)$. Vi vil bestemme Koordinaterne til AB's Midtpunkt M.



Lad $M \equiv (\xi, \eta)$. Vi projicerer A, M og B paa x-Aksen i Punkterne A_1, M_1 og B_1 og har da:

$$A_1M_1 = M_1B_1 \text{ eller}$$

$$\xi - x_1 = x_2 - \xi \quad \therefore \quad \xi = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Paa lignende Maade faas $\eta = \frac{y_1+y_2}{2}$

Eks: $A \equiv (\div 3, 5)$ $B \equiv (4, -1)$. Man skal dels ved Konstruktion paa kvadreret Papir, dels ved Beregning finde Koordinaterne til AB's Midtpunkt.

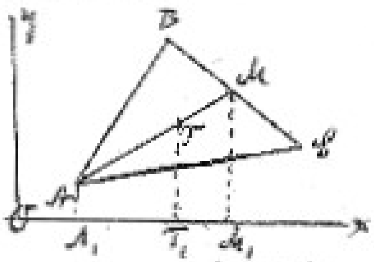
Opg. 1. $A \equiv (-2,-1)$ $B \equiv (6,5)$. Find Koordinaterne til det Punkt P, der er beliggende paa AB saaledes at $\frac{AP}{BP} = \div \frac{3}{5}$.
Opgaven løses dels ved Konstruktion, dels ved Beregning.

Opg. 2. $A \equiv (-3,0)$ $B \equiv (2, 2\frac{1}{2})$. Find Koordinaterne til de to Punkter D og D_1, som deler AB harmonisk i Forholdet $\frac{2}{3}$. (K + B)*)

Opg. 3. $A \equiv (\div 2, \div 7)$ $B \equiv (8, 7)$. Find Koordinaterne til de 4 Punkter, der deler AB i 5 ligestore Stykker. (K+B).

Opg. 4. $A \equiv (x_1, y_1)$ $B \equiv (x_2 y_2)$. Find Koordinaterne til de to Punkter D og D_1, som deler AB harmonisk i Forholdet $\frac{3}{2}$.

3. At finde Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt i $\triangle ABC$, hvor $A \equiv (x_1 y_1)$ $B \equiv (x_2 y_2)$ $C \equiv (x_3 y_3)$.



Midtpunktet af BC kaldes M. Ifl. 2 er $M \equiv \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$. Lad nu Medianernes Skæringspunkt være $T \equiv (\xi \eta)$. Man har da $\frac{AT}{TM} = 2$ eller ved Projektion paa x-Aksen $\frac{A_1T_1}{T_1M_1} = 2$ eller

$$\frac{\xi - x_1}{\frac{x_2+x_3}{2} \div \xi} = 2 \quad \therefore \quad \xi - x_1 = x_2 + x_3 - 2\xi \text{ eller}$$

*) (K+B) betyder, at Opgaven skal løses saavel ved Konstr. som ved Beregning.

$\xi = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$. Paa samme Maade faas $\eta = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

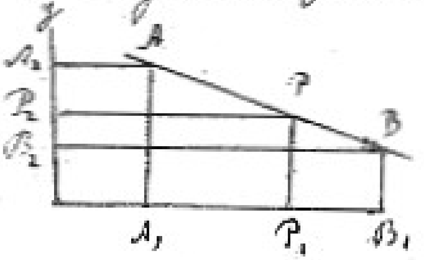
Eks: $A \equiv (-2,5)$ $B \equiv (-8,7)$ $C \equiv (10,-12)$. Find Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt. (A+B)

Kapitel 2. Den rette Linies Ligning.

1. Ved en ret Linies Ligning forstaar man en Ligning, der tilfredsstilles af Koordinaterne til ethvert Punkt paa den rette Linie, og som ikke tilfredsstilles af Koordinaterne til andre Punkter.

Lad en ret Linie l være bestemt, ved at den gaar gennem Punkterne $A \equiv (x_1 y_1)$ og $B \equiv (x_2 y_2)$. Lad $P \equiv (x\ y)$ være et vilkaarligt Punkt paa Linien. x og y kaldes da Liniens løbende Koordinater (egentlig Koordinater til et løbende Punkt paa Linien).

For Simpelheds Skyld vil vi i det følgende betegne Punktet A's Projektion paa x og y Akse ved A_1 og A_2.



Iflg. Sætningen: Parallele Linier afskære proportionale Stykker paa to Linier, faar man:

$$\frac{A_1P_1}{A_1B_1} = \frac{AP}{AB} = \frac{A_2P_2}{A_2B_2}, \text{ eller}$$

hvis man benytter første og sidste Forhold:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{eller} \quad y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \quad (1)$$

der altsaa er en Ligning, der tilfredsstilles af Koordinaterne til et vilkaarligt Punkt paa l.

At et vilkaarligt Punkt udenfor Linien har Koordinater, der ikke tilfredsstiller (1), ses saaledes:

Lad Q være et vilkaarligt Punkt udenfor l, og lad os fra Q nedfælde den vinkelrette paa x-Aksen. Dersom 4. den vinkelrette skærer l i A, kan man kalde A's Koordinater x og y. Man ved da, at

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$ Lad nu $Q \equiv (x, y_3)$.

Hvis Q's Koordinater tilfredsstiller (1), faar man:

$$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$ hvilket medfører

$y = y_3$, hvad der er umuligt. Q's Koordinater kan følgelig ikke tilfredsstille (1).

<u>Ligningen for en ret Linie gennem $A \equiv (x_1, y_1)$ og $B \equiv (x_2, y_2)$ er derfor:</u>

$$\underline{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Eks. 1. $A \equiv (2,3)$ $B \equiv (4,5)$. Find Ligningen for AB. Undersøg dernæst 1) ved Indsættelse af Koordinaterne i den fundne Ligning og 2) ved Indtegning paa kvadreret Papir om følgende Punkter ligger paa AB:

1) $P \equiv (-3,-2)$ 2) $Q \equiv (5,1)$ 3) $R \equiv (-2,-3)$

Eks. 2. $A \equiv (2,6)$ $B \equiv (5,3)$ $C \equiv (6,-1)$ og $D \equiv (2,7)$. Undersøg saavel ved Beregning som ved Tegning om CD's Midtpunkt ligger paa den rette Linie AB.

2: Lad l være den rette Linie AB's positive Retning. Man har da ifølge Definitionerne paa sinus og cosinus, at

$$\cos(xl) = \frac{A_1B_1}{AB} \quad \text{og} \quad \sin(xl) = \frac{A_2B_2}{AB},$$ hvoraf

2) $$\cos(xl) = \frac{x_2 - x_1}{AB} \quad \text{og} \quad \sin(xl) = \frac{y_2 - y_1}{AB}.$$ Divideres den sidste Ligning ind i den første, faar man:

$$\underline{\operatorname{tg}(xl) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$ Denne Størrelse kaldes for <u>Liniens Retningskoefficient</u>. Ved en ret Linies

Retningskoefficient forstaar man altsaa tangens til Vinklen fra x-Aksens positive Retning til Liniens positive Retning.

Retningskoefficienten til en ret Linie gennem $A \equiv (x_1, y_1)$ og $B \equiv (x_2, y_2)$ er $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ligningen for en ret Linie gennem Punktet $A \equiv (x_1, y_1)$, og som har Retningskoefficienten α, er

$$y - y_1 = \alpha (x - x_1) \qquad (3)$$

Af Ligningerne (2) faas ved Kvadrering og Addering:

$$\cos^2(xl) + \sin^2(xl) = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{AB^2} \text{ eller}$$

$$1 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{AB^2}, \text{ hvoraf:}$$

$$AB = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (4)$$

Heraf ses: Afstanden fra $A \equiv (x_1, y_1)$ til $B \equiv (x_2, y_2)$ er $= \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Eks 1. I $\triangle ABC$ er $A \equiv (1,2)$ $B \equiv (1,5)$ $C \equiv (6,1)$. Find ¹) Ligninger for Trekantens Sider ²) Sidernes Længder ³) Ligninger for de tre Medianer og ⁴) Koordinater til Medianernes Skæringspunkt.

Eks 2. $A \equiv (7,2)$ $B \equiv (-1,-3)$. Find ¹) Ligningen for AB, ²) AB's Retningskoefficient, ³) dens Vinkel med x-Aksen, ⁴) det Areal, som begrænses af x-Akse, y-Akse og Linien AB. og endelig ⁵) Koordinaterne til dette Areals Tyngdepunkt. Man skal tillige med Vinkelmaaler maale Vinklen mellem AB og x-Aksen og paavise Overensstemmelsen med det ved Beregning fundne Resultat.

3. Man kan nu finde følgende Formler:

2) Ligningen for en ret Linie, der har Retningskoefficienten α og afskærer Stykket q af y Aksen er

$$\underline{y = \alpha x + q} \qquad (5)$$

Formlen bevises ved i (3) at sætte $(x_1, y_1) = (0, q)$

3) Ligningen for en ret Linie gennem Begyndelsespunktet med Retningskoefficienten α er

$$\underline{y = \alpha x}$$

Formlen bevises ved at sætte $q = 0$ i Ligning (5).

3) Ligningen for en ret Linie, der afskærer Stykkerne p og q af x-Aksen og y-Aksen, er

$$\underline{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

Bevis: Vi sætter $A \equiv (p, 0)$ $B \equiv (0, q)$ og faar saa ved Indsættelse i (1) $\quad y - 0 = \frac{q-0}{0-p}(x - p)$ eller $y = -\frac{q}{p}(x - p)$.
Divideres nu med q, faar man

$$\frac{y}{q} = -\frac{x}{p} + 1 \quad ɔ: \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

4) Ligningen for en ret Linie $\parallel$ y Aksen i Afstanden k er $\underline{x = k}$. Dette ses af, at $x = k$ er geometrisk Sted for de Punkter, hvis Afstand fra y-Aksen er $= k$. Ligningen for selve y-Aksen ses paa samme Maade at være $\underline{x = 0}$. Paa samme Maade er Ligningen for en Linie $\parallel$ x Aksen i Afstanden k $\quad \underline{y = k}$ og Ligningen for x-Aksen $\quad \underline{y = 0}$.

Anm: Man maa ikke undre sig over, at vi ikke fandt disse 4 sidste Ligninger ved at indsætte i (1), thi den Metode vi benyttede, da vi udledte Formlen (1), forudsætter nemlig at den rette Linie ikke er $\parallel$ en af Akserne.

4. Vi kan vise, at Ligningen $ax+by=c$ altid er Ligning for en ret Linie, naar blot ikke a og b samtidig er $=0$.

1) $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$. Den opgivne Lign. kan skrives:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

, der viser, at $ax+by=c$ er Ligning for en ret Linie, der har Retningskoef. $-\frac{a}{b}$ og afskærer Stykket $\frac{c}{b}$ af y-Aksen.

Samtidig ser man, at man finder en ret Linies Retningskoef. ved at löse Ligningen m. H. t. y. Koefficienten til x er da = Liniens Retningskoeff.

2) $a=0$, $b \gtrless 0$. Ligningen reduceres til $by=c$ eller $y=\frac{c}{b}$, der er Ligning for en ret Linie $\parallel$ x-Aksen i Afstanden $\frac{c}{b}$.

3) $a \gtrless 0$, $b=0$. Ligningen reduceres til $ax=c$ eller $x=\frac{c}{a}$, der er Ligning for en ret Linie $\parallel$ y-Aksen i Afstanden $\frac{c}{a}$.

Eks: $5x-3y+7=0$ er Ligning for en ret Linie, der har Retningskoefficienten $\frac{5}{3}$.

Opg 1. Find de Stykker, som Linien $ax+by=c$ afskærer paa x og y Akse

Opg 2. Konstruer den Linie, hvis Ligning er $3x-2y=12$.

Kapitel 3. To rette Liniers Skæring.

1. Lad Ligningen for den rette Linie l være 1) $ax+by=c$
og for — — — — l_1 — — 2) $a_1x+b_1y=c_1$.

Ligning 1) vil være tilfredsstillet, naar x og y er Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa Linien l. Paa samme Maade vil 2) tilfredsstilles, naar x og y er Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa l_1. Forlanger man nu at x og y samtidig skal tilfredsstille begge de to Ligninger, kan dette kun ske, naar x og y er Koordinater til de to rette Liniers Skæringspunkter. En Undersögelse af Antallet af Skæringspunkter for de to rette Linier er derfor ensbetydende med en Undersögelse af Antallet af Rodsæt i de to sammenhörende Ligninger. En saadan er foretaget i II,26 og Resultaterne herfra kan uden videre overföres til den foreliggende Undersögelse.

1) De to Ligninger har ét og kun ét Rodsæt, naar $ab_1 \gtrless a_1b$

De to rette Linier har altsaa ét og kun ét Skæringspunkt, naar $ab_1 \gtrless a_1b$ eller hvad der er det samme, naar $\frac{a_1}{b_1} \gtrless \frac{a}{b}$ eller $\div \frac{a_1}{b_1} \gtrless - \frac{a}{b}$.

<u>De to rette Linier har derfor ét og kun ét Skæringspunkt, naar deres Retningskoefficienter er forskellige.</u>

2) De to Ligninger er identiske, hvis $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ og har da uendelig mange fælles Rodsæt.

De to rette Linier vil altsaa have uendelig mange Skæringspunkter, dersom $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, hvad der vil sige det samme som, at de to rette Linier falder sammen.

Disse Ligninger kan omskrives til $-\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1}$ og $-\frac{c}{b} = -\frac{c_1}{b_1}$, hvis geometriske Betydning er, at de to rette Linier 1) har samme Retningskoefficient og 2) afskærer ligestore Stykker paa y-Aksen.

3) Dersom $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \gtrless \frac{c}{c_1}$, er de to Ligninger i Strid med hinanden. De har da intet fælles Rodsæt, og fölgelig vil de to rette Linier ikke skære

hinanden. I dette Tilfælde er $-\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1}$, medens $-\frac{c}{b} \gtrless \frac{c_1}{b_1}$. De to rette Linier har altsaa samme Retningskoefficient, men afskærer forskellige Stykker paa y-Aksen. <u>De to rette Linier er følgelig parallele</u>.

Af det ovenfor udviklede vil vi fremhæve følgende Sætning: <u>Hvis to Ligninger af Formen $ax + by = c$ skal være Ligninger for samme rette Linie, maa Koefficienterne være proportionale</u>

<u>Opgave 1</u> Find Ligningen for en ret Linie gennem Punktet $(-4, 2)$ og $\parallel$ Linien $2x + 5y = 8$.

Den opgivne Linies Retningskoefficient faas ved at løse Ligningen m.H.t. y. Man faar da: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$.
Dens Retningskoeff. er altsaa $= -\frac{2}{5}$.
Den søgte Linie faar derfor Ligningen $y - 2 = -\frac{2}{5}(x + 4)$ eller $2x + 5y = 2$.

<u>Opgave 2</u> Bestem a og b saaledes at $3x - 5y = a + 2$ og $\frac{x}{a} + 2y = b$ bliver Ligning for den samme rette Linie.

<u>Opgave 3</u>. Opgivet to rette Linier

$3x + 2y = 16$ og $5x - 4y = 12$. Man skal saavel ved Beregning som ved Konstruktion finde Koordinaterne til deres Skæringspunkt.

<u>Opgave 4</u>. Givet $A \equiv (2,3)$, $B \equiv (5,3)$, $C \equiv (4,6)$ og $D \equiv (5,-1)$. Find Koordinaterne til Skæringspunktet mellem AB og CD. (F+B)

<u>Opgave 5</u>. Opgivet $A \equiv (1,-3)$, $B \equiv (5,2)$, $C \equiv (6,4)$ og $D \equiv (0,-6)$. Find Koordinaterne til Skæringspunkterne mellem 1) AC og BD 2) AB og CD og 3) AD og BC.

2. Betingelsen for at tre Punkter ligger paa samme rette Linie.

Lad $A \equiv (x_1\, y_1)$, $B \equiv (x_2\, y_2)$ og $C \equiv (x_3\, y_3)$.

Ligningen for den rette Linie, der gaar gennem A og B er

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Den nödvendige og tilstrækkelige Betingelse for at $(x_3\, y_3)$ ligger paa denne Linie er, at Ligningen tilfredsstilles, naar man sætter $x_3\, y_3$ i Stedet for $x\, y$.

Betingelsen for at de tre Punkter ligger paa ret Linie er derfor:

$$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1).$$

Eks: Undersög, om fölgende 3 Punkter ligger paa samme rette Linie: $A \equiv (3,5)$, $B \equiv (-1,-4)$, $C \equiv (2,2)$. (Ā+B)

2 Eks: Samme Opgave for Punkterne $A \equiv (-1,3)$, $B \equiv (-5,2)$ og $C \equiv (3,4)$ (Ā+B).

3. Tre rette Liniers Skæring.

Man kan nu stille sig den Opgave at undersöge, hvorvidt 3 rette Linier, hvis Ligninger er opgivne, gaar gennem samme Punkt eller ej. Man löser da de to Ligninger med Hensyn til x og y og har dermed fundet Koordinaterne til de to Liniers Skæringspunkt. Disse Værdier af x og y indsættes derpaa i den tredje Ligning, og hvis denne derved tilfredsstilles, gaar de tre Linier gennem samme Punkt.

Eks: $3x + 5y = 13$; $2x - 3y = -4$ og $5x - y = 3$.

Löses de to förste Ligninger m. H. t. x og y, faar man $x = 1$, $y = 2$. De to förste Linier har derfor Skæringspunktet (1,2). Ved Indsættelse viser dette sig at ligge paa den tredje Linie. De tre Linier gaar derfor igennem samme Punkt. (Eftervis Resultatets Rigtighed ved Tegning).

Opg 1. Samme Opgave for fölgende tre Linier:

$2x+7y=9$; $x+8y=9$ og $3x-4y=12$ (K+B).

Opg 2. Tre rette Linier har Ligningerne:

$$a \equiv x+4y-18=0 \qquad b \equiv x-3y+3=0 \quad \text{og}$$

$$c \equiv 4x-5y+12=0$$

Vis[1] at de tre Linier ikke skærer hinanden i ét Punkt. Find dernæst[2] Koordinaterne til Vinkelspidserne i den Trekant, de begrænse og endelig[3] Koordinaterne til Trekantens Tyngdepunkt: (K+B):

4. Vinklen mellem to rette Linier.

Lad den ene Linie have den positive Retning l og Ligningen $y=\alpha x+q$, medens den anden har den positive Retning l_1 og Ligningen $y=\alpha_1 x+q_1$.

Man har da $\angle(ll_1)=(lx)+(xl_1) = (xl_1)-(xl)$

$$\text{o: } tg(ll_1) = tg(xl_1 - xl) = \frac{tg(xl_1)-tg(xl)}{1+tg(xl)\,tg(xl_1)} \quad \text{hvoraf}$$

$$\underline{tg(ll_1) = \frac{\alpha_1-\alpha}{1+\alpha\alpha_1}}$$

Diskussion:

Hvis de to Linier er $\nparallel$, vil $tg(ll_1)=0$, hvoraf følger $\alpha=\alpha_1$ og omvendt.

<u>To rette Linier er altsaa $\parallel$, naar deres Retningskoefficienter er ligestore.</u>

Hvis Linierne er $\perp$ hinanden, vil $\angle ll_1 = 90°$, og $tg(ll_1)$ er da numerisk uendelig. Dette medfører at $1+\alpha\alpha_1=0$ eller at $\underline{\alpha_1 = -\frac{1}{\alpha}}$ og omvendt.

<u>To rette Linier er altsaa $\perp$ hinanden, naar Produktet af deres Retningskoefficienter er $= \div 1$.</u>

Opg 1. Find Ligningen for en ret Linie, der gaar gennem $(-2,5)$ og er $\perp$ Linien $11x+5y=8$.

Den opgivne Linies Retningskoef. $\alpha = -\frac{11}{5}$. Den søgte Linie faar derfor Retningskoefficienten $\frac{5}{11}$ og derfor Ligningen $y - 5 = \frac{5}{11}(x+2)$ eller

$$5x - 11y = -65.$$

Opg 2. Find Vinklen mellem de to rette Linier

$$2x + 3y = 6 \text{ og } 5x - 2y = 10.$$

Man skal først beregne Vinklen og derpaa maale dens Størrelse med Vinkelmaaler.

Opg 3. Find Ligningen for en ret Linie l_1, der gaar gennem $(3,-2)$ og danner en Vinkel med en given Linie l, saaledes at $v(ll_1) = 30°$.
l's Ligning er opgivet: $3x - 4y = 5$.
Man har

$$tg\,30 = \frac{\alpha_1 - \alpha}{1 + \alpha\alpha_1};$$ men her er $\alpha = \frac{3}{4}$. Indsættes dette faar man:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha_1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}\alpha_1},$$ hvoraf $\alpha_1 = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 3}$ eller, naar man gør Nævneren rational:

$$\alpha_1 = \frac{25\sqrt{3} + 48}{39}.$$ Den søgte Ligning er derfor:

$$y + 2 = \frac{25\sqrt{3} + 48}{39}(x - 3).$$

Opg 4. Tre rette Linier har Ligningerne:
$a: x + 4y - 18 = 0$; $b: x - 3y + 3 = 0$ og $c: 4x - 5y + 12 = 0$.
Find Vinklerne i den Trekant, de begrænser. (K+B.)

Opg 5.
1) Find Ligningen for en ret Linie l gennem $A = (2,-3)$ og $B = (-1,-4)$
2) dens Retningskoef. og dens Vinkel med x-Aksen
3) de Stykker, den afskærer af Akserne.
4) Længden af AB.
5) Koordinaterne til Skæringspunktet mellem l og en Linie l_1,

der afskære Stykkerne 2 og -3 af Akserne.

6) Vinklen mellem L og L_1

7) Ligningen for en Linie gennem $(-1,5)$ og $\parallel L$.

8) – – – – – – – – – $\perp L$.

9) – – – – – – – – – –, der med L danner en Vinkel, saaledes at $\angle(L L_2) = 45°$, idet L_2 er den søgte Linies positive Retning.

Opg 6.

Givet $A \equiv (2,3)$ $B \equiv (4,-1)$ og $C \equiv (-1,-2)$. Find

1) Ligninger for Trekantens Sider.

2) Sidernes Længder

3) Trekantens Vinkler, maalt i Grader.

4) Ligninger for Trekantens Medianer.

5) – – – – – – – – Højder

6) – – – – – – – – Midtnormaler

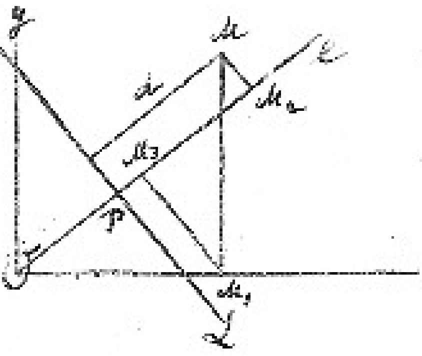
7) Koordinaterne til den omskrevne Cirkels Centrum.

Kapitel 4. Afstanden fra en ret Linie til et Punkt.

1. Den rette Linies Ligning paa Normalform.

Afstanden fra en given ret Linie L til et Punkt M kan regnes med Fortegn, naar man vedtager at regne alle den rette Linies Normaler positive til samme Side. Lad os betegne Afstanden fra L til $M \equiv (x_1, y_1)$ ved d. Lad M's Projektion paa x Aksen være M_1: Vi tegner nu gennem Begyndelsespunktet en Linie $l \perp L$ og lader l betegne dens positive Retning. M_2 er M's Projektion paa l, og M_3 er M_1's Projektion paa l.

Man har da: $d = PM_2 = PO + OM_3 + M_3M_2$



Man sætter nu $PO = p$ og faar da

$$d = p + OM_1 \cos(xl) + M_1M \cos(ly)$$

Sættes nu $xl = \alpha$ faar man:

$$ly = lx + xy = -xl + xy = -\alpha + 90.$$

Indsættes dette, faar man:

$$d = p + x_1 \cos\alpha + y_1 \cos(90-\alpha) \text{ eller}$$

$$d = p + x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha.$$

Hvis (xy) er Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa L, ser man, at $0 = p + x\cos\alpha + y\sin\alpha$ er Ligning for Linien L, da enhver ret Linie er geometrisk Sted for de Punkter, hvis Afstand fra Linien er $= 0$.

Heraf ser man, at naar $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$ er Ligning for en ret Linie, hvor α og p har samme Betydning som ovenfor, findes Afstanden fra Linien til Punktet $(x_1 y_1)$ ved at indsætte dette Punkts Koordinater i Stedet for x og y i Ligningens venstre Side. Man faar nemlig da følgende Udtryk for den søgte Afstand: $d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha + p$.

Eks: $p = \div 3$, $\alpha = 30$. Konstruer L, find dens Ligning og find Afstanden fra L til $(5,6)$.

Løsning: Ligningen for L bliver $x\cos 30 + y\sin 30 - 3 = 0$ eller $\frac{x\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} - 3 = 0$. Afstanden er følgelig:

$$d = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} - 3 = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Afsættes L og $(5,6)$ paa kvadreret Papir, kan man ved Maaling overbevise sig om Resultatets Rigtighed.

2. Naar en ret Linies Ligning er bragt paa Formen $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$, siger man, at Ligningen er bragt paa <u>Normalform</u>. Dersom L foreligger tegnet, kan man ved at maale Størrelsen af α og p faa to Nor-

malformsligninger, nemlig: $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$ og $x\cos(180+\alpha) + y\sin(180+\alpha) - p = 0$, eftersom l regnes positiv i den ene eller den anden Retning.
Den sidste Ligning viser sig at være dannet af den første ved Multiplication med ÷1. Enhver ret Linie har saaledes to Normalformsligninger, og da man finder Afstanden fra L til M ved at indsætte M's Koordinater i en af Ligningerne, faar man forskellígt Fortegn for Afstanden, eftersom man indsætter i den ene eller den anden af de to Ligninger.
Man maa derfor ved Opgavens Begyndelse fastslaa, hvilken af de to Normalformsligninger man vil benytte ved Afstandsbestemmelsen. Derved bliver α bestemt og dermed l's positive Retning. Afstanden fra L til de Punkter, der ligger paa samme Side af L som M, faar alle samme Fortegn; om dette bliver positivt eller negativt, kan afgøres, naar l's positive Retning er fastslaaet. Den givne Linie L faar saaledes en positiv og en negativ Side; paa den positive Side ligger alle de Punkter, til hvilke Afstanden er positiv. — I Stedet for at opgive l's positive Retning plejer man ved Opgavens Begyndelse at fastslaa, at et eller andet Punkt (f. Eks. 0,0) skal have positiv Afstand fra L. Derved bestemmes, hvad der er for en af Normalformsligningerne, som skal bruges ved Afstandsbestemmelsen.
Eks: Find Afstanden fra L, hvis Normalformsligning er $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$ til Punktet M, naar

$\alpha =$	150°	45°	330°	240°
$p =$	2	$\div 3$	-1	4
$P =$	$(1,5)$	$(-2,1)$	$(5,-4)$	$(-1,0)$

Naar Beregningen er foretaget, skal man i alle 4 Tilfælde indtegne L og M paa kvadreret Papir. Derpaa maales Afstanden fra L til M, og Resultaterne sammenlignes med de beregnede Værdier.

3. Lad $ax + by + c = 0$ være Ligningen for en given ret Linie, og lad os stille os den Opgave, at bringe den paa Normalform ɔ: paa Formen $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$. Vi skal da bestemme de ubekendte Størrelser $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ og p, udtrykt ved a, b og c.

Hvis de to Ligninger skal fremstille samme rette Linie, maa Koefficienterne være proportionale. Man maa altsaa have $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{c}$. Heraf faas:

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{a^2+b^2} = \frac{1}{a^2+b^2}$$ hvoraf altsaa

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$ De andre Forhold maa følgelig ogsaa være $= \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; man faar derfor

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\quad \sin\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{ og }\ p = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Indsættes dette i $x\cos\alpha + y\sin\alpha + p = 0$, faar man

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

<u>Den rette Linies Ligning $ax + by + c = 0$ bringes altsaa paa Normalform ved at dividere med $\pm\sqrt{a^2+b^2}$.</u>

<u>Eks:</u> $4x - 3y = 12$ bringes paa Normalform. Man vælger derpaa til Afstandsbestemmelse den af de to Nor-

malformsligninger, der giver positiv Afstand til
Begyndelsespunktet og bestemme derpaa Afstanden til Punkterne $A \equiv (2,1)$, $B \equiv (1,2)$ og $C \equiv (3,0)$. Naar Beregningen er foretaget, skal man ved Tegning og Maaling eftervise Resultaternes Rigtighed.

Opgave. Opgivet $A \equiv (2,3)$ $B \equiv (4,-1)$ og $C \equiv (-1,-2)$. Find Trekantens Areal.

Man har $T = \frac{1}{2} h_c \cdot c$

Nu er imidlertid $c = \pm\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$.

h_c findes ved at bringe Ligningen for c paa Normalform og derpaa i Stedet for x og y at indsætte C's Koordinater.

Ligningen for c er $y-3 = \frac{-1-3}{4-2}(x-2)$ eller

$$2x+y \div 7 = 0$$

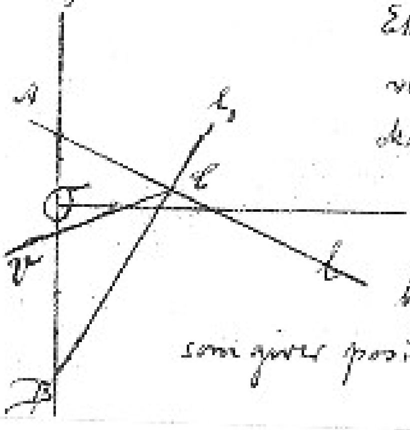
Paa Normalform bliver Ligningen $\frac{2x+y-7}{\pm\sqrt{5}} = 0$.

Man faar da $h_c = \frac{\div 12}{\pm\sqrt{5}}$, eller da vi altid regner Arealet numerisk

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} = 12.$$

Kapitel 5. Anvendelser og Opgaver.

1. Ligninger for de Linier, der halverer Vinklen mellem to opgivne Linier.



Ex: Lad Ligningen for de opgivne Ligninger være $l \equiv x+2y-3=0$ og $l_1 \equiv -2x+y+4=0$. Man kan da begynde med at konstruere de to opgivne Linier, bringer derpaa deres Ligninger paa Normalform og benytter for dem begge den Normalform, som giver positiv Afstand til Begyndelsespunktet O.

Man faar da $l: \frac{x+2y-3}{+\sqrt{5}}=0$ og $l_1: \frac{-2x+y+4}{\sqrt{5}}=0$.

Vi vil først finde Ligningen for den Halveringslinie, der gaar gennem den Vinkel, indenfor hvilken Begyndelsespunktet er beliggende. Paa Tegningen er denne Halveringslinie betegnet ved V. Denne Linie er geometrisk Sted for de Punkter, hvis Afstande fra l og l_1 er ligestore. Dersom nu x og y er Koordinater til et vilkaarligt Punkt paa V, vil dette Punkts Afstand fra l være $=\frac{x+2y-3}{-\sqrt{5}}$ og fra l_1 være $\frac{-2x+y+4}{\sqrt{5}}$. Ligningen for V er derfor

$$\frac{x+2y-3}{-\sqrt{5}}=\frac{-2x+y+4}{\sqrt{5}} \quad \text{eller}$$

$$x+2y-3=2x-y-4 \quad \text{eller}$$

$$\underline{x-3y-1=0}$$

Man maa lægge Mærke til, at Punkterne paa den Del af Linien V, der løber udenfor $\angle ACB$ har positiv Afstand fra baade l og l_1, medens de Punkter af V, der ligger i $\angle ACB$'s Topvinkel har negativ Afstand fra begge Linierne.

Den Halveringslinie, som halverer $\angle ACB$'s Nabovinkel har derimod Ligningen $\frac{x+2y-3}{\div\sqrt{5}}=\div\frac{-2x+y+4}{\sqrt{5}}$, thi dens Punkter har Afstande fra l og l_1, som er numerisk ligestore, men har modsat Fortegn.

Ved Reduktion faar man Ligningen $x+2y-3=-2x+y+4$ eller $3x+y-7=0$

Lad nu i Almindelighed $u=0$ og $v=0$ være Ligninger for de rette Linier l og l_1 og lad dem begge være bragt paa Normalform, saaledes at Afstandene fra begge Linier regnes positive til Begyndelsespunktet. Liniernes Skæringspunkt kaldes C, og lad ACB være den Vinkel, hvori

Begyndelsespunktet ligger. Vi kalder den Halveringslinie, som gaar gennem $\angle ABC$ for V. Afstanden fra 1 til et vilkaarligt Punkt i V er da $= u$, hvori x og y betyder Koordinaterne til dette Punkt. Ligningen for V bliver da:

$$u = v$$

, medens Ligningen for den Halveringslinie, der halverer $\angle ABC$'s Nabovinkel er

$$u = -v.$$

2. Vi vil give et analytisk Bevis for Sætningen:
<u>En Trekants tre Halveringslinier skærer hinanden i eet Punkt.</u>

Lad $u=0$, $v=0$ og $z=0$ være Ligninger for Trekantens tre Sider, og lad Ligningerne være paa Normalformen, saaledes at alle tre Sider faar positiv Afstand til Trekantens modstaaende Vinkelspids.
De tre Halveringslinier har da Ligningerne:

$$u=v, \quad v=z \quad \text{og} \quad z=u.$$

Skæringspunktet mellem de to første kaldes P. Da dettes Koordinater indsat i Ligningerne gør $u=v$ og $v=z$, maa derved ogsaa Ligningen $u=z$ blive tilfredsstillet. P ligger derfor ogsaa paa den tredje Halveringslinie.

3. <u>Opgave:</u> $A\equiv(-\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$, $B\equiv(-\frac{1}{11}, \frac{13}{11})$ og $C\equiv(\frac{1}{4}, 2)$. Find Koordinaterne til $\triangle ABC$'s indskrevne Cirkel.

Ligningen for AB bliver $\quad 3x-4y+5=0$
– – – – BC – – $\quad 12x-5y+7=0$
– – – – AC – – $\quad 4x-3y+5=0.$

Vi vil i det følgende – og det gør man hyppig, naar man har med Trekanter at gøre – benytte den Normalform-

Ligning for enhver Trekantsside, som medfører, at dens Afstand til den modstaaende Vinkelspids er positiv. De benyttede Normalformsligninger bliver da:

$$AB: \frac{3x-4y+5}{\div 5} = 0\ ;\quad BC: \frac{12x-5y+7}{-13} = 0 \text{ og } AC: \frac{4x-3y+5}{5} = 0.$$

Ligningen for V_A er da: $\dfrac{3x-4y+5}{-5} = \dfrac{4x-3y+5}{5}$ eller

$$\underline{7x-7y+10=0}$$

Ligningen for V_C er $\dfrac{12x-5y+7}{-13} = \dfrac{4x-3y+5}{5}$ eller

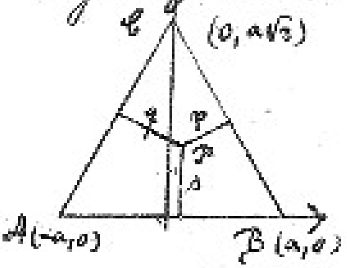
$$\underline{28x-16y+25=0}$$

Løses de to Ligninger m. H. t. x og y, faar man

$$x = \div\frac{5}{28};\ y = 1\tfrac{1}{4}.$$

Den indskrevne Cirkels Centrum er derfor $\equiv (\div\frac{5}{28}, 1\frac{1}{4})$

4. <u>Opgave</u>. Bevis, at ethvert Punkt P i Planen har Afstande fra en ligesidet Trekants Sider, som har en konstant Sum, naar Afstandene fra Siderne overalt regnes positiv ind mod Trekanten.



Lad Trekantens Side være = 2a. Vi lægger x-Aksen gennem en af Siderne og y-Aksen gennem Højden til denne Side. A vil da faa Koordinaterne $(-a,0)$, medens $B \equiv (a,0)$ og $C \equiv (0, a\sqrt{3})$. Linien BC afskærer Stykkerne a og $a\sqrt{3}$ af Akserne og faar derfor Ligningen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a\sqrt{3}} = 1 \quad \text{eller} \quad x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0.$$

Bringes denne Ligning paa Normalform, faar man:

$$\frac{x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}}{-2} = 0,$$ idet vi bringer den Normalform, der giver positiv Retning mod A. Lad nu $P \equiv (x,y)$, man faar da $\underline{p = \dfrac{x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}}{-2}}$.

Ligningen for AC bliver paa lignende Maade:

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{a\sqrt{3}}=1 \quad \text{eller} \quad -x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}=0$$

Paa Normalform $\frac{-x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}}{-2}=0$, idet Afstanden regnes positiv mod B. Heraf følger

$$q=\frac{-x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}}{-2}.$$

Desuden er $s=y$.

Man har nu $p+q+s=\frac{x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}}{-2}+\frac{-x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}}{-2}+y$

$=a\sqrt{3}$, hvilket er konstant og lig med Trekantens Höjde. Dermed er Opgaven löst.

Opgaven kan forövrigt ogsaa bevises geometrisk, idet man tegner Linierne PA, PB og PC. Trekanten bliver derved sammensat af 3 Trekanter, hvis Arealer har Summen $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot p+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot q+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot s = a(p+q+s)$. Imidlertid er den opgivne Trekants Areal ogsaa $=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$. Heraf faas: $a(p+q+s)=a^2\sqrt{3}$ eller

$$p+q+s=a\sqrt{3}.$$

Fordelen ved den analytiske Lösning er den, at den gælder for ethvert Punkt i Planen, medens det geometriske Bevis forudsætter, at Punktet P ligger indenfor Trekantens Perimeter.

Opgave: $A\equiv(2,3)$; $B\equiv(4,-1)$; $C\equiv(-1,-2)$. Find Ligningerne for △ ABC's Halveringslinier.

Kapitel 6. Ligninger af höjere Grad, der fremstiller rette Linier.

For at undersöge om en Ligning, der er af höjere end förste Grad i x og y, skulde fremstille flere rette Linier, skriver man Ligningen saaledes, at dens höjre Side er 0. Dersom man da kan oplöse venstre Side i Faktorer, der alle er af 1ste Grad i x og y, vil den opgivne Ligning fremstille en Samling af rette Linier.

Eks: $(3x-y)(5x+2y-7)\cdot(x-3)\cdot y=0$ er Ligning for 4 rette Linier. Ligningen er nemlig tilfredsstillet af alle Punkter, der ligger paa en af de 4 Linier og ikke af noget andet Punkt, da et Produkt kun kan blive Nul, naar en af Faktorerne er Nul.

Opgave 1. Bestem k saaledes, at

$$4y^2-3x^2+4xy+12x-9+3k=0$$ fremstiller to rette Linier.

Vi løser m. H. t. y:

$$y^2+xy-\frac{3x^2-12x+9-3k}{4}=0$$

$$y=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{4x^2-12x+9-3k}{4}}=\frac{-x\pm\sqrt{(2x-3)^2-3k}}{2}$$

For at Kvadratroden skal kunne uddrages, naar x er et vilkaarligt Tal, maa $k=0$

Vi faar da $y=\frac{-x\pm(2x-3)}{2}=\begin{cases}\frac{x-3}{2}\\ \frac{-3x+3}{2}\end{cases}$

Naar $k=0$, kan den opgivne Ligning skrives:

$$4\left(y\div\frac{x-3}{2}\right)\left(y-\frac{-3x+3}{2}\right)=0$$ eller

$$(2y-x+3)(2y+3x-3)=0.$$

Den fremstiller derfor to rette Linier, som har Ligningen

$$2y-x+3=0 \quad \text{og} \quad 2y+3x-3=0$$

Opg 2. Vis, at $y^2+3xy+2x^2=0$ fremstiller to rette Linier. Find deres Ligninger og beregn Vinklen imellem dem, maalt i Grader.

Opg 3. Tegn den Kurve, som har Ligningen

$$y^3-3x^2y+4xy^2\div12x^3=0.$$

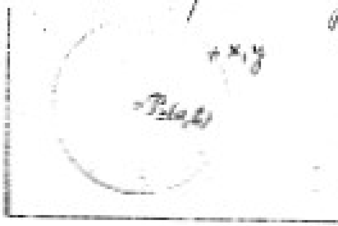
Opg 4. Samme Opg, naar Ligningen er: $y^4-5x^2y^2-36x^4=0$.

Kapitel 7. Cirklen.

1. Ved en Kurveslegning forstaar man en Ligning mellem x og y, som tilfredsstilles af Koordinaterne til ethvert Punkt paa Kurven og ikke af Koordinaterne til noget andet Punkt.

Da enhver Ligning, der er af 1^{ste} Grad i x og y, kan bringes paa Formen $ax+by=c$, har vi bevist, at enhver Ligning, der er af første Grad i x og y, er Ligning for en ret Linie.

Vi vil nu finde Ligningen for en Cirkel.



Lad en Cirkel med Radius r have sit Centrum i Punktet $P\equiv(a,b)$. Lad desuden et vilkaarligt Punkt paa Cirklen have Koordinaterne x og y. Man har da:

(1) $$r=\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \text{ eller}$$

(2) $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Dette er derfor en Ligning, der tilfredsstilles af et vilkaarligt Punkt paa Cirklen. Tillige indses det, at et Punkt udenfor eller indenfor Cirklen ikke kan tilfredsstille (1) og derfor holder ikke (2), da dets Afstand fra P er $\gtrless r$.

Ligningen for en Cirkel med Centrum i (a,b) og Radius r er altsaa $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Eks 1. Ligningen for en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius r er $x^2+y^2=r^2$.

Eks 2. Ligningen for en Cirkel med Radius r, med Centrum i x-Aksen og rørende y-Aksen er $(x\mp r)^2+y^2=r^2$ eller $x^2+y^2\mp 2rx=0$. Opgaven har to Løsninger, idet $x^2+y^2-2rx=0$ har sit Centrum i x-Aksens positive Del, $x^2+y^2+2rx=0$ derimod i dens negative Del.

2. Ligning 3) kan skrives:

$$x^2+y^2-2ax-2by = r^2-a^2-b^2.$$

Man ser heraf, at enhver opgiven Cirkel har en Ligning af Formen $x^2+y^2-2ax-2by-c=0$.

Omvendt vil enhver Ligning, der har Formen

$$x^2+y^2-2ax-2by-c=0$$

være Ligning for en Cirkel under Forudsætning af, at $a^2+b^2+c>0$. Ligningen kan nemlig omskrives til:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+c,$$

der under den givne Forudsætning fremstiller en Cirkel med Centrum i (a,b) og Radius $=\sqrt{a^2+b^2+c}$.

Hvis $a^2+b^2+c<0$, vil den givne Ligning ikke tilfredsstilles af noget Punkt i Planen, thi $(x-a)^2+(y-b)^2$ er altid positiv og kan følgelig umuligt være = det negative Tal a^2+b^2+c.

Hvis $a^2+b^2+c=0$, vil den givne Ligning kun være tilfredsstillet af Punktet (a,b); $(x-a)^2+(y-b)^2$ kan nemlig ikke være Nul, uden at baade $(x-a)^2$ og $(y-b)^2$ er det. — Heraf ses:

Enhver Ligning, der er af 2den Grad i x og y, hvor x^2 og y^2 har samme Koefficient, og hvor Leddet xy mangler, er Ligning for en Cirkel, hvis den overhovedet fremstiller en Kurve. Desuden har enhver Cirkel en Ligning af denne Form.

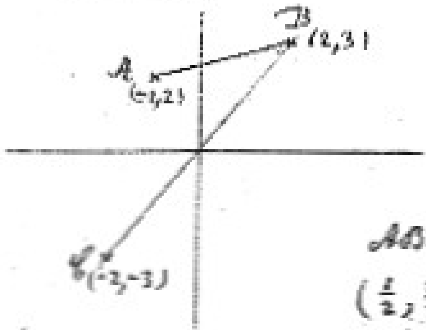
Eks. 1. $3x^2+2x+3y^2-5y=0$ er Ligning for en Cirkel. Dens Centrum og Radius findes ved at omskrive Ligningen til $x^2+\frac{2}{3}x+y^2-\frac{5}{3}y=0$, og derefter til

$(x+\frac{1}{3})^2+(y-\frac{5}{6})^2=\frac{1}{9}+\frac{25}{36}=\frac{29}{36}$. Man ser da, at Cirklen har Centret $\equiv (-\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ og Radius $\frac{\sqrt{29}}{6}$.

Opgave. Find Ligningen for en Cirkel, som gaar gennem $(-1,-1)$ og har sit Centrum i $(2,3)$.

3. At finde Ligningen for en Cirkel gennem Punkterne $A \equiv (-1, 2)$ $B \equiv (2,3)$ og $C \equiv (-2,-3)$.

Methode:



Da BC har Midtpunktet (0,0) og Retningskoefficienten $\frac{3}{2}$, vil Ligningen for BC's Midtnormal være $y = -\frac{2}{3}x$. (1)

AB's Midtpunkt har Koordinaterne $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ og AB's Retningskoeff $= \frac{1}{3}$.

Ligningen for AB's Midtnormal er derfor:

$$y - \frac{5}{2} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad (2)$$

Søger man derpaa Skæring mellem (1) og (2), faar man

$$-\frac{2}{3}x - \frac{5}{2} = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{eller}$$

$$\div 4x \div 15 = -18x + 9, \text{ hvoraf } \underline{x = 1\tfrac{5}{7}}.$$

Indsættes dette i (1), faar man $\underline{y = -1\tfrac{1}{7}}$.

Centrum for den søgte Cirkel har derfor Koordinaterne $(1\frac{5}{7}, -1\frac{1}{7})$. Radius findes ved Hjælp af Formlen $AB = \pm\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$, efter hvilken man kan finde Afstanden fra A til Centrum. Man faar:

$$r = \pm\sqrt{\left(2\tfrac{5}{7}\right)^2 + \left(-3\tfrac{1}{7}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{845}}{7}$$

Ligningen for den søgte Cirkel er derfor:

$$\left(x - 1\tfrac{5}{7}\right)^2 + \left(y + 1\tfrac{1}{7}\right)^2 = \frac{845}{49} \quad \text{eller}$$

$$x^2 \div \frac{24}{7}x + y^2 + \frac{16}{7}y = 13 \quad \text{eller}$$

$$\underline{7x^2 + 7y^2 \div 24x + 16y = 91.}$$

2^den Metode. Lad Ligningen for den søgte Cirkel være

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Vi vil bestemme a, b og c, saaledes at A, B og C ligger paa Cirklen.

Da A ligger paa Cirklen, maa Ligningen tilfredsstilles, naar man indsætter A's Koordinater i Stedet for x og y. Derved faar man: $1+4-a+2b+c=0$. Da B skal ligge paa Cirklen, faar man: $4+9+2a+3b+c=0$, og da det samme gælder om C, faar man: $4+9-2a-3b+c=0$.

Vi har da til Bestemmelse af a, b og c følgende 3 Ligninger

1) $a-2b-c=5$

2) $2a+3b+c=-13$

3) $2a+3b-c=13$

Subtraheres 3) fra 2), faar man $2c=-26$ eller $c=-13$

Indsættes dette i 1) og 2), faar man:

$$a-2b=\div 8$$

$$2a+3b=0$$ hvoraf $a=\div\frac{24}{7}$; $b=\frac{16}{7}$

Ligningen for den søgte Cirkel er da:

$$x^2+y^2\div\frac{24}{7}x+\frac{16}{7}y-13=0$$, eller

$$7x^2+7y^2-24x+16y=91$$

Kapitel 8. Geometriske Steder.

1. Et geometrisk Sted er een eller flere, rette eller krumme Linier, der indeholder alle de Punkter og kun de Punkter, der opfylder den givne Betingelse.

Ved Ligningen for et geometrisk Sted forstaar man en Ligning mellem x og y, der tilfredsstilles af alle Stedets Punkter og ikke af andre.

Fra Mellemskolen kender de 5 principale geometriske Steder, og vi beviste dem der ad ren geometrisk Vej. I det følgende vil vi behandle Sætninger om geometriske Steder analytisk geometrisk.

2. Det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstand fra to opgivne Linier staar i det givne Forhold k, er to Linier gennem de givne Liniers Skæringspunkt.

Man vælger Skæringspunktet til Begyndelsespunkt og den ene af Linierne til x-Akse.

De opgivne Linier har Ligningerne $x = 0$ og $y = ax$, hvor a er opgivet. Lad et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted have Koordinaterne (x, y). Dets Afstand fra de to rette Linier er da $= y$ og $\frac{y-ax}{-\sqrt{1+a^2}}$, idet Afstanden fra x-Aksen er regnet positiv opad, medens Afstanden fra l er regnet positiv til et Punkt paa x-Aksens positive Del. Et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted har derfor Koordinater, som tilfredsstiller Ligningen

$$\frac{y-ax}{-\sqrt{1+a^2}} : y = k \qquad (1)$$

eller

$$ax - y = ky\sqrt{1+a^2} \qquad (2)$$

hvilket er Ligningen for en ret Linie gennem Begyndelsespunktet. Omvendt ser man, at ethvert Punkt paa Linien (2) har Afstande fra de givne Linier, der forholder sig som k; thi naar (2) er tilfredsstillet, vil (1) ogsaa være det. — Hvis man, hvad der er Brug i Konstruktionsgeometrien, ikke regner Afstandene med Fortegn, vil endnu den rette Linie

$$ax - y = -ky\sqrt{1+a^2} \qquad (3)$$

høre til det geometriske Sted.

Hvis $k=1$, vil (2) og (3) være Ligninger for de to Linier, der halverer Vinklerne mellem de givne Linier.

Opgave: Opgivet to rette Linier l og l_1. Konstruer det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstand fra l og l_1 forholder sig som $\frac{3}{5}$.

3. Det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter staar i et Forhold, der er forskelligt fra 1, er en Cirkel. (Den saakaldte Forholdscirkel).

Afstandene regnes numerisk, og det givne Forhold k er saaledes et positivt Tal.

Lad A og B være de opgivne Punkter. Vi vælger A til Begyndelsespunkt og lader AB være den positive Retning for x-Aksen. B's Koordinater sættes $\equiv (a,0)$, hvor a er et opgivet Tal. Vi vil da bestemme det geometriske Sted for de Punkter P, for hvilke man har $\frac{AP}{BP} = k$. (1)

Et vilkaarligt Punkt $P \equiv (x,y)$ af det geom. Sted har Koordinater, der tilfredsstiller Ligningen:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = k \qquad (2) \quad \text{eller}$$

$$x^2+y^2 = k^2x^2 - 2k^2xa + k^2a^2 + k^2y^2 \qquad (3) \text{ eller}$$

$$x^2+y^2 \div \frac{2k^2a}{k^2-1}x + \frac{k^2a^2}{k^2-1} = 0 \qquad (4)$$

der er Ligning for en Cirkel med Centrum $\equiv \left(\frac{k^2a}{k^2-1}, 0\right)$ og Radius $= \sqrt{\frac{k^4a^2}{(k^2-1)^2} \div \frac{k^2a^2}{k^2-1}} = \sqrt{\frac{k^4a^2 - k^2a^2(k^2-1)}{(k^2-1)^2}} = \frac{ka}{|k^2 \div 1|}$.

At tillige ethvert Punkt paa Cirklen (4) tilfredsstiller (1) og derfor hører til det geom. Sted ses af, at hvis et Punkts Koordinater tilfredsstiller (4), vil de ogsaa tilfredsstille

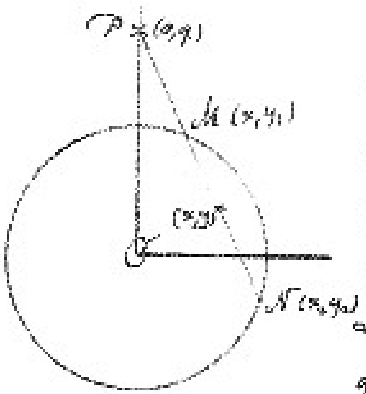
(3), (2) og – hvis man regner numerisk – (1).

Cirklen har sit Centrum i x-Aksen og skærer denne i de to Punkter D og D_1, som deler AB harmonisk i Forholdet k. Naar k er opgivet kan D og D_1 konstrueres. Forholdscirklen kan dergaa tegnes over DD_1 som Diameter.

For $k = 1$ gaar Ligning (3) over til $0 = -2xa + a^2$, hvoraf $x = \frac{a}{2}$, der er Ligning for AB's Midtnormal.

4. Det geom. Sted for Midtpunktet af Cirkelkorder, der alle gaar gennem et fast Punkt P.

Den efterfølgende analytiske Behandling er væsentlig foretaget for at vise Nødvendigheden af, at man ved Opgaver over geom. Steder 1) opstiller en Ligning, som tilfredsstilles af alle det geom. Steds Punkter og 2) beviser, at ogsaa alle Punkter, hvis Koordinater tilfredsstiller Ligningen, hører til det geom. Sted.



I den foreliggende Opgave lægger vi Begyndelsespunktet i Cirklens Centrum og y-Aksen gennem P, hvis Koordinater derfor kan sættes til $(0,q)$, medens Cirklens Ligning bliver $x^2+y^2=r^2$, hvor r og q er opgivne Størrelser. Ligningen for en vilkaarlig ret Linie l gennem P er $y = \alpha x + q$. Vi søger Skæring mellem denne og Cirklen og faar da:

$$(\alpha^2+1)x^2 + 2\alpha q x + q^2 - r^2 = 0, \qquad (1)$$

der tilfredsstilles af Abscisserne til Skæringspunkterne M og N. Sætter man $M \equiv (x_1, y_1)$, $N \equiv (x_2 y_2)$, vil x_1 og x_2 være Rødder i (1) og følgelig $x_1 + x_2 = -\frac{2\alpha q}{1+\alpha^2}$. Lad nu

M.N's Midtpunkt har Koordinaterne $(x\ y)$. Man har da:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\alpha q}{\alpha^2+1}$$

. Da Midtpunktet tillige ligger paa l, vil dets Koordinater tilfredsstille Ligningen $y = \alpha x + q$. Vi har derfor de to Ligninger

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} x = -\dfrac{\alpha q}{\alpha^2+1} \quad \text{og} \\ y = \alpha x + q \end{array}\right.$$

mellem hvilke α skal elimineres.

Af den sidste Ligning faar man $\alpha = \frac{y-q}{x}$, som indsættes i den første. Man faar da

$$(3)\qquad x = \div \frac{\frac{y-q}{x}\, q}{\frac{(y-q)^2}{x^2}+1} \quad \text{eller}$$

$$(4)\qquad \frac{(y-q)^2}{x} + x = -\frac{qy-q^2}{x} \quad \text{hvoraf}$$

$$(5)\qquad (y-q)^2 + x^2 = qy - q^2 \quad \text{eller}$$

$$(6)\qquad \underline{x^2 + y^2 - qy = 0}$$

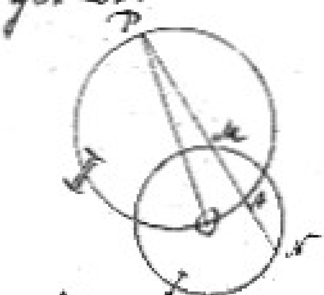
, hvilket er Ligning for en Cirkel over OP som Diameter.

Vi har nu bevist, at ethvert Punkt, der hører til det geometriske Sted, ligger paa Cirklen (6).

Men at ogsaa ethvert Punkt paa denne er Midtpunkt for en Korde, der gaar gennem P, lader sig ikke altid bevise: Et Punkt, hvis Koordinater tilfredsstiller (6), vil ogsaa tilfredsstille (5), (4), (3) og dermed Ligningerne (2). x vil da være den halve Sum af Rødderne i (1), og $(x\ y)$ vil saaledes være Koordinater til Midtpunktet mellem de to Skæringspunkter for $y = \alpha x + q$ og $x^2 + y^2 = r^2$ <u>hvis saadanne forefindes</u>. Imidlertid har (1) hyppig komplekse Rødder, svarende til, at Linien l ikke skærer Cirklen.

Hvis P ligger indenfor Cirklen eller paa Cirklen, vil det søgte geometriske Sted være Cirklen $x^2+y^2-9y=0$. Hvis P derimod ligger udenfor den opgivne Cirkel, vil det geometriske Sted kun blive den Del af $x^2+y^2-9y=0$, der ligger indenfor den opgivne Cirkel.

Anm: Den rene geometriske Løsning af Opgaven er meget let:



Vi tegner en vilkaarlig Korde gennem P, og kalder dens Midtpunkt A. Da A nu ser OP under en Vinkel paa 90°, maa alle det geom. Steds Punkter ligge paa en Cirkel over OP som Diameter.

Omvendt vil ethvert Punkt paa II – forsaavidt det ligger indenfor I være Midtpunkt for en Korde gennem P: Lad A være et vilkaarligt Punkt paa II – og ligge indenfor I. Man tegner da PA, der skærer I i M og N. Nu er $\triangle OMA \cong \triangle ONA$, og følgelig $MA = AN$.

Kapitel 9. Geometriske Steder. (Fortsættelse).

Vi vil i det følgende give nogle Eksempler paa Løsning af analytiske Opgaver vedrørende geom. Steder.

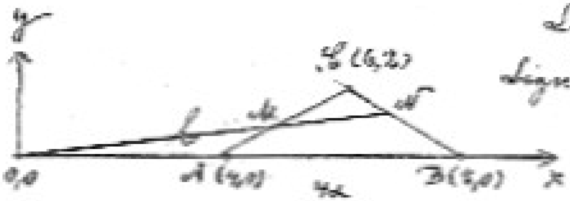
1. $A\equiv(4,0)$, $B\equiv(8,0)$, $C\equiv(6,2)$. En Linie l gaar gennem $(0,0)$, om hvilket den dreier sig og skærer AC i M og BC i N. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem MB og NA.

Ligningen for l: $y=\alpha x$
Ligningen for AC: $y=x-4$

Ved at løse disse Lign. m.H.t x og y, ser man, at

$$M\equiv\left(\frac{4}{1-\alpha};\ \frac{4\alpha}{1-\alpha}\right)$$

Paa lignende Maade findes N's Koordinater:



Ligning L: $y = \alpha x$
Ligning BC: $y = -x + 8$ $\Big\}$ $N \equiv \left(\frac{8}{1+\alpha}, \frac{8\alpha}{1+\alpha}\right)$

Ligningen for MB kan da findes.

Den er $y = \dfrac{\frac{4\alpha}{1-\alpha}}{\frac{4}{1-\alpha} \div 8}(x-8)$ eller $y = \dfrac{4\alpha}{-4+8\alpha}(x-8)$ (1)

Paa samme Maade bliver Ligningen for AN:

$$y = \frac{\frac{8\alpha}{1+\alpha}}{\frac{8}{1+\alpha} \div 4}(x-4) \text{ eller } y = \frac{8\alpha}{4-4\alpha}(x-4) \quad (2)$$

Mellem (1) og (2) skal derpaa α bortskaffes. For at gøre dette kan man løse baade (1) og (2) m. H. t. α. Man faar da $\alpha = \dfrac{4y}{8y-4x+32}$ og

$$\alpha = \frac{4y}{4y+8x-32}$$

Ligningen for det geom. Sted er da

$$\frac{4y}{8y-4x+32} = \frac{4y}{4y+8x-32} \quad \text{eller}$$

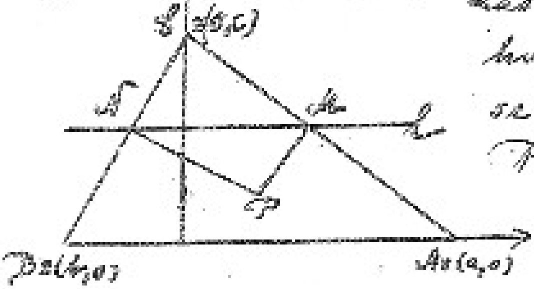
$$3xy - y^2 + 16y = 0 \quad \text{eller}$$

$$\underline{y(3x - y + 16) = 0.}$$

Det geom. Sted er sammensat af to rette Linier, nemlig $y = 0$ ɔ: x-Aksen og Linien $y = 3x \div 16$.

2. Opgivet $\triangle ABC$. En Linie l bevæger sig, saaledes at den stadig er $\parallel AB$. Den skærer AC i M og BC i N, og gennem M og N er tegnet Normalerne til henholdsvis AC og BC. Find det geom. Sted for disse to Normalers Skæringspunkt. — Vi lægger x-Aksen gennem AB og y-Aksen gennem Punktet C. Man kan da sætte $A \equiv (a, 0)$; $B \equiv (b, 0)$

og $C = (0,c)$, hvor a, b og c er opgivne Störrelser.



Lad Ligningen for l være $y = \eta$, hvor η er en variabel Störrelse. Lad P være et vilkaarligt Punkt af det geometriske Sted, og lad det have Koordinaterne (x, y). Det gælder da om at finde en Ligning mellem x og y og bekendte Störrelser.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ligningen for } l: & y = \eta \\ \text{Ligningen for } AC: & \frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \end{array}\right\} M = \left(\frac{ac - a\eta}{c}, \eta\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ligningen for } l: & y = \eta \\ \text{" \quad " } BC: & \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1 \end{array}\right\} N = \left(\frac{bc - b\eta}{c}, \eta\right)$$

Man har derefter:

$$\text{Ligningen for } MP: \quad 1)\ y - \eta = \frac{a}{c}\left[x - \frac{ac - a\eta}{c}\right]$$

$$\text{" \quad " } NP: \quad 2)\ y - \eta = \frac{b}{c}\left[x \div \frac{bc - b\eta}{c}\right]$$

Begge disse Ligninger er tilfredsstillede af (x, y), og imellem dem skal η elimineres. Vi foretager da følgende Omdannelser:

$$1)\ y - \eta = \frac{a}{c}x \div \frac{a^2c - a^2\eta}{c^2}$$

$$2)\ y - \eta = \frac{b}{c}x \div \frac{b^2c - b^2\eta}{c^2}$$

$$1)\ y \div \frac{a}{c}x + \frac{a^2}{c} = \eta\left[1 + \frac{a^2}{c^2}\right]$$

$$2)\ y - \frac{b}{c}x + \frac{b^2}{c} = \eta\left[1 + \frac{b^2}{c^2}\right]$$

, hvoraf ved Division:

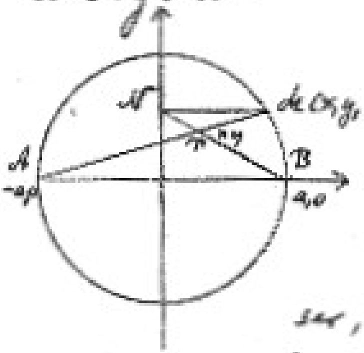
$$\frac{y \div \frac{a}{c}x + \frac{a^2}{c}}{y \div \frac{b}{c}x + \frac{b^2}{c}} = \frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{1 + \frac{b^2}{c^2}}$$

$$\frac{cy \div ax + a^2}{cy \div bx + b^2} = \frac{c^2 + a^2}{c^2 + b^2}$$

, hvoraf ved Udmultiplication $\underline{(c^2+ab)x + (ac+bc)\cdot y = ac^2+bc^2}$.

Det geometriske Sted er altsaa en ret Linie.

3. Cirklen $x^2+y^2=a^2$ skærer x-Aksen i Punkterne A og B, hvor A er det Punkt, der har Abscissen $-a$. M er et vilkaarligt Punkt paa Cirklen, og N er dets Projektion paa y-Aksen. Find det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem AM og BN.



Lad $M=(x_1,y_1)$. Det gælder da om at finde en Ligning mellem x og y, der er Koordinater til Punktet P, og bekendte Tal. I denne Ligning maa x_1 og y_1 altsaa ikke indgaa, da de er variable Størrelser, som varierer med M's Beliggenhed.

Ligningen for AM: $^{1)}\; y = \frac{y_1}{x_1+a}(x-a)$

" " BN: $^{2)}\; y = \frac{y_1}{-a}(x-a)$

Da $M=(x_1,y_1)$ stadig ligger paa Cirklen, har vi endnu desuden:

$$^{3)}\; x_1^2+y_1^2=a^2$$

Mellem disse 3 Ligninger skal derpaa x_1 og y_1 elimineres. Da 1) og 2) begge er af 1ste Grad i x_1 og y_1, kan man løse dem m. H. t. x_1 og y_1. Man faar da:

Af 2) $y_1 = \frac{-ay}{x-a}$. Indsættes dette i 1), faar man:

$x_1 = \frac{-2ax}{x-a}$. Disse to Resultater indsættes derpaa i 3), og man faar:

$\frac{4a^2x^2}{(x-a)^2} + \frac{a^2y^2}{(x-a)^2} = 1$ eller $\underline{3x^2+y^2+2ax=a^2}$, der er Ligning for det geom. Sted.

4. Saadanne variable Størrelser som α, η, x_1 og y_1, som indføres i Mellemregningerne for derpaa atter at bortskaffes, kaldes <u>variable Parametre</u>. For at Eliminationen skal kun-

ne foretages, maa man i Almindelighed have én Ligning mere, end man har Parametre.

Opgaver:

1. Opgivet $A \equiv (-6,0)$, $B \equiv (4,8)$ og $C \equiv (6,0)$. Linien l bevæger sig, saa den stadig er $\nparallel AC$. Den skærer AB i M og BC i N. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem AN og MC.

2. Opgivet $\triangle ABC$. En Linie l bevæger sig, saa den stadig er $\nparallel AC$. Den skærer AB i M og BC i N. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem AN og MC.

3. Opgivet $A \equiv (-5,0)$, $B \equiv (5,0)$ og $C \equiv (2,6)$. I Trekanten er indskrevet et Rektangel, hvis ene Side ligger paa AB. Find det geom. Sted for Diagonalernes Skæringspunkt.

4. Samme Opgave for $A \equiv (-a,0)$, $B \equiv (a,0)$, $C \equiv (b,c)$.

5. Opgivet Cirklen $x^2+y^2=a^2$, paa hvilken Punktet M bevæger sig. Dets Projektion paa x Aksen kaldes N, og $A \equiv (0,-a)$ $B \equiv (0,a)$. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem BM og AN.

6. Find det geom. Sted for de Punkter, hvis Afstande fra de opgivne Punkter A og B har 1) en opgiven Kvadratdifferens 2) en opgiven Kvadratsum.

7. Opgivet Kvadratet $ABCD$. En ret Linie l gaar gennem A, om hvilket den drejer sig og skærer den ene Kvadratside i E og den andens Forlængelse i F. Find det geom. Sted for Midtpunktet af EF.

8. Find det geom. Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne rette Linier har et konstant Produkt.

9. Opgivet en ligebenet Trekant. Find det geom. Sted for de Punkter, hvis Afstand fra Grundlinien er mellemproportional

tional mellem Afstandene fra Benene. Alle Afstande regnes positive ind mod Trekanten.

10. Punktet M bevæger sig paa Cirklen $x^2+y^2=a^2$, og dets Projektioner paa x og y Aksen kaldes M_1 og M_2. $A\equiv(-a,0)$ og $B\equiv(0,-a)$. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem AM_2 og BM_1.

11. Find Ligningen for en Cirkel gennem $(a,0)$, $(-a,0)$ og (b,c).

12. En retvinklet Trekant med Kateterne 3^{cm} og 4^{cm} glider med Hypotenusens Endepunkter paa x Aksen og y Aksen. Find det geom. Sted for den rette Vinkels Toppunkt.

13. Opgivet $A\equiv(5,0)$ $B\equiv(0,3)$. To Punkter P og Q bevæger sig henholdsvis paa x Aksen og y Aksen, saaledes at man stadig har $BQ = 2\cdot AP$. Find det geom. Sted for Skæringspunktet mellem AQ og BP.

14. Opgivet $A\equiv(-a,0)$, $B\equiv(b,c)$ og $C\equiv(a,0)$. Find Koordinaterne til Medianernes Skæringspunkt, Højdernes Skæringspunkt og den omskrevne Cirkels Centrum og vis, at de tre sidstnævnte Punkter ligger paa samme rette Linie.

15. $A\equiv(3,4)$, $B\equiv(8,8)$, $C\equiv(12,1)$ og $D\equiv(4,-3)$. Find Arealet af Firkant $ABCD$ og find dens Vinkler og Sider.

16. $A\equiv(-a,0)$, $B\equiv(a,0)$, $C\equiv(b,c)$. Find Koordinaterne til Centrum for den Cirkel, som gaar gennem Medianernes Fodpunkter.

17. $A\equiv(3,-\frac{3}{2})$, $B\equiv(3,-\frac{5}{3})$, $C\equiv(\frac{19}{7},-\frac{9}{7})$. Find Ligningen for Trekantens indskrevne Cirkel.

18. A og B er to opgivne Punkter. Find det geom. Sted for Punktet C, naar AC og BC har Retningskoefficienter, hvis Produkt er opgivet $= k$

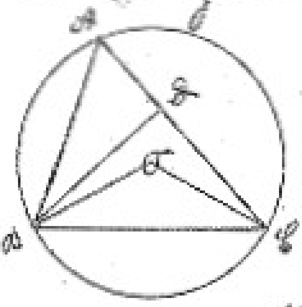
Kapitel 10. Konstruktionsopgaver.

1. I Konstruktionsopgaver bestemmes et Punkts Beliggenhed ved at man bestemmer to geometriske Steder, hvori Punktet skal ligge. En Række Trekantskonstruktioner kan løses direkte herved.

Eks. 1. Konstruer $\triangle ABC$ af a, m_a og $\frac{b}{c} = \sqrt{2}$.
Man afsætter $BC = a$ og søger to geom. Steder for A. Det ene er en Cirkel med BC's Midtpunkt til Centrum og m_a til Radius, det andet er en Cirkel (Forholdscirklen) over DD_1 som Diameter, idet D og D_1 er de to Punkter, der deler BC harmonisk i Forholdet $\frac{1}{\sqrt{2}}$. A ligger, hvor de to geom. Steder skærer hinanden.

2. – Dersom Trekanten ikke direkte kan konstrueres, prøver man ved passende Hjælpelinier at danne nye Trekanter, der lettere kan konstrueres.

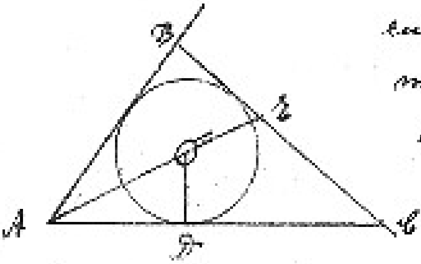
Eks. 2. Konstruer $\triangle ABC$ af $\angle A$, h_b og R.
Lad den søgte Trekants omskrevne Cirkels Centrum være O. $\triangle OBC$ kan da konstrueres, da man kender $\angle O = 2A$ og de to hosliggende Sider, der begge er R. Man



søger dernæst to geom. Steder for D, som er h_b's Fodpunkt. Det ene er en Cirkel over BC som Diameter, det andet en Cirkel med B som Centrum og h_b til Radius. Man forlænger endelig CD til den skærer Cirklen i A. $\triangle ABC$ er da den søgte Trekant.

Eks. 3. Konstruer $\triangle ABC$ af $\angle A$, v_a og r.
Den indskrevne Cirkels Centrum kaldes O, og D betegner

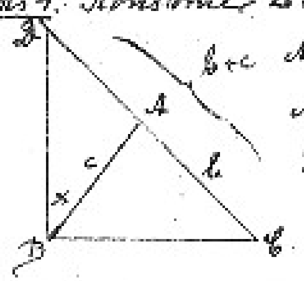
D's Projektion paa b. $\triangle AOD$ kan da konstrueres, da man kender en Side (r), en hosliggende Vinkel ($\angle D = 90$) og en modstaaende ($\angle \frac{A}{2}$). Derpaa tegner man den indskrevne Cirkel og afsætter ud ad AO Stykket $AE = v_A$. Fra E tegnes derpaa en Tangent til Cirklen, og dennes Skæringspunkt med $\angle A$'s Ben betegnes B og C. $\triangle ABC$ er da den søgte Trekant.



Discussion: Hvis E ligger udenfor Cirklen faar man 2 Løsninger.
" " " paa " " " 1 Løsning
" " " indenfor " " " 0 Løsninger

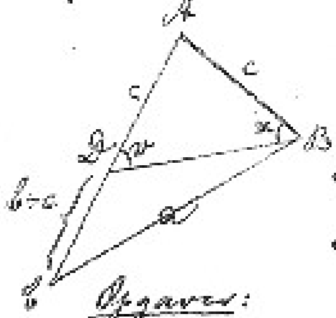
3. Man maa sørge for – om fornødent ved Hjælpelinier – at alle opgivne Størrelser er afsat paa Prøvefiguren, da man ellers kommer til at mangle en af de opgivne Størrelser og derfor ikke kan vente at kunne konstruere Figuren.

Ex 4. Konstruer $\triangle ABC$ af a, $\angle A$ og $b+c$.



Man tænker sig Opgaven løst og afsætter $c = AD$ i CA's Forlængelse. $\triangle DBC$ lader sig nu konstruere, da man kender en af dens Vinkler (nemlig $\angle D = \frac{A}{2}$), en hosliggende Side ($DC = b+c$) og en modstaaende (a). Derpaa afsættes $\angle x = \frac{A}{2}$, og denne Vinkels højre Ben skærer CD i A. $\triangle ABC$ er da den søgte Trekant.

Ex 5. Konstruer $\triangle ABC$ af a, $\angle A$ og $b-c$, idet $b > c$. Man tænker sig Opgaven løst og afsætter $AD = c$ ud ad AC. $\triangle CDB$ kan nu konstrueres, da man kender en af dens Vinkler ($v\,D = 90 + \frac{A}{2}$) en hosliggende Side ($b-c$) og en modstaaende (a); $v\,v$ er nu bekendt, og man kan derfor afsætte $v\,x = v\,v$. Vinkel x's højre Ben vil da skære CD's Forlængelse i Punktet A. △ABC er da den søgte Trekant.



Opgaver:

1. Konstruer △ABC af a, h_b og h_c.
2. En Cirkel og et Punkt P indenfor Periferien er givne. I Cirklen skal indskrives en Trekant ABC. Siden AB skal gaa gennem P, dens Midtpunkt skal have en given Afstand fra P, og Linien CP skal halvere ∠C.
3. Konstruer △ABC af h_a og m_a naar man tillige ved, at $2a = 3b$.
4. Konstruer et Parallelogram ABCD af Diagonalen AC, Afstanden fra A til Siden BC, og ∠ABD.
5. Konstruer et Punkt, hvorfra en opgiven Trekants Sider ses under ligestore Vinkler.
6. Opgivet en Cirkel. Om Cirklen skal omskrives en Firkant ABCD, hvor $AB \parallel CD$. Desuden skal Siden BC have opgiven Længde, og ∠A have en opgiven Størrelse.
7. Find det geometriske Sted for Midtpunktet af ligestore Korder i en Cirkel, og løs derpaa følgende Opgave: Konstruer en Linie gennem et opgivet Punkt, saaledes at en opgiven Cirkel paa Linien afskærer en Korde af opgiven Længde.
8. Givet en Cirkel og et Punkt P. Indskriv i Cirklen et Kvadrat, hvis ene Side gaar gennem P.
9. Konstruer △ABC af a, h_b og $\frac{m_a}{c} = k$, hvor k er et opgivet Tal.

10. Konstruer et Trapez, der baade kan indskrives i og omskrives om en Cirkel, af en Vinkel og de parallele Sider.

11. I $\triangle ABC$ betegner O Centret for den omskrevne Cirkel, og man har tillige opgivet, at $b > c$. Bevis, at Vinklen mellem h_a og OA er $= B \div C$ og halveres af v_A. Konstruer derpaa $\triangle ABC$ af h_a, R og $B - C$.

12. Konstruer $\triangle ABC$ af R, v_A og $B - C$.

Kapitel II. Kongruens og Ligedannethed i Planen.

1. Ved kongruente Figurer forstaar man Figurer, der ved Flytning kan bringes til at dække hinanden.

Kongruente Figurer vil saaledes svare til hinanden Punkt for Punkt, og Afstanden mellem to vilkaarlige Punkter i den ene Figur vil altid være lig Afstanden mellem de to tilsvarende Punkter i den anden Figur.

Omvendt: Naar to Figurer svarer til hinanden Punkt for Punkt, og Afstanden mellem to vilkaarlige Punkter i den ene overalt er lig Afstanden mellem de tilsvarende Punkter i den anden, er de to Figurer kongruente.

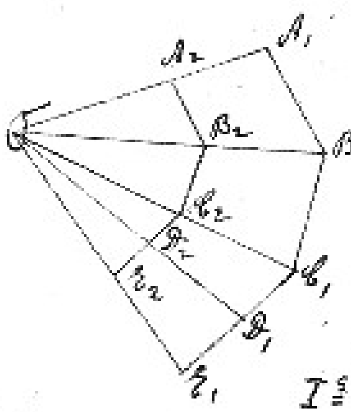
Dette bevises saaledes:

Lad A_1, B_1 og C_1 være 3 Punkter i den ene Figur, der betegnes ved I, og vi gaar ud fra, at de tre Punkter ikke ligger paa samme rette Linie. Lad A_2, B_2, C_2 være de tilsvarende Punkter i den anden Figur, der betegnes ved II. $\triangle A_1B_1C_1$ er da $\cong \triangle A_2B_2C_2$, da de har alle 3 Sider stykkevis ligestore, og de to Trekanter kan følgelig bringes til at dække hinanden. Lad nu D_1 være et vilkaarligt fjerde Punkt i I, og D_2 det tilsvarende Punkt i II. Naar de to Trekanter dækker hin-

anden, maa ogsaa D_2 dække D_1; hvis D_2 nemlig ikke dækker D_1, vil saavel A_1 og A_2, som B_1 og B_2 og C_1 og C_2 ligge i D_1D_2's Midtnormal, da $A_1D_1 = A_2D_2$, $B_1D_1 = B_2D_2$ og $C_1D_1 = C_2D_2$. Men dette er umuligt.
De to Figurer vil derfor dække hinanden Punkt for Punkt, hvormed Sætningen er bevist.

<u>2. To Figurer er ligedannede, naar de svarer til hinanden Punkt for Punkt, og Afstanden mellem to vilkaarlige Punkter i den ene overalt staar i et konstant Forhold til Afstanden mellem de tilsvarende Punkter i den anden.</u> Det konstante Forhold kaldes <u>Maalestokken</u> og betegnes i det følgende ved m.
At to Figurer I og II er ligedannede betegnes I ∼ II.

<u>Konstruktion af en Figur ligedannet med en opgivet i Forholdet m.</u>



Lad os betegne den opgivne Figur ved I, og lad A_1 være et vilkaarligt Punkt i denne. Man vælger da et vilkaarligt Punkt O i Planen og afsætter paa Halvlinien OA_1 Punktet A_2, saaledes at $OA_2 = m \cdot OA_1$. Paa samme Maade konstrueres Punkter, der svarer til alle I's Punkter, og de saaledes frembragte Punkter danner tilsammen en Figur II, der er ∼ I i Forholdet m. De to Figurer svarer nemlig ifølge Konstruktionen til hinanden Punkt for Punkt, og hvis B_1 er et andet vilkaarligt Punkt i I og B_2 det tilsvarende i II, vil $OA_2 = m \cdot OA_1$ og $OB_2 = m \cdot OB_1$, hvoraf

$\frac{OA_2}{OA_1} = m$ og $\frac{OB_2}{OB_1} = m$ eller $\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OB_2}{OB_1}$.
Heraf fölger $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ og $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = m$.
De to Figürer er fölgelig ligedannede i Forholdet m.

3. <u>Der findes ein og kün ein Figür, som er ligedannet med en opgiven i Forholdet m.</u>

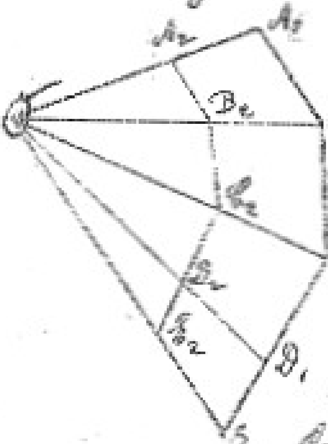
Lad f.Eks. baade II og III være $\sim$ I i Forholdet m, og lad A_1 og B_1 være et vilkaarligt Punktpar i I, medens A_2, B_2 og A_3, B_3 er de tilsvarende Punkter i II og i III.
Man har da $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = m$ og $\frac{A_3B_3}{A_1B_1} = m$, hvoraf $A_2B_2 = A_3B_3$. Men heraf fölger, at II $\cong$ III, hvormed Sætningen er bevist.
Man ser tillige heraf, at man faar den samme Figür ved Konstrüktionen i §2, hvor man end vælger Pünktet O.

4. Idet vi gaar tilbage til Konstrüktionen i §2, bliver det klart, at ethvert Pünkt i Planen kan betragtes som hörende til Figür I, og man kan da paa sædvanlig Maade bestemme det Pünkt i II, der svarer dertil. Pünktet O kommer derved til at svare til sig selv, og kaldes derfor <u>Fællespünktet</u>. Det samme gælder om de Linier, der som OA_2A_1 forbinder to til hinanden svarende Pünkter med Pünktet O. Saadanne Linier kaldes <u>Fælleslinier</u>.
Naar to ligedannede Figürer er beliggende som I og II, saaledes at to vilkaarlige til hinanden svarende Pünkter ligger paa ret Linie med et fast Pünkt O, siges de tillige at være <u>ligedan beliggende</u>.
<u>To Figürer, der er $\sim$ i Forholdet m, kan altid bringes</u>

til at være ligedan beliggende med Hensyn til et vilkaarligt Fællespunkt.

Lad f.eks. II være ligedannet med I i Forholdet m. Man vælger da et vilkaarligt Punkt O og konstruerer en Figur III $\sim$ I i Forholdet m og med O som Fællespunkt. Da nu II og III begge er $\sim$ I i Forholdet m, vil II $\cong$ III, og man kan altsaa lægge II paa III's Plads, hvorved den bliver ligedan beliggende med I.

5. Lad I og II være to ligedan beliggende Figurer med O som Fællespunkt og Maalestokken m. De til hinanden svarende Punkter f.eks. A_1 og A_2 kaldes da ensliggende, Linier der forbinder ensliggende Punkter f.eks. A_1B_1 og A_2B_2 kaldes ensliggende Linier, og Vinkler mellem ensliggende Linier kaldes ligeledes ensliggende.



Om ligedan beliggende Figurer gælder følgende Sætninger:

1) Ensliggende Linier er $\parallel$.
2) Ensliggende Vinkler er ligestore
3) Hvis 3 Punkter f.eks. C_1, D_1 og E_1 ligger paa ret Linie i I, vil de tilsvarende Punkter i II ogsaa ligge paa ret Linie:

Lad C_2 og E_2 svare til C_1 og E_1, og lad OD_1 skære C_2E_2 i D_2. Da vil $\frac{OD_2}{OD_1} = \frac{OC_2}{OC_1} = m$ eller $OD_2 = m \cdot OD_1$.

Da, som er beliggende paa C_2E_2, vil da være det til D_1 svarende Pünkt, hvormed Sætningen er bevist.
Samlingen af Pünkter, der ligger paa C_2E_2 vil altsaa svare til Samlingen af Pünkter, der ligger paa C_1E_1 og omvendt.

6. Af det foregaaende fremgaar det, at <u>to ligedannede Trekanter altid er ensvinklede</u>. Den omvendte Sætning gælder ogsaa, thi lad de to Trekanter være $A_1B_1C_1$ og $A_2B_2C_2$, hvor $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$ og $\angle C_1 = \angle C_2$. De ensliggende Sider er da proportionale, og heraf fölger, at den Figür, der dannes af Pünkterne A_2, B_2 og C_2 er ligedannet med den, der dannes af Pünkterne A_1, B_1 og C_1. De to Figürer kan da anbringes saaledes, at de er ligedan beliggende og heraf fölger, at $\triangle A_2B_2C_2$ er ligedannet med $\triangle A_1B_1C_1$.

Man maa ikke tro, at to Polygoner i Almindelighed er ligedannede, fordi deres Vinkler er stykkevis ligestore; thi da maatte et Kvadrat og et Rektangel være ligedannede, og det ved man ikke er Tilfældet. Derimod gælder fölgende Sætning:

Lad to konvekse Polygoner I og II have samme Sideantal, og lad I have Vinkelspidserne A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, medens II har Vinkelspidserne $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$. Hvis nu:

$$\angle A_1 = \angle A_2\,,\quad \angle B_1 = \angle B_2\,,\quad \angle C_1 = \angle C_2\,,\quad \angle D_1 = \angle D_2\,,\quad \angle E_1 = \angle E_2$$

og tillige $\dfrac{A_2B_2}{A_1B_1} = \dfrac{B_2C_2}{B_1C_1} = \dfrac{C_2D_2}{C_1D_1} = \dfrac{D_2E_2}{D_1E_1} = \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1} = m$, saa er I $\sim$ II.

Bevis: Vi konstrüerer en Figür III $\sim$ I i Forholdet m og kalder de Pünkter, der svarer til A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, for

$A_3 B_3 C_3 D_3 E_3$. Man har da for et vilkaarligt Sæt Vinkler $\angle A_3 = \angle A_1$ og $\angle A_2 = \angle A_1$, hvoraf $\angle A_3 = \angle A_2$ og for et vilkaarligt Sæt Sider:

$$\frac{A_3 B_3}{A_1 B_1} = m \text{ og } \frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} = m \text{, hvoraf } A_3 B_3 = A_2 B_2.$$

De to Polygoner II og III har derfor alle Sider og alle Vinkler Stykkevis ligestore og er følgelig kongruente. II kan da anbringes paa III^s Plads og er saaledes ligedannet med I. Beviset er uafhængigt af Sideantallet.

Vi har dermed bevist Sætningen:

<u>To konvekse Polygoner er ligedannede, naar deres Vinkler taget i samme Orden er parvis ligestore og de Sider, der ligger ens i Forhold til de ligestore Vinkler er proportionale.</u>*)

<u>Opgave 1</u>. Opgivet en Femkant. Konstruer en Figur, der er ligedannet med den givne i Forholdet $\frac{2}{3}$ og en, der er ligedannet med den givne i Forholdet $1\frac{1}{2}$.

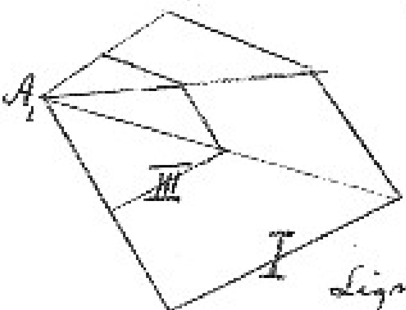
<u>Opgave 2</u>. Bevis, at to Trekanter er ligedannede, naar de har en Vinkel ligestor og de hosliggende Sider proportionale. (Benyt Tangensrelationen.)

<u>Opgave 3</u>. Bevis, at to Trekanter er ligedannede, naar de har en Vinkel ligestor og en hosliggende og en modstaaende Side proportionale, naar den modstaaende er $\geq$ den hosliggende.

7. <u>To ligedannede Polygoners Arealer forholder sig som Kvadratet paa Maalestokken.</u>

*) Sætningen lader sig bevise selv om Opgivelserne formindskes saaledes, at man intet ved om 3 paa hinanden følgende Stykker i de to Figurer.

Vi betegner de to Polygoner ved I og II, og lad II være ∾ I i Forholdet m. Man tegner nu en Polygon III, der er ligedannet med I i Forholdet m med A_1 som Tillægspunkt, idet A_1 er en vilkaarlig Vinkelspids i I. Man ved da, at III ∾ II. Ved Hjælp af Diagonaler gennem A_1 kan man dernæst dele I i Trekanter, hvis Arealer betegnes ved $T_1, T_2 \ldots T_n$ og faar samtidig III delt i ligesaa mange ensliggende Trekanter, hvis Arealer betegnes $t_1, t_2 \ldots t_n$.



Man har nu:

$$\frac{t_1}{T_1} = m^2; \quad \frac{t_2}{T_2} = m^2 \;\ldots\ldots\; \frac{t_n}{T_n} = m^2$$

eller:

$$t_1 = m^2 \cdot T_1$$
$$t_2 = m^2 \cdot T_2$$
$$- - - - - -$$
$$- - - - - -$$
$$t_n = m^2 \cdot T_n.$$

Adderes disse Ligninger, faar man:

$$t_1 + t_2 + \ldots t_n = m^2 (T_1 + T_2 \ldots T_n)$$

eller: $p = m^2 \cdot P$, hvor p og P er Arealet af de to Polygoner. Heraf fölger:

$\frac{p}{P} = m^2$, hvormed Sætningen er bevist.

<u>Opgave</u>: Konstruer en Figur, der er ligedannet med en opgiven Femkant, og som har et Areal, der er $1\frac{2}{3}$ Gang saa stort.

8. <u>Dersom man tegner ligedannede Figurer paa en retvinklet Trekants Sider, saaledes at disse bliver tilsvarende Sider i de tre Figurer, vil Arealet af den Figur, som tegnes paa Hypotenusen være lig Summen af Arealerne af de Figurer, der tegnes paa Katetene.</u>

Kaldes Katetene a og b, Hypotenusen c og de tilsvarende de Figurers Arealer A, B og C, faar man:

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{og} \quad \frac{B}{C} = \frac{b^2}{c^2}. \text{ Heraf ved Addition:}$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1, \text{ da } c^2 = a^2+b^2 \text{ ifølge}$$

Pythagoras' Sætning. Man har derfor $C = A+B$.

<u>Opgave</u>. Man har opgivet to ligedannede Polygoner. Konstruer en Figur ligedannet med de opgivne, og hvis Areal er lig med Summen (eller Differensen) af de opgivne Polygoners <u>Arealer</u>.

Kapitel 12. (Fortsættelse)

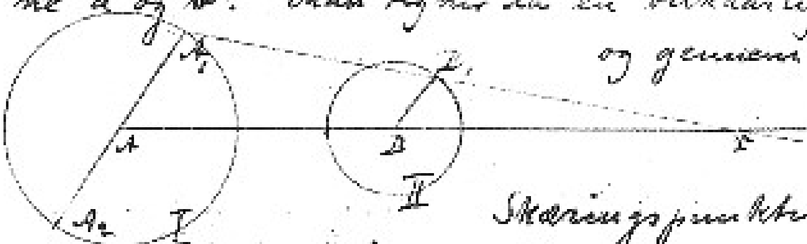
<u>Cirklen.</u>

1. Den Figur, der er ligedannet med en given Cirkel i Forholdet m, er en Cirkel. Hvis den givne Cirkel har Radius r, vil den søgte faa Radius m·r. (Ses ved at vælge Tællepunktet i den givne Cirkels Centrum).

2. <u>To Cirkler er altid ligedan beliggende med Hensyn til de to Punkter</u> (de saakaldte <u>Lighedspunkter</u>), <u>der deler Centerlinien harmonisk i Radiernes Forhold.</u>

Lighedspunkterne konstrueres saaledes:

Lad de to Cirkler I og II have Centrerne A og B og Radierne a og b. Man tegner da en vilkaarlig Radius BB_1, og gennem A en Linie ∥ denne. De fremkomne Skæringspunkter med I kaldes



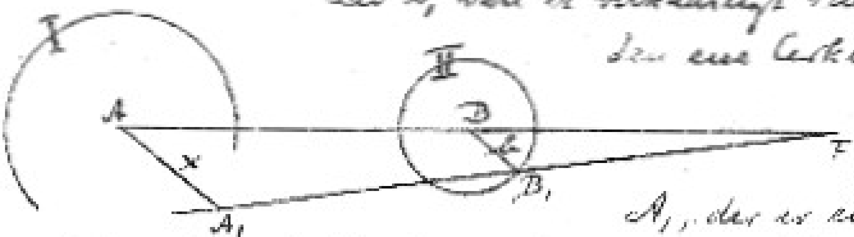
A_1 og A_2. A_1B_1 vil da skære Centerliniens Forlængelse i F (det ydre Lighedspunkt), medens A_2B_1

skærer Centrallinien i F_1 (det indre Lighedspunkt).
F og F_1 er øjensynlig de to Punkter, der deler AB harmonisk i Forholdet $\frac{a}{b}$, da man har

$$\frac{AF}{BF} = \frac{a}{b} \quad \text{og} \quad \frac{AF_1}{F_1B} = \frac{a}{b}.$$

Hvis $a = b$ falder F i AB's uendelig fjerne Punkt, medens F_1 falder i AB's Midtpunkt. Hvis de to Cirkler har samme Centrum, bliver dette deres eneste Lighedspunkt.
At de to Cirkler er ligedan beliggende med Hensyn til F, bevises saaledes:

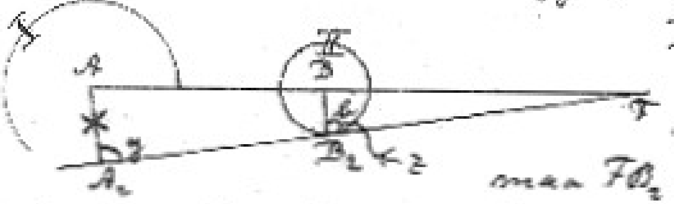
Lad B_1 være et vilkaarligt Punkt paa den ene Cirkel, f. Eks. paa II.



Det Punkt A_1, der er ensliggende med B_1, vil være Skæringspunkt mellem FB_1 og en Linie gennem $A \parallel BB_1$. Men A_1 maa ligge paa I, da

$$\frac{x}{b} = \frac{AF}{BF} = \frac{a}{b}, \text{ hvoraf } \quad x = a.$$

3. En Tangent fra F til II maa ogsaa være Tangent til I. Thi lad dens Røringspunkt med II være B_2, medens en Linie gennem $A \parallel BB_2$ skærer FB_2 i Punktet A_2. Dette maa nu ligge paa I, thi



$$\frac{x}{b} = \frac{AF}{BF} = \frac{a}{b}, \text{ hvoraf } \quad x = a.$$

Men da $\angle y = \angle z = 90°$ maa FB_2 tillige være Tangent i A_2 ifølge Sætningen: Naar en Linie er $\perp$ Radius i dens Skæringspunkt med Cirklen, er den Tangent til Cirklen.

Hvad vi her har sagt om F, kan paa samme Maade bevises at gælde F_1. Vi har da tillige angivet en Konstruktion, hvorved man kan konstruere Fællestangenter til to Cirkler.

Hvis Cirklerne ligger helt udenfor hinanden er der 4 Fællestangenter. Hvis de rører hinanden udvendig, er der 3. Hvis de skærer hinanden: 2, og hvis de rører hinanden: 1. Hvis Cirklerne ligger inden i hinanden, er der derimod 0 Fællestangenter.

4. Ligedannethedsmetoden.

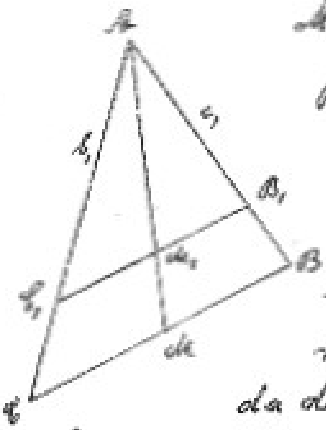
Ved Konstruktionsopgaver er det hyppig fordelagtigt først at konstruere en Figur ligedannet med den søgte for derpaa at tegne den søgte Figur i den rigtige Maalestok.

Ved Trekantskonstruktioner lader Metoden sig benytte, naar man har opgivet en Linielængde og ellers kun Vinkler og Forhold mellem Linielængder. Man udelader da først den opgivne Linielængde og tegner derpaa en Figur, der opfylder de andre Betingelser. Derpaa konstrueres den søgte Figur ligedannet med denne, idet man lader den opgivne Linielængde bestemme Maalestokken.

Eks 1. Konstruer $\triangle ABC$ af $\angle A$, $\frac{b}{c} = \sqrt{3}$ og en Linielængde f. Eks. m_a

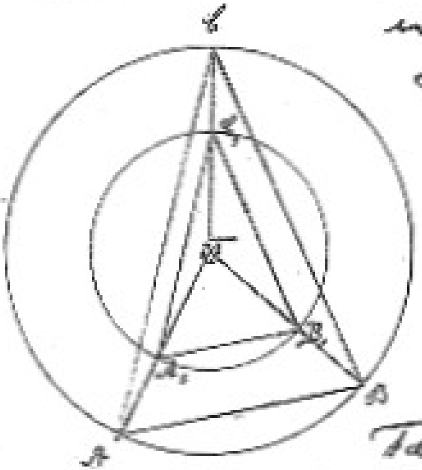
Man vælger en vilkaarlig Linielængde c_1 og bestemmer b_1 saaledes at $\frac{b_1}{c_1} = \sqrt{3}$, eller saaledes at $b_1 = c_1 \cdot \sqrt{3}$.

Derpaa konstrueres en Trekant AB_1C_1, der er ligedannet med den søgte af $\angle A$ b_1 og c_1:



Man vælger derpaa A til Tællespunkt og tegner Medianen AM_1, der svarer til m_a i den søgte Trekant. Ud af AM_1 afsættes derpaa $AM = m_a$. Parallel med B_1C_1 tegnes derpaa en Linie gennem M, og den skærer vA's Ben i B og C. $\triangle ABC$ er da den søgte Trekant, thi den indeholder vA. Desuden vil $b = m b_1$ og $c = m \cdot c_1$, hvoraf $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \sqrt{3}$ og endelig er $CM = m \cdot \frac{a_1}{2}$ og $BM = m \cdot \frac{a_1}{2}$, hvoraf $CM = MB$.

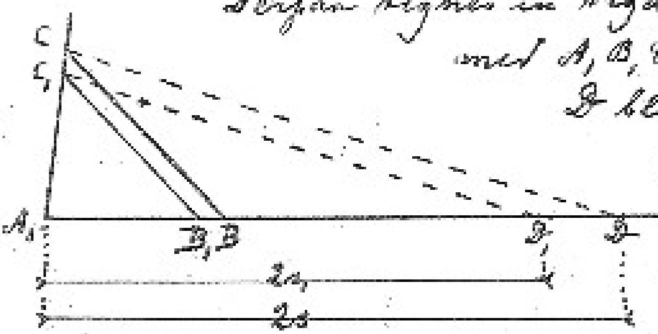
Ex. 2. Konstruer $\triangle ABC$ af vA, $\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$, hvor p og q er to opgivne Liniestykker og af en Linielængde paa R.



Man konstruerer først en Trekant $A_1B_1C_1$ af $vA_1 = vA$ og $a_1 = q$ og $b_1 = p$. Denne Trekant bliver ligedannet med den søgte. Man vælger derpaa den omskrevne Cirkels Centrum O til Tællespunkt og tegner en Cirkel om dette som Centrum med R som Radius. OA_1, OB_1 og OC_1 skærer denne Cirkel i A, B og C, og $\triangle ABC$ er den søgte Trekant.

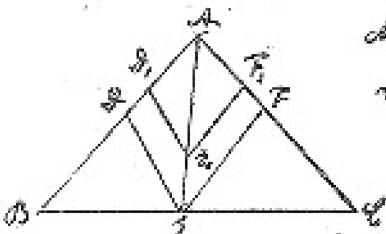
Ex. 3. Konstruer $\triangle ABC$ af to af Vinklerne og Perimeteren $2s$.

Man konstruerer først en Trekant $A_1B_1C_1$, som har de opgivne Vinkler og derfor bliver ligedannet med den søgte. Derpaa afsættes Seriens Perimeter $2s_1$ $= A_1D_1$ ud ad A_1B_1 og ud ad samme Linie $A_1D = 2s$. Derpaa tegnes en Figur ligedannet med $A_1B_1C_1D_1$ saaledes at D bliver det til D_1 svarende Punkt, og saaledes at A_1 bliver Fællespunkt.



$\triangle A_1BC$ bliver da den søgte Trekant, thi den har for det første de opgivne Vinkler og for det andet er $a+b+c = m\cdot a_1 + m\cdot b_1 + m\cdot c_1 = m(a_1+b_1+c_1) = m\cdot 2s_1 = 2s$.

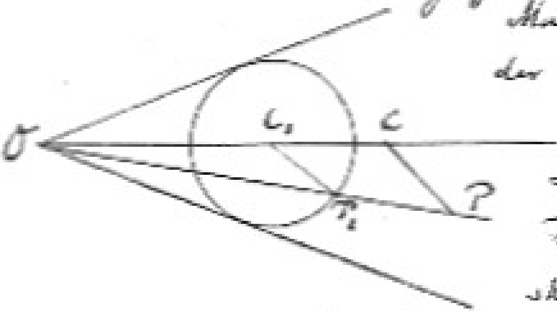
Ex 4. I en given Trekant skal indskrives en Rhombe, hvis ene Vinkel falder sammen med en af Trekantens Vinkler.



Man konstruerer en Rhombe $AD_1E_1F_1$ med vilkaarlig Side, og saaledes at dens ene Vinkel falder sammen med $\angle A$. $AD_1E_1F_1$ vil da være ligedan beliggende med den søgte Rhombe med A som Fællespunkt. AE_1 skærer BC i Punktet E, som er det Punkt i den søgte Figur, som er ensliggende med E_1. Den søgte Rhombe kan da konstrueres.

[Naar man erindrer, at Diagonalen halverer Rhombens Vinkel, findes E direkte som Skæringspunkt mellem v_A og BC].

Ex 5. Opgivet en Vinkel og et Punkt P, der er beliggende mellem Vinklens Ben. Konstruer en Cirkel, som rører Vinklens Ben og gaar gennem P.



Man tegner en vilkaarlig Cirkel, der rører de to Vinkelben og ligger i samme Vinkelrum som P. Dens Centrum kaldes C_1, og Vinklens Toppunkt kaldes O. Linien OP skærer Cirklen i to Punkter, af hvilke det ene kaldes P_1. Man konstruerer derpaa en Figur, der er ligedannet med Cirklen med O som Fællespunkt, og saaledes at P bliver det til P_1 svarende Punkt. Den nye Cirkels Centrum konstrueres som Skæringspunkt mellem OC_1 og en Linie gennem P $\parallel$ P_1C_1. – 2 Løsninger.

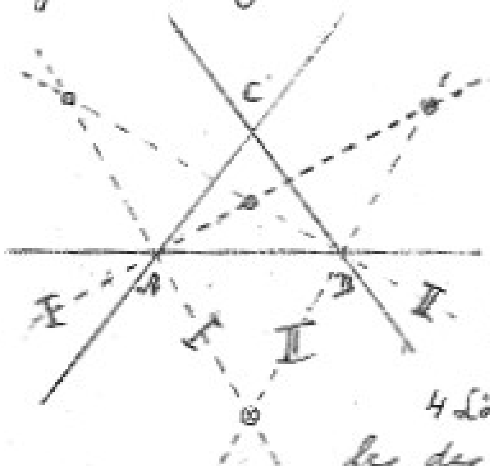
Opgaver:

1. Konstruer et Kvadrat, som er indskrevet i en given Trekant.
2. Konstruer $\triangle ABC$ af $\angle A$, $\frac{b}{c} = \sqrt{2}\frac{1}{2}$ samt Afstanden fra B til den indskrevne Cirkels Centrum.
3. Gennem et givet Punkt at tegne en Linie, der af en given Vinkels Ben afskærer to Stykker, der staar i et opgivet Forhold.
4. Konstruer en ligebenet Trekant af Højden og Medianen, begge til et af Benene.
5. Konstruer et Kvadrat, hvori Forskellen mellem Diagonal og Side har en opgiven Længde.

Kapitel 13. Konstruktionsopgaver. (Fortsættelse)

1. Konstruer en Cirkel, der rører 3 opgivne rette Linier, af hvilke ikke to er parallele.

Atrelinie begrænser en Trekant, hvis Vinkelspidser kaldes A, B og C. Den søgte Cirkels Centrum O maa ligge lige langt fra de to Linier, der skære hinanden i A. Det ene geometriske Sted for O er derfor de to Linier, som halverer ∠A og dens Nabovinkel, og disse to Linier er paa Figuren betegnet med I. Det andet geometriske Sted ses paa samme Maade at være de to Linier, der halverer ∠B og dens Nabovinkel, og de er paa Figuren betegnet med II. Hvor de to geometriske Steder skærer hinanden ligger O, og man ser heraf, at Opgaven har 4 Løsninger. Der er saaledes 4 Cirkler, der rører de 4 rette Linier. Den af dem, der ligger indenfor Trekanten, kaldes Trekantens indskrevne Cirkel, og dens Radius betegnes ved r. De tre andre Cirkler kaldes de udvendige Røringscirkler, og deres Radier betegnes r_a, r_b og r_c, eftersom de rører Siden a, b eller c.



<u>Anm:</u> For Fuldstændigheds Skyld bemærker vi, at ethvert af de fundne 4 Punkter ligger enten paa ∠C's Halveringslinie eller paa den Linie, der halverer ∠C's Nabovinkel.

2. Paa den følgende Figur er tegnet en Trekant ABC, dens indskrevne Cirkel og den udvendige Røringscirkel, der rører Siden a.

Følgende Sætninger lader sig nu bevise:

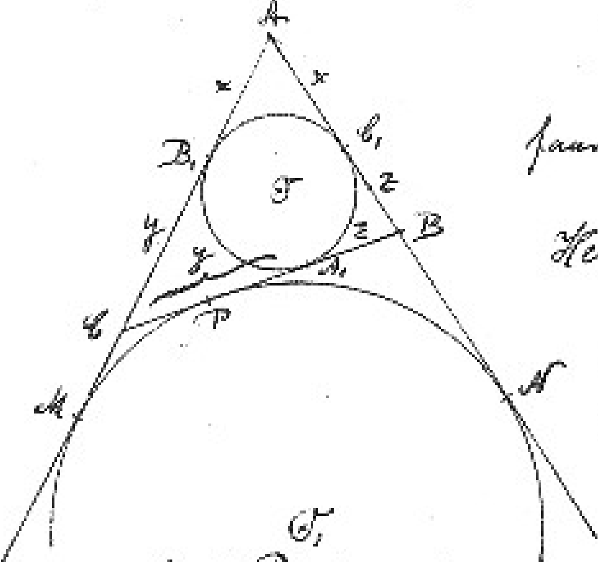
1) <u>Afstanden fra en Vinkelspids til Røringspunktet mellem</u>

et af dens Ben og den indskrevne Cirkel er = $s \div$ den modstaaende Side.

Bevis: Sættes $AC_1 = AB_1 = x$

$CB_1 = CA_1 = y$ og

$BA_1 = BC_1 = z$



faar man: $2x + 2y + 2z = 2s$

$x + y + z = s \qquad (1)$

Heraf fölger: $x = s - (y + z)$

eller $\underline{x = s - a}$.

Af lign (1) faas paa lignende Maade

$\underline{y = s - c}$ og $\underline{z = s \div b}$

2) Afstanden fra en Vinkelspids til Röringspunktet mellem et af dens Ben og den udvendige Röringscirkel, der berörer den modstaaende Side, er = s.

Bevis: $AM = AN$, da Tangentvinklens Ben er ligestore regnet fra Toppunkt til Röringspunkt.

Desuden er $AM + AN = b + CM + c + BN =$
$b + c + CP + PB = b + c + a = 2s$. Da nu AM og AN er ligestore og tilsammen $= 2s$, maa

$$AM = AN = s.$$

3) $\underline{B_1M = a}$, thi $B_1M = AM \div AB_1 = s - x = s - (s - a) = a$.

4) $\underline{PA_1 = b - c}$, thi $PA_1 = CA_1 \div CP = y \div CM = s \div c \div (s - b)$
$= s \div c - s + b = b - c$.

3. Paa Grundlag af disse Sætninger lader en Del Konstruktionsopgaver sig löse.

Eks 1. Konstruer $\triangle ABC$ af $b - c$; r og r_a.

Man tenker sig Opgaven löst og kalder Centrerne for de Cirkler, hvis Radier er r og r_a for O og O_1. $\triangle OPA_1$ og $\triangle O_1PA_1$ lader sig straks konstruere, da man i dem begge kender en Vinkel, der er $90°$ og begge de hosliggende Sider. Med O og O_1 som Centrer og r og r_a til Radius tegnes to Cirkler, hvis ydre Fællestangenter derpaa konstrueres. Deres Skæringspunkt kaldes A og Linien PA_1 skærer de to Fællestangenter i B og C. $\triangle ABC$ er da den søgte Trekant.

Ues 2. Konstruer $\triangle ABC$ af h_a, $\angle A$ og s.

$\triangle AMO_1$ kan straks konstrueres, da man kender en Side (nemlig $AM = s$) og to hosliggende Vinkler (nemlig en paa $90°$ og $\angle \frac{A}{2}$). Derpaa tegnes en Cirkel med O_1 som Centrum og r_a til Radius og en Cirkel med A som Centrum og h_a som Radius. Fra A trækkes Tangenten AN til den første, hvorpaa man konstruerer de to Cirklers indvendige Fællestangenter, der hver for sig skærer AM i C og AN i B. $\triangle ABC$ er den søgte Trekant.

2; 1 eller 0 Løsninger.

Ues 3: Konstruer $\triangle ABC$ af a, r og r_a.

4. Konstruktionsopgavers Løsning ved Beregning.

Det er bekendt, hvorledes man konstruerer x, naar

$$x = \frac{ab}{c}, \quad x = \sqrt{a \cdot b}, \quad x = \sqrt{a^2+b^2} \text{ og } x = \sqrt{a^2-b^2},$$

hvor a, b og c er opgivne Liniestykker.

En Mængde Konstruktionsopgaver lader sig føre tilbage til disse simple Konstruktioner, idet man finder Længden af et ubekendt Liniestykke udtrykt algebraisk ved givne Linier og Tal.

__Eks 1.__ Der er givet et Liniestykke AB. Man skal i dets Forlængelse finde et Punkt C, der ligger saaledes, at BC er Mellemproportional mellem AB og AC.

Sættes AB = a og BC = x, har man:

$$x^2 = a(a+x) \quad \text{eller} \quad x^2 - ax - a^2 = 0 \text{, hvoraf}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}\text{,}$$ hvor det negative Fortegn er ubrugeligt.

Man sætter nu $y = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, hvoraf $y^2 = \frac{5a}{4} \cdot a$; y kan derfor konstrueres som Mellemproportional mellem $\frac{5a}{4}$ og a. Man faar da $x = \frac{a}{2} + y$, hvoraf x kan konstrueres, og dermed er Punktet C's Beliggenhed bestemt.

__Eks 2.__ Konstruer et Parallelogram, i hvilket Perimetren og begge Højderne har opgivne Længder.

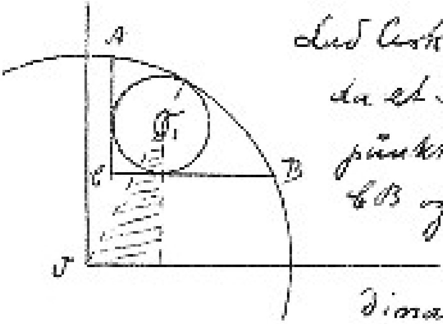
Kaldes Perimetren 2s, to sammenstødende Sider x og y og de tilsvarende Højder h_1 og h_2, har man:

$$x + y = s$$

$$h_1 \cdot x = h_2 \cdot y \quad \text{hvoraf}$$

$$x = \frac{h_2 \cdot s}{h_1 + h_2} \quad \text{og} \quad y = \frac{h_1 s}{h_1 + h_2}\text{,}$$ hvor baade x og y kan konstrueres ved en Fjerdeproportional-konstruktion. Parallelogrammet lader sig da let konstruere.

__Eks 3.__ ABC er en Figur, begrænset af to paa hinanden vinkelrette Linier AC og BC og af en Cirkelbue AB, der er < 90°. Konstruer en Cirkel, der er indskrevet i Figuren.



Lad Cirklens Centrum være O. Vi lægger da et Koordinatsystem med Begyndelsespunktet i O og Akser parallele med CB og CA. Vi kalder Radius i den søgte Cirkel for x, og O_1's bekendte Koordinater for a og b. Ved at anvende Pythagoras' Sætning paa den skraverede Trekant, faar man $(r-x)^2 = (x-a)^2 + (x+b)^2$, hvor r er Radius i den opgivne Cirkel. Heraf faas:

$$x^2 + 2(a+b+r)x + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x = -(a+b+r) \pm \sqrt{(a+b+r)^2 - a^2 - b^2 + r^2}$$

$$x = -(a+b+r) \pm \sqrt{2ab + 2r(a+b+r)}$$

, hvor det negative Fortegn foran Kvadratroden ikke kan bruges, da det gør x negativ. Vi faar altsaa

$$x = -(a+b+r) + \sqrt{2ab + 2r(a+b+r)}$$

Man sætter nu $2ab = y^2$ og $2r(a+b+r) = z^2$ og konstruerer z og y ved Mellemproportionalkonstruktion. Man har da $x = -(a+b+r) + \sqrt{y^2+z^2}$, hvor vi sætter $v = \sqrt{y^2+z^2}$ og konstruerer v som Hypotenuse i en retvinklet Trekant, hvor y og z er Kateter. Derpaa er

$$x = -(a+b+r) + v,$$

hvoraf x kan konstrueres. Den søgte Cirkel kan nu let tegnes.

Opgaver:

1. Konstruer Rødderne i Ligningen $x^2 - ax - b^2 = 0$, hvor a og b er opgivne Liniestykker.
2. Konstruer en retvinklet Trekant af den ene Katete og den anden Katetes Projektion paa Hypotenusen.
3. Konstruer △ABC af h_a, r og $a+b+c$

4. Konstruer $\triangle ABC$ af A, v_A og $a+b+c$

5. Der er givet et Kvadrat. Konstruer en Linie, der deler Kvadratet i en Trekant og en Firkant, saaledes at Firkantens Areal er Mellemproportional mellem Arealerne af Trekanten og Kvadratet.

6. Konstruer et Parallelogram, naar Diagonalernes Skæringspunkt og Midtpunkterne af to sammenstødende Sider skal falde i hvert sit af tre givne Punkter.

7. Der er givet to Punkter. Konstruer en retvinklet, ligebenet Trekant, saaledes at de givne Punkter bliver Centrer i Trekantens om- og indskrevne Cirkler.

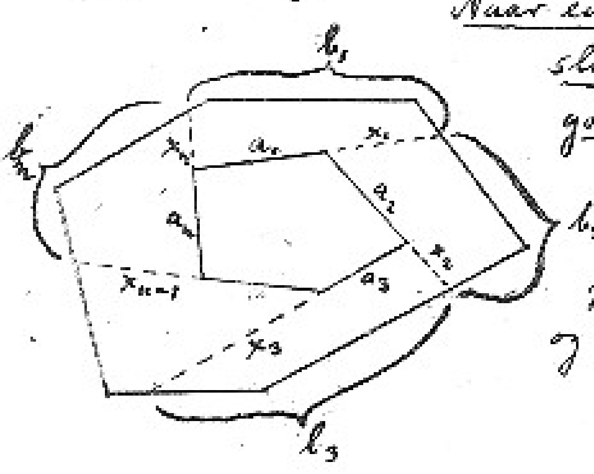
8. Konstruer et Parallelogram, hvis Sider har givne Længder, og hvis Areal er lig Arealet af en given Trekant.

Kapitel 14. Cirklens Periferi og Areal.

1. Da et ret Liniestykke ikke kan afsættes ud ad en krum Linie, maa vi ved Definition fastslaa, hvad vi vil forstaa ved Cirkelperiferiens Længde.

Hjælpesætning:

Naar en konveks Polygon helt omslutter en anden konveks Polygon, har den første større Perimeter end den sidste.



Den indre Polygons Sider forlænges som vist paa Figuren, og man faar:

$$a_1 + x_1 < b_1 + x_n$$
$$a_2 + x_2 < b_2 + x_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n + x_n < b_n + x_{n-1}$$

Adderes alle Ulighederne, faar man:

$a_1 + a_2 + a_3 \dots a_n < b_1 + b_2 + b_3 \dots b_n$, hvor-med Sætningen er bevist. Det bemærkes, at Sætningen ogsaa gælder, hvis en eller flere af den indre Polygons Vinkelspidser ligger paa den ydre Polygons Sider. Dog maa ikke de to Polygoner dække hinanden.

2. I en Cirkel med Radius r indskrives en regulær 4-kant, og derpaa ved fortsat Halvering af Buerne en regulær 8-kant, en regulær 16-kant o.s.v., hvis Omkredse er $o_1 = 4k_4$, $o_2 = 8k_8$, $o_3 = 16k_{16}$ osv. Tillige tegner man ved efterhaanden at trække Tangenter til de fremkomne Delingspunkter en omskreven, regulær 4-kant, 8-kant, 16-kant o.s.v., hvis Omkredse er $O_1 = 4t_4$, $O_2 = 8t_8$, $O_3 = 16t_{16}$ o.s.v. Vi opstiller de Tal, der angiver Længderne af disse Omkredse, udtrykt i cm i følgende Rækker:

$$(1)\quad \begin{cases} O_1 \; O_2 \; O_3 \dots O_p \dots \\ o_1 \; o_2 \; o_3 \dots o_p \dots \end{cases}$$

Ved Hjælp af Sætningen i 1 ser man nu:

1) at Leddene i den øverste Række er faldende, medens Leddene i den nederste Række er stigende.

2) at ethvert Led i den øverste Række er større end det tilsvarende i den nederste.

3) Endvidere er $O_p - o_p < \varepsilon$, naar p vælges tilstrækkelig stor. For denne sidste Paastand føres følgende Bevis:

$O_p - o_p = nt_n - nk_n = nt_n - n\cdot\frac{t_n \cdot \rho_n}{r}$*) $= nt_n\left(1 - \frac{\rho_n}{r}\right) = O_p \cdot \frac{r - \rho_n}{r}$. Man multiplicerer nu i Tæller og Nævner med $r + \rho_n$ og faar derpaa:

*) Jf. Formlen $\frac{t_n}{k_n} = \frac{r}{\rho_n}$.

$\theta_p - \sigma_p = \theta_p \cdot \frac{r^2-\rho_n^2}{r(r+\rho_n)} = \theta_p \cdot \frac{k_n^2}{4r(r+\rho_n)}$, der er $< \theta_1 \cdot \frac{k_n^2}{4r^2} = 8r \cdot \frac{k_n^2}{4r^2} = \frac{2k_n^2}{r}$. Dersom man nu vælger n saa stor, at $\frac{2 \cdot k_n^2}{r} < \varepsilon$ ɔ: saaledes at $k_n < \sqrt{\frac{r\varepsilon}{2}}$, vil $\theta_p - \sigma_p < \varepsilon$.

Rækkerne (1) vil da bestemme ét og kun ét Tal, naar r er opgivet.

3. Dersom man dividerer dette Tal med $2r$, faar man:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{4t_4}{2r} \quad \frac{8t_8}{2r} \quad \frac{16t_{16}}{2r} \cdots\cdots \frac{n t_n}{2r} \cdots\cdots \\ \frac{4k_4}{2r} \quad \frac{8k_8}{2r} \quad \frac{16k_{16}}{2r} \cdots\cdots \frac{n k_n}{2r} \cdots\cdots \end{cases}$$

Disse Rækker bestemmer et og kun et Tal, nemlig Tallet (1) : $2r$, og dette Tal (2) er konstant for alle Cirkler. Dette ses ved at gaa ud fra en Cirkel med Radius R. Vi havde da faaet Tallet

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{4T_4}{2R} \quad \frac{8T_8}{2R} \quad \frac{16T_{16}}{2R} \cdots\cdots \frac{n T_n}{2R} \cdots\cdots \\ \frac{4K_4}{2R} \quad \frac{8K_8}{2R} \quad \frac{16K_{16}}{2R} \cdots\cdots \frac{n K_n}{2R} \cdots\cdots \end{cases}$$

Ved Hjelp af Sætninger fra Ligedannethedsteorien faar man: $\frac{T_n}{R} = \frac{t_n}{r}$ og $\frac{K_n}{R} = \frac{k_n}{r}$, hvoraf

$$\frac{nT_n}{2R} = \frac{nt_n}{2r} \quad \text{og} \quad \frac{nK_n}{2R} = \frac{nk_n}{2r}$$

De to Tal (2) og (3) bestemmes altsaa ved de samme Tilnærmelsesrækker og er følgelig ligestore. Dette Tal, som er defineret ved (2) eller (3) kaldes π og er altsaa det samme for alle Cirkler.

4. Ved den förstomtalte Cirkelperiferis Længde vil vi forstaa det ved (1) bestemte Tal. Da dette er $2r$ Gange

saa stort som det Tal, der bestemmes ved (2), har man bevist, at:

<u>Cirkelperiferiens Længde = $2\pi r$.</u>

5. Hvis vi i Stedet for at gaa ud fra en regulær 4-kant var gaaet ud fra en anden regulær Polygon f. Eks. en 6-kant, havde vi for Cirkelperiferiens Længde faaet:

$$(4)\quad \begin{cases} 6t_6 \quad 12t_{12} \quad 24t_{24} \cdots \\ 6k_6 \quad 12k_{12} \quad 24k_{24} \cdots \end{cases}$$

At disse Rækker bestemmer et og kun et Tal, bevises som i §2. At dette er det samme Tal som det, der bestemmes ved (1), indses saaledes:

Rækkerne i (4) kan for Korthedsskyld skrives saaledes:

$$(5)\quad \begin{cases} O'_1 \; O'_2 \; O'_3 \cdots O'_p \cdots \\ o'_1 \; o'_2 \; o'_3 \cdots o'_p \cdots \end{cases}$$

Ifølge Hjælpesætningen vil ethvert Led i (5)s øverste Række være > ethvert Led i (1)s laveste Række, og ethvert Led i den øverste Række i (1) være > ethvert Led i den laveste Række i (5)

Nu kan p vælges saa stort, at baade $O_p - o_p < \frac{\varepsilon}{2}$ og $O'_p - o'_p < \frac{\varepsilon}{2}$

Altsaa ved Addition:

$$O_p - o_p + O'_p - o'_p < \varepsilon \quad \text{eller}$$
$$(O_p - o'_p) + (O'_p - o_p) < \varepsilon$$

Da nu begge Paranteser er positive, maa de hver for sig være $< \varepsilon$. Tallene (1) og (4) er derfor ligestore.

6. <u>Buelængden af et Udsnit paa $g°$ er $b = \frac{\pi r g}{180}$.</u>

1) <u>g hel.</u> Buelængden af et Udsnit paa 1° er $= \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$ og et Udsnit paa $g°$ har derfor Buelængden $\frac{\pi r g}{180}$

2) <u>g brudden</u> og $= \frac{a}{q}$. Buelængden af et Udsnit paa $\frac{1}{q}°$

er $\frac{1}{q}$ af $\frac{2\pi r}{360}$. Et Udsnit paa $\frac{p}{q}°$ har da Buelængden

$$\frac{2\pi r p}{360\cdot q} = \frac{\pi r g}{180}.$$

3) <u>g irrational.</u>

Lad $g = \begin{cases} G_0 \; G_1 \; G_2 \; \dots\dots \; G_n \; \dots \\ g_0 \; g_1 \; g_2 \; \dots\dots \; g_n \; \dots \end{cases}$ Man har da:

$$\frac{\pi r g}{180} = \begin{cases} \frac{\pi r G_0}{180} \quad \frac{\pi r G_1}{180} \quad \frac{\pi r G_2}{180} \dots\dots \frac{\pi r G_n}{180} \dots \\ \frac{\pi r g_0}{180} \quad \frac{\pi r g_1}{180} \quad \frac{\pi r g_2}{180} \dots\dots \frac{\pi r g_n}{180} \dots \end{cases}$$

Ved en Figurbetragtning ses det, at det Tal, som angiver Buelængden maalt i cm, ligger mellem $\frac{\pi r G_n}{180}$ og $\frac{\pi r g_n}{180}$, hvor stor end n er. Det er da $= \frac{\pi r g}{180}$.

7 <u>Cirklens Areal.</u>

Vi har defineret Tallet π ved følgende Rækker

$$\pi = \begin{cases} \frac{4t_4}{2r} \quad \frac{8t_8}{2r} \dots\dots \frac{n t_n}{2r} \dots \\ \frac{4k_4}{2r} \quad \frac{8k_8}{2r} \dots\dots \frac{n k_n}{2r} \dots \end{cases}$$

Vi multiplicerer dette Tal med r^2 og faar:

$$\pi r^2 = \begin{cases} \frac{4t_4\cdot r}{2} \quad \frac{8t_8\cdot r}{2} \dots\dots \frac{n t_n\cdot r}{2} \dots \\ \frac{4k_4\cdot r}{2} \quad \frac{8k_8\cdot r}{2} \dots\dots \frac{n k_n\cdot r}{2} \dots \end{cases}$$

Dette Tal sættes ved Definition lig med Cirklens Areal. Da $\frac{n t_n\cdot r}{2}$ er Arealet af en regulær, omskreven n-kant, og da $\frac{n\cdot k_n\cdot r}{2}$ er Arealet af en regulær, indskreven 2n-kant, ser man, at <u>Cirklens Areal er den fælles Grænseværdi for en indskreven og en omskreven regulær Polygons Areal, naar dens Sideantal fordobles i det uendelige.</u>

<u>Cirklens Areal er altsaa $= \pi r^2$.</u>

<u>Arealet af et Udsnit paa $g°$ er $U = \frac{\pi r^2 g}{360}$.</u> Beviset føres ganske som Beviset i §6. Et andet Udtryk for Udsnittets Areal faar saaledes: $U = \frac{\pi r^2 g}{360} = \frac{r}{2}\cdot\frac{\pi r g}{180} = \frac{r}{2}\cdot b$.

2. Arealet af et Afsnit.

Afsnittets Areal = Arealet af et Udsnit $\mp$ Arealet af den tilsvarende Trekant. Tegnet $\div$ benyttes, naar Afsnittets Bue er $< 180°$; $+$ benyttes derimod, naar samme Bue er $> 180°$.

Eks: Find Arealet af et Afsnit paa 30°.

I Metode: $A = \frac{\pi r^2 \cdot 30}{360} \div \frac{1}{2} k_{12} \cdot \rho_{12} = \frac{\pi r^2}{12} \div \frac{1}{2} r\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\pi r^2}{12} \div \frac{r^2}{4} = \underline{\frac{r^2}{12}(\pi - 3)}$

II Metode:

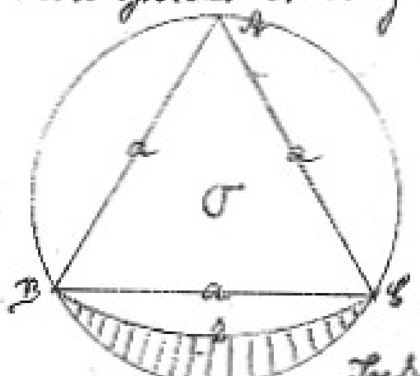
Naar man kender Korden til den dobbelte Bue, findes Trekantens Areal nemmest ved at vælge en af Radierne til Grundlinie. Højden bliver da det halve af Korden til den dobbelte Bue, her $= \frac{1}{2} k_6$.

Man faar da $A = \frac{\pi r^2}{12} \div \frac{1}{2} \cdot \frac{k_6}{2} \cdot r = \frac{\pi r^2}{12} \div \frac{r^2}{4} = \underline{\frac{r^2}{12}(\pi - 3)}$.

Som Eksempler paa den udviklede Teori kan anføres følgende

Opgaver:

1. En ligesidet Trekant ABC med Siden a er indskrevet i en Cirkel. Med A som Centrum er tegnet den Bue BC, der er $< 180°$. Find Arealet af den halvmaaneformede Figur, hvis Spidser er B og C.



1) Afsnit BDC.

Buen har sit Centrum i O, derfor er

Afsnittet $= \frac{\pi r^2 \cdot 120}{360} \div \frac{1}{2} \cdot k_3 \cdot \rho_3 =$

$\frac{\pi r^2}{3} \div \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{12}(4\pi \div 3\sqrt{3})$

Men a er k_3 i Cirklen og derfor er $a = r\sqrt{3}$ eller $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$, hvoraf ved Indsættelse: Afsnit BDC $= \underline{\frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})}$.

γ) Afsnit B E C.

Buen har sit Centrum i A, og dens Radius er derfor = a

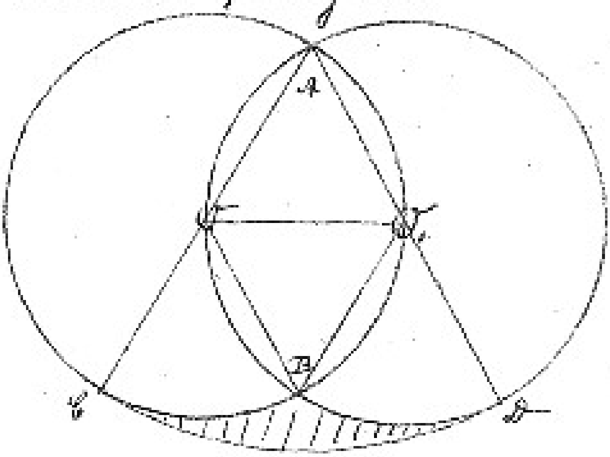
Afsnittet er da = $\frac{\pi a^2 \cdot 60}{360} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \underline{\frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})}$

Halvmaanens Areal er derfor:

$$H = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{36}\left[4\pi - 3\sqrt{3} - 6\pi + 9\sqrt{3}\right]$$

$$= \underline{\frac{a^2}{18}\left[3\sqrt{3} \div \pi\right]}$$

2. To Cirkler med Radius r gaar gennem hinandens Centra, der betegnes O og O_1. De skærer hinanden i A og B. AO skærer den ene Cirkel i C, og AO_1 skærer den anden i D. Med A som Centrum tegnes den af Buerne CD, der er < 180°. Find Arealet af den Figur, der begrænses af de 3 Buer: CB, CD og BD.



Det søgte Areal = Udsnit ACD ÷ Udsnit OBC ÷ Udsnit O_1BD ÷ Firkant $AOBO_1$

α) Udsnit ACD = $\frac{\pi \cdot (2r)^2 \cdot 60}{360} = \frac{2\pi r^2}{3}$

β) Udsnit OBC = Udsnit O_1BD = $\frac{\pi r^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$

γ) Firkant $AOBO_1 = 2 \cdot \triangle AOO_1 = 2 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$.

Det søgte Areal A er da:

$$A = \frac{2\pi r^2}{3} \div 2 \cdot \frac{\pi r^2}{6} \div \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{⊃: } \underline{A = \frac{r^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})}$$

3. I △ABC er ∢C = 90°, ∢A = 60° og AB = a cm. Over m_c

som Diameter er tegnet en Cirkel. Find det Areal, som er fælles for Cirkel og Trekant.

4. Naar en Cirkels Areal indeholder lige saa mange cm^2, som dens Periferi indeholder cm, hvor lang er da Radius, og hvor stort er Arealet af det Udsnit, hvis Omkreds er lig det Dobbelte af Diameteren.

5. ABCD og CDEF er to Kvadrater, hvis Diagonalers Skærings-punkter er G og H. Med G og H som Centrer tegnes henholdsvis Cirkelbuerne AB og EF. Med C som Centrum tegnes Cirkelbuen AE og med D som Centrum Cirkelbuen BF. Alle de tegnede Cirkelbuer er < 180°. Find Arealet af den fremkomne krumliniede Figur, naar Kvadratets Side er = a cm.

Eks: a = 1,414.

6. ABCD er et Kvadrat med Siden a. Man tegner først en Halvcirkel gennem A, B og C. Derpaa tegnes med C som Centrum og CA som Radius en Cirkelbue, der skærer DC's Forlængelse i E og med A som Centrum og samme Radius en Cirkelbue, der skærer AB's Forlængelse i F. Endelig tegnes Cirkelbuen FE, der har sit Centrum i D. Find Arealet af den fremkomne krumliniede Figur.

Eks a = 2,456.

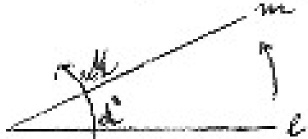
7. Find Omkredsen af den i Opg. 6 konstruerede Figur, udtrykt ved a.

8. ABC er et Udsnit paa 90°, og A er Buens Centrum. Over AB og AC som Diametre er tegnet to Cirkler. Find Forholdet mellem det Areal, der er fælles for de to Cirkler, og Udsnittet ABC.

Kapitel 15.

1. Et nyt Vinkelmaal.

I det efterfölgende vil det være praktisk at maale Vinklers Störrelse paa en ny Maade. Man tegner om Vinklens Toppunkt



som Centrum en Cirkel, hvis Radius = 1 cm, og vælger paa denne en positiv Omlöbsretning, der er den samme som den almindelige Omlöbsretning i Planen. Vinklens Störrelse er da Længden af den Bue, der afskæres mellem Vinklens Ben, maalt i Störrelse og Fortegn.

$v(lm)$ maales altsaa ved det Tal, som angiver Længden af $\overset{\frown}{lm}$ maalt i cm. Tallet regnes positivt, hvis man bevæger sig i positiv Retning, naar man gaar fra l til m langs den Bue, der ligger mellem Vinkelbenene.

Dersom $\overset{\frown}{lm} = 1$ cm, vil $v(lm) = 1$. Enheden i det nye Vinkelmaal er altsaa den Centervinkel, hvis tilsvarende Bue er lig Radius.

Vi vil söge Overgangsformler mellem det gamle og det nye Vinkelmaal.

Kalder Længden af $\overset{\frown}{lm}$, maalt i cm, for n, vil n være det Tal, som angiver $v(lm)$'s Störrelse i det nye Maal.

Men $b = \frac{\pi r g}{180}$; sættes her $b = n$ og $r = 1$, faar man:

(1) $n = \frac{\pi}{180} \cdot g$. Naar en Vinkels Gradeantal er givet, kan man af denne Formel finde n d.v.s. Vinklens Störrelse i det nye Vinkelmaal – det saakaldte naturlige Vinkelmaal og omvendt.

Eks 1. $g = 90°, 45°, 3°, 180°, 270°, 60°, 30°, 360°$. Find n.

Eks 2. $n = 1$, $\frac{\pi}{5}$, $2{,}673$, $\sqrt{5}$. Find g.

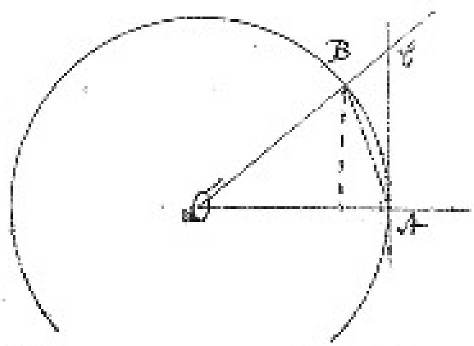
Af (1) findes $g = \frac{n \cdot 180}{\pi}$. Indsættes dette i de kendte Formler for en Buelængde og et Udsnits Areal, faar man:

$$\underline{b} = \frac{\pi r g}{180} = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{n \cdot 180}{\pi} = \underline{n r} \quad \text{og}$$

$$\underline{u} = \frac{\pi r^2 g}{360} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \frac{n \cdot 180}{\pi} = \underline{\tfrac{1}{2} n r^2}$$

2. $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x}$, hvor x er maalt i naturligt Vinkelmaal.

Brøken $\frac{\sin x}{x}$ er ubestemt $\left(\frac{0}{0}\right)$ for $x = 0$. Vi vil finde dens Grænseværdi, naar x gennem en vilkaarlig faldende Række nærmer sig ubegrænset til 0. Lad (x) være en Vinkel i 1ste Kvadrant, og lad dens Ben skære Cirklen i A og B. C er Skæringspunktet med Tangentlinien. Vi gaar ud fra, at Cirklen har Radius $= 1$. Man har da:



$$\triangle ACO > \text{Udsnit } OAB > \triangle OAB$$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x > \tfrac{1}{2} x > \tfrac{1}{2}\sin x,$$ hvor Udtrykket $\frac{1}{2}x$ er fremkommet ved i $u = \frac{1}{2} n r^2$ at sætte $r = 1$ og $n = x$. Heraf

$$\operatorname{tg} x > x > \sin x \qquad (2)$$

Vi vil først betragte $\operatorname{tg} x > x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x,$$ hvoraf, da $\cos x$ er positiv

$$\sin x > x \cos x$$

(3) $\sin x > x\left(1 \div 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)$, ifølge Formlen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Men af (2) ved man, at $\sin x$ altid er $< x$, saa længe x er en Vinkel i 1ste Kvadrant. Heraf følger, da $\frac{x}{2}$ ogsaa ligger i 1ste Kvadrant, at $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$. Dersom man nu i (3) sætter $\frac{x}{2}$ i Stedet for $\sin \frac{x}{2}$, vil man derved forøge Subtrahenden, man derved formindskes højre Side af Ulighedstegnet. Man faar altsaa:

$$\sin x > x\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) > x\left(1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) \text{ eller}$$

$\sin x > x - \frac{x^3}{2}$. Ved Sammenligning med (2) faar man $\quad x > \sin x > x - \frac{x^3}{2}$ (4)

eller $\quad 1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{2}$ (5)

Heraf ser man, at $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{x^2}{2}$, der kan göres $< \varepsilon$, saafremt $x^2 < 2\varepsilon$ eller x vælges $< \sqrt{2\varepsilon}$, hvilket altid kan göres, da den opgivne faldende Række har Grænsevær-dien 0.

Vi tænker os nu, at x nærmer sig ubegrænset til Nul gennem en vilkaarlig, stigende Række. x er da en negativ Vinkel, og man kan sætte $x = -x_1$, hvor x_1 er en Vinkel i 1ste Kvadrant. Man har derfor:

$$1 > \frac{\sin x_1}{x_1} > 1 - \frac{x_1^2}{2}, \text{ hvoraf}$$

$$1 > \frac{\sin(-x_1)}{-x_1} > 1 - \frac{(-x_1)^2}{2} \text{ eller}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Man ser heraf, at $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$, naar x paa vilkaarlig Maade nærmer sig ubegrænset til 0.

3. Tilnærmet Beregning af sinus til smaa Vinkler.

Vi havde ovenfor

$$(4) \qquad x > \sin x > x - \frac{x^3}{2}$$

Da Forskellen mellem $\sin x$ og en af Grænserne maa være < Forskellen mellem Grænserne, vil man, dersom man sætter $\sin x = x$ begaa en Fejl $f < \frac{x^3}{2}$. Dette kan man benytte til at finde sinus til smaa Vinkler.

Eks. $\sin 1°$.

Man finder först 1° i naturligt Vinkelmaal $= \frac{\pi}{180} = \frac{3,1416}{180}$ $= 0,01745 \dots < 0,0175$. Sættes nu $\sin 1° = 0,01745$, begaar man en Fejl $< \frac{0,0175^3}{2} = 0,0000026796875$. Fejlen vil altsaa först vise sig i 6te Decimal.

Ulo 2. Find sin 0,5° og angiv Tyfler ved Bestemmelsen.

Kapitel 16. Rækker med et endelig Antal Led.

A. Differensrækker.

1. En Differensrække er en Række af Tal, hvoraf ethvert findes ved at addere et konstant Tal – Differensen – til det foregaaende.

Dersom Rækkens förste Led betegnes ved a og Differensen ved d, kan Rækken skrives: a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ ....

Dersom det n^{te} Led betegnes ved a_n, vil $a_n = a+(n-1)\cdot d$. Man maa nemlig gaa $n \div 1$ Skridt frem i Rækken for at komme fra det förste til det n^{te} Led, og hvergang man gaar et Skridt frem i Rækken, maa man addere d.

Summen af Differensrækkens n förste Led betegnes s_n, og man har da $s_n = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots a_n$, eller hvis man begynder med a_n $s_n = a_n+(a_n-d)+(a_n \div 2d)+\cdots a$.

Adderes nu de to Ligninger, faar man

$$2s_n = (a+a_n)+(a+a_n)+\cdots\cdots (n \text{ Gange}) \quad \text{eller}$$

$$2s_n = n(a+a_n) \quad \text{eller}$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a+a_n).$$

2. Betingelsen for at a, b og c danner 3 paa hinanden fölgende Led i en Differensrække, er at $c-b = b-a$ eller at $b = \frac{a+c}{2}$. Det midterste af Tallene er altsaa Middeltal mellem de to andre.

3. Dersom Rækken har et ulige Antal Led eksisterer der et midterste Led. Man kan da betegne dette ved m og sætte $n = 2p+1$. Der maa da være p Led foran m og p Led efter m, og man har da: $m = a+p\cdot d$

$m = a_n - p\cdot d$, hvoraf ved Addition

$2m = a + a_n$ eller $m = \frac{a + a_n}{2}$.

<u>Det midterste Led er derfor – hvis et saadant eksisterer – Middeltal mellem første og sidste Led.</u>

<u>Eks 1</u>. Bestem en Differensrække, hvis 17' Led = 10, og hvis 23' Led er = 28.

Man har $a_{17} = a + 16d$ og $a_{23} = a + 22d$, hvoraf

$$1)\quad a + 16d = 10$$
$$2)\quad a + 22d = 28$$

Heraf ved Subtraktion $6d = 18$ ∴ $\underline{d = 3}$. Indsættes dette i 1), faar man $\underline{a = -38}$.

Rækken bliver derfor: $-38, -35, -32, -29 \ldots\ldots$

<u>Eks 2</u>. Vinklerne i en n-kant danner en Differensrække, hvis første Led er 30°, og hvis Differens er 30°. Find Polygonens Sideantal.

Vinkelsummen i en n-kant er $(n-2) \cdot 2R = (n-2) \cdot 180$. Man har altsaa $s_n = (n-2) \cdot 180$. Desuden er $a = 30$ og $d = 30$. Vi indsætter nu i Formlerne for s_n og a_n og faar

$$1)\quad 180n - 360 = \frac{n}{2}(30 + a_n)$$
$$2)\quad a_n = 30 + (n-1) \cdot 30$$

Af 2) faar $a_n = 30n$, der indsættes i 1). Herved faar man:

$$180n - 360 = \frac{n}{2}(30 + 30n) \text{ eller}$$
$$n^2 - 11n + 24 = 0, \text{ hvoraf } n = \begin{cases} 3 \\ 8. \end{cases}$$

Af disse Løsninger bør $n = 8$ kasseres, da den ene af 8-kantens Vinkler bliver 180°, og det da ligger nærmere at opfatte Polygonen som en 7-kant, og dennes Vinkler opfylder ikke de givne Betingelser.

<u>Opgave 1</u>. Find Summen af alle ulige Tal mellem 0 og 1000000.

<u>Opgave 2</u>. Summen af Leddene i en Differensrække, der har Differensen $\frac{1}{7}$, er 1, og det sidste Led er $\frac{4}{7}$. Find Rækkens Led.

Opgave 3. I en Polygon, hvis Vinkler danner en Differensrække, er den mindste Vinkel 108°, den største 172°. Find Polygonens Sideantal.

Opgave 4. I en Differensrække er $a_1 = \frac{1}{n^2+n}$, $a_2 = \frac{1}{n^2-n}$. Find Rækkens n^{te} Led, udtrykt ved n, og vis, at det er $= 3\cdot a_1$. Find endelig Summen af de n første Led.

B. Kvotientrækker.

1. En Kvotientrække er en Række af Tal, hvoraf hvert enkelt findes ved at multiplicere det foregaaende med et konstant Tal — Kvotienten.

Betegnes første Led ved a, Kvotienten ved k og n^{te} Led ved a_n, kan Rækken skrives: $a, ak, ak^2, ak^3 \ldots\ldots$, og man faar $a_n = a\cdot k^{n-1}$, da man maa gaa $n-1$ Skridt frem i Rækken, naar man gaar fra første til n^{te} Led og man multiplicere med k, hvergang man gaar et Skridt fremad.

Summen af de n første Led betegnes ved s_n, og man har:

$$s_n = a + ak + ak^2 + \ldots\, ak^{n-1}.$$

Multipliceres med k, faar man: $s_n k = \quad ak + ak^2 + \ldots\, ak^{n-1} + ak^n$. Heraf ved Subtraktion:

$$s_n - s_n\cdot k = a - ak^n \quad \text{eller}$$

$$s_n(1-k) = a - ak^n, \text{ hvoraf}$$

$$s_n = \frac{a-ak^n}{1-k}.$$

Et andet Udtryk for s_n faas saaledes:

$$s_n = \frac{a-ak^n}{1-k} = \frac{a-ak^{n-1}\cdot k}{1-k} = \frac{a-a_n\cdot k}{1-k}.$$

Denne sidste Formel benyttes med Fordel, naar a_n er opgivet.

2. Betingelsen for at tre Tal a, b og c danner paa hinanden følgende Led i en Kvotientrække er at

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{eller at} \quad b^2 = ac$$

Det midterste Led skal altsaa være Mellemproportional mellem de to andre.

3. Dersom Rækken har et ulige Antal Led, findes der et midterste Led. Kaldes dette m, kan man sætte $n = 2p+1$. 72

Man har da: $m = a \cdot k^p$

$m = a_n : k^p$, hvoraf ved Multiplication

$m^2 = a \cdot a_n$ eller $\underline{m = \sqrt{a \cdot a_n}}$

<u>Det midterste Led er</u> derfor — naar et saadant eksisterer — <u>Mellemproportional mellem første og sidste Led.</u>

4. <u>En Formel for k.</u>

Vi havde ovenfor $s_n = \frac{a - a_n k}{1 - k}$. Løses denne Ligning med Hensyn til k, faar man $s_n(1-k) = a - a_n k$

$$s_n - s_n k = a - a_n k$$

$$s_n - a = (s_n - a_n) \cdot k \quad \text{eller}$$

$$k = \frac{s_n - a}{s_n - a_n}$$

<u>5. Produktet af de n første Led.</u>

Det søgte Produkt betegnes P_n, og man har

$$P_n = a \cdot ak \cdot ak^2 \cdot ak^3 \cdots\cdots ak^{n-1} = a^n \cdot k^{1+2+3+\cdots(n-1)} =$$

$a^n \cdot k^{\frac{n-1}{2}[1+n-1]}$, ifølge Formlen for Summen af en Differensrække. Heraf $P_n = a^n \cdot k^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left[a^2 \cdot k^{n-1}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[a \cdot ak^{n-1}\right]^{\frac{n}{2}} =$

$$\left[a \cdot a_n\right]^{\frac{n}{2}}$$

Hvis Rækken har et midterste Led, vil $m^2 = a \cdot a_n$.

Indsættes dette, faas $P_n = m^n$.

Eks. Find Kvotienten og Leddenes Antal i en Kvotientrække, hvor $a = 32$, $a_n = 162$ og $s_n = 422$.

Indsættes i $k = \frac{s_n - a}{s_n - a_n}$, faar man $k = \frac{422 - 32}{422 - 162} = \frac{3}{2}$.

Man har nu $a_n = a \cdot k^{n-1}$ o: $162 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ eller

$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$. Heraf $n - 1 = 4$ og

<u>$n = 5$.</u> Det kan ofte — som her — være nyttigt at erindre, at n — Leddenes Antal — er et helt, positivt Tal.

Eks 2. Af en Differensrække paa 9 Led, hvis Sum er 90, danner 3', 5' og 8' Led paa hinanden følgende Led i en Kvotientrække. Bestem Rækkerne.

Vi indsætter i Formlerne $s_n = \frac{n}{2}(a+a_n)$ og $a_n = a+(n-1)d$

og faar $90 = \frac{9}{2}(a+a_n)$ og $a_n = a+8d$

Elimineres a_n, faar man: $90 = \frac{9}{2}(2a+8d)$ eller

$$a+4d=10 \qquad (a)$$

Desuden vil $\frac{a+7d}{a+4d} = \frac{a+4d}{a+2d}$, hvoraf $(a+7d)(a+2d) = (a+4d)^2$

$$a^2+9ad+14d^2 = a^2+8ad+16d^2$$

$2d^2 - ad = 0$ eller $d(2d-a)=0$, hvoraf

$d=0$ eller $a=2d$.

1) $\underline{d=0}$ giver indsat i (a) $\underline{a=10}$. Den 1e Række har derfor alle sine Led $= 10$

2) $a=2d$ giver indsat i (a) $6d=10$, $\underline{d=\frac{5}{3}}$, hvoraf: $\underline{a=\frac{10}{3}}$

Differensrækken er derfor

$$\frac{10}{3},\ 5,\ \frac{20}{3},\ \frac{25}{3},\ 10,\ \frac{35}{3},\ \frac{40}{3},\ 15,\ \frac{50}{3}$$

Af disse danner $\frac{20}{3}$, 10 og 15 paa hinanden følgende Led i en Kvotientrække.

Opgaver:

1. Det andet Led i en Differensrække er 21. Find første og tredje Led, naar det er givet, at 1ste Led, 2det Led og Summen af de tre første Led danner en Kvotientrække.
2. I en Differensrække paa 5 Led er Summen af Leddene $= 10$ og Produktet af Leddene $= 1440$. Find de 5 Led.
3. Tre Tal danner en Kvotientrække. Find Tallene, naar deres Sum er 13 og deres Produkt 27.
4. Bevis, at dersom a, b og $\pm c$ danner en Differensrække, saa er $8ab+c^2 = (a+2b)^2$.

5. I en Differensrække paa 7 Led er Forholdet mellem det sidste Led og Summen af de 4 første Led = 0,7. Tillige er Differensen mellem Kvadratet paa sidste Led og Kvadratet paa første Led = 0,48. Find Rækkens Led.

6. Tre Tal, af hvilke det mellemste er 12, danner en Differensrække. Bliver baade første og sidste Tal 25 mindre, medens det mellemste ikke forandres, kommer de til at danne en Kvotientrække. Find Tallene.

7. Find Summen og Leddenes Antal i en Differensrække, hvor $a_1 = \log 25$; $a_n = \log 0{,}04$ og $d = \log 0{,}2$.

8. Bestem n saaledes, at Summen af de n første Led i en Kvotientrække, hvor Kvotienten er $\frac{1}{3}$, bliver 29403 Gange saa stor som det $2n^{te}$ Led.

Kapitel 17. Rækker med uendelig mange Led.

1. Vi har før beskæftiget os med faldende, stigende og stationære Rækker; men da vi i det følgende vil komme til at træffe Eksempler paa Rækker, der falder udenfor disse, maa vi først gøre følgende Bemærkninger:
Lad $u_0, u_1, u_2 \dots u_n \dots$ være en uendelig Række, hvis Led er dannet efter en opgiven Lov, saaledes at ethvert Led er bestemt, naar man kender dets Nummer i Rækken. Saadanne Rækker lader sig let opstille, f. Eks.:

$1,\ 1\cdot2,\ 1\cdot2\cdot3,\ 1\cdot2\cdot3\cdot4,\ \dots\dots$, der er stigende og

$1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6\ \dots\dots$, der hverken er stigende, faldende eller stationær.

Vi udvider nu vore gamle Definitioner, saaledes at de ogsaa gælder de nye Rækker, og vi skal særlig fremhæve følgende: Dersom $|u_n - a| < \varepsilon$ for alle Værdier af n, som er tilstrækkelig stor, siges Rækken at have Grænseværdien a, hvilket skrives $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$.

2. Lad os nu betragte den uendelige Kvotientrække

$a, ak, ak^2, ak^3 \ldots\ldots ak^{n-1} \ldots\ldots$, der for k negativ hverken er stigende, faldende eller stationær og altsaa i dette Tilfælde ikke hører til de tidligere behandlede Rækker.

Vi vil da opstille følgende uendelige Række $s_0\ s_1\ s_2 \ldots s_n \ldots$, hvor $s_0 = 0$, $s_1 = a$, $s_2 = a + ak$, $s_3 = a + ak + ak^2 \ldots\ldots s_n = a + ak + \ldots ak^{n-1}$, og vi vil finde $\lim\limits_{n=\infty} s_n$, naar n vokser i det uendelige gennem Talrækken $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Man har da $s_n = \dfrac{a - ak^n}{1-k} = \dfrac{a}{1-k} \div \dfrac{a}{1-k} \cdot k^n$ eller

$s_n - \dfrac{a}{1-k} = -\dfrac{a}{1-k} \cdot k^n$, hvoraf $\left| s_n \div \dfrac{a}{1-k} \right| = b \cdot |k|^n$; (1)

hvor b er den numeriske Værdi af $\div \dfrac{a}{1-k}$.

1) $1 > k > -1$

Man har nu $b \cdot |k|^n < \varepsilon$, naar man blot vælger n saa stor, at $|k|^n < \dfrac{\varepsilon}{b}$, hvilket altid er muligt. Heraf følger at $\left| s_n \div \dfrac{a}{1-k} \right| < \varepsilon$, naar n vælges tilstrækkelig stor, eller at $\lim s_n = \dfrac{a}{1-k}$, naar n vokser i det uendelige gennem Rækken $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$

2) $k > 1$ eller $k < -1$

Da $|k|^n$ bliver større end ethvert opgivet Tal, naar n vælges tilstrækkelig stor, kan vi vælge n saa stor, at

$$|k|^n > \frac{K+b}{b}, \text{ hvor } b \text{ stadig er } = \left| -\frac{a}{1-k} \right|.$$

Derved bliver ifølge (1)

$$\left| s_n - \frac{a}{1-k} \right| < b \cdot \frac{K+b}{b} \quad \text{eller}$$

$$\left| s_n - \frac{a}{1-k} \right| < K + b. \qquad (2)$$

Nu er imidlertid

$\underline{|s_n| + b} = |s_n| + \left| -\dfrac{a}{1-k} \right| \geqq \left| s_n - \dfrac{a}{1-k} \right|$, der ifølge (2) er $\underline{> K+b}$

Heraf fölger $|s_n| > K$ eller $\lim |s_n| = \infty$, naar n vokser i det uendelige gennem Rækken $0, 1, 2, 3 \cdots n$

3) $k = 1$.

Den opgivne Række kan da skrives: $a, a, a, a \cdots$, og man har $s_n = n \cdot a$, hvoraf $|s_n| = n \cdot |a|$, der er $> K$, naar man blot vælger $n > \frac{K}{|a|}$.

Vi faar derfor $\lim\limits_{n=\infty} |s_n| = \infty$

4) $k = -1$.

Den opgivne Række kan skrives: $a, -a, a, -a \cdots$

Heraf ser man: $s_1 = a$, $s_2 = 0$, $s_3 = a$, $s_4 = 0$, $s_5 = a \cdots$

Derfor er $\lim s_n = 0$, naar n vokser i det uendelige gennem de lige Tals Række, medens $\lim s_n = a$, naar n vokser i det uendelige gennem de ulige Tals Række.

5. Rækken $u_0, u_1, u_2 \cdots u_n \cdots$ siges at være konvergent og at have Summen a, dersom Summen af de n förste Led har Grænseværdien a, naar n vokser i det uendelige gennem Rækken $0, 1, 2, 3 \cdots$

Dersom Summen af de n förste Led ikke har nogen endelig og bestemt Grænseværdi, siges Rækken at være divergent.

Den uendelige Kvotientrække $a, ak, ak^2 \cdots$ er konvergent for $|k| < 1$ og har da Summen $\frac{a}{1-k}$.

For $|k| \geq 1$ er den divergent.

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots$ er konvergent og har Summen $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, medens $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3} \cdots$ er divergent

Opgave: I en Kvotientrække er $s_\infty = 1 + tg^2 v$ $a = 1$ og $k = \sin^2 v$. Find n.

Vi indsætter i Formlen $s_n = \frac{a - ak^n}{1-k}$ og faar:

$$1 + tg^2 v = \frac{1 - \sin^{2n} v}{1 - \sin^2 v}$$

$$\frac{1}{\cos^2 v} = \frac{1 - \sin^{2n} v}{\cos^2 v}$$ eller naar $\cos v \gtrless 0$

$1 = 1 - \sin^{2n} v$, hvoraf $\sin^{2n} v = 0$

Hvis her $v \gtrless 180p$ hvor p er hel, maa $2n = \infty$.

Hvis derimod $v = 180p$, er $2n$ vilkaarlig.

Vi mangler nu blot at betragte $\cos v = 0$ el. $v = 90 + 180p$.

Rækkens Led er da alle $= 1$, og Rækken divergent.

Resultatet af Undersøgelsen er altsaa følgende:

Rækken $1 + \sin^2 v + \sin^4 v \ldots$ har Summen $1 + tg^2 v$, dersom $v \gtrless 90 \cdot p$, hvor p er hel.

For $v = 180p$ vil Rækken reduceres til $1 + 0 + 0 \ldots$ der har Summen $1 + tg^2(180p) = 1$

For $v = 90 + 180p$ reduceres Rækken til $1 + 1 + 1 \ldots$ der er Divergent med Summen ∞, hvad man ogsaa faar ved at sætte $v = 90 + 180p$ ind i Udtrykket $1 + tg^2 v$.

Facit paa Opgaven bliver altsaa i alle Tilfælde $n = \infty$.

4 Som Eksempel paa en uendelig Række, der hverken er Differensrække eller Kvotientrække vil vi nævne den <u>harmoniske Række</u>: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{n} \ldots$

Vi vil finde Grænseværdien for $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$ naar n vokser i det uendelige.

Mellem det positive hele Tal a og Tallet $2a$ er der $a-1$ hele Tal, der alle er $< 2a$. Heraf følger, at $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \ldots \frac{1}{2a} > \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Vi deler nu Leddene i den opgivne Række i følgende m Grupper, hvor sidste Led i enhver Gruppe altid er halvt saa stort som det sidste Led i den foregaaende Gruppe.

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \ldots \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{o. s. v.}$$

Vi faar paa denne

Maade opstillet n Uligheder, hvortil der medgaar et Antal Led af Rækken, hvilket Antal betegnes ved n. Adderes alle Uligheder, faar man:

$$s_n > n \cdot \tfrac{1}{2}. \quad \text{Man har nu:}$$

$$s_n > \frac{n}{2} > K, \text{ hvoraf } \underline{\lim_{n=\infty} s_n = \infty} \left\{ \begin{array}{l} \text{da } n \text{ altid} \\ \text{kan vælges} \\ > 2K. \end{array} \right.$$

<u>Rækken er altsaa divergent.</u>

<u>Kapitel 18. Renteregning.</u>

1. Den Afgift, der svares af en laant Kapital, kaldes <u>Rente</u>. Man angiver i Reglen Renten for et opgivet Tidsrum, f. Eks. for et Aar. <u>Ved Rentefoden forstaas det Antal Kroner, som betales i Rente for Laanet af 1 Kr i det opgivne Tidsrum.</u>

At den aarlige Rentefod er 0,04, vil altsaa sige, at man betaler 0,04 Kr ɔ: 4 Øre i aarlig Rente for et Laan paa 1 Kr. <u>Ved Procenten forstaas det Antal Kroner, der betales i Rente for Laanet af 100 Kr i det opgivne Tidsrum.</u>

At den aarlige Procent (Procent pro anno) er 5, vil altsaa sige, at den aarlige Rente af 100 Kr er 5 Kr.

Lad Renten af Kapitalen a Kr. i et vist Tidsrum (1 Termin) være R Kroner. Renten af 1 Kr er da $\frac{R}{a}$ Kr, og kalder man Rentefoden r, har man $r = \frac{R}{a}$.

Lad Procenten i samme Termin være p, vil Renten af 1 Kr blive $\frac{p}{100}$ Kr. Man har da tillige $r = \frac{p}{100}$, og hermed er da bevist følgende vigtige Formel

$$\underline{\frac{R}{a} = \frac{p}{100} = r}$$

Af denne Formel ses man, at $\underline{R = a \cdot r}$. <u>Renten af en Kapital findes altsaa ved at gange Kapital med Rentefoden.</u> Tillige ses det, at $\underline{p = 100r}$. Man finder altsaa <u>Procenten ved at gange Rentefoden med 100.</u>

Ex: $p = 3\frac{1}{2}$ $a = 500$ Kr. Find R og r.
Ex: $R = 25$ Kr $a = 600$ Kr. Find r og p.

2. Simpel Renteregning.

Man beregner ikke Renter af de paaløbne Renter.
Kapitalen a vil i Løbet af en Termin give Renten $a \cdot r$, og efter n Terminers Forløb vil Kapitalen være vokset til $a_n = a + n a r = a(1 + n r)$, da der ikke regnes Rente af Rente. I almindelig Handel anvendes ofte simpel Rente, naar Kapitalen er lille og det bestegnede Tidsrum er kort.

Ex: 135 Kr staar paa Rente i 70 Dage til 4% p.a. (pro anno ɔ: i 1 Aar). Find Renten (Simpel Rente).

$$\text{Renten i 1 Aar} = \frac{135 \cdot 4}{100}$$
$$\text{" i 1 Dag} = \frac{135 \cdot 4}{100 \cdot 360}$$
$$\text{" i 70 Dage} = \frac{135 \cdot 4 \cdot 70}{100 \cdot 360} = 1{,}05 \text{ Kr.}$$

3. Sammensat Renteregning.

Ved hver Termins Slutning lægges Renten til Kapitalen, og der beregnes Rente af Renten.
Kapitalen vil derfor efter 1 Aars Forløb være vokset til

$$a_1 = a + a r \quad \text{eller} \quad a_1 = a(1+r).$$ Heraf ses:

Man finder, hvad en Kapital er vokset til efter en Termins Forløb, ved at multiplicere den oprindelige Kapital med $(1+r)$. Eller med andre Ord: Man fører en Kapital 1 Termin frem i Tiden ved at multiplicere den med $(1+r)$.

Efter 2 Terminers Forløb er Kapitalen derfor $a_2 = a(1+r)^2$
Efter 3 – – – – – – – – – – – – $a_3 = a(1+r)^3$
eller i Almindelighed: Efter n Terminers Forløb er Ka

pitalen vokset til $a_n = a(1+r)^n$.

Hvis en Kapital a indsættes i et Foretagende, hvor der hver Termin tabes 100r % og ikke, som ovenfor, tjenes 100r %, vil Kapitalen efter 1 Termins Forløb være blevet til $a_1 = a - ar = a(1-r)$. Efter n Aars Forløb har man:

$a_n = a(1-r)^n$. Man fører altsaa en Kapital, paa hvilken der hver Termin vindes 100r %, n Aar frem i Tiden ved at multiplicere den med $(1+r)^n$. Dersom der tabes 100r % hver Termin, maa man i Stedet multiplicere med $(1-r)^n$.

Eks 1. En Kapital paa 500 Kr staar paa Rente og R.R. i 16 Aar til 5% p.a. Hvormeget er Kapitalen vokset til ved Udgangen af det 16' Aar? Find desuden Renten i det 17' Aar.

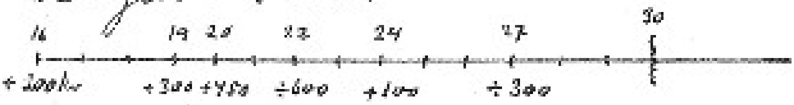
$a_n = 500 \cdot 1{,}05^{16} = 500 \cdot 2{,}18287$ (Erlang: Tabel C S. 9)

$\therefore a_n = 1091{,}435$ Altsaa $a_n =$ 1091 Kr 44 Øre.

Renten i det 17' Aar $= 1091{,}44 \cdot 0{,}05 = 54{,}572$.

Renten er altsaa 54 Kr 57 Øre.

Eks 2: I en Sparekasse, der giver 4% p.a. indsættes stadig den 1/1 i Aaret 1916 200 Kr, i 1919 300 Kr, i 1920 450 Kr. 1/1 1922 udtages 600 Kr, 1/1 1924 indsættes 100 Kr og 1/1 1927 udtages 300 Kr. Hvormeget henstaar der paa Sparekassebogen d 1/1 1930.



De 200 Kr, som indsættes 1/1 1916, vil den 1/1 1930 være vokset til $200 \cdot 1{,}04^{14}$. Anvendes samme Ræsonnement paa de andre Kapitaler, ser man, at Sparekassebogen den

$^1/_1$ 1930 vil lyde paa:

$x = 200 \cdot 1{,}04^{14} + 300 \cdot 1{,}04^{11} + 450 \cdot 1{,}04^{10} - 600 \cdot 1{,}04^{8} + 100 \cdot 1{,}04^{6} - 300 \cdot 1{,}04^{3}$

$= 200 \cdot 1{,}73168 + 300 \cdot 1{,}53945 + 450 \cdot 1{,}48024 - 600 \cdot 1{,}36857 + 100 \cdot 1{,}26532 \div$

$300 \cdot 1{,}12486 =$

$346{,}336 + 461{,}835 + 666{,}108 - 821{,}142 + 126{,}532 \div 337{,}458 =$

$= 442{,}211$. Der henstaar altsaa 442 Kr 21 Øre.

Opgaver.

1. En Kapital paa 700 Kr vokser i Löbet af 12 Aar til 1200 Kr. Find den aarlige Rentefod.

2. 2000 Kr staar paa Rente til $4\frac{1}{2}$% p.a. fra $^1/_1$ 1917 til $^1/_9$ 1930. Der regnes med Rente af Rente indtil $^1/_1$ 1930 og derpaa med simpel Rente Resten af Tiden. Hvor stor er Kapitalen den $^1/_9$ 1930.

3. To Kapitaler x og y indsættes samtidig hver i sin Sparekasse, af hvilke den förste giver 3,5% p.a., medens den anden giver $2\frac{1}{4}$% halvaarlig. Efter 18 Aars Forlöb er de begge vokset til samme Belöb. Find Forholdet mellem x og y.

4. En Forretningsmand köber $^1/_1$ 1917 et Jordstykke paa 1,567 ha à 15730 Kr pr ha, og den $^1/_7$ 1920 köber han et tilstödende Areal paa 1,843 ha à 14240 Kr pr ha. Den $^1/_1$ 1922 benytter han 5000 Kr til at indrette det samlede Areal til Byggegrunde, idet 10% af Arealet udlægges til Veje, medens Resten benyttes til Byggegrunde. Hvormeget staar hver m^2 af disse Byggegrunde ham i d 1' Januar 1925, naar han beregner 3% halvaarlig Rente af sine Penge?

4. Brudne Terminer.

Undertiden skal man beregne Renten af en Kapital for en

Brökdel af en Termin.

Lad först en Termin være delt i q ligestore Terminer, og lad Rentefoden i den förste være r, medens den er r_1 i hver af de smaa Terminer. Da man ikke maa have nogen Fordel af at regne med den ene Rentefod fremfor at regne med den anden, maa en Kapital a vokse til det samme Belöb, naar den föres frem gennem den store Termin med Rentefoden r, som hvis den föres frem gennem q smaa Terminer med Rentefoden r_1. Man faar da, at $a(1+r) = a(1+r_1)^q$ eller

$$(1+r) = (1+r_1)^q, \text{ hvoraf } \quad \underline{1+r_1 = (1+r)^{\frac{1}{q}}}.$$

Ex 1. Hvormange pro cent halvaarlig giver samme aarlige Rente som 4% p.a.?

$$1+r_1 = 1{,}04^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1{,}04}.$$

Udregning ved Logaritmer giver $1+r_1 = 1{,}02$ ɔ: 2% halvaarlig. Det er imidlertid Tabellens Unöjagtighed, der giver det unöjagtige Resultat. Ved Kvadratrodsuddragning faar man $1+r_1 = 1{,}0198$ ɔ: $r_1 = 0{,}0198$ eller 1,98%.

Opgave 1. Hvormange Procent aarlig svarer til 2% maanedlig?

5. Lad Kapitalen a staa paa Rente og Rentes Rente i $n+\frac{p}{q}$ Terminer, hvor n er et positivt helt Tal og $\frac{p}{q}$ en positiv, ægte Brök. Efter n Terminers Forlöb er Kapitalen vokset til $a(1+r)^n$. Den næste Termin deles nu i q ligestore Dele, og vi betegner den Rentefod for de smaa Terminer, som giver samme aarlige Rente som den aarlige Rentefod r, ved r_1.

Kapitalen $a(1+r)^n$ skal da föres frem gennem p af de smaa Terminer og vokser derved til $a(1+r)^n \cdot (1+r_1)^p$ eller ifölge 4.

er $(1+r_1) = (1+r)^{\frac{1}{q}}$. Efter $n+\frac{k}{q}$ Termin er Kapitalen 83
derfor vokset til $a(1+r)^n \cdot (1+r)^{\frac{k}{q}} = a(1+r)^{n+\frac{k}{q}}$.
Formlen $\underline{a_n = a(1+r)^n}$ gælder altsaa ogsaa, naar n er brudden

Eks: 700 Kr staar paa R og RR til 6% p.a. fra 1/1 1917 til 1/10 1925. Hvor stor er Kapitalen paa sidstnævnte Tidspunkt?

$$a_n = 700 \cdot 1{,}06^{8\frac{3}{4}} \qquad \log 700 = 2{,}8451$$

$$8\tfrac{3}{4} \log 1{,}06 = 8\tfrac{3}{4} \cdot 0{,}0253059 = \underline{0{,}2214(266)}$$

$$\log a_n = 3{,}0665$$

$$a_n = \underline{1165} \text{ Kr.}$$

6. Lad a_{-n} betyde den Kapital, som i Löbet af n Aar med $100r$% aarlig R og RR vokser til Kapitalen a. Man har da:

$$a = a_{-n}(1+r)^n \text{ eller}$$

$$a_{-n} = \frac{a}{(1+r)^n} \quad \text{eller } a_{-n} = a(1+r)^{-n}.$$

Naar a_{-n} har denne Betydning, ser man, at Formlen $a_n = a(1+r)^n$ ogsaa gælder, naar n er negativ, og <u>at man fører en Kapital n Aar tilbage i Tiden ved at dividere den med $(1+r)^n$.</u>

<u>Eks 1</u>. Hvormange Aar vil det vare, inden en Kapital er fordoblet, naar den aarlige Rente er 4%.

Man har: $\quad 2a = a \cdot 1{,}04^n$, hvoraf $1{,}04^n = 2$

$$n \log 1{,}04 = \log 2$$

$$n \cdot 0{,}0170333 = 0{,}3010 \qquad n = \frac{0{,}3010}{0{,}01703}$$

$$\log 0{,}3010 = 0{,}4785 \div 1$$

$$\log 0{,}01703 = \underline{0{,}2312 \div 1}$$

$$\log n = 0{,}2473 \quad \text{o: } \underline{n = 17{,}67}$$

Kapitalen fordobles altsaa i Löbet af ca $17\frac{1}{2}$ Aar.

<u>Eks 2</u>. 300 Kr indsættes 1/1 1917 i en Sparekasse, der giver 3%

p.a. indtil 1/5 1923, derpaa 4½ % p.a. indtil 1/11 1925 og derpaa 4% p.a. Hvormeget henstaar i Sparekassen den 1/1 1927?

1/1 17 — 1/5 23 — 1/11 25 — 1/1 27
300 — 3% — 4½ % — 4%

Den 1/5 23 er Kapitalen vokset til $300 \cdot 1{,}03^{6\frac{1}{3}}$.

Denne Kapital skal nu föres frem med R og RR til 1/11 25. Den vokser derved til $300 \cdot 1{,}03^{6\frac{1}{3}} \cdot 1{,}045^{2\frac{1}{2}}$, der derpaa skal föres frem til 1/1 27. Facit bliver da:

$$x = 300 \cdot 1{,}03^{6\frac{1}{3}} \cdot 1{,}045^{2\frac{1}{2}} \cdot 1{,}04^{1\frac{1}{6}}$$

$$\log 300 = 2{,}4771$$
$$6\tfrac{1}{3} \cdot \log 1{,}03 = 6\tfrac{1}{3} \cdot 0{,}0128372 = 0{,}0813$$
$$2\tfrac{1}{2} \cdot \log 1{,}045 = 2\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}0191163 = 0{,}0478$$
$$1\tfrac{1}{6} \cdot \log 1{,}04 = 1\tfrac{1}{6} \cdot 0{,}0170333 = 0{,}0199$$
$$\log x = 2{,}6261 \qquad \underline{x = 422{,}8 \text{ Kr.}}$$

Opgaver.

1. A har i 1917 sat 1000 Kr paa R og RR; i 1927 har han sat 2000 Kr ind paa samme Maade; i 1937 er de indsatte Penge vokset til saa stor en Sum, at han kan köbe sig en aarlig Livrente paa 500 Kr, idet han for hvert 100 Kr, han betaler, faar 10 Kr i Livrente. Til hvilken aarlig Rente har Pengene staaet inde?

2. A köber 1 Okshoved Vin for 800 Kr d. 1/1 1910 og lader det ligge indtil 1917. I Löbet af dette Aar sælger han Vinen for 5 Kr. pr Flaske, og han betragter hele Salget som sket midt i 1917. Dersom han beregner 6% p.a af de Penge, han anbringer i sin Forretning, hvormange % p.a. har han da tjent udover de 6%?

1 Okshoved = 240 l.; 1 Fl = ¾ l. Han holder Prisen for de anvendte Flasker udenfor Beregningen.

3. A vil sælge en Mark. B byder ham 3000 Kr at betale om 1 Aar og 2000 Kr om 7 Aar, medens C byder ham 4000 Kr om 2 Aar og 1000 Kr om 6 Aar. Hvilket af Tilbuddene skal han modtage? 6% p.a.

4. Til Udførelsen af et Foretagende indskyder A 1200 Kr og B 850 Kr; $\frac{1}{2}$ Aar senere indskyder B yderligere 600 Kr, og $\frac{1}{2}$ Aar senere indtræder C som Deltager, idet han indskyder 1500 Kr. Forretningen afsluttes $2\frac{1}{4}$ Aar efter, at den er begyndt, og giver en Fortjeneste af 1387 Kr, som fordeles mellem Deltagerne i Forhold til deres Indskud med R og RR. beregnet efter 3% halvaarlig. Hvormeget faar hver?

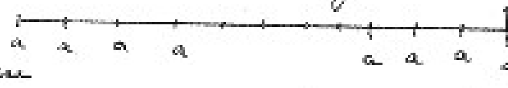
Kapitel 19. Annuiteter.

1. En Annuitet er en Række af ligestore Udbetalinger, af hvilke der betales én hver Termin.

Ved Annuitetens Kapitalværdi paa et bestemt Tidspunkt forstaar man Summen af alle de enkelte Udbetalinger, efterat hver enkelt med R og R.R. er ført hen til dette Tidspunkt.

Lad der f.Eks. i n paa hinanden følgende Aar ved hvert Aars Begyndelse være indbetalt a Kr i en Sparekasse, der giver 100r % p.a. Vi vil da finde Annuitetens Kapitalværdi samtidig med sidste Indbetaling.

Paa det omtalte Tidspunkt har sidste Indbetaling Værdien



a, den næstsidste Værdien $a(1+r)$, da den har staaet paa Rente i 1 Aar. Den tredjesidste Værdien $a(1+r)^2$ o.s.v.

Kapitalværdien af Annuiteten samtidig med sidste

Indbetaling er derfor:

$K = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \dots\dots a(1+r)^{n-1} =$

$a[1+(1+r)+(1+r)^2+\dots\dots(1+r)^{n-1}]$. Summeres nu den fremkomne Kvotientrække efter Formlen $s_n = \frac{a-ak^n}{1-k}$, faar man: $K = a\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = a\cdot\frac{1-(1+r)^n}{-r} = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.
Foretages der hver Termin – ialt i n Terminer – en Udbetaling af a Kr, vil denne Annuitets Kapitalværdi samtidig med sidste Udbetaling være

$$K = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$$

2. Man kan nu ved at före den fundne Værdi frem eller tilbage i Tiden, finde Annuitetens Kapitalværdi paa et hvilketsomhelst Tidspunkt.
Lad os tænke os, at vi har stiftet en Gæld G, og at vi afbetaler denne ved en Annuitet, der bestaar af n Udbetalinger a, saaledes at förste Udbetaling skal falde en Termin efter Gældens Stiftelse.
Dersom Gælden nu skal kunne afbetales ved den omtalte Annuitet, maa Gældens og Annuitetens Kapitalværdi være ligestore, naar de henföres til samme Tidspunkt. Samtidig med sidste Afbetaling er Gælden imidlertid vokset til $G\cdot(1+r)^n$, medens Annuitetens Kapitalværdi paa samme Tidspunkt er $\frac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$. Man har derfor:

$$G\cdot(1+r)^n = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right] \quad \text{eller}$$

$$G = \frac{a}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right] \quad \text{eller}$$

$$G = \frac{a}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right]$$

Dette er tillige Annuitetens Kapitalværdi een Termin för förste Udbetaling.

Eks 1. En Annuitet paa 200 Kr indbetales i en Sparekasse *) hver 1/1 i Aarene fra 1917 til 1927. Den er testamenteret til A, som imidlertid har forpligtet sig til ikke at hæve den før 1/1 1927. For at skaffe Penge sælger han Annuiteten til B den 1/1 1922, og B betaler ham 2300 Kr for den. Hvormeget har A vundet eller tabt ved den Handel?

Annuitetens Kapitalværdi er den 1/1 1927 $\frac{200}{0,04}\left[1,04^{11}-1\right]$

— — — — — — — — 1/1 1922 $\frac{200}{0,04}\left[1,04^{11}-1\right]:1,04^{5}$

$$= \frac{200}{0,04}\left[1,04^{6} \div 1,04^{-5}\right] = 5000\left[1,26532 \div 0,82193\right] = \underline{2216,95 \text{ Kr}}$$

A har altsaa vundet <u>83 Kr 05 Øre</u>.

<u>Eks 2.</u> En Gæld paa 5000 Kr stiftes den 1/1 1917. Den afbetales med en Annuitet, idet man hvert Aar betaler a Kr, første Gang d 1/1 1918, sidste Gang d 1/1 1927. Gælden forrentes med 6% p.a. Find a.

Man har $5000 = \frac{a}{0,06}\left[1 - 1,06^{-10}\right]$ ∴

$$a = \frac{300}{1-1,06^{-10}} = \frac{300}{1 \div 0,55839} = \frac{300}{0,44161}$$

$$\begin{aligned} \log 300 &= 2,4771 \\ \log 0,4416 &= 0,6450 \div 1 \\ \hline \log a &= 2,8321 \end{aligned} \quad ∴ \; a = \underline{679,3 \text{ Kr}}.$$

3. Naar G, a og r er opgivet, kan n findes af $G = \frac{a}{r}\left(1-(1+r)^{-n}\right)$. Man vil da i Reglen finde n lig et blandet Tal, hvad der viser, at Gælden ikke kan afbetales ved en Annuitet under de givne Betingelser. Man kan da afbetale Gælden ved at forhøje den sidste Udbetaling noget (med x Kr). Hvis n er fundet $= p+\alpha$, hvor p er hel, positiv, og α en positiv ægte Brøk, vil

$$x = G(1+r)^{p} \div \frac{a}{r}\left((1+r)^{p}-1\right) = \frac{Gr-a}{r}(1+r)^{p} + \frac{a}{r}.$$

*) Sparekassen giver 4% p.a.

Eks: En Gæld paa 2000 Kr forrentes og afdrages med 150 Kr aarlig, saaledes at det første Afdrag betales 1 Termin efter Gældens Stiftelse. Hvorlænge vil det vare, inden Gælden er afbetalt, naar den forrentes med 5% p.a. Hvis Gælden ikke kan afbetales ved en Annuitet, forhøjes den sidste Afbetaling med en Sum x, saaledes at Gælden dermed er afbetalt. Find x.

$$2000 = \frac{150}{0{,}05}\left[1 \div \frac{1}{1{,}05^n}\right], \text{ hvoraf}$$

$$\frac{2}{3} = 1 \div \frac{1}{1{,}05^n} \quad \text{eller} \quad 1{,}05^n = 3$$

$$n \log 1{,}05 = \log 3 \quad \text{eller} \quad n = \frac{0{,}4771}{0{,}0211893}$$

$$\log 0{,}4771 = 0{,}6786 - 1$$

$$\log 0{,}02119 = \underline{0{,}3261 - 2}$$

$$\log n = 1{,}3525 \qquad \underline{n = 22{,}51 \text{ Aar}}$$

Gælden kan saaledes ikke afbetales ved en Annuitet.

$$x = 2000 \cdot 1{,}05^{22} \div \frac{150}{0{,}05}\left[1{,}05^{22} - 1\right] =$$

$$\left[2000 \div \frac{150}{0{,}05}\right] 1{,}05^{22} + \frac{150}{0{,}05} =$$

$$\div 1000 \cdot 1{,}05^{22} + 3000 = \div 1000 \cdot 2{,}92526 + 3000$$

$$= 3000 \div 2925{,}26 = \underline{74{,}74.}$$

Gælden afbetales derfor ved 21 aarlige Afbetalinger à 150 Kr og ved et sidste Afdrag paa 224 Kr 74 Øre.

5. Af Formlen $G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$ faar man:

$$\frac{Gr}{a} = 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \quad \text{eller}$$

$$\frac{1}{(1+r)^n} = 1 - \frac{Gr}{a} = \frac{a - Gr}{a}, \text{ hvoraf}$$

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Gr} \quad \text{eller} \quad n = \frac{\log a \div \log(a - Gr)}{\log(1+r)}$$

Heraf ser man, at n kan findes, saafremt $a > Gr$ ɔ: saafremt den aarlige Ydelse er > Renten af den oprindelige Gæld. Dersom $a = Gr$, giver Formlen $n = \infty$, og dersom $a < Gr$, giver Formlen n kompleks. Dette stemmer med, at man aldrig kan faa Gælden afbetalt, naar man ikke betaler mere end sine Renter.

Opgaver:

1. En Gæld paa 6000 Kr stiftes 1/1 1917. Der betales hverken Renter eller Afdrag før 1/1 1921 og 1/1 1922, hvor hvergang de aarlige Renter for henholdsvis 1920 og 1921 betales. Derpaa afbetales Gælden med en aarlig Ydelse paa 600 Kr, første Gang 1/1 1923. Dog betales der intet 1/1 1927. Hvorlænge varer det inden Gælden er betalt? Hvis den ikke kan afbetales med en Annuitet, forhøjes sidste Afbetaling med x Kr, saaledes at Gælden dermed er betalt. Find x. Gælden forrentes med 6%.

2. En Kapital paa 3000 Kr staar som 1ste Prioritet i en Ejendom. Der betales $4\frac{3}{4}$ % p.a. i Renter og Afdrag af de laante Penge, og af disse er $4\frac{1}{2}$ % p.a. at beregne som Renter af den laante Kapital. Hvor stor er Gælden efter 10, 20 og 30 Aar? Hvornaar er Gælden afbetalt.

3. Idet Forholdene er som i Opg 2, skal man beregne, hvor stor den aarlige Pengeydelse er. Man skal derpaa angive, hvor mange Kr og Øre af den 20nde Afbetaling, der er Rente for det foregaaende Aar, og hvormange Kr. og Øre der er Afdrag.

4. Hver 1/1 indsættes i 10 paa hinanden følgende Aar 500 Kr i en Sparekasse, der giver 2% halvaarlig. Fra det 11te til det 20nde Aar (begge inclusive) hæves hver 1/1 en Sum paa x Kr, saaledes at dermed alt, hvad der henstaar paa Bogen,

er kendt. Find x.

5. En Gæld amortiseres ved at man aarlig betaler 7% af den oprindelige Gæld. Hvorlænge vil det vare, inden Gælden er afbetalt? Hvormange % af den oprindelige Gæld maa man betale udover de normale 7% ved den 20ende Udbetaling for dermed at være helt færdig med Gælden? Hvormange % af den oprindelige Gæld udgør Rente og Afbetaling ved den 10ende Udbetaling?

Kapitel 20.

1. Polynomiers Division.

Udtrykket $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\ a_{n-1}x + a_n$, hvor n er positiv og hel, medens $a_0\ a_1\ a_2 \dots a_n$ er uafhængige af x, kaldes et helt Polynomium, der er af $n$te Grad i x. $a_0x^2 + a_1x + a_2$ er saaledes et helt Polynomium af 2den Grad, medens $a_0x + a_1$ er et helt Polynomium af 1ste Grad, og a_0 kan betegnes som et Polynomium af 0te Grad i x.
De to sidste Betegnelser vil vise sig nyttige i det efterfølgende, men er sprogligt ukorrekte.

Naar et helt Polynomium af $n$te Grad er skrevet paa Formen $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots\ a_{n-1}x + a_n$ siges det at være ordnet efter faldende Potenser af x.

Ligningen $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$, hvor $\mathfrak{D}$ begge Steder er en Betegnelse for det samme Polynomium i x, og hvor derfor de to Sider af Lighedstegnet slet forandret er de samme, er øjensynlig tilfredsstillet for alle Værdier af x. Naar en Ligning saaledes er tilfredsstillet for alle Værdier af x, siges den at være en Identitet eller at være identisk tilfredsstillet. Ligningen $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$ er et Eksempel paa en saadan Identitet. Vi har for Resten ofte tidligere truffet paa saadanne Identiteter, hvor Ligningens to Sider efter Udregning og Ordning af Leddene, giver samme matematiske Udtryk paa begge Sider af Lighedstegnet. $(x+3)(x-3)=x^2-9$ er en saadan Identitet, medens $x^2-3x+2=0$ ikke er en Identitet, da den kun tilfredsstilles af $x=\begin{cases}1\\2\end{cases}$.

Lad nu $D=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}\cdot x+a_n$ og

$d=b_0x^p+b_1x^{p-1}+\dots b_{p-1}\cdot x+b_p$ være to hele Polynomier, og lad $n\geqq p$.

Man kan da altid bestemme to hele Polynomier q og r, af hvilke q er af Graden $n-p$, og r er af lavere Grad end d, saaledes at man har Identiteten:

$$D=d\cdot q+r.$$

Man kan nemlig altid finde et helt Polynomium r_1, hvis Grad er $< n$, saaledes at man identisk har

$D=dq_1+r_1$. Vi sætter nemlig blot $q_1=\frac{a_0}{b_0}\cdot x^{n-p}$, der er den Störrelse, der fremkommer, naar förste Led i d divideres ind i förste Led i D. Da $n\geqq p$, ses det tillige, at q_1 er af Graden $n-p$, der er $\geqq 0$.

Man faar da:

$r_1=D-dq_1=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_n\div\frac{a_0}{b_0}x^{n-p}(b_0x^p+b_1x^{p-1}+\dots b_p)$,

der höjst er af $n-1$ste Grad.

Hvis r_1 nu viser sig at være af lavere Grad end d, er Sætningen dermed bevist. Hvis derimod r_1 er af samme Grad som d eller af höjere Grad end d, kan man paa samme Maade som ovenfor bestemme et helt Polynomium r_2, hvis Grad er $<$ r_1's Grad, og saaledes at man identisk har $r_1=dq_2+r_2$, hvor q_2 har en Grad i x, der er $\geqq 0$. Man har da:

$$D = dq_1 + r_1 = dq_1 + dq_2 + r_2 = d(q_1+q_2) + r_2.$$

Hvis r_2 viser sig at være af lavere Grad end d, er dermed Sætningen bevist. Er dette derimod ikke Tilfældet, kan ovenstaaende Fremgangsmaade benyttes saa mange Gange, at man naar til et helt Polynomium r_m, hvis Grad er mindre end d's Grad, og for hvilken man identisk har

$$D = d(q_1+q_2+q_3 \cdots q_m) + r_m$$

hvor tillige alle q'erne er af en Grad i x, der er $\geqq 0$, hvoraf ses at $q_1+q_2 \cdots q_m$ er et helt Polynomium af $n-p$'te Grad i x.

I Lighed med hvad vi vilde sige, hvis D og d var hele Tal, siger man nu, at Ligningen $D = dq + r$ viser, at man ved at dividere d (Divisor) op i D (Dividend) faar Kvotienten q og Resten r.

Hvis $r = 0$ siges Divisionen at gaa op, og man har da:

$$D : d = q.$$

Vi vil dernæst vise, hvorledes man i Praksis foretager en Division af to Polynomier.

$$\begin{array}{l}
x^2-2x+5\;)\;x^5 - x^4 + 2x^3 - 7\;(\,x^3+x^2-x-3 \\
\qquad\qquad\quad \mp x^5 \pm 2x^4 \mp 5x^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad x^4 - 3x^3 \qquad - 7 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \mp x^4 \pm 2x^3 \mp 5x^2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad -x^3 - 5x^2 - 7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \pm x^3 \mp 2x^2 \pm 5x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -3x^2 + 5x - 7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pm 3x^2 \mp 6x \pm 15 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -x + 8
\end{array}$$

hvor $D = x^5 - x^4 + 2x^3 - 7$, $d = x^2 - 2x + 5$, $q = x^3 + x^2 - x - 3$ og $r = -x + 8$

Det bemærkes, at Resten er af lavere Grad end Divisor.

Man har altsaa:

$$x^5-x^4+2x^3-7 = (x^2-2x+5)(x^3+x^2-x-3) - x+8.$$

At denne Ligning er rigtig ses, idet

$x^5-x^4+2x^3-7-(x^2-2x+5)(x^3+x^2-x-3) = -x+8$ eller

$x^5-x^4+2x^3-7-x^3(x^2-2x+5)-x^2(x^2-2x+5)-(-x)(x^2-2x+5)-(-3)(x^2-2x+5)$,

der netop i følge Udregningen ovenfor.

2. Lad os betegne det hele, n^{te} Grads Polynomium

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_n$$ ved $f(x)$, og lad os dividere det med $x-\alpha$, hvor α er uafhængig af x.

Vi faar da: $f(x) = (x-\alpha)\cdot q + r$, hvor Kvotienten q er af $n-1^{te}$ Grad, og Resten r er af 0^{te} Grad, hvilket vil sige, at Resten ikke indeholder x.

Om Ligningen $f(x) = (x-\alpha)\cdot q + r$ kan vi derfor sige to Ting: 1) er den en Identitet og er altsaa rigtig for alle Værdier af x og 2) indeholder r ikke x.

Ligningen maa da ogsaa være rigtig, naar man indsætter α overalt i Stedet for x. Man faar da:

$f(\alpha) = (\alpha-\alpha)q_\alpha + r$, hvor q_α og $f(\alpha)$ betyder Værdien af q og af $f(x)$, naar man i Stedet for x sætter α.

Heraf følger $f(\alpha) = r$, og dette Resultat kan i Ord udtrykkes saaledes:

Naar man dividerer $(x-\alpha)$ op i $f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_n$ kan man — ved at tage en passende Kvotient — faa Resten $f(\alpha)$.

Tillige ser man, at $(x-\alpha)$ gaar op i $f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_n$ dersom $f(\alpha)=0$ og omvendt.

Man kan altsaa undersøge, om $x-\alpha$ gaar op i et n^{te} Grads Polynomium, ved at indsætte α i Polynomiet i Stedet for x.

Hvis man da efter Udregning faar Resultatet 0, vil Divisionen gaa op, ellers ikke.

Ex: $x-1$ gaar op i $x^5+3x^4-4x^3+x^2-1$, thi indsættes 1 i Stedet for x, faar man $1+3-4+1-1=0$

$x+2$ gaar op i x^6-x^3-72, thi indsættes $\div 2$ i Stedet for x, faar man $(-2)^6-(-2)^3-72=0$.

$x+1$ gaar ikke op i x^6-x^3-72, men giver ved Division med $x+1$ Resten $\div 70$.

Opgave 1. Forkort Brøken $\frac{2x^3+7x^2-29x+21}{2x^2+x-6}$

Man opløser Nævneren i Faktorer og prøver ved Hjælp af Reglen ovenfor, om nogle af de fremkomne første Grads Faktorer gaar op i Tælleren.

Opgave 2. Bevis, at Divisionen $\frac{x^n-y^n}{x-y}$, hvor n er hel og positiv, gaar op, og udfør derpaa Divisionen.

Opgave 3. Bestem a, saaledes at $x^3-2ax^2+5ax+a-11$ bliver delelig med $x+1$:

Opgave 4. For hvilke Værdier af a og b kan Brøken

$$\frac{ax^2-x-b}{bx^3+ax^2+x+a}$$ forkortes med $x+1$.

Udfør derpaa Forkortningen, naar a og b har disse Værdier.

Opgave 5. Reducer Udtrykket

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}+\frac{y^3+z^3}{y+z}+\frac{z^3+x^3}{z+x}\div\frac{2x^3+2y^3+2z^3-6xyz}{x+y+z}.$$

Opgave 6. Udfør Divisionen

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$ og beregn Kvotienten

for $x=2\sqrt{5}$ $y=\sqrt{7}-3\sqrt{5}$ og $z=\sqrt{5}-\sqrt{7}$.

Opgave 7. Reducer Udtrykket

$$\frac{(a^2-3a+7)(2a-3)}{4a^5-21a^3+28a^2+27a-63}$$ og beregn det derpaa for $a=\sqrt[5]{0{,}001}$.

Kapitel 21.

1. Induktionsbeviset.

Vi har før truffet paa dette Bevis og skal her give et nyt Eksempel paa dets Anvendelse. Vi vil bevise, at

$$1^2+2^2+3^2+\dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (1)$$

hvor n er et positivt, helt Tal.

Vi beviser først, at dersom Ligningen gælder for $n =$ det hele, positive Tal p, vil den ogsaa gælde for $n = p+1$.

Vi gaar altsaa ud fra, at

$$1^2+2^2+3^2+\dots p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \qquad (2)$$

og vil bevise, at $1^2+2^2+3^2+\dots p^2+(p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$.

Man har nemlig:

$$1^2+2^2+3^2+\dots p^2+(p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2$$ ifølge (2).

Sætter man derpaa $\frac{p+1}{6}$ udenfor en Parentes i de to Led, faar man:

$$1^2+2^2+3^2+\dots p^2+(p+1)^2 = \frac{p+1}{6}\left[p(2p+1)+6(p+1)\right] =$$

$$\frac{p+1}{6}\left[2p^2+7p+6\right] = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$, hvad man skulde bevise.

Ved at indsætte $n=1$ i (1) ser man derpaa, at Ligningen gælder for $n=1$. Den maa da ogsaa være rigtig for $n=1+1=2$. Og naar den gælder for $n=2$, vil den ogsaa være rigtig for $n=2+1=3$ og saaledes videre.

Ligning gælder da for ethvert positivt og helt n.

Opgave: Bevis, at $1^3+2^3+3^3\dots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. Permutationer.

Lad $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ være n forskellige Størrelser eller, som man plejer at sige, n forskellige Elementer. Af disse vil vi udvælge p, idet $p \leq n$ og opstille dem i en eller

anden Orden. En saadan <u>Opstilling af p Elementer, hvor man tager Hensyn til Ordenen kaldes en Permutation</u> og to Permutationer af p Elementer skal altsaa anses for forskellige, naar <u>den ene indeholder blot eet Element som ikke findes i den anden, eller hvis de indeholder de samme Elementer i forskellig Orden</u>.
Vi vil bestemme Antallet af Permutationer, der dannes, naar man udtager p Elementer paa alle mulige Maader blandt n og stiller dem op i forskellig Orden. Dette Antal betegnes ved $P_{n,p}$.
Vi vil först gennemgaa et specielt Eksempel.
Lad en Hylde i en Bogreol indeholde 50 forskellige Böger. Vi vil af disse udtage 20 Böger paa alle mulige Maader og stille dem op i forskellig Orden paa en ny Hylde i Reolen og vil da bestemme alle mulige Permutationer af 20 Böger, valgt paa alle mulige Maader blandt de 50. Vi vil altsaa finde $P_{50,20}$.
Den förste Bog kan vælges paa 50 forskellige Maader. Naar den förste Plads er besat, kan den anden Bog vælges paa 49 Maader, og de to förste Pladser kan fölgelig besættes paa $50 \cdot 49$ forskellige Maader. Naar de to förste Pladser er besat, kan den tredje Bog vælges paa 48 Maader, og de tre förste Pladser kan derfor besættes paa $50 \cdot 49 \cdot 48$ forskellige Maader. Fortsættes saaledes, ser man, at $P_{50,20} = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 31$, da den sidste Bog kan vælges paa $50 - 19 = 31$ Maader, naar de förste 19 Pladser er besat.
Vi gaar nu over til det almindelige Tilfælde.

Vi har opgivet n forskellige Elementer $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ og vil af disse paa alle mulige Maader udtage p Elementer og stille dem op i forskellig Orden. Vi vil da bestemme Tallet $P_{n,p}$, hvor $n \geqq p$.

Det förste Element kan velges paa n Maader. Naar förste Plads er besat, kan det andet Element velges paa $n-1$ Maader, hvoraf fölger, at förste og anden Plads kan besettes paa $n(n-1)$ Maader. Naar disse to Pladser er besat, kan det tredje Element velges paa $n-2$ Maader, og de tre förste Pladser kan derfor besettes paa $n \cdot (n-1)(n-2)$ Maader. Fortsettes saaledes, ser man, at

$$P_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) \qquad (1)$$

da det sidste Element kan velges paa $n-p+1$ Maader, naar de förste $p-1$ Pladser er besat.

Man kan nu skrive dette:

$$P_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$= \underline{\dfrac{n!}{(n-p)!}}$, idet man ved $n!$ betegner Produktet af alle hele Tal fra 1 til n, begge inclusive.

Settes $n = p$ i (1) faar man:

$$P_{n,n} = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{n!}$$

<u>n forskellige Elementer kan altsaa permuteres paa $n!$ forskellige Maader.</u>

I Eks. ovenfor kan man skrive $P_{50,20} = \dfrac{50!}{(50-20)!} = \dfrac{50!}{30!}$.

<u>Opgave 1.</u> Hvormange Signaler kan man danne ved at velge 6 Signalflag blandt 10 forskellige og hænge dem op ved Siden af hinanden paa en vandret Snor?

<u>Opgave 2.</u> Hvormange 3 ziffrede Tal kan der skrives med Ziffrene 1, 2, 7, 8, 9, naar de tre Ziffer skal være forskellige?

Find derpaa Tallenes Sum og Middeltal. Hvormange af 98 Tallene er delelige med 2, og hvormange er delelige med 7?

3 Kombinationer.

Vi har atter opgivet n forskellige Elementer $a_1 a_2 \dots a_n$, af hvilke vi paa alle mulige Maader vil udtage p Elementer, idet $p \leqq n$ og stille dem op uden at tage Hensyn til Ordenen. En saadan Opstilling af p Elementer, hvor der ikke tages Hensyn til Ordenen kaldes en Kombination, og to Kombinationer af p Elementer skal derfor kun anses for forskellige, naar den ene indeholder et eller flere Elementer, der ikke findes i den anden.

Vi vil bestemme det Antal af Kombinationer, der dannes, naar man udtager p Elementer paa alle mulige Maader blandt de n opgivne og stiller dem op uden at Hensyn til Ordenen. Vi betegner det søgte Antal ved $K_{n,p}$.

Vi behandler først et specielt Eksempel:

Hvormange forskellige Produkter kan der dannes ved at tage 4 Faktorer ud blandt Tallene 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13? Lad os tænke os alle de forskellige Produkter opstillet nedenfor:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
$11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 5$
- - - - -
- - - - -

Da Faktorernes Orden er uden Betydning for Produktets Værdi, ser man, at det er en Kombinationsopgave, vi beskæftiger os med, og at det gælder om at finde $K_{7,4}$. Dersom det havde været nødvendigt at tage Hensyn til Ordenen, maatte man have erstattet hver af de opstillede Kombinationer med 4! Permutationer, da 4 Elementer kan permuteres paa 4! forskellige Maader. Men derved vilde man have faaet alle Permutationer, som kan dannes, naar 4 Elementer tages ud blandt 7. Man faar da:

$$P_{7,4} = 4!\, K_{7,4} \quad \text{eller} \quad \frac{7!}{3!} = 4! \cdot K_{7,4}\ , \text{hvoraf}$$

$$K_{7,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

Vi gaar derpaa over til det almindelige Tilfælde og vil nu bestemme $K_{n,p}$.

Lad alle mulige Kombinationer af p Elementer taget ud blandt de opgivne n være opstillet nedenfor:

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_p \\ a_2\ a_3\ a_4 \cdots\cdots a_{p+1} \\ a_5\ a_7\ a_{11} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Dersom man nu ved Opstillingen vilde tage Hensyn til Ordenen, maatte hver af de opstillede Kombinationer erstattes med $p!$ Permutationer, da den enkelte Kombinations p Elementer kan omstilles paa $p!$ forskellige Maader. Men derved faar man alle Permutationer, der kan dannes ved at tage p Elementer ud blandt n. Man faar da:

$$P_{n,p} = p!\, K_{n,p} \quad \text{eller} \quad \frac{n!}{(n-p)!} = p! \cdot K_{n,p} \quad \text{eller}$$

$$\underline{K_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Ved simpel Udregning ser man, at

$$K_{n,p} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots p} \quad \text{og at}$$

$$K_{n,p} = K_{n,n-p}.$$

<u>Opgave 1.</u> Bevis, at $K_{n,p} = K_{n-1,p} + K_{n-1,p-1}$

<u>Opgave 2.</u> Find x af Ligningen $K_{3x+2,3} = 11 \cdot K_{2x,2}$.

Opgave 3. A, B og C spiller med 40 Kort, 10 af hver Farve. Der gives 9 Kort til hver.

Hvormange forskellige Spil kan A faa?

Hvormange af disse indeholder lutter Rudere?

" " " " ingen " ?

" " " " to og kun to Ruder?

4. Binomialformlen.

Det er bekendt, at man multiplicerer to flerleddede Størrelser med hinanden ved at multiplicere hvert Led i den ene efterhaanden med hvert Led i den anden. Lad nu
$[a_1+b_1+c_1+\cdots f_1]\cdot[a_2+b_2+c_2+\cdots f_2]\cdots\cdots[a_n+b_n+c_n\cdots f_n]$
være et Produkt af n flerleddede Størrelser. Produktet kan da udregnes ved at man multiplicerer hvert Led i 1ste Parentes efterhaanden med hvert Led i 2den Parentes, hvorpaa man multiplicerer hvert af de fremkomne Led efterhaanden med hvert Led i 3die Parentes og saaledes videre. Man ser heraf, at Produktet efter Udregningen vil bestaa af Led, der hver for sig indeholder som Faktorer et og kun et Led fra hver af de n Parenteser, og at alle Leddene dannes ved at man foretager denne Ledvelgelse paa alle mulige Maader.

Vi kan nu bevise Binomialformlen:

$$(x+a)^n = x^n + K_{n,1}x^{n-1}\cdot a + K_{n,2}x^{n-2}a^2 + \cdots\cdots K_{n,n-2}x^2a^{n-2} + K_{n,n-1}xa^{n-1} + a^n$$

under Forudsætning af, at n er et helt, positivt Tal.

Vi kan skrive $(x+a)^n = (x+a)(x+a)(x+a)\cdots\cdots n$ Faktorer (1)

Dersom man foretager Udmultiplicationen, faar man en Sum af Led, der alle har Formen $x^{n-p}\cdot a^p$, hvor p er et af Tallene $0, 1, 2, 3\cdots\cdots n$. I denne Sum forekommer

Leddene x^n og a^n hver én Gang, medens alle andre Led forekommer flere Gange. Spørgsmaalet bliver nu: Hvormange Gange findes Leddet $x^{n-p}\cdot a^p$, og Svaret bliver: $K_{n,p}$ Gange. Det vil nemlig forekomme saa mange Gange, som der er Maader, hvorpaa man i (1) kan udvælge p Parenteser og af hver af dem tage et a, medens man af de øvrige $n-p$ Parenteser tager et x for derpaa at multiplicere alle disse Bogstaver med hinanden. Men dette kan netop gøres paa $K_{n,p}$ Maader. Man faar da, naar de ens Led trækkes sammen:

$$(x+a)^n = x^n + K_{n,1}\,x^{n-1}a + K_{n,2}\cdot x^{n-2}\cdot a^2 \ldots K_{n,n-2}\,x^2\cdot a^{n-2} + K_{n,n-1}\,x\cdot a^{n-1} + a^n$$

eller $(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\cdot a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot a^2 + \ldots\ldots \frac{n}{1}x\cdot a^{n-1} + a^n$.

Tallene $K_{n,1}$, $K_{n,2}$ osv kaldes Binomialkoefficienterne, og de ses at ordne sig symmetrisk, da $K_{n,p} = K_{n,n-p}$.

Ved at erstatte a med $\div a$, faar man:

$$(x-a)^n = x^n - \frac{n}{1}x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot a^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}a^3 + \ldots\ldots$$

Opgave 1. At udvikle $(x+a)^{10}$ og $(x+a)^7$ efter Binomialformlen.

Opgave 2. Hvornaar findes der et midterste Led i Binomialudviklingen for $(x+a)^n$, og hvilken Værdi har det?

Kapitel 22. Om Grænseværdi for Funktioner.

1. En vilkaarlig stigende eller faldende Række, der har Grænseværdien a vil vi for Fremtiden kalde en a-Række.

Lad nu $y=f(x)$ være en entydig Funktion ɔ: en Funktion, der har en og kun en Værdi af y, naar x er valgt indenfor den Samling af Tal, for hvilke Funktionen overhovedet eksisterer. Denne Værdi findes, naar x er opgivet,

ved Indsættelse og paafølgende Udregning.
$y = x^2 + 3x + 4$ er et Eksempel paa en entydig Funktion, der eksisterer for alle Værdier af x. For $x = 1$ har Funktionen Værdien $y = 8$, for $x = 0$ Værdien $y = 4$ og saaledes videre.
Man kan imidlertid ogsaa tale om Funktionens Grænseværdi for $x = 1$.
Man opstiller da en vilkaarlig 1-Række $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_n \cdots$ og sætter efterhaanden $x =$ Leddene i denne Række i den Orden, hvori de er opskrevet. x vil derved nærme sig ubegrænset til 1.
Hvis man nu kan bevise, at Uligheden

$|f(x) - A| < \varepsilon$ er rigtig, naar x vælges tilstrækkelig langt henne i Rækken og derved tilstrækkelig nær ved 1, siges $f(x)$ at have Grænseværdien A, og man skriver da $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$.
At x skal vælges ~~tilstrækkelig~~ tilstrækkelig langt henne i Rækken, vil sige, at man for ethvert opgivet ε skal kunne bestemme et Led i Rækken – vi kan kalde det $\bar{u}_n$ – der har den Egenskab, at Uligheden er rigtig, naar x sættes $= \bar{u}_n$ eller $=$ ethvert af Rækkens efterfølgende Led.
Vi kan saaledes bevise, at $\lim\limits_{x=1}(x^2 + 3x + 4) = 8$, og at denne Funktion altsaa for $x = 1$ har samme Værdi og Grænseværdi. Thi

$|x^2 + 3x + 4 - 8| = |x^2 + 3x - 4| = |(x-1)(x+4)| =$

$|x-1| \cdot |x+4| < |x-1| \cdot 6$, da x stadig kan antages < 2, naar vi blot gaar tilstrækkelig langt frem i Rækken.

Men $|x-1|\cdot 6 < \varepsilon$, dersom $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$.
Dersom man blot gaar tilstrækkelig langt frem i en vilkaarlig 1-Række, vil man imidlertid træffe et Led – vi kan kalde det $\bar{u}_m$ – der har den Egenskab, at man for dette og alle efterfølgende Led har $|u_m - 1| < \frac{\varepsilon}{6}$. Sættes derfor $x = \bar{u}_m$ eller et vilkaarligt efterfølgende Led af Rækken, vil $|x^2+3x+4-8| < \varepsilon$.
Vi ser derfor, at $\lim_{x=1}(x^2+3x+4) = 8$

2. Vi kan nu give en almindelig Definition af en entydig Funktions Grænseværdi for $x = a$.
<u>Den entydige Funktion $y = f(x)$ siges at have Grænseværdien A for $x = a$, dersom</u>

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

<u>for alle Værdier af $|x-a|$, der er tilstrækkelig smaa,</u> d: < et Tal p, der kan beregnes, naar ε er opgivet og som da maa vise sig at være > 0.
Overensstemmelsen med det foregaaende ses deraf, at man altid i en vilkaarlig a-Række vil kunne finde et Led $\bar{u}_n$, saaledes at man for dette og alle efterfølgende Led har $|\bar{u}_n - a| < p$. Dersom man nu sætter $x = \bar{u}_n$ eller et vilkaarligt efterfølgende Led, vil man stadig have $|f(x) \div A| < \varepsilon$.
At $f(x)$ har Grænseværdien A for $x = a$, skrives

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Eks: Find Grænseværdien af $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)\cdot(x-5)}$ for $x = 2$.
Vi opstiller da en vilkaarlig 2-Række $u_0, u_1, u_2 \dots \bar{u}_n \dots$ og sætter efterhaanden x = Leddene i denne Række i den Orden, hvori de er opskrevet, hvorved x vil nær-

me sig ubegrænset til 2. Man har da stadig:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}.$$ Indsættes $x=2$ i den sidste Brøk, faar man Værdien $\frac{1}{3}$. Man har da:

$$\left|\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} \div \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x-9-x+5}{3(x-5)}\right| = \frac{2}{3}\cdot\frac{|x-2|}{|x-5|}.$$

Men denne Brøk vil, naar x vælges tilstrækkelig langt henne i Rækken, være $< \frac{2|x-2|}{3|4-5|} = \frac{2}{3}|x-2|$, der er $<\varepsilon$, naar $|x-2|$ vælges $<\frac{3\varepsilon}{2}$. Sættes nu $p=\frac{3\varepsilon}{2}$, ses man, at $\left|\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} \div \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ for alle Værdier af $|x-2|<p$.

Man har derfor $\lim\limits_{x=2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{1}{3}$.

3. Vi har ovenfor antydet, at Funktioner ofte har en Grænseværdi for $x=a$, som er den samme, hvadenten x nærmer sig a gennem den ene eller den anden a-Række. At dette ikke altid er Tilfældet, viser Funktionen $y=\frac{1}{x}$, der har Grænseværdien $+\infty$, naar x nærmer sig ubegrænset til 0 gennem en faldende Række, men derimod Grænseværdien $\div\infty$, naar x nærmer sig ubegrænset til 0 gennem en stigende Række. Det almindelige for de simple Funktioner, vi behandler, er dog at de for enhver opgiven Værdi af x – f. Eks. $x=a$ – har 1) en bestemt Værdi og 2) en Grænseværdi, der er den samme, hvadenten x nærmer sig ubegrænset til a gennem den ene eller den anden Række. En anden Egenskab, der findes ved de saakaldte kontinuerte Funktioner, der vil blive behandlet i det følgende, er at Funktionens Værdi og dens Grænseværdi for $x=a$ er den samme.

Det kan hænde – som vist i I Stk 11 – at en Funktion for en opgiven Værdi af x – f. Eks $x = a$ – slet ingen Værdi har. Hvis den da har en enkelt, bestemt Grænseværdi for $x = a$, vil man i Reglen fastslaa ved Definition, at denne skal betragtes som Funktionens Værdi for $x = a$. („Man bruger den Talemaade, at Funktionen har denne Værdi".) I Eks. paa Side 104 saa vi, at $y = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-5)}$ ikke eksisterer (ikke er defineret) for $x = 2$. Grænseværdien for $x = 2$ er $= \frac{1}{3}$. Da Funktionen hidtil ikke er defineret for $x = 2$, kan vi derfor passende fastslaa ved en Definition, at Funktionen for $x = 2$ har Værdien $\frac{1}{3}$.

4. Lad $u_0, u_1, u_2, \dots u_n \dots$ være en vilkaarlig stigende Række, der har Grænseværdien $+\infty$, og lad os efterhaanden sætte $x =$ Leddene i denne Række i den Orden, hvori de er opskrevet, hvorved x vokser i det uendelige. Dersom man nu kan angive et Led i Rækken – f. Eks u_n – der har den Egenskab, at hvis x sættes $= u_n$ eller et vilkaarligt efterfølgende Led, saa er $|f(x) - A| < \varepsilon$, siger man, at $f(x)$ har Grænseværdien A for $x = +\infty$. Dette kan ogsaa siges anderledes:
Dersom $|f(x) - A| < \varepsilon$ for alle Værdier af x, der er $> K$, siges $f(x)$ at have Grænseværdien A for $x = +\infty$.
At $f(x)$ har Grænseværdien A for $x = +\infty$ betegnes

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = A.$$

Overensstemmelsen med det foregaaende fremgaar af, at man i en vilkaarlig stigende Række, der har Grænseværdien $+\infty$, altid kan finde et Led u_n, der har den Egenskab, at u_n og alle efterfølgende Led er $> K$. Sætter derfor $x = u_n$ der $= A$ vilkaarligt efter følgende Led, vil $|f(x) - A| < \varepsilon$

Eks: $\lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0$

Thi $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|}$ der er $< \varepsilon$ for alle Værdier af $|x|$, der er $> \frac{1}{\varepsilon}$. Sættes da $K = \frac{1}{\varepsilon}$, ser man, at

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \text{ for alle Værdier af } x > K.$$

Altsaa er $\lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0$.

5. Man finder Grænseværdien af en fleerleddet Størrelse ved for hvert Led at sætte dets Grænseværdi.

Lad $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ og $\lim\limits_{x=a} \varphi(x) = B$. Vi vil da bevise, at $\lim\limits_{x=a} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$.

Lad os betegne $f(x)$ ved u og $\varphi(x)$ ved v. Man kan da vælge $|x-a|$ saa lille, at $|u - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ og $|v - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Man har nu:

$$|u + v - (A+B)| = |(u-A) + (v-B)| \leq |u-A| + |v-B| < \varepsilon.$$

6. Man finder Grænseværdien af et Produkt ved for hver Faktor at sætte dens Grænseværdi.

Man kan vælge $|x-a|$ saa lille, at $|u - A| < \varepsilon_1$ og $|v-B| < \varepsilon_1$, og har da:

$$|u \cdot v \div A \cdot B| = |(u-A)(v-B) + A(v-B) + B(u-A)| \leq$$
$$|u-A| \cdot |v-B| + |A|\,|v-B| + |B|\,|u-A| < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \cdot |A| + \varepsilon_1 \cdot |B|$$
$$\leq \varepsilon_1 \left[1 + |A| + |B|\right], \text{ der er } < \varepsilon.$$

7. Man finder Grænseværdien af en Brøk, hvis Nævner ikke er Nul for den betragtede Værdi af x, ved i Stedet for Tæller og Nævner at sætte deres Grænseværdier.

$$\left|\frac{u}{v} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{u \cdot B - v \cdot A}{v \cdot B}\right| = \left|\frac{(u-A) \cdot B \div (v-B) A}{v \cdot B}\right| \text{ der er}$$

$$\leq \frac{|u-A| \cdot |B| + |v-B| \cdot |A|}{|v| \cdot |B|} < \frac{|B| \cdot \varepsilon_1 + |A| \cdot \varepsilon_1}{m \cdot |B|}, \text{ hvor}$$

m er et Tal mellem $|v|$ og 0.. Men

$\frac{\varepsilon_1(|A|+|B|)}{m\cdot|B|}$ er $< \varepsilon$, dersom ε_1 velges $< \frac{\varepsilon\cdot m\cdot|B|}{|A|+|B|}$.

Eks 1

$$\lim_{x=\infty}\frac{2x^2-5x+6}{5x^2+3x-8} = \frac{2}{5}\text{, thi}$$

$$\frac{2x^2-5x+6}{5x^2+3x-8} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{5+\frac{3}{x}\div\frac{8}{x^2}}.$$ Da nu $\frac{1}{x}$ og $\frac{1}{x^2}$ har Grænseværdien 0 for $x=\infty$, faar man:

$$\lim_{x=\infty}\frac{2x^2-5x+6}{5x^2+3x-8} = \frac{2}{5}.$$

Eks 2 $$\lim_{x=\infty}\frac{2x^3+5x-8}{x^4\div 3x^2+5}$$

Man skriver, idet man dividerer i Tæller og Nævner med x^4

$$\frac{2x^3+5x-8}{x^4-3x^2+5} = \frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\div\frac{8}{x^4}}{1\div\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}}$$

Altsaa er $$\lim_{x=\infty}\frac{2x^3+5x-8}{x^4-3x^2+5} = 0$$

Eks 3. $$\lim_{x=\infty}\frac{2x^3+5}{x-8}$$

Man skriver $$\frac{2x^3+5}{x-8} = \frac{2+\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}.$$

Grænseværdien er derfor ∞.