Matematik

for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium.

I

af

Viggo Madsen
cand. mag. Adjunkt.

Matematik

for det matematisk=naturvidenskabelige Gymnasium.

I

af

Viggo Madsen.
cand. mag. Adjunkt.

1916.

Potens.

1. a^m (læses a ophöjet til m^{te} Potens) kaldes en Potens. a kaldes Roden, m Eksponenten. Vi gaar i det fölgende ud fra, at Eksponenterne er hele Tal.

Definitioner: 1) $a^m = a \cdot a \cdot a \ldots\ldots$ (m Faktorer) idet m er hel og >1.
2) $a^1 = a$

Heraf ser man, at a^m er positiv, hvis a er positiv. Hvis derimod a er negativ, vil a^m være positiv, hvis m er lige, men negativ, hvis m er ulige.
Hvis n er et positivt, helt Tal, har man altsaa:

$$(\div a)^{2n} = + a^{2n} \text{ og } (\div a)^{2n+1} = \div a^{2n+1},$$ idet a er et positivt Tal.

2. Division af Potenser af samme Tal.

Man dividerer to Potenser af samme Tal ved at subtrahere Divisors Eksponent fra Dividendens.

Man skal altsaa bevise, at $a^m : a^p = a^{m-p}$, hvor m og p er hele, positive Tal.

I $m > p$. $$\frac{a^m}{a^p} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (m \text{ Fakt.})}{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (p \text{ Fakt.})} = a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (m-p \text{ Fakt.}) = a^{m-p}.$$

II $m = p$. $$\frac{a^m}{a^p} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (m \text{ Fakt.})}{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (p \text{ Fakt.})} = 1.$$

III $m < p$ Man sætter da $p = m + q$, hvor q er positiv, hel.
$$\frac{a^m}{a^p} = \frac{a \cdot a \ldots\ldots (m \text{ Fakt.})}{a \cdot a \ldots\ldots (m+q \text{ Fakt.})} = \frac{1}{a \cdot a \ldots (q \text{ Fakt.})} = \frac{1}{a^q}.$$

Man ser saaledes, at der findes 3 forskellige Regler i de 3 forskellige Tilfælde. Dersom man anvender den förste Regel i de to sidste Tilfælde, faar man i Tilfælde II:
$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} = a^0$. Da a^0 ifölge de hidtil fastslaaede Definitioner ikke har nogen Betydning, kan vi passende ved

en ny Definition sætte $a^0 = 1$. Man har da Lov til at anvende den förste Regel i Tilfælde II.

Hvis vi anvender den förste Regel i Tilfælde III faar man:
$\frac{a^m}{a^p} = \frac{a^m}{a^{m+q}} = a^{m-(m+q)} = a^{\div q}$. Da $a^{\div q}$ heller ikke endnu har nogen Betydning, kan man ved Definition fastslaa, at $a^{\div q}$ for Fremtiden skal betyde $\frac{1}{a^q}$. Man har da Lov til at anvende den förste Regel i alle 3 Tilfælde.

Anm: Naar man siger, at a^{-q} hidtil ingen Betydning har haft, er dette ikke helt rigtigt. $a^{\div q}$ har nemlig ogsaa för haft en Betydning, naar q er negativ f. Eks for $q = \div 5$. Da vil $a^{-(-5)} = a^5$, der ifölge Definition 1) har Betydningen $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Vi maa da vise, at vi ikke ved at benytte den nye Definition af a^{-q} kan komme til et andet Resultat. Ved at anvende den nye Definition faar man:

$$a^{-(-5)} = \frac{1}{a^{-5}} = 1 : \left(\frac{1}{a^5}\right) = a^5$$

Vi har nu fölgende Definitioner for a^m

1) $a^m = a \cdot a \cdot a \ldots$ (m Fakt) hvor m er hel og > 1

2) $a^1 = a$

3) $a^0 = 1$

4) $a^{\div m} = \frac{1}{a^m}$ hvor m er hel.

a^m er altsaa defineret for m hel.

3. <u>Man multiplicerer to Potenser af samme Tal ved at addere Eksponenterne</u>.

1) $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$??

Bevis: $a^m \cdot a^p = a \cdot a \cdot a \ldots$ (m Fakt). $a \cdot a \cdot a \ldots$ (p Fakt) $=$
$a \cdot a \cdot a \ldots$ (m + p Fakt) $= a^{m+p}$.

2) $a^m \cdot a^{-p} = a^{m-p}$??

Bevis: $a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$.

3) $a^{-m} \cdot a^{-p} = a^{-m-p}$??

Bevis: $a^{-m} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{m+p}} = a^{-(m+p)} = a^{-m-p}$.

4. Vi kan nu fuldstændiggöre Sætningen i 2, ved at bevise, at den ogsaa gælder selv om Eksponenterne er negative.

1) $a^m : a^{-p} = a^{m+p}$??

Bevis: $a^m : a^{-p} = a^m : \frac{1}{a^p} = a^m \cdot a^p = a^{m+p}$.

2) $a^{-m} : a^p = a^{-m-p}$??

Bevis: $a^{-m} : a^p = \frac{1}{a^m} : a^p = \frac{1}{a^{m+p}} = a^{-(m+p)} = a^{-m-p}$.

3) $a^{-m} : a^{-p} = a^{-m+p}$??

Bevis: $a^{-m} : a^{-p} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^p} = \frac{a^p}{a^m} = a^{p-m} = a^{-m+p}$.

5. <u>Man oplöfter et Produkt til en Potens ved at oplöfte hver Faktor for sig.</u>

1) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$??

Bevis: $(ab)^m = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) \ldots$ (m Fakt) $= ab \cdot ab \cdot ab \ldots =$
$a \cdot a \cdot a \ldots$ (m Fakt) $\cdot\, b \cdot b \cdot b \ldots$ (m Fakt) $= a^m \cdot b^m$.

2) $(ab)^{-m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$??

Bevis: $(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m \cdot b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \cdot b^{-m}$.

6. <u>Man oplöfter en Brök til en Potens ved at oplöfte Tæller for sig og Nævner for sig.</u>

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$??

Bevis: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots$ (m Fakt) $= \frac{a \cdot a \ldots (\text{m Fakt})}{b \cdot b \ldots (\text{m Fakt})} = \frac{a^m}{b^m}$.

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$??

Bevis: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)}$. Man dividerer nu i Tæller og Nævner med a^m og faar da $\frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^m}\right)} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}$.

7. <u>Man oplöfter en Potens til en ny Potens ved at multiplicere Eksponenterne.</u>

1) $(a^m)^p = a^{mp}$??

Bevis: $(a^m)^p = a^m \cdot a^m \dots$ (p Fakt) $= a^{m+m \dots}$ (p Addender) $=$ a^{mp}.

2) $(a^{-m})^p = a^{-mp}$.

Bevis: $(a^{-m})^p = \left(\frac{1}{a^m}\right)^p = \frac{1}{a^{mp}} = a^{-mp}$

3) $(a^m)^{-p} = a^{-mp}$ } Bevises paa lignende Maade.

4) $(a^{-m})^{-p} = a^{mp}$ }

<u>Opgave 1.</u>

$$a^{3n+5} : a^{-n+8} \cdot a^{-2n+3} : a^{2n} = a^{3n+5-(-n+8)+(-2n+3)-2n} =$$
$$a^0 = 1.$$

<u>Opgave 2.</u>

$$\left(\frac{a^{-1} \cdot b^2}{3c^{-4}}\right)^{-5} : \left(\frac{6ac^{-2}}{b^2}\right)^{-2} = \frac{a^5 \cdot b^{-10}}{3^{-5} \cdot c^{20}} : \frac{6^{-2} \cdot a^{-2} \cdot c^4}{b^{-6}} =$$

$$\frac{a^5 \cdot b^{-10}\, b^{-6}}{3^{-5} \cdot 6^{-2} \cdot c^{20} \cdot a^{-2} \cdot c^4} = \frac{1}{3^{-5} \cdot 6^{-2}} \cdot \frac{a^5}{a^{-2}} \cdot \frac{b^{-10} \cdot b^{\div 6}}{1} \cdot \frac{1}{c^{20} \cdot c^4} =$$

$$3^5 \cdot 6^2 \cdot a^7 \cdot b^{-16} \cdot c^{-24} = 8748\, a^7 b^{-16} c^{-24}.$$

<u>Kapitel 2.</u>

1. <u>At y er en Funktion af x vil sige</u>, at der findes en saadan Forbindelse mellem x og y, <u>at man i Almindelighed kan bestemme y, naar x er lig et vilkaarligt opgivet Tal, der enten kan vælges ganske vilkaarligt eller ogsaa man vælges mellem en nærmere opgivet Samling af Tal.</u>

$y = \frac{x^5 - 3x + 5}{x^2 + 7}$ er f. Eks. en Ligning, der viser, at y er en Funktion af x. Opgives f. Eks. $x = -1$, kan man ved Indsættelse og paafølgende Udregning finde den tilsvarende Værdi af y, der viser sig at være $= \frac{7}{8}$. Man siger derfor, at y har Værdien – eller at Funktionen har Værdien $\frac{7}{8}$ for $x = -1$.

Sætter man $x = 0$, bliver $y = \frac{5}{7}$, og vælger man en vilkaarlig anden Værdi for x, kan y altid bestemmes.
Ofte er det dog saaledes, at Funktionens Værdi kun lader sig bestemme, naar man tillægger x Værdier, der vælges indenfor et bestemt Interval.
$y = \sqrt{(5-x)(x-3)}$ er et Eksempel paa dette. Her kan man nemlig kun bestemme y, naar $5 \geqq x \geqq 3$, da man ikke kender noget Tal, som er lig Kvadratroden af et negativt Tal.
$y = \sqrt{x-2}$ er et Eksempel paa en Funktion, der kun lader sig bestemme, naar x vælges $\geqq 2$.
At y er en Funktion af x betegnes ved at skrive $y = f(x)$ eller $y = \varphi(x)$ eller lignende.

<u>2</u>. Vi vil for det følgendes Skyld indføre nogle faste Betegnelser:
<u>Ved ε vil vi for Fremtiden forstaa et positivt Tal, som kan vælges saa lille, som man vil.</u>
<u>Ved K vil vi forstaa et positivt Tal, der kan vælges saa stort, som man vil.</u>
<u>Ved et Tals numeriske Værdi vil vi forstaa Tallets Værdi uden Hensyn til Fortegnet.</u> $+7$ og $\div 7$ har saaledes begge den numeriske Værdi 7.
<u>Den numeriske Værdi af Tallet a betegnes $|a|$.</u>
<u>Ved en uendelig Række af Tal forstaar vi en Række af Tal, der ikke har noget sidste Led.</u>
Som Eksempel kan nævnes Rækken af hele Tal fra 1 og opefter.

<u>3</u> <u>Uendelige Rækker af Tal.</u>

Af disse vil vi beskæftige os med 3 Slags:

1) De stigende Rækker

En stigende Talrække er en uendelig Række af Tal, af hvilke ethvert er $\geqq$ det foregaaende. Dog maa ikke alle Rækkens Tal være ligestore.

Som Eksempler kan nævnes Rækkerne

$5 \quad 5{,}3 \quad 5{,}33 \quad 5{,}333 \ldots\ldots$ hvor Leddene er stadig voksende, og $2 \quad 2{,}0 \quad 2{,}07 \quad 2{,}070 \quad 2{,}0707 \ldots\ldots$, hvor dette ikke er Tilfældet.

Lad $\ddot{u}_0 \; \ddot{u}_1 \; \ddot{u}_2 \; \ddot{u}_3 \ldots \ddot{u}_n \ldots$ være en saadan Række. Man siger da, at denne Talrække har Grænseværdien a, hvis $|\ddot{u}_n - a|$ kan göres $< \varepsilon$ for alle Værdier af n, der er tilstrækkelig store d: större end et Tal, som kan beregnes, naar ε er opgivet.

Efter dette bliver Grænseværdien a det Tal, hvortil Rækkens Led nærmer sig mere og mere, efterhaanden som man gaar længere frem i Rækken.

Eks: Rækken $1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3} \ldots\ldots \frac{n+1}{n} \ldots$ har Grænseværdien 1; thi $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$ kan göres $< \varepsilon$, dersom $1 < n \cdot \varepsilon$ d: dersom n vælges $> \frac{1}{\varepsilon}$.

For alle Værdier af n, der vælges $> \frac{1}{\varepsilon}$, vil altsaa $|\ddot{u}_n - 1| < \varepsilon$. Derved er det bevist, at Rækkens Grænseværdi er $= 1$.

2) De faldende Rækker.

En faldende Talrække er en uendelig Række af Tal, af hvilke ethvert er $\leqq$ det foregaaende. Dog maa ikke alle Rækkens Tal være ligestore.

Som Eksempel kan vi nævne Rækkerne:

$8, 7{,}8, 7{,}78, 7{,}778, \ldots$, hvor Leddene er stadig aftagende og $-4, -4{,}0, -4{,}03, -4{,}030, \div 4{,}0303 \ldots$ hvor dette ikke er Tilfældet.

Lad nu $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ være en saadan Række.

Man siger da, at <u>denne Talrække har Grænseværdien a, hvis $|u_n - a|$ kan göres $< \varepsilon$ for alle Værdier af n, der er tilstrækkelig store</u> ɔ: störrre end et Tal, der kan beregnes, naar ε er opgivet.

Ogsaa her er Grænseværdien a det Tal, hvortil Rækkens Led nærmer sig mere og mere, efterhaanden som man gaar længere frem i Rækken.

Eks. Rækken $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots$ har Grænseværdien 0, thi $\frac{1}{n} - 0$ eller $\frac{1}{n}$ kan göres $< \varepsilon$, naar $1 < n \cdot \varepsilon$, eller naar n vælges $> \frac{1}{\varepsilon}$.

For alle Værdier af n, der vælges $> \frac{1}{\varepsilon}$ vil altsaa $|u_n - 0| < \varepsilon$. Det er dermed bevist, at Rækkens Grænseværdi er $= 0$.

3) <u>De stationære Rækker.</u>

<u>En stationær Række er en uendelig Række af Tal, der alle er ligestore.</u>

Hvis alle dens Led er $= a$, siges dens Grænseværdi at være a.

<u>4.</u> Lad nu $u_0\ u_1\ u_2\ u_3 \ldots u_n \ldots$ være en <u>stigende</u> Række. Dersom man nu kan vælge n saa stor, at u_n og alle efterfölgende Led er $> K$, siges Rækken at have en Grænseværdi, der er positiv og uendelig (skrives $+\infty$). Dette udtrykkes i det matematiske Tegnsprog

ved at skrive $\lim_{n=\infty} u_n = +\infty$, hvilket læses: limes (ɔ: Grænseværdi) for u_n er $= +\infty$, naar n vokser i det uendelige.

Lad derpaa $u_0\ u_1\ u_2 \dots u_n \dots$ være en faldende Række. Hvis man nu kan vælge n saa stor, at u_n og alle efterfølgende Led er numerisk $> K$, siges Rækken at have en Grænseværdi, der er negativ og uendelig. Man udtrykker dette ved at skrive $\lim_{n=\infty} u_n = -\infty$

5. Lad nu $y = f(x)$ være en Funktion af x, hvis Værdi lader sig bestemme for alle Værdier af x undtagen for $x = a$*). Vi tænker os da opstillet en vilkaarlig faldende Række $u_0\ u_1\ u_2 \dots u_n \dots$, der har Grænseværdien a, og sætter efterhaanden x = Tallene i denne Række i den Orden, hvori de er opført. x kommer derved til at gennemløbe en Række Talværdier, der, naar vi gaar tilstrækkelig langt frem i Rækken, nærmer sig ubegrænset til a.

Hvis det nu lader sig bevise, at $f(x) > K$ for alle Værdier af x, der ligger tilstrækkelig langt henne i Rækken og derfor tilstrækkelig nær ved a, siges Funktionen at have Grænseværdien $+\infty$, naar x gennem denne Række nærmer sig ubegrænset til a.

Hvis det samme lader sig bevise, naar man gaar ud fra en hvilkensomhelst anden faldende eller stigende Række, der har Grænseværdien a, siger man, at $f(x)$ har Grænseværdien $+\infty$, naar x paa vilkaar

*) Man kan f. Eks tænke paa Funktionen $y = \frac{x^3+5x+7}{x-4}$, der kan bestemmes for alle Værdier af x, undtagen $x = 4$.

lig Maade svinder ind mod a. I dette Tilfælde skriver man i det matematiske Tegnsprog, at
$\lim_{x=a} f(x) = +\infty$, hvilket læses: limes $f(x) = +\infty$ for $x = a$.
Hvis det samme kan bevises om Funktionens numeriske Værdi, medens Funktionen stadig er negativ, siges dens Grænseværdi at være $\div\infty$, naar x paa vilkaarlig Maade svinder ind mod a. Man skriver da $\lim_{x=a} f(x) = -\infty$

6. Funktionen $y = \frac{1}{x}$.

Funktionen lader sig bestemme for alle Værdier af x, undtagen $x = 0$. Eksempelvis vil $x = 1$ give $y = 1$ og $x = 0{,}2$ give $y = 5$. Men for $x = 0$ lader Funktionen sig ikke bestemme, da man ikke kan dividere med 0. Vi vil da söge at bestemme Funktionens Grænseværdi for $x = 0$.
Vi opstiller derfor en faldende Række $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$, der har Grænseværdien 0[x)], sætter efterhaanden x = Leddene i denne Række og beregner derpaa hver Gang den tilsvarende Værdi af y, hvorved x kan nærmes saameget til Nul, som man vil, naar man blot gaar tilstrækkelig langt frem i Rækken. Man kan da göre $\frac{1}{x} > K$, naar man blot vælger $1 > x \cdot K$ eller $x < \frac{1}{K}$, og det samme kan bevises, hvis vi gaar ud fra en hvilkensomhelst anden faldende Række, hvis Grænseværdi er $= 0$.
Heraf ser man, at $\lim_{x=0} \frac{1}{x} = +\infty$, naar x nærmer sig ube-

x) Man kan f. Eks. tænke paa Rækken $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots$ derfor y giver fölgende Række af Værdier $1, 2, 3, 4 \ldots n \ldots$

grænset mod Nul gennem en faldende Række.

Lad dernæst $v_0, v_1, v_2 \ldots v_n \ldots$ være en stigende Række med Grænseværdien 0, som derfor har alle sine Led negative. Man lader nu efterhaanden x antage denne Række af Talværdier, hvorved x efterhaanden nærmer sig Nul saameget, man vil, og bestemmer hver Gang de tilsvarende Værdier af y. $\frac{1}{x}$ vil derved stadig være negativ, men kan göres numerisk $> K$, naar x vælges tilstrækkelig langt henne i Rækken og dermed tilstrækkelig nær ved Nul.

Heraf ser man, at $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{x} = -\infty$, naar x nærmer sig ubegrænset til Nul gennem en stigende Række.

$\frac{1}{x}$ har altsaa ingen Værdi for $x=0$. Den har derimod 2 Grænseværdier, der begge numerisk er $=\infty$. For alle stigende Rækker har $\frac{1}{x}$ Grænseværdien $-\infty$ og for alle faldende Rækker Grænseværdien $+\infty$. Man plejer at sige, at $\frac{1}{x}$ er numerisk uendelig for $x=0$, men dette er kun en Talemaade. De virkelige Forhold er som ovenfor fremsat.

7. Funktionen $y = \frac{1}{x^2}$

Funktionen lader sig bestemme for alle Værdier af x, undtagen for $x=0$. Vi vil söge dens Grænseværdi for $x=0$. Vi opstiller da som för en faldende Række $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$, som har Grænseværdien 0, lader x efterhaanden antage denne Række af Talværdier og bestemmer hver Gang de tilsvarende Værdier af y. x kan derved vælges saa nær ved Nul, som man vil, naar man blot gaar tilstrækkelig langt frem i Rækken. Man kan da göre $\frac{1}{x^2} > K$, naar man blot vælger $1 > K \cdot x^2$ eller $x < \sqrt{\frac{1}{K}}$. Da det samme kan vises, naar vi gaar ud fra en hvilkensomhelst anden faldende eller stigende Række, der har Grænseværdien 0, ser man, at $\lim_{x=0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. $\frac{1}{x^2}$ har altsaa ingen Værdi for $x=0$, men den har Grænseværdien $+\infty$ for $x=0$. Man plejer dog ogsaa kun at sige, at $\frac{1}{x^2}$ har Værdien $+\infty$ for $x=0$, men det er ogsaa kun en Talemaade, der dækker over de Forhold, der er fremsat ovenfor.

8. $y = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+5)}$. Funktionen lader sig bestemme for alle Værdier af x, undtagen $x=3$ og $x=\div 5$. Vi vil först bestemme Grænseværdien for $x=3$. Först lader vi derfor x gennemlöbe en vilkaarlig faldende Række, der har Grænseværdien 3. Da x derved stadig er >3 har man:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x+5)} > \frac{(3-1)(3-2)}{(x-3)(4+5)} = \frac{2}{9\cdot(x-3)},$$ der kan göres $> K$,

saafremt $2 > 9\cdot K\cdot(x-3)$ ɔ: saafremt x vælges saa langt henne i Rækken, at $x - 3 < \frac{2}{9\cdot K}$.

Funktionen har altsaa Grænseværdien $+\infty$, naar x gennem en vilkaarlig faldende Række nærmer sig ubegrænset til 3.

Lad derpaa x gennemlöbe en vilkaarlig stigende Række, der har Grænseværdien 3. Naar vi gaar tilstrækkelig langt frem i denne Række, vil $3 > x > 2\frac{1}{2}$. Man har da:

$$\frac{(x-1)(x-2)}{|(x-3)|\cdot(x+5)} > \frac{(2\frac{1}{2}-1)(2\frac{1}{2}-2)}{|(x-3)|\cdot(3+5)} = \frac{3}{32\cdot|(x-3)|},$$ der kan göres $> K$, naar man vælger $3 > 32\cdot K\cdot|(x-3)|$ eller

$|(x-3)| < \frac{3}{32 \cdot K}$, hvilket altid kan göres, naar blot x vælges tilstrækkelig langt henne i Rækken. Da y tillige er negativ, naar x ligger nær ved 3, ser man, at Funktionen har Grænseværdien $\div \infty$, naar x nærmer sig ubegrænset til 3 gennem en vilkaarlig, stigende Række.

Man benytter her den Talemaade, at Funktionen er numerisk uendelig for $x = 3$.

At Funktionen ogsaa for $x = \div 5$ er numerisk uendelig, ses paa lignende Maade.

9. I Almindelighed kan man sige, at en Brök er Nul, naar dens Tæller er Nul, uden at samtidig Nævneren er Nul, og at en Brök er numerisk uendelig, naar dens Nævner er Nul, uden at samtidig Tælleren er det. (Hvorledes den sidste Sætning skal forstaas, fremgaar af det foregaaende.)

Hvis Brökens Tæller og Nævner samtidig er Nul, er Brøken ubestemt (skrives $\frac{0}{0}$).

Hvorledes man i dette Tilfælde skal bestemme Brökens Grænseværdi, vil senere blive omtalt.

Eks: $y = \frac{(x+1)(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+3)\cdot x}$ er Nul for $x = \begin{cases} \div 1 \\ 7 \end{cases}$

numerisk uendelig for $x = \begin{cases} 0 \\ \div 3 \end{cases}$

og ubestemt $\left(\frac{0}{0}\right)$ for $x = 2$.

10. Hjælpesætning

$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, naar α er positiv og n hel og >1.

Bevis: (Induktionsbeviset.)

I Lad os gaa ud fra, at Sætningen gælder for $n =$ det hele, positive Tal p; vi vil da bevise, at Sætningen ogsaa gælder for $n=p+1$.

Givet: $(1+\alpha)^p > 1+p\alpha$ (1)

Bevis: $(1+\alpha)^{p+1} > 1+(p+1)\alpha$.

Vi har $(1+\alpha)^{p+1} = (1+\alpha)^p \cdot (1+\alpha) > (1+p\alpha)(1+\alpha)$ ifölge (1).

Heraf ved Udmultiplication:

$$(1+\alpha)^{p+1} > 1+p\alpha+\alpha+p\alpha^2 > 1+(p+1)\alpha,$$ da α er positiv.

II Sætningen gælder imidlertid for $n=2$, thi

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha.$$

Den maa da ogsaa gælde for $n=2+1=3$. Og da den gælder for $n=3$, maa den ogsaa gælde for $n=3+1=4$ o.s.v. Sætningen maa da gælde for alle hele Værdier af $n>1$.

II Lad nu $u_0\, u_1\, u_2\, u_3 \dots u_n \dots$ være en stigende Række, der bestaar af lutter positive, hele Tal, og lad den have Grænseværdien $+\infty$

Vi vil derpaa bevise, at dersom q er en positiv, egte Brök, vil $\lim_{n=\infty} q^n = 0$, naar n gennemlöber den opstillede Række af Talværdier.

Bevis: q kan nemlig skrives $=\frac{1}{1+\alpha}$, hvor α er positiv. (Ex. $\frac{5}{14} = \frac{5}{5+9} = \frac{1}{1+\frac{9}{5}}$) Man har da

$$q^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha}$$ ifölge Hjælpesætningen.

Men $\frac{1}{1+n\alpha}$ er $<\varepsilon$, naar $1<\varepsilon+n\alpha\varepsilon$, eller naar

$$1-\varepsilon < n\alpha\varepsilon, \text{ eller } n > \frac{1-\varepsilon}{\alpha\cdot\varepsilon}.$$

Naar altsaa n vælges saa langt henne i Rækken, at $n > \frac{1-\varepsilon}{\alpha\varepsilon}$, vil $q^n < \varepsilon$.

Var vi gaaet ud fra en vilkaarlig anden, stigende Række af positive, hele Tal med Grænseværdien $+\infty$, var vi kommet til samme Resultat.

Man siger derfor, at $\lim\limits_{n=\infty} q^n = 0$, hvor q er en positiv, ægte Brök, naar n vokser i det uendelige gennem en vilkaarlig, stigende Række af hele, positive Tal.

12 Lad derpaa q være en positiv, uægte Brök og lad n vokse i det uendelige som för.

Man har da $q^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ ifölge Hjælpesætn.

Men $1 + n\alpha > K$, naar $n\alpha > K - 1$ o: naar n vælges saa langt henne i Rækken, at $n > \frac{K-1}{\alpha}$, og det samme Resültat vilde vi være kommet til, hvis vi var gaaet ūd fra enhver anden, stigende Række af positive, hele Tal, hvis Grænseværdi var $+\infty$.

Vi ser derfor, at $\lim\limits_{n=\infty} q^n = +\infty$, naar q er en positiv, uægte Brök og n vokser i det uendelige gennem en vilkaarlig, stigende Række af hele, positive Tal.

Opgave 1. Find $\lim\limits_{n=\infty} q^n$, naar q er negativ, og n vokser i det uendelige gennem en vilkaarlig, stigende Række af hele, positive Tal

Opgave 2. Bevis, at Rækken 1 0,1 0,01 0,001 .... har Grænseværdien 0

Opgave 3. Bevis, at Rækken 2 2,9 2,99 2,999 .... har Grænseværdien 3.

Opgave 4. Bevis, at Rækken 0 0,5 0,55 0,555 .... har Grænseværdien $\frac{5}{9}$.

Opgave 5. Bevis, at $\lim\limits_{x=\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Bevis: $\frac{1}{x}$ kan göres $< \varepsilon$, naar $1 < \varepsilon x$ o: naar x vælges $> \frac{1}{\varepsilon}$.

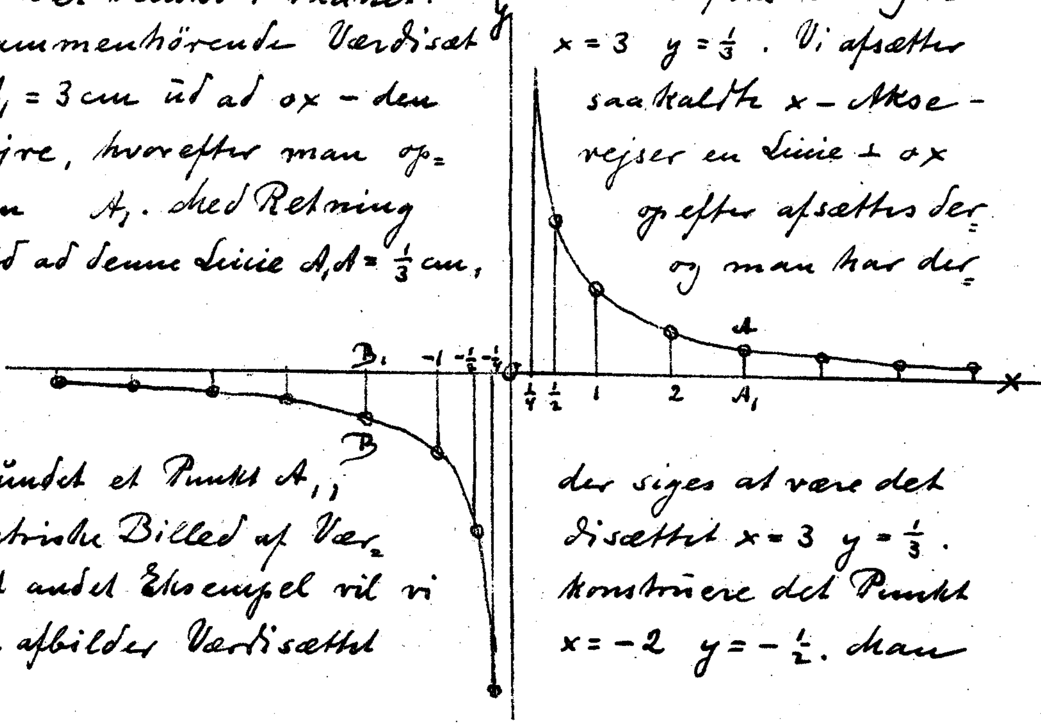
Kapitel 3. En Funktions geometriske Billed. (Grafisk Fremstilling).

Vi vil söge en geometrisk Fremstilling af et Par af de alle= rede omtalte Fünktioner.

1. $y = \frac{1}{x}$.

x	y
6	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
−1	−1
−2	$-\frac{1}{2}$
−3	$-\frac{1}{3}$
−4	$-\frac{1}{4}$
−5	$-\frac{1}{5}$
−6	$-\frac{1}{6}$

Vi tillægger x en Række Talværdier f. Eks. $-6, -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, +6$ og be= stemmer de tilsvarende Værdier af y. Resültatet af disse Beregninger findes i hosstaaende Ta= bel, hvori der med Vilje ikke er opført $x = 0$, da Funktionen ikke har nogen Værdi for $x = 0$. Derpaa tegner man, som det er vist paa Figüren, to Linier ox og oy, der er vinkelrette paa hin= anden. Vi vil derpaa angive en Metode, hvorpaa man kan afbilde et vilkaarligt Sæt sammenhörende Værdier af x og y som et Pünkt i Planet. Lad os f. Eks. betragte det sammenhörende Værdisæt $x = 3$ $y = \frac{1}{3}$. Vi afsætter da $OA_1 = 3$ cm üd ad ox – den saakaldte x-Akse – til höjre, hvorefter man op= gennem A_1 rejser en Linie $\perp$ ox. Med Retning op efter afsættes der= paa üd ad denne Linie $A_1A = \frac{1}{3}$ cm, og man har der= med fündet et Pünkt A, der siges at være det geometriske Billed af Vær= disættet $x = 3$ $y = \frac{1}{3}$.



Som et andet Eksempel vil vi konstrüere det Pünkt B, som afbilder Værdisættet $x = -2$ $y = -\frac{1}{2}$. Man

afsætter da $OB_1 = 2$ cm paa Linien ox's Forlængelse ud-
over O, altsaa med Retning mod venstre, hvorefter
man oprejser en Linie $\perp OB_1$ i Punktet B_1. Ud ad denne
Linie afsætter man $B_1B = \frac{1}{2}$ cm med Retning nedefter.
Punktet B siges da at være det geometriske Billed af
Værdisættet $(-2, -\frac{1}{2})$, eller som man ogsaa siger at af-
bilde dette. Paa samme Maade bestemmer man de Punk-
ter, der svarer til Tabellens andre Værdisæt. Man kan
derpaa vælge en Række nye Værdier for x indenfor In-
tervallet fra -6 til $+6$ f. Eks.

$-5\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$,

beregne de tilsvarende Værdier af y og derpaa konstruere
de tilsvarende Punkter i Planet, og saaledes kan man
fortsætte.

Det geometriske Sted for de Punkter, der afbilder alle muli-
ge sammenhörende Værdisæt af x og y er öjensynlig
en Kurve, der gaar gennem de saaledes bestemte Punk-
ter, og man kan skaffe sig en stadig sikkrere Forestilling
om denne Kurves Form, naar man bestemmer stadig
flere sammenhörende Værdisæt af x og y og derpaa kon-
struerer de tilsvarende Punkter. Figuren viser Formen
af den Kurve, som er det geometriske Billed af Funk-
tionen $y = \frac{1}{x}$ mellem $x = -6$ og $x = +6$. Ved at udvi-
de Tabellen til ogsaa at indeholde Værdier af x udenfor
dette Interval kan man fortsætte Kurven til begge
Sider. Kurven giver et anskueligt Billede af det fra
Kap. 2 kendte Forhold, at $\lim_{x=0} \frac{1}{x} = +\infty$ for en faldende
Talrække (f. Eks. for $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots$), og at $\lim_{x=0} \frac{1}{x} = -\infty$

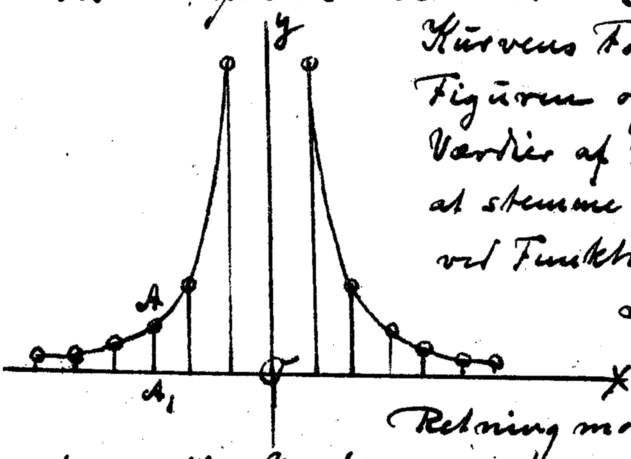
for stigende Talrækker. (f. Eks. for $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \cdots$)

2 $y = \frac{1}{x^2}$. Ved en lignende Fremgangsmaade kan man konstruere den Kurve, der er denne Funktions geometriske Billed eller, som man ogsaa siger, fremstiller denne Funktion grafisk.

I hosstaaende Tabel er der optaget Værdier af x, der er beliggende mellem $+3$ og -3.

x	y
3	$\frac{1}{9}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$
2	$\frac{1}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$
1	1
$\frac{1}{2}$	4
$-\frac{1}{2}$	4
-1	1
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$
$\div 2$	$\frac{1}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$
-3	$\frac{1}{9}$

Som et enkelt Eksempel vil vi konstruere det Punkt A, der svarer til Værdisættet $x = -1\frac{1}{2}$ $y = \frac{4}{9}$. Man afsætter paa ox's Forlængelse ud over o — altsaa mod venstre — $OA_1 = 1\frac{1}{2}$ cm og oprejser en Linie $\perp OA_1$ i A_1. Derpaa afsætter man ud ad denne Linie med Retning opad $A_1A = \frac{4}{9}$ cm. Punktet A vil da afbilde Værdisættet $(-1\frac{1}{2}, \frac{4}{9})$.



Kurvens Form er vist i Figuren og dens Forløb for Værdier af x, der er nær ved Nul, ses at stemme med den kendte Egenskab ved Funktionen, at $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Linien ox kaldes x Akse og siges at have positiv Retning mod højre, svarende til at de positive Værdier af x afsættes mod højre. Linien oy kaldes y Akse og har sin positive Retning opad. De to med positiv Retning forsynede Linier ox og oy, som tillige er $\perp$ hinanden, kaldes et Koordinatsystem. Et Punkt, der afbilder det sammenhørende Værdisæt $x = -1\frac{1}{2}$

$y = \frac{7}{9}$, siges at have x-Koordinaten $-1\frac{1}{2}$ og y-Koordinaten $\frac{7}{9}$.
At et Punkt A har Koordinaterne $x = -1\frac{1}{2}$ $y = \frac{7}{9}$, betegnes $A \equiv (-1\frac{1}{2}, \frac{7}{9})$.
Vi skal senere vende tilbage til den grafiske Fremstilling af Funktioner.

Kapitel 4. Irrationale Tal.

1. Vi vil begynde med at betragte Ligningen $x^2 = 2$. Denne Ligning kan ikke tilfredsstilles ved at sætte x = noget helt Tal, thi $2^2 > 2 > 1^2$. At x heller ikke kan være en Brök, indses saaledes: Dersom $x = \frac{p}{q}$, hvor $\frac{p}{q}$ tænkes forkortet saa meget som muligt, skulde $(\frac{p}{q})^2 = 2$ eller $\frac{p \cdot p}{q \cdot q} = 2$, hvilket er umuligt, da q ikke kan forkortes bort.
Naar man nu kalder Samlingen af alle positive og negative, hele Tal og Bröker samt Nul for de rationale Tal, kan man sige, at $x^2 = 2$ ikke tilfredsstilles af noget rationalt Tal.

2. Vi vil nu indföre en ny Slags Tal: de irrationale Tal
Et saadant bestemmes ved to uendelige Rækker af Tal

$$\begin{cases} h_0 \; h_1 \; h_2 \; h_3 \; \dots \; h_n \; \dots \\ l_0 \; l_1 \; l_2 \; l_3 \; \dots \; l_n \; \dots \end{cases}$$

, der har fölgende Egenskaber.

I Den överste Række skal være faldende, den nederste stigende.
II Ethvert Led i den överste Række skal være större end det tilsvarende*) Led i den nederste. [man skal altsaa have $h_n > l_n$]
III Forskellen mellem to til hinanden svarende Led skal kunne göres < ethvert opgivet positivt Tal, selv om dette er

*) Tilsvarende Led i de to Rækker er Led med samme Mærketal.

aldrig saa lille, naar man blot gaar tilstrækkelig langt frem i Rækkerne [man skal altsaa kunne göre $h_n - l_n < \varepsilon$, naar man blot vælger n tilstrækkelig stor].[x)]

<u>3. Nærmere Bestemmelse af det irrationale Tal, der tilfredsstiller Ligningen $x^2 = 2$.</u>

A. Man ser let, at $2^2 > 2 > 1^2$

B. Man tideler derpaa Intervallet fra 1 til 2 og opstiller fölgende Tabel:

$$
\begin{aligned}
1{,}0^2 &= 1{,}00 \\
1{,}1^2 &= 1{,}21 \\
1{,}2^2 &= 1{,}44 \\
1{,}3^2 &= 1{,}69 \\
\rightarrow 1{,}4^2 &= 1{,}96 \leftarrow \\
\rightarrow 1{,}5^2 &= 2{,}25 \leftarrow \\
&\vdots \\
1{,}9^2 &= \\
2{,}0^2 &=
\end{aligned}
$$

Heraf ser man, at $1{,}5^2 > 2 > 1{,}4^2$

C. Man tideler derpaa Intervallet fra 1,4 til 1,5 og opstiller Tabellen:

$$
\begin{aligned}
1{,}40^2 &= 1{,}9600 \\
\rightarrow 1{,}41^2 &= 1{,}9881 \leftarrow \\
\rightarrow 1{,}42^2 &= 2{,}0164 \leftarrow \\
&\vdots \\
1{,}49^2 &= \\
1{,}50^2 &=
\end{aligned}
$$

Heraf ser man, at $1{,}42^2 > 2 > 1{,}41^2$.

Fortsætter man paa denne Maade, kan man opstille fölgende Rækker:

$$
\begin{cases}
2 \quad 1{,}5 \quad 1{,}42 \; \cdots\cdots \; h_n \; \cdots \\
1 \quad 1{,}4 \quad 1{,}41 \; \cdots\cdots \; l_n \; \cdots
\end{cases}
$$

At disse bestemmer et og kun et Tal ses saaledes:

1) Överste Række er faldende, da vi stadig gaar ind i Intervallet <u>fra</u> dettes överste Grænse. Nederste Række er stigende, da vi

x) To Rækker, der har de 3 omtalte Egenskaber kaldes <u>Tilnærmelsesrækker</u>

stadig gaar ind i Intervallet fra dettes lavere Grænse.

3) Vi har stadig $h_n > l_n$

3) $h_n - l_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, der kan göres $< \varepsilon$, naar n vælges tilstrækkelig stor.

De to Rækker er derfor Tilnærmelsesrækker og bestemmer fölgelig et og kun et irrationalt Tal. Dette kaldes $\sqrt{2}$ (Læs: Kvadratroden af 2.).

At dette Tal tilfredsstiller Ligningen $x^2 = 2$, ses paa fölgende Maade:

Vi opstiller Rækkerne $\begin{cases} 2^2 & 1{,}5^2 & 1{,}42^2 \ldots\ldots h_n^2 \ldots \\ 1^2 & 1{,}4^2 & 1{,}41^2 \ldots\ldots l_n^2 \ldots \end{cases}$

og beviser, at de er Tilnærmelsesrækker. De tilfredsstiller nemlig de 3 Betingelser, som er opstillet i §2. Bl.a. er $h_n^2 - l_n^2 = (h_n - l_n)(h_n + l_n) < \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot (2+2) = 4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$, der altid kan göres $< \varepsilon$, da man altid kan vælge n saa stor, at $\left(\frac{1}{10}\right)^n < \frac{\varepsilon}{4}$.

De to Rækker bestemmer saaledes et og kun et Tal. At dette er Tallet 2, ses saaledes:

Vi har altid $h_n^2 > 2 > l_n^2$ hvoraf

$|h_n^2 - 2| < h_n^2 - l_n^2 < \varepsilon$ og

$|l_n^2 - 2| < h_n^2 - l_n^2 < \varepsilon$.

De to Rækker har altsaa begge Grænseværdien 2.

Man har hermed bevist, at

<u>$x^2 = 2$ har Roden $x = \sqrt{2}$ og at fölgelig $(\sqrt{2})^2 = 2$.</u>

<u>4. Bestemmelse af det irrationale Tal, som er Rod i Ligningen $x^3 = 5$.</u>

Man beviser som i §1, at Ligningen ikke kan tilfredsstilles af noget rationalt Tal.

Man finder derpaa ved at opstille lignende Tabeller som i §3, at

$$2^3 > 5 > 1^3$$
$$1{,}8^3 > 5 > 1{,}7^3$$
$$1{,}71^3 > 5 > 1{,}70^3$$
$$1{,}710^3 > 5 > 1{,}709^3 \quad \text{o. s. v.}$$

Man kan derfor opstille følgende Talrækker

$$\begin{cases} 2 & 1{,}8 & 1{,}71 & 1{,}710 & \cdots & h_n & \cdots \\ 1 & 1{,}7 & 1{,}70 & 1{,}709 & \cdots & l_n & \cdots \end{cases}$$

Det vises nu først, som i §3, at disse Rækker er Tilnærmelsesrækker, der altsaa bestemmer et og kun et Tal, der kaldes $\sqrt[3]{5}$ (Læs: den 3^{die} Rod af 5).
At dette Tal tilfredsstiller Ligningen $x^3 = 5$, ses ved at opstille Rækkerne

$$\begin{cases} 2^3 & 1{,}8^3 & 1{,}71^3 & 1{,}710^3 & \cdots & h_n^3 & \cdots \\ 1^3 & 1{,}7^3 & 1{,}70^3 & 1{,}709^3 & \cdots & l_n^3 & \cdots \end{cases}$$

og først bevise, at de ogsaa er Tilnærmelsesrækker. De tilfredsstiller nemlig de 3 Betingelser, som er opstillede i §2. Bl. a. er

$$h_n^3 - l_n^3 = (h_n - l_n)(h_n^2 + h_n \cdot l_n + l_n^2) < \left(\tfrac{1}{10}\right)^n \cdot (2^2 + 2\cdot 2 + 2^2)$$
$$= 12 \cdot \left(\tfrac{1}{10}\right)^n.$$

Denne Størrelse kan imidlertid altid gøres $< \varepsilon$, da n kan vælges saa stor, at $\left(\frac{1}{10}\right)^n < \frac{\varepsilon}{12}$.
De to Rækker bestemmer saaledes et og kun et Tal.
At dette er Tallet 5, ses saaledes:
Vi har altid $\quad h_n^3 > 5 > l_n^3 \quad$ hvoraf

$$|h_n^3 \div 5| < h_n^3 - l_n^3 < \varepsilon \quad \text{og}$$
$$|l_n^3 - 5| < h_n^3 - l_n^3 < \varepsilon$$

De to Rækker har derfor begge Grænseværdien 5.
Vi har dermed bevist:

Ligningen $x^3 = 5$ har Roden $x = \sqrt[3]{5}$, og fölgelig er $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$.

5. Vi vil derpaa i al Almindelighed vise, at Ligningen

$x^p = a$, hvor a er et positivt Tal har en og kun en positiv Rod. (p er positiv og hel).

1) a er et Potenstal af p^{nde} Grad eller, hvad der er det samme, a = et helt Tal oplöftet til p^{nde} Potens f.Eks $a = b^p$. Ligningen har da den hele, positive Rod $x = b$

2) a er en Potensbrök af p^{nde} Grad eller, hvad der er det samme, a = en Brök oplöftet til p^{nde} Potens f.Eks $a = \left(\frac{b}{c}\right)^p$. Ligningen har da den rationale Rod $x = \frac{b}{c}$.

3) Hvis a er ethvert andet positivt Tal, vil Roden være et irrationalt Tal.

Bevis: Ligningen kan nemlig ikke være tilfredsstillet af et helt Tal eller af en uforkortelig Brök, da a ellers maatte være enten et Potenstal eller en Potensbrök af p^{nde} Grad. Hvis der er en Rod i Ligningen, maa den fölgelig være irrational.

6 Bestemmelse af den positive Rod i Ligningen $x^p = a$.

A. Lad A_0 og a_0 være to paa hinanden fölgende positive, hele Tal i Talrækken, der har den Egenskab, at

$A_0^p > a > a_0^p$ Saadanne to Tal maa kunne findes, naar man efterhaanden oplöfter de hele Tal til p^{nde} Potens og sammenligner Resultaterne med a.

B. Man tideler derpaa Intervallet fra a_0 til A_0 og finder to paa hinanden følgende blandt disse Tal, der har den Egenskab, at

$$A_1^p > a > a_1^p \quad \text{hvor } A_1 - a_1 = \frac{1}{10}.$$

6. Derpaa tideler man Intervallet fra a_1 til A_1 og finder paa samme Maade som ovenfor Tallene a_2 og A_2, der har den Egenskab, at

$$A_2^p > a > a_2^p \quad \text{hvor } A_2 - a_2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2$$

Saaledes fortsætter man, og man kan da opstille følgende Talrækker

$$\left\{\begin{array}{llllll} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_n & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}\right.$$

om hvilke det paa sædvanlig Maade kan bevises, at de er Tilnærmelsesrækker, der altsaa bestemmer et og kun et Tal, der kaldes $\sqrt[p]{a}$ (Læs: den p^{nde} Rod af a).

At dette Tal tilfredsstiller Ligningen $x^p = a$ ses ved at opstille Rækkerne

$$\left\{\begin{array}{llllll} A_0^p & A_1^p & A_2^p & \cdots & A_n^p & \cdots \\ a_0^p & a_1^p & a_2^p & \cdots & a_n^p & \cdots \end{array}\right.$$

og först bevise, at ogsaa de er Tilnærmelsesrækker. De tilfredsstiller nemlig de 3 Betingelser i §2 bl.a. er

$$A_n^p \div a_n^p = (A_n - a_n)(A_n^{p-1} + A_n^{p-2} a_n + A_n^{p-3} \cdot a_n^2 \cdots + a_n^{p-1})$$

$$< \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot (A_0^{p-1} + A_0^{p-2} \cdot A_0 + A_0^{p-3} \cdot A_0^2 + \cdots A_0^{p-1}) =$$

$\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot p \cdot A_0^{p-1}$ der kan göres $< \varepsilon$, hvis man vælger n saa stor, at $\left(\frac{1}{10}\right)^n < \dfrac{\varepsilon}{p \cdot A_0^{p-1}}$.

De to Rækker bestemmer fölgelig et og kun et Tal. At dette er Tallet a, ses saaledes:

Vi har altid $A_n^p > a > a_n^p$; hvoraf

$|A_n^p - a| < A_n^p - a_n^p < \varepsilon$ og

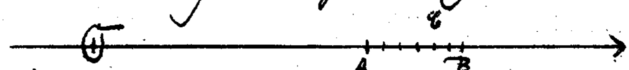
$|a_n^p - a| < A_n^p - a_n^p < \varepsilon$

De to Rækker har derfor begge Grænseværdien a.
$x^p = a$ har altsaa den positive Rod $x = \sqrt[p]{a}$, og man har samtidig $(\sqrt[p]{a})^p = a$.

Kapitel 5.

1. Samlingen af rationale og irrationale Tal kaldes under ét for **de reelle Tal**. Vi vil i det følgende vise, at Samlingen af reelle Tal og Samlingen af Punkter paa en ret Linie kan parres, saaledes at der til ethvert Tal svarer et og kun et Punkt, og at der til ethvert Punkt svarer et og kun et Tal. Man udtrykker dette ved at sige:
At der er en én-éntydig Forbindelse mellem en ret Linies Punkter og de relle Tal.

Vi tegner en ret Linie, som kaldes x-Akse eller Abscisseakse, vælger paa den et Punkt O, Begyndelsespunktet og forsyner den med positiv Retning, som paa Figuren.



1) Det Punkt, der svarer til det hele, positive Tal a, findes ved at afsætte $OA = a$ cm fra O mod höjre. Man plejer da at sige, at A har Abscissen a, og at Punktet A svarer til Tallet a. Det Punkt, der svarer til Tallet $-a$, faas ved at afsætte a cm fra O mod venstre. Det har Abscissen $\div a$

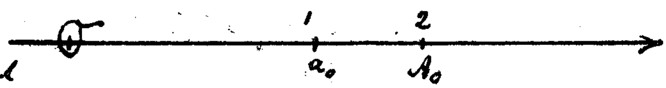
2) Det Punkt, der svarer til Tallet $a + \frac{p}{q}$, hvor $\frac{p}{q}$ er en ægte, positiv Brök, findes ved at afsætte $AB = 1$ cm i OA's Forlængelse og derpaa dele AB i q ligestore Stykker. Det p^{ende} Delingspunkt er det sögte Punkt, som vi kalder C.

b vil da svare til Tallet $a + \frac{p}{q}$ og b's Abscisse siges at være lig det ovennævnte Tal $a + \frac{p}{q}$. Tallet $-a-\frac{p}{q}$ svarer til det Punkt, der er symmetrisk med b med Hensyn til O. Dette Punkt har Abscissen $-a-\frac{p}{q}$.

3) Hvis det opgivne Tal er irrationalt, vil vi först undersøge et Taleksempel.

Lad f. Eks. a være det Tal, der bestemmes af $\begin{cases} 2 \quad 1,8 \quad 1,73 \dots A_n \dots \\ 1 \quad 1,7 \quad 1,72 \dots a_n \dots \end{cases}$

Man afsætter da först de to Punkter A_0 og a_0, som har Abscisserne 2 og 1.



Vi tænker os nu den Del af den rette Linie, der strækker sig fra A_0 mod höjre, trukket op med rödt Blæk og den Del, der fra a_0 strækker sig mod venstre med grönt Blæk.

Derpaa afsætter man Punkterne A_1 og a_1, der har Abscisserne 1,8 og 1,7, der begge ligger paa Liniestykket $a_0 A_0$, og trækker Liniestykket $A_1 A_0$ op med rödt Blæk og Liniestykket $a_1 a_0$ med grönt Blæk.

Derpaa afsætter Punkterne A_2 og a_2, der har Abscisserne 1,73 og 1,72. De to Punkter ligger begge paa Liniestykket $a_1 A_1$, og man trækker $A_2 A_1$ op med rödt Blæk og $a_2 a_1$ med grönt Blæk, og saaledes fortsætter man.

Den röde og den grönne Linie nærmer sig saaledes mere og mere til hinanden, og der kan nu ske ét af to:

a) Enten har den röde og den grönne Linie et fælles Endepunkt eller b) vil dette ikke være Tilfældet.

I sidste Tilfælde maa der mellem det röde og det grönne være et Liniestykke, hvis Længde er = et angiveligt, posi-

tiot Tal m. Men dette er umuligt, da
$A_n - a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, der kan göres $< \varepsilon$ og altsaa ogsaa $< m$.
Det röde og det grönne maa altsaa have et fælles Ende=
punkt A og **dette Punkt vil da repræsentere (svare til)
det irrationale Tal a**. OA siges at have Længden a cm,
og A siges at have Abscissen a.
Paa samme Maade kan man vise, at der til det
irrationale Tal $a = \begin{cases} A_0 \; A_1 \; A_2 \ldots A_n \ldots \\ a_0 \; a_1 \; a_2 \ldots a_n \ldots \end{cases}$ svarer et og kun
et Punkt A, der har Abscissen a.

2. Omvendt kan man vise, at der til ethvert Punkt paa
den rette Linie svarer et og kun et reelt Tal.
Lad A være det givne Punkt
Man afsætter da 1) fra O i Retning mod A 1 cm saa ofte,
at man passerer A. Dersom et af de fremkomne Delings
punkter f.Eks. det 7nde falder sammen med A, vil A
svare til Tallet ± 7. OA siges da at have Længden 7 cm, hvis
A ligger tilhöjre for O, ellers $\div$ 7 cm.
2) Hvis A derimod falder mellem to Delingspunkter —
f.Eks. mellem det 7nde og det 8nde — kan vi kalde disse
Punkter a_0 og A_0. Vi deler da a_0A_0 i 2 Dele, i 3 Dele, i
4 Dele o.s.v. for at se om muligt A falder sammen med
et af de fremkomne Delingspunkter. Hvis f.Eks. A
falder sammen med det 5te af de Punkter, der deler
a_0A_0 i 11 Dele, vil A repræsentere Tallet $\pm 7\frac{5}{11}$. OA's Læng=
de siges da at være $7\frac{5}{11}$ cm, hvis A ligger tilhöjre for
O, ellers $- 7\frac{5}{11}$ cm.
3) Hvis intet af de fremkomne Delingspunkter falder sam=
men med A, som vi i det efterfölgende tænker beliggen=

de tilhöjre for O, kan man fortsætte paa fölgende Maade:
Vi deler $a_0 A_0$ i 10 ligestore Stykker og tænker os, at A kommer til at falde mellem f. Eks. det 5te og det 6te Delingspunkt. Disse betegnes ved a_1 og A_1 og man inddeler atter $a_1 A_1$. A maa da igjen falde mellem to Delingspunkter f. Eks mellem det 3die og det 4de, hvorpaa disse Punkter kaldes a_2 og A_2. $a_2 A_2$ deles atter i 10 ligestore Dele, og saaledes fortsætter man

A siges da at repræsentere Tallet $\begin{cases} 7 \;\; 7{,}6 \;\; 7{,}54 \ldots A_n \ldots \\ 6 \;\; 7{,}5 \;\; 7{,}53 \ldots a_n \ldots \end{cases}$
og dersom dette irrationale Tal betegnes med a, siges Det at have Længden a cm.

Paa samme Maade som vi her har behandlet et specielt Eks., kan det almindelige Tilfælde behandles.

3. Af den geometriske Fremstilling af det irrationale Tal fremgaar det, at <u>det irrationale Tal er den fælles Grænseværdi for en faldende og en stigende Talrække.</u>
Vi maa imidlertid bevise denne Paastand ud fra vore Definitioner paa Grænseværdier. Her vil vi dog bevise en noget almindeligere Sætning, der gælder for baade rationale og irrationale Tal:
<u>Et Tal, der er bestemt ved Tilnærmelsesrækker, er den fælles Grænseværdi for begge disse Rækker.</u>

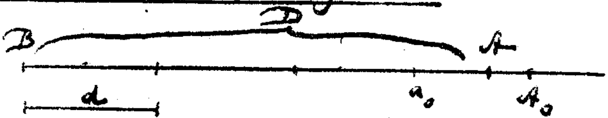
Bevis: Lad $a = \begin{cases} A_0 \;\; A_1 \;\; A_2 \ldots A_n \ldots \\ a_0 \;\; a_1 \;\; a_2 \ldots a_n \ldots \end{cases}$
Man har da for alle n

$$A_n > a > a_n \quad \text{Heraf fölger:}$$

$|A_n - a| < A_n - a_n$ der kan göres $< \varepsilon$ og
$|a_n - a| < A_n - a_n$ - - - - - - $< \varepsilon$. Derved har man bevist, at $\lim\limits_{n=\infty} A_n = a$ og $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$.

Kapitel 6. Forholdet mellem to Liniestykker.

Lad D og d være to op=givne Liniestykker.



1) Dersom de to Liniestykker har et fællesmaal ɔ: dersom der eksisterer et Liniestykke, som gaar op i dem begge, kaldes Linierne kommensurable.

Ved to kommensurable Liniestykkers Forhold vil vi i det følgende forstaa Forholdet mellem de to Tal, der angiver, hvormange Gange det fællesmaal gaar op i Liniestykkerne.

Lad m være et fællesmaal for de to Liniestykker og lad det gaa p Gange op i D, q Gange i d.
Man har da

$$\frac{D}{d} = \frac{p}{q}.$$

2) Hvis de to Liniestykker intet fællesmaal har, kaldes de inkommensurable. Vi vil vise, hvad man da forstaar ved Forholdet $\frac{D}{d}$.

Man afsætter d ud ad D, idet man begynder i B og bliver ved dermed, indtil man har overskredet D's andet Endepunkt A. Dette vil da komme til at ligge mellem to Delingspunkter, som vi vil kalde a_0 og A_0. Hvis de to Delingspunkter er det p_0^{nte} og det p_0+1^{te} regnet fra B, faar man:

$$(p_0+1)\,d > D > p_0 \cdot d$$

Vi deler derpaa d i 10 ligestore Dele og afsætter $\frac{d}{10}$ ud fra B saa ofte, at A er passeret. Intet af disse Delingspunkter kan da falde sammen med A, da D og d saa vilde have et fællesmaal, nemlig $\frac{d}{10}$. A vil derfor falde mellem to Delingspunkter f.Eks det p_1^{te} og det p_1+1^{te}. Vi kalder disse

Punkter a_1 og A_1 og de maa begge ligge paa Liniestykket $a_0 A_0$. Man har da $$(p_1+1)\cdot\frac{d}{10} > D > p_1\cdot\frac{d}{10}$$
Derpaa afsættes $\frac{d}{100}$ ud fra B, saaledes at A passeres. A kan heller ikke denne Gang falde sammen med noget af Delingspunkterne, da D og d saa vilde have et fælles Maal, nemlig $\frac{d}{100}$. Men det vil falde mellem to Delingspunkter f. Eks. det p_2^{nde} og det p_2+1^{de}, som vi vil kalde a_2 og A_2. De vil begge komme til at ligge paa Liniestykket $a_1 A_1$, og man har
$$(p_2+1)\cdot\frac{d}{100} > D > p_2\cdot\frac{d}{100}$$, og saaledes kan vi fortsætte.

Vi fastslaar da ved Definition, at vi ved $\frac{D}{d}$ vil forstaa det irrationale Tal
$$\begin{cases} p_0+1 & \frac{p_1+1}{10} & \frac{p_2+1}{10^2} \cdots\cdots \frac{p_n+1}{10^n} \cdots \\ p_0 & \frac{p_1}{10} & \frac{p_2}{10^2} \cdots\cdots \frac{p_n}{10^n} \cdots \end{cases}$$

Anm 1.

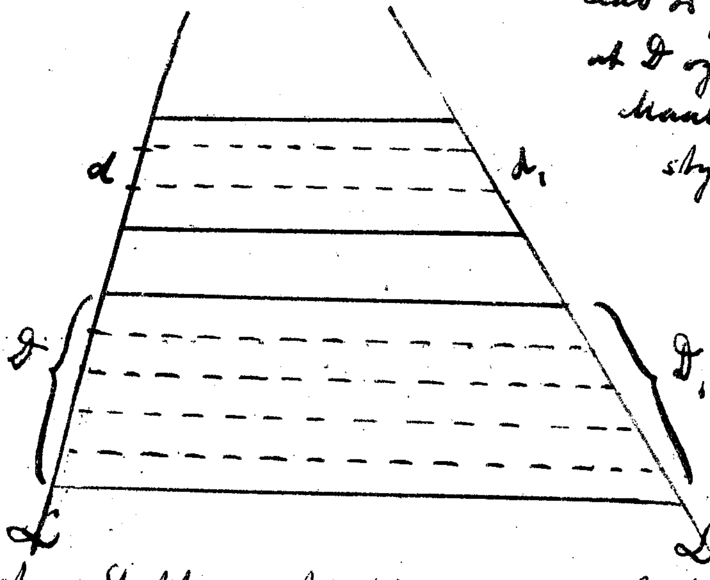
Vi ser herved, at hvis A er et Punkt beliggende paa x-Aksen, vil A's Abscisse være det übenævnte Tal, som angiver Forholdet mellem Liniestykkerne OA og 1 cm, eller at <u>Abscissen er lig det übenævnte Tal, som angiver OA's Længde maalt i cm og forsynet med Fortegn.</u>

<u>Anm 2.</u> Som et Eksempel paa inkommensurable Liniestykker kan nævnes Grundlinien og Benet i en ligebenet Trekant, hvis Topvinkel er = 36°.

<u>Kapitel 7.</u> <u>Geometriske Følgesætninger.</u>

1. <u>Parallele Linier afskærer proportionale Stykker af to vilkaarlige Linier.</u>

Man skal bevise, at $\frac{D}{d} = \frac{D_1}{d_1}$.

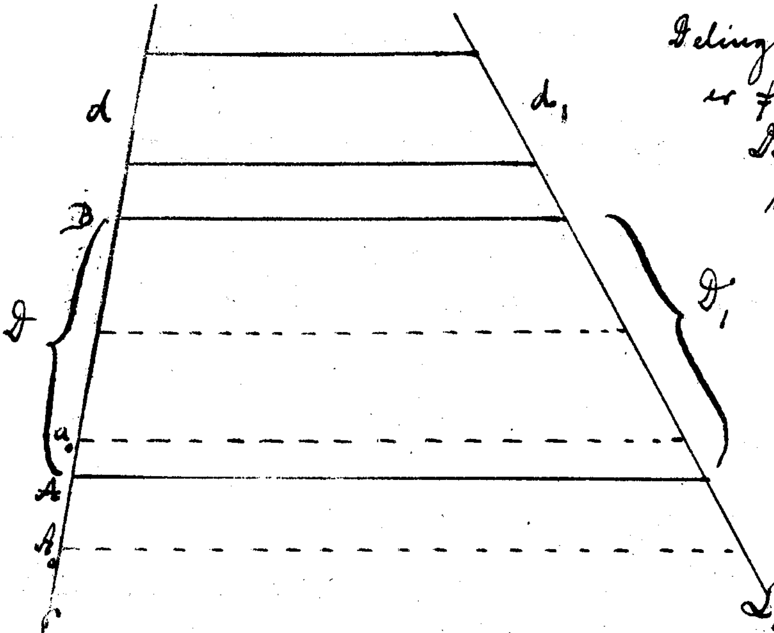


¹) Lad os först gaa ud fra 30.
at D og d har et fælles Maal ɔ: at der er et Liniestykke m, som gaar op i dem begge. Lad See uden m gaa p Gange op i D og q Gange op i d. Man har da: $\frac{D}{d} = \frac{p}{q}$. Man deler nu D_1 i p og d_1 i q ligestore Stykker og trækker gennem de fremkomne Delingspunkter Linier ∥ de opgivne parallele Linier. De Stykker, som derved afskæres paa D_1 og d_1 bliver da ogsaa ligestore ifölge Sætningen: Naar flere ∥ Linier afskærer ligestore Stykker paa en ret Linie, vil de Stykker, de afskærer paa enhver anden ret Linie ogsaa være ligestore. Lad de ligestore Stykker, hvori D_1 og d_1 er delt, være n. D_1 vil da være delt i p og d_1 i q ligestore Stykker, der alle er = n. Man har fölgelig

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{p}{q} \quad \text{hvoraf fölger:} \quad \frac{D}{d} = \frac{D_1}{d_1}.$$

²) D og d har intet fælles Maal.
Man afsætter d ud ad D fra B, og vi tænker os, at D's andet Endepunkt A kommer til at ligge mellem det $p_0$te og det p_0+1te Delingspunkt, som betegnes ved a_0 og A_0. Man har da:

$$(p_0+1)d > D > p_0 \cdot d$$



Gennem de fremkomne Delingspunkter tegnes Linier $\parallel$ de opgivne Paralleler. De paa L_1 afskaarne Stykker bliver alle $= d_1$, og D_1's nederste Endepunkt kommer til at ligge mellem det $p_0$te og det p_0+1te Delingspunkt. Man har da

$$(p_0+1)\,d_1 > D_1 > p_0 \cdot d_1 .$$

Man afsætter derpaa $\frac{d}{10}$ fra B til ad D og tænker sig, at A derved kommer til at ligge mellem det $p_1$te og det p_1+1te Delingspunkt, som betegnes a_1 og A_1. Vi faar da:

$$(p_1+1)\cdot\frac{d}{10} > D > p_1 \cdot \frac{d}{10} .$$

Ved Linier gennem Delingspunkterne $\parallel$ de opgivne Paralleler vil der paa L_1 afskæres Stykker, der alle er $= \frac{d_1}{10}$, og D_1's nederste Endepunkt vil komme til at ligge mellem det $p_1$te og det p_1+1te Delingspunkt. Man har da

$$(p_1+1)\,\frac{d_1}{10} > D_1 > p_1 \cdot \frac{d_1}{10} .$$

Fortsættes paa denne Maade faar man:

$$\frac{D}{d} = \begin{cases} p_0+1 & \frac{p_1+1}{10} & \frac{p_2+1}{10^2} & \ldots & \frac{p_n+1}{10^n} & \ldots \\ p_0 & \frac{p_1}{10} & \frac{p_2}{10^2} & \ldots & \frac{p_n}{10^n} & \ldots \end{cases}$$

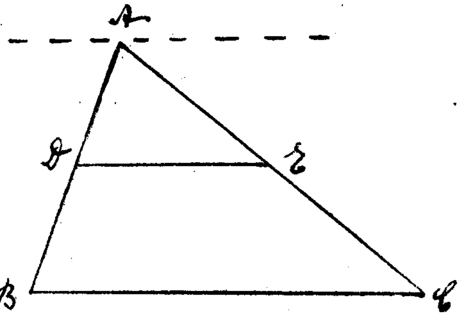
og

$$\frac{D_1}{d_1} = \begin{cases} p_0+1 & \frac{p_1+1}{10} & \frac{p_2+1}{10^2} & \ldots & \frac{p_n+1}{10^n} & \ldots \\ p_0 & \frac{p_1}{10} & \frac{p_2}{10^2} & & \frac{p_n}{10^n} & \ldots \end{cases}$$

hvoraf $\frac{D}{d} = \frac{D_1}{d_1}$, hvormed Sætningen er bevist.

2. Ved en Paralleltransversal i en Trekant forstaar man en Linie, som skærer to af Trekantens Sider og er $\neq$ den tredje.

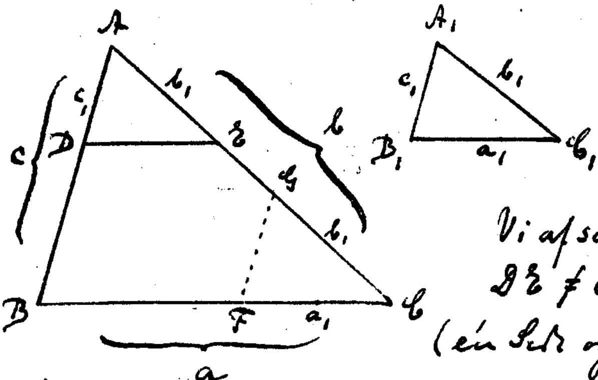
<u>En Paralleltransversal i en Trekant deler de to Sider i proportionale Stykker</u>



Gennem A tegnes en Linie $\neq$ Transversalen DE. Ifølge 1 har man da:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{og}$$
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

3. <u>I to ensvinklede Trekanter er de ensliggende Sider proportionale.</u>



Lad ABC og $A_1B_1C_1$ være to ensvinklede Trekanter og $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Vi afsætter da $AD = c_1$ og tegner $DE \neq BC$. Da vil $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$ (én Side og to hosliggende Vinkler lige store) og man har derfor ifølge 2

$$\frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}$$

. Derpaa afsætter man $CF = a_1$ og tegner $FG \neq BA$. $\triangle FCG$ er da $\cong \triangle B_1C_1A_1$ og følgelig er $\frac{b}{b_1} = \frac{a}{a_1}$. Man har altsaa bevist at

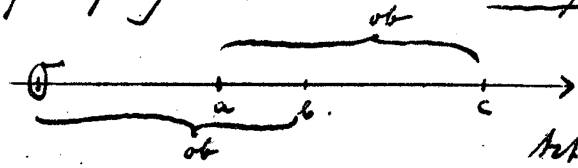
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

<u>Kapitel 8. Regning med rationale og irrationale Tal.</u>

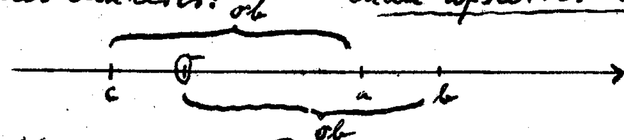
Vi vil nu gennem Definitioner fastslaa, hvorledes man skal addere, subtrahere, multiplicere og dividere reelle Tal uden Hensyn til, om de er rationale eller irrationale. Bagefter skal det derpaa vises, at de nye Definitioner indeslutter som et specielt Tilfælde de gamle, kendte Definitioner for Regning med rationale Tal.

Lad a og b være to Punkter paa Abscisseaksen med Abscisserne a og b.

1. __Addition__. Det Punkt, hvis Abscisse er a + b findes paa følgende Maade: __Man afsætter i oa's Forlængelse ac i Størrelse og Retning = ob__. Abscissen til Punktet c er da = a + b.



2. __Subtraktion__. Det Punkt, hvis Abscisse er a ÷ b findes saaledes: __Man afsætter ud fra a Liniestykket ac i Størrelse og Retning = bo__



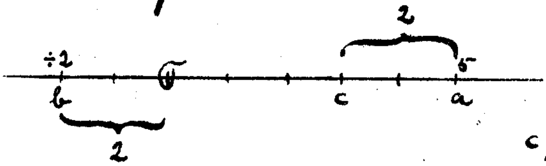
Abscissen til Punktet c er da = a ÷ b. Man ser, at denne Definition er i Overensstemmelse med __Subtraktionsprøven__. c bliver nemlig det Tal, som lagt til b giver a: For at finde Tallet c + b skal man nemlig ifl. ud fra c afsætte et Liniestykke i Størrelse og Retning = ob. Men derved kommer man netop til Punktet a.

Vi vil nu vise, at disse Definitioner, naar de anvendes paa rationale Tal, fører til de samme Resultater, som faas ved Anvendelse af vore gamle Definitioner.

F. Eks: 5 + (−2) er som bekendt = 3.

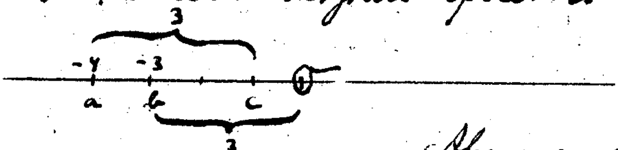
For efter den nye Definition paa Addition at finde

$5+(-2)$ afsættes $oa = 5$ cm $ob = \div 2$ cm. Derpaa afsættes $ac = -2$ cm, og man kommer derved til det Punkt c, der har Abscissen 3.



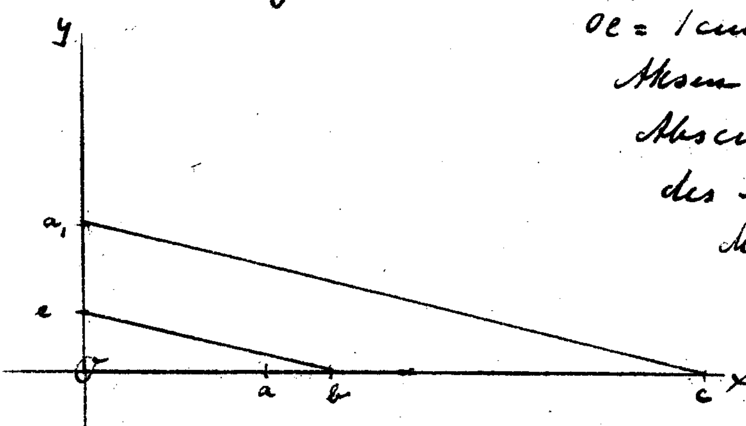
Efter den nye Definition faar man altsaa ogsaa
$5+(-2) = 3$.

Eks: $-4 \div (-3)$ er som bekendt $= \div 1$. For efter den nye Definition at finde $-4-(-3)$ afsættes $oa = \div 4$ cm og $ob = \div 3$ cm. Derpaa afsættes $ac = bo = 3$ cm, men derved kommer man netop til det Punkt c, hvis Abscisse er $= \div 1$.



3. Multiplication

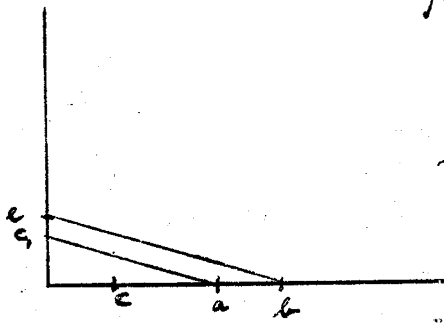
Vi tegner gennem o en Linie $\perp$ x-Aksen og giver den positiv Retning opefter. Vi har derved faaet tegnet et Koordinatsystem. Man afsætter da $oa_1 = oa$ og $oe = 1$ cm, begge ud ad y-Aksen. Det Punkt, hvis Abscisse er $= a \cdot b$ findes saaledes:



Man tegner Linien eb og derpaa gennem a_1 en Linie $\parallel$ eb. Det fremkomne Skæringspunkt med x-Aksen er da det søgte Punkt c, hvis Abscisse ved Definition fastslaas at være $a \cdot b$

4. Division. Man afsætter som før $oe = 1$ cm ud ad y-Aksen.

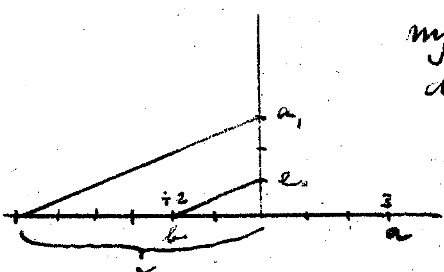
Derpaa tegnes Linien be og gennem a, tegnes en Linie $\neq$ be. Denne Linie skærer y Aksen i Punktet c_1, hvorpaa man afsætter oc ud ad x Aksen = oc_1. Man fastslaa derpaa ved Definition, at Punktet c skal have Abscissen $a:b$.



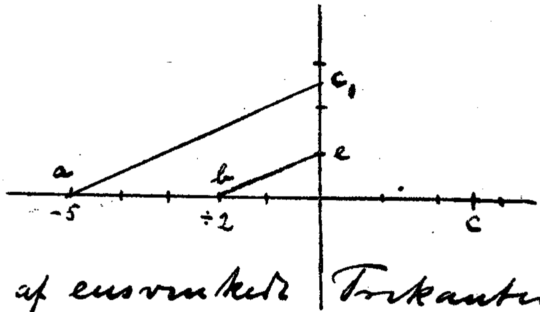
Definitionen viser sig at være i Overensstemmelse med Divisionsprøven, idet c bliver det Tal, som multipliceret med b giver a. Thi for at konstruere Punktet $c \cdot b$ skal man afsætte $oc_1 = oc$ ud ad y-Aksen. Derpaa tegnes Linien be og gennem c_1 tegnes derpaa en Linie $\neq$ be. Men det derved frembragte Skæringspunkt med x-Aksen er netop a.

Ogsaa her vil vi vise, at disse Definitioner, naar de anvendes paa rationale Tal, fører til de samme Resultater, som faas ved Anvendelse af vore gamle Definitioner.

Eks: $3 \cdot (-2)$ er som bekendt $= -6$. Naar man efter den nye Definition vil finde det Punkt, der har Abscissen $3 \cdot (-2)$, skal man afsætte $oa = 3$ cm, $ob = -2$ cm. Derpaa afsættes $oa_1 = 3$ cm ud ad y-Aksen, hvorpaa man gennem a_1 tegner en Linie $\neq$ eb. Man faar da ved Hjælp af ensvinklede Trekanter, idet vi regner alle Liniestykker numerisk $\frac{3}{1} = \frac{x}{2}$, hvoraf $x = 6$. Da c ligger til venstre



stre for o, vil c:s Abscisse være $= -6$.



Eks: $\frac{-5}{-2} = 2\frac{1}{2}$.
Efter den nye Definition tegnes $ac_1 \neq be$. Kaldes nu oc_1:s numeriske Længde for x, faar man ved Hjælp af ensvinklede Trikanter $\frac{5}{2} = \frac{x}{1}$ o: $x = 2\frac{1}{2}$. Man skal altsaa afsætte oc ud ad Abscisseaksen $= +2\frac{1}{2}$.

Kapitel 9. Fölgesætninger og Anvendelser.

1. Lad $a = \begin{cases} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \cdots \end{cases}$

Dersom man nu kan bevise, at $A_n > b > a_n$ for alle Værdier af n, vil Tallet $b = a$.

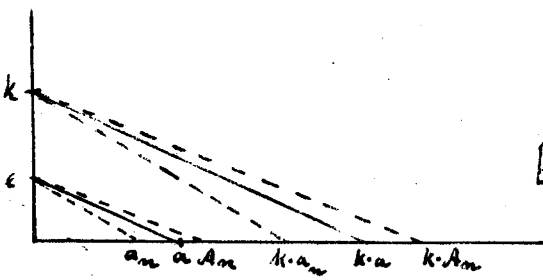
Bevis: Man har nemlig $|b-a| < A_n - a_n$, der kan göres $< \varepsilon$, naar man blot vælger n tilstrækkelig stor. Der er derfor ingen angivelig Forskel paa de to Tal a og b, de maa derfor være ligestore og svare til det samme Punkt paa x Aksen.

2. Lad k være et positivt, rationalt Tal, da vil

$$k \cdot a = \begin{cases} k\cdot A_0 & k\cdot A_1 & k\cdot A_2 & \cdots & k\cdot A_n \cdots \\ k\cdot a_0 & k\cdot a_1 & k\cdot a_2 & \cdots & k\cdot a_n \cdots \end{cases}$$

Bevis:
Vi vil först bevise, at de to Rækker er Tilnærmelsesrækker.
1) Den överste Række er faldende, thi $A_n \leqq A_{n-1}$, medförer $kA_n \leqq kA_{n-1}$. At den nederste Række er stigende bevises paa lignende Maade.
2) $kA_n > ka_n$ thi $A_n > a_n$
3) $kA_n - ka_n = k(A_n - a_n) = k\left(\frac{1}{10}\right)^n$, der kan göres $< \varepsilon$, da

man kan vælge n saa stor, at $\left(\frac{1}{10}\right)^n < \frac{\varepsilon}{k}$.
De to Rækker bestemmer altsaa et og kun et Tal, og at det te er $= k \cdot a$, ses af foranstaaende Figur, der viser os, at



$kA_n > ka > k \cdot a_n$ for alle Værdier af n. Dermed er Sætningen bevist. [Paa Figuren har vi konstrueret de Punkter, der repræsenterer Tallene $k \cdot a_n$, $k \cdot a$ og $k \cdot A_n$ efter den almindelige Definition paa Multiplication].

3. Dersom
$$a = \begin{cases} A_0 \ A_1 \ A_2 \cdots A_n \cdots \\ a_0 \ a_1 \ a_2 \cdots a_n \cdots \end{cases} \quad \text{og}$$
$$b = \begin{cases} B_0 \ B_1 \ B_2 \cdots B_n \cdots \\ b_0 \ b_1 \ b_2 \cdots b_n \cdots \end{cases}, \text{ hvor alle}$$
4 Talrækkers Led er positive, vil
$$a \cdot b = \begin{cases} A_0 \cdot B_0 \ \ A_1 \cdot B_1 \ \ A_2 \cdot B_2 \cdots A_n \cdot B_n \cdots \\ a_0 \cdot b_0 \ \ a_1 \cdot b_1 \ \ a_2 \cdot b_2 \cdots a_n \cdot b_n \cdots \end{cases}$$

Bevis: Vi vil först bevise, at de to sidste Talrækker er Tilnærmelsesrækker.

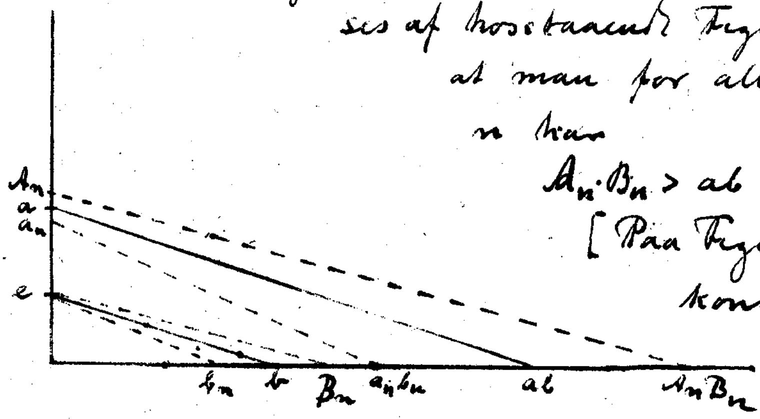
1) Man ved, at $A_n \leqq A_{n-1}$ og $B_n \leqq B_{n-1}$; heraf fölger
$$A_n \cdot B_n \leqq A_{n-1} \cdot B_{n-1},$$ hvoraf atter fölger, at den överste Række er faldende. Paa lignende Maade vises det, at den nederste Række er stigende.

2) $A_n > a_n$ og $B_n > b_n$ medförer $A_n \cdot B_n > a_n \cdot b_n$

3) $A_n \cdot B_n \div a_n \cdot b_n = \left[a_n + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \cdot \left[b_n + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \div a_n b_n =$
$$\left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot \left[a_n + b_n + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] < \left(\frac{1}{10}\right)^n \left[A_0 + B_0 + 1\right].$$ Men denne Störrelse kan göres $< \varepsilon$, da man kan vælge n saa stor, at $\left(\frac{1}{10}\right)^n < \frac{\varepsilon}{A_0 + B_0 + 1}$. De to Rækker bestemmer

altsaa et og kun et Tal. At dette er Tallet a.b 38
ses af hosstaaende Figur, som viser, at man for alle Værdier af n har

$$A_n \cdot B_n > ab > a_n b_n.$$



[Paa Figuren har man konstrueret de Punkter, der repræsenterer Tallene $a_n b_n$, ab og $A_n B_n$ efter vor almindelige Definition paa Multiplication].

3. Er tillige $c = \begin{cases} C_0 & C_1 & C_2 \cdots C_n \cdots \\ c_0 & c_1 & c_2 \cdots c_n \cdots \end{cases}$ hvor ogsaa de to Rækkers Led er positive, vil

$$a.b.c = \begin{cases} A_0 B_0 C_0 & A_1 B_1 C_1 & \cdots & A_n \cdot B_n \cdot C_n \cdots \\ a_0 b_0 c_0 & a_1 b_1 c_1 & \cdots & a_n \cdot b_n \cdot c_n \cdots \end{cases}$$

Sætningen følger af 2, da

$$a.b.c = (a.b).c = \left[\begin{cases} A_0 B_0 & A_1 B_1 & \cdots A_n B_n \cdots \\ a_0 b_0 & a_1 b_1 & \cdots a_n \cdot b_n \cdots \end{cases}\right] \cdot c$$

$$= \begin{cases} A_0 B_0 C_0 & A_1 B_1 C_1 & \cdots & A_n B_n C_n \cdots \\ a_0 b_0 c_0 & a_1 b_1 c_1 & \cdots & a_n b_n c_n \cdots \end{cases}$$

Disse 3 Følgesætninger spiller en stor Rolle i de geometriske Anvendelser.

<u>Opgave 1</u>. Bevis, at $\frac{1}{3} = \begin{cases} 1 & 0{,}4 & 0{,}34 & 0{,}334 \cdots \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}33 & 0{,}333 \cdots \end{cases}$

<u>Opgave 2</u>. Bevis, at $2\frac{1}{22} = \begin{cases} 3 & 2{,}1 & 2{,}05 & 2{,}046 & 2{,}0455 & 2{,}04546 \cdots \\ 2 & 2{,}0 & 2{,}04 & 2{,}045 & 2{,}0454 & 2{,}04545 \cdots \end{cases}$

<u>Anm</u>: Udfra Sætninger som de 3 ovenfor anførte lader det sig bevise, at man kan regne med reelle Tal efter ganske de samme Regler, som man bruger, naar Tallene er rati-

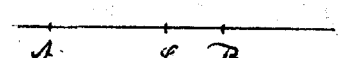
onale. Alle Sætninger fra de 4 Regningsarter vil f. Eks. gælde, hvad enten Tallene er rationale eller irrationale. Vi vil dog ikke gaa videre ind paa dette. De to sidste Opgaver viser, hvad der ogsaa har været Eksempler paa i det foregaaende, at ogsaa rationale Tal lader sig bestemme ved Tilnærmelsesrækker.

Anvendelser:

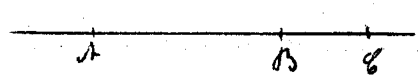
1. Lad A og B være to Punkter paa Abscisseaksen og lad B ligge tilhöjre for A. Man kan da bestemme AB's Længde ved at bestemme Forholdet mellem Liniestykkerne AB og 1 cm. Derved faar man et rationalt eller irrationalt Tal, som vi kan kalde a. AB's Længde er da = a cm, hvor a er et positivt Tal. Vi vil da bestemme, at Linielængden BA sættes = ÷ a cm. Deraf ser man, at $AB + BA = 0$.

Paa Grundlag af dette kan man bevise fölgende Sætning: Lad A, B og C være 3 vilkaarlige Punkter paa Abscisseaksen, man har da — ganske hvordan Punkterne ellers ligger — at $AC + CB = AB$, naar Liniestykkerne maales i cm og regnes med Fortegn.

Bevis: 1) C ligger mellem A og B.
Sætningen er da öjensynlig rigtig.



2) C ligger tilhöjre for B.
Man har da: $AC + CB = AB + BC + CB$
$= AB$.



3) C ligger tilvenstre for A.
Man har da $AC + CB =$
$AC + CA + AB = AB$.

2. At bestemme et Punkt P, som deler AB, saaledes at $\frac{AP}{BP} = \mu$

hvor μ er et opgivet Tal.

Man sætter $AB = a$ cm og $AP = x$ cm.

BP er da $= BA + AP = -a + x$

Vi indsætter dette i Ligningen $\frac{AP}{BP} = \mu$ (1)

og faar $\frac{x}{-a+x} = \mu$ (2) eller

$$x = -\mu a + \mu x$$

$$\mu a = (\mu - 1)x$$ hvoraf, naar $\mu \gtrless 1$.

$$x = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot a \qquad (3)$$

Man ser heraf, at der til ethvert opgivet μ – undtagen $\mu = 1$ – svarer én og kun én Værdi af x og fölgelig én og kun én Beliggenhed af P. <u>Omvendt</u> vil der til enhver Beliggenhed af P svare en og kun en Værdi af x og fölgelig en og kun en Værdi af $\frac{x}{-a+x}$ ɔ: en og kun én Værdi af μ. Her maa man dog forudsætte, at x ikke er $= a$ ɔ: at P ikke falder i B.

Der er derfor to Tilfælde at undersöge nærmere:

1) <u>$x = a$</u>

Af Ligningen (2) ser vi, at μ da ikke kan beregnes. Antager man imidlertid, at <u>P ligger nær ved B, men til höjre for B</u>, kan man sætte $BP = \varepsilon$. Man faar da

$\frac{AP}{BP} = \frac{a+\varepsilon}{\varepsilon}$, der vil faa Grænseværdien $+\infty$, naar P nærmer sig ubegrænset til B fra höjre Side, da ε derved svinder ind mod Nul.

Hvis derimod <u>P ligger nær ved B, men tilvenstre for B</u>, kan man sætte $BP = -\varepsilon$ og faar saa:

$\frac{AP}{BP} = \frac{a-\varepsilon}{-\varepsilon}$, der vil faa Grænseværdien $\div\infty$, naar P nærmer sig ubegrænset til B fra venstre Side, da ε derved svinder ind mod Nul.

μ's Værdi lader sig saaledes ikke bestemme, naar P falder i B og end ikke μ's Grænseværdi lader sig bestemme. Der er nemlig to Grænseværdier for μ, nemlig $+\infty$ naar P nærmer sig B fra höjre og $-\infty$, naar P nærmer sig B fra venstre.

2) $\underline{\mu = 1}$. $\frac{AP}{BP} = 1$ medförer $AP = BP$, hvad der er umuligt. Et saadant Punkt P, for hvilket $\mu = 1$, eksisterer ikke.

Men hvis P fjerner sig i det uendelige mod höjre eller mod venstre, vil $\frac{AP}{BP}$ nærme sig ubegrænset til 1.

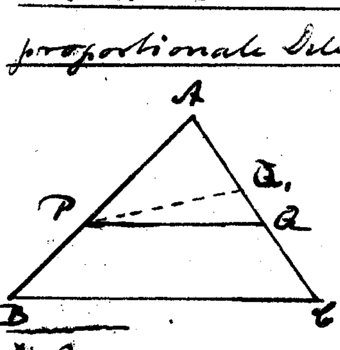
Man benytter nu de Talemaader, at naar P falder i B, saa er $|\mu| = \infty$ *), og naar $\mu = 1$, falder P i Liniens uendelig fjerne Punkt. Herefter har man bevist Sætningen:

<u>Der findes ét og kun ét Punkt, der deler et opgivet Liniestykke i et opgivet Forhold.</u>

Anm:

Af Tegningen $\frac{AP}{BP} = \mu$ fölger $\frac{AP}{PB} = -\mu$.
Der gives altsaa ét og kun ét Punkt P, der deler AB, saaledes at $\frac{AP}{PB}$ har en opgiven Værdi. Under denne Form benyttes Sætningen i det fölgende.

3. <u>Naar en Transversal i en Trekant deler de to Sider i proportionale Dele, er den parallel med den tredje Side.</u>



Givet: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$!! Bevis: $PQ \parallel BC$??

Hvis PQ ikke er $\parallel BC$, kan man gennem P tegne en Linie $\parallel BC$. Lad denne skære AC i Q_1. Man har da

$\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{AP}{PB}$, eller at Q og Q_1 deler

*) Læs: μ numerisk = uendelig

AC i det samme Forhold. Men dette er umuligt, hvoraf følger $PQ \neq BC$.

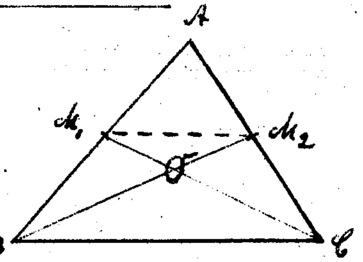
Følgesætning: Da $PQ \neq BC$ vil $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, hvoraf følger: $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$.

Eks: $PQ = 6$ cm, $BC = 9$ cm, $PB = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Find AP og AQ.

4. En Midtpunktstransversal i en Trekant (ɔ: en Linie, der forbinder to af Sidernes Midtpunkter) er $\neq$ den tredje Side og halvt saa stor som denne.

Lad P og Q betegne de to Siders Midtpunkter. Man har da:
$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = 1$ hvoraf følger $PQ \neq BC$. Heraf følger atter:
$\triangle APQ \sim ABC$, hvoraf $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$ ɔ: $PQ = \frac{1}{2} BC$.

Opgave 1. Medianerne i en Trekant deler hinanden i Forholdet 1:2.



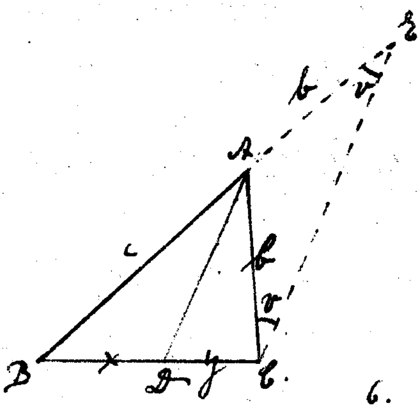
Lad BM_2 og CM_1 være to af Trekantens Medianer. Da vil ifølge 4 $M_1M_2 \neq BC$ og $M_1M_2 = \frac{1}{2} BC$. Sættes $M_1M_2 = m$, bliver derfor $BC = 2m$.
Nu er $\triangle M_1OM_2 \sim \triangle COB$, hvoraf
$\frac{M_1O}{OC} = \frac{M_2O}{OB} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$.

Heraf følger, at Medianerne i en Trekant skærer hinanden i eet Punkt, thi der gives et og kun et Punkt O paa M_1C, der deler Linien, saaledes at $\frac{M_1O}{OC} = \frac{1}{2}$. Da baade m_b og m_a deler M_1C i dette Forhold, maa de begge gaa gennem O.

Opgave 2. Midtpunktstransversalen i et Trapez (ɔ: den Linie, der forbinder de ikke parallele Siders Midtpunkter) er $\neq$ de to andre Sider og lig deres halve Sum.

5. Halveringslinien i en Trekant deler den modstaaende

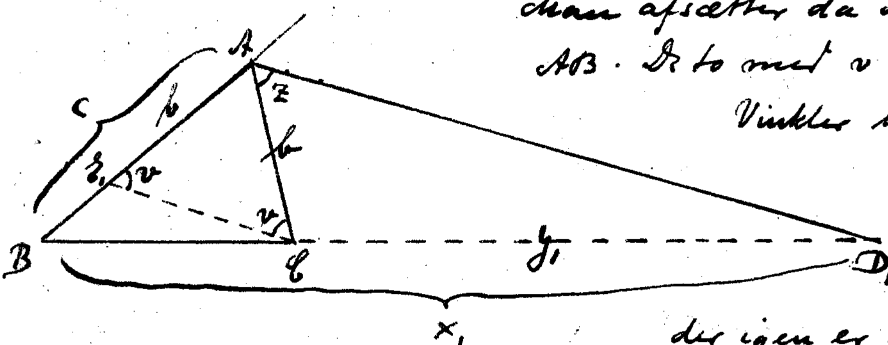
Side i Stykker, der forholder sig som de Vinklen indesluttende Sider. Man afsætter $AE = b$ i Forlængelse af BA.



$\triangle AEC$ bliver da ligebenet, hvoraf man ser, at de to Vinkler, der paa Figuren er betegnet ved v, bliver ligestore. Desuden er $\angle A = 2v$ $\therefore$ $v = \frac{A}{2}$. Heraf følger $AD \neq CE$, og følgelig maa

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

6. En Linie, der halverer Nabovinklen til en Vinkel i en Trekant, deler den modstaaende Side i et Forhold, der er lig Forholdet mellem de Vinklen indesluttende Sider. Lad AD_1 halvere $\angle A$'s Nabovinkel. Man afsætter da $AE_1 = b$ ud ad AB. De to med v betegnede Vinkler bliver da ligestore, og da $180 - A = 2v$ vil $v = 90 - \frac{A}{2}$,



der igen er $= \angle z$. Heraf følger $CE_1 \neq AD_1$, der atter medfører, at

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{c}{b}.$$

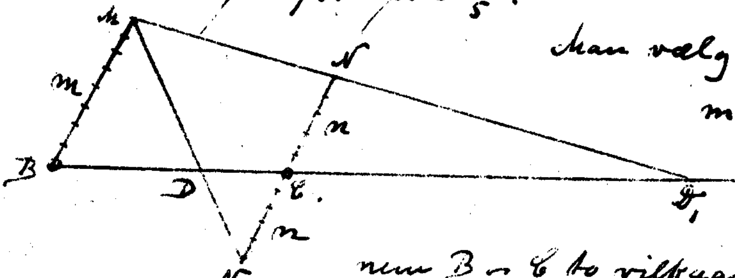
Anm: I 5 & 6 har vi regnet alle indgaaende Liniestykker numerisk. Regner man derimod Stykkerne paa Linien BC med Fortegn, faar man:

$$\frac{BD}{CD} = \div \frac{c}{b}, \text{ og } \frac{BD_1}{CD_1} = \frac{c}{b}, \text{ hvoraf følger:}$$

$$\frac{BD}{CD} = -\frac{BD_1}{CD_1} \quad \text{eller} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BD_1}{CD_1}.$$

J. 4 Punkter, der ligger paa en ret Linie og tilfredsstiller Ligningen $\frac{BD}{DC} = \frac{BD_1}{CD_1} = u$ kaldes harmonisk beliggende, og man siger, at D og D_1 deler Liniestykket BC harmonisk i Forholdet u.

Opgave 1. At dele et opgivet Liniestykke BC harmonisk i Forholdet u f. Eks. $u = \frac{8}{5}$.



Man vælger to Liniestykker m og n, som staar i det givne Forhold. Derpaa tegnes gennem B og C to vilkaarlige ∥ Linier og man afsætter derüdaf $BM = m$ og $CN = CN_1 = n$. MN og MN_1 vil da skære BC i de sögte Punkter. Man har nemlig:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n} \quad \text{og} \quad \frac{BD_1}{CD_1} = \frac{m}{n} \quad \text{og derfor}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BD_1}{CD_1}$$

Opgave 2

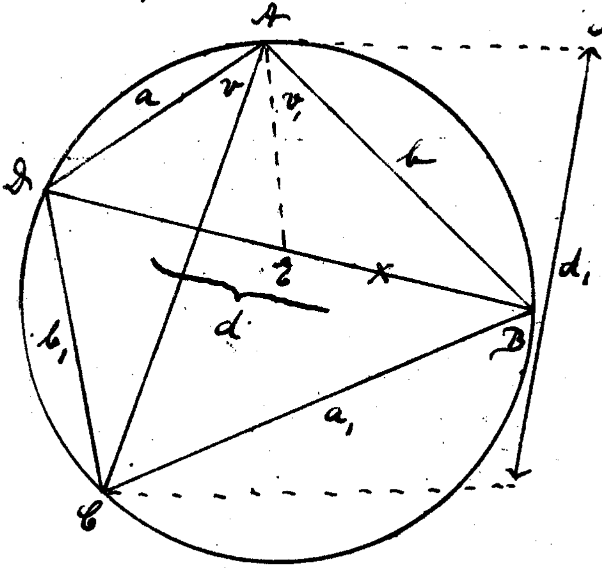
Givet Pünkterne B, D og C beliggende paa en ret Linie. Konstruer det Pünkt D_1, som sammen med D deler BC harmonisk. Specielt undersöges det Tilfælde, hvor D er Midtpünktet af BC.

Opgave 3. Punkterne B og C har Abscisserne −2 og 6. Find Abscisserne til de to Pünkter D og D_1, som deler BC harmonisk i Forholdet $\frac{2}{3}$. Man afsætter derpaa alle 4 Punkter paa Abscisseaksen og eftervises Overensstemmelsen mellem de fündne Resultater og den geometriske Fremstilling.

Opgave 4. I $\triangle ABC$ er $a = 10$ cm $b = 9$ cm og $c = 7$ cm. De Linier, der halverer $\angle A$ og dennes Nabovinkel, skærer BC i D og D_1. Find Længden af DD_1.

8. Den ptolemæiske Læresætning.

I en indskrevet Firkant er Diagonalernes Produkt lig med Summen af de modstaaende Siders Produkter.



Man skal altsaa bevise:

$a \cdot a_1 + b \cdot b_1 = d \cdot d_1$??

Man afsætter $\angle v_1 = v$, og faar da

$\triangle AEB \sim \triangle ADC$, hvoraf $\frac{x}{b_1} = \frac{b}{d_1}$ eller $\underline{bb_1 = xd_1}$

Desuden er:

$\triangle AED \sim \triangle ACB$, hvoraf

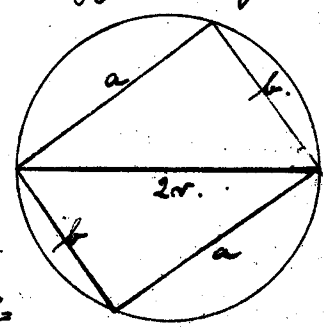
$$\frac{d-x}{a_1} = \frac{a}{d_1} \text{ eller}$$

$$\underline{aa_1 = d_1(d-x)}$$

Ved Addition af de to understregede Ligninger faas derpaa $aa_1 + bb_1 = dd_1$, hvormed Sætningen er bevist.

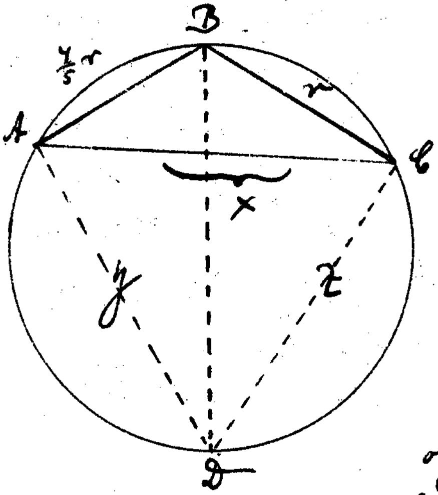
Som specielt Tilfælde kan vi betragte et Rektangel. Her vil Centret for den omskrevne Cirkel ligge i Diagonalernes Skæringspunkt, og man faar da: $a = a_1$ $b = b_1$ $d = d_1 = 2r$.

Indsættes dette i Ligningen $aa_1 + bb_1 = dd_1$, faar man $a^2 + b^2 = 4r^2$, hvilket er den pythagoræiske Sætning. Denne er derfor et specielt Tilfælde af den pto-



lemæiske Læresætning.

Opgave 1. I en Cirkel med Radius r er Korden AB = $\frac{4}{5}r$ og Korden BC = r. Find Længden af den Korde, der spænder over Summen af de to Buer AB og BC (den saakaldte Sumkorde) og af den Korde, der spænder over Differensen mellem de to Buer AB og BC (den saakaldte Differenskorde).



1) Sumkorden:

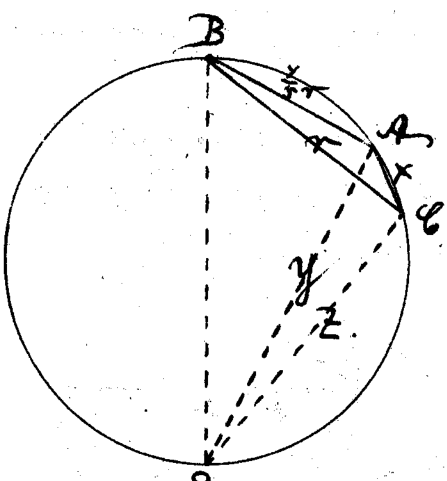
Gennem B – de to bekendte Kordes fælles Endepunkt – og Cirklens Centrum tegnes Hjælpelinien BD. Anvendes derpaa Pythagoras' Sætning paa de retvinklede Trekanter BAD og BCD, faar man

$$y = \sqrt{4r^2 \div \left(\tfrac{4}{5}r\right)^2} = \sqrt{4r^2 - \tfrac{16}{25}r^2} = \tfrac{2}{5}r\sqrt{21}.$$

og $z = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$.

Ved Hjælp af Ptolemæus' Sætning faar man da: $2rx = \frac{2}{5}r^2\sqrt{21} + \frac{4}{5}r^2\sqrt{3}$ eller

$$\underline{x = \frac{r}{5}\left[\sqrt{21} + 2\sqrt{3}\right]}$$



2) Differenskorden:

Gennem B – de to bekendte Korders fælles Endepunkt – og Cirklens Centrum tegnes Hjælpelinien BD. Anvendes Pythagoras' Sætning paa de retvinklede Trekanter BAD og BCD, faar man $y = \frac{2}{5}r\sqrt{21}$ og $z = r\sqrt{3}$. Ved Hjælp af Ptolemæus' Sætning faar man da: $2rx + \frac{4}{5}r^2\sqrt{3} = \frac{2}{5}r^2\sqrt{21}$

hvoraf $$x = \frac{r}{5}\left[\sqrt{21} \div 2\sqrt{3}\right].$$

Opgave 2. I en Cirkel med Radius r er Korden $AB = \frac{r}{2}$. Find Længden af Korden til den dobbelte og til den tredobbelte Bue.

Kapitel 10. Læren om Arealer.

1. Som Arealenhed benytter man et Kvadrat, hvis Side er 1 cm. Dette Kvadrat siges at have Arealet 1 cm^2.

Grundlaget for Læren om Arealer er fölgende 3 Aksiomer (ↄ: Grundsætninger, der ikke skal bevises).

1) Kongruente Figurer har samme Areal.

2) Dersom en Polygon deles i mindre Polygoner, er Arealet af hele Polygonen lig Summen af de enkelte Polygoners Arealer.

3) Dersom en Polygon helt omslutter en anden Polygon, er den förstes Areal större end den sidstes.

Hjælpesætning: Et Kvadrat, hvis Side er $\frac{1}{q}$ cm, har et Areal $= \frac{1}{q^2}$ cm^2.

To sammenstödende Sider i et Kvadrat, hvis Side er 1 cm, deles i q ligestore Dele. Ved Linier gennem Delingspunkterne ⫽ Siderne kan Arealet deles i q Strimler, der hver indeholder q kongruente Kvadrater, hvis Areal kaldes x.

Man har da: $1\,cm^2 = q^2 \cdot x$ eller $x = \frac{1}{q^2}\,cm^2$.

2. Et Rektangels Areal.

Arealet af et Rektangel, hvis Grundlinie er a cm, og hvis Höjde er b cm, er $= a \cdot b\ cm^2$

Lad Rektanglets Areal være R. Man betragter da fölgende 3 Tilfælde.

1) a og b er hele Tal.

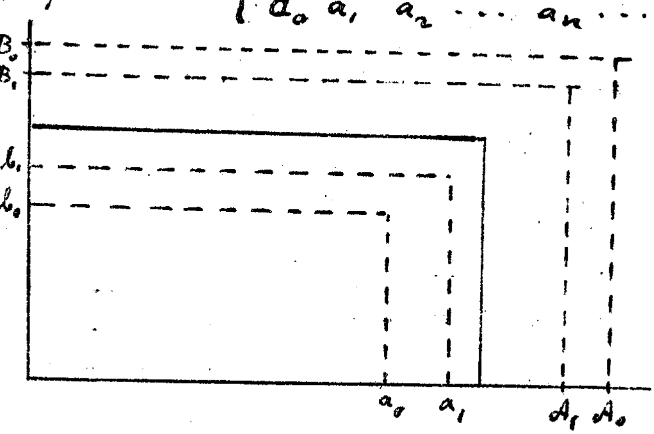
Man deler da de to sammenstødende Sider i henholdsvis a og b ligestore Dele, hvorpaa man trækker Linier ∥ Rektanglets Sider gennem de fremkomne Delingspunkter. Derved deles Rektanglet i a Strimler, der hver indeholder b Kvadrater, der hver for sig er $= 1\,\text{cm}^2$

2) a og b er Brøker.

De to Brøker gøres først ensbenævnte og betegnes derpaa $\frac{p}{q}$ og $\frac{r}{q}$. De sammenstødende Sider deles derpaa i p og r ligestore Stykker, der altsaa alle bliver $= \frac{1}{q}$ cm. Ved Linier gennem de frembragte Delingspunkter ∥ to sammenstødende Sider deles Rektanglet i p Strimler, der hver indeholder r Kvadrater med Siden $\frac{1}{q}$ cm. Man faar da: $R = p \cdot r \cdot x = p \cdot r \cdot \frac{1}{q^2}\,\text{cm}^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q}\,\text{cm}^2 = ab\,\text{cm}^2$.

3) Hvis blot et af Tallene a og b er irrationalt, kan begge Tallene tænkes bestemt ved Tilnærmelsesrækker.

f. Eks. $a = \begin{cases} A_0 \; A_1 \; A_2 \ldots A_n \ldots \\ a_0 \; a_1 \; a_2 \ldots a_n \ldots \end{cases}$ og $b = \begin{cases} B_0 \; B_1 \; B_2 \ldots B_n \ldots \\ b_0 \; b_1 \; b_2 \ldots b_n \ldots \end{cases}$



Man har da

$$ab = \begin{cases} A_0B_0 \; A_1B_1 \ldots A_nB_n \ldots \\ a_0b_0 \; a_1b_1 \ldots a_nb_n \ldots \end{cases}$$

Ved Linier paa Figuren ser man, at det Tal, som angiver Rektanglets Areal i cm^2 er beliggende mellem A_nB_n og a_nb_n for alle Værdier af n.

Man har derfor $R = ab\,\text{cm}^2$

Antallet af Arealenheder i et Rektangel er altsaa lig

Antallet af Længdeenheder i Höjden gange Antallet af Længdeenheder i Grundlinien eller kortere sagt:

<u>Rektangletes Areal = Grundlinie · Höjde.</u>

<u>3.</u> Man beviser nu let følgende Sætninger.

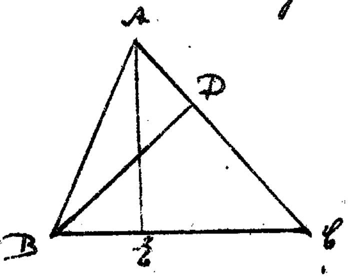
1) <u>Parallelogrammets Areal = Grundlinie gange Höjde</u>

2) <u>Trekantens Areal = $\frac{1}{2}$ · Grundlinie · Höjde.</u>

Ved efterhaanden at benytte Trekantens 3 Sider til Grundlinie faar man Arealet udtrykt paa 3 Maader, nemlig:

$$T = \tfrac{1}{2} h_a \cdot a \quad , \quad T = \tfrac{1}{2} h_b \cdot b \quad \text{og} \quad T = \tfrac{1}{2} h_c \cdot c .$$

At disse 3 Udtryk er ligestore, vises saaledes:



Lad AE og BD være de to Höjder h_a og h_b. Man har da:

$\triangle AEC \sim \triangle BDC$ og altsaa

$$(1) \quad \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} \quad \text{eller} \quad h_a \cdot a = h_b \cdot b .$$

Samtidig ses det af Ligning (1), at <u>Trekantens Höjder er omvendt proportionale med de tilsvarende Sider.</u>

<u>4.</u> Fra Mellemskolen kendes følgende Formler for Trekantens Areal:

1) $T = rs$, hvor r er den indskrevne Cirkels Radius, og s er den halve Perimeter.

2) $4RT = abc$, hvor R er den omskrevne Cirkels Radius og a, b og c er Trekantens Sider.

3) Den ligesidede Trekants Areal $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, hvor a er Længden af Trekantens Side.

4) Den retvinklede Trekants Areal $= \frac{1}{2}ab$, hvor a og b er Katheterne.

Andre Formler for Trekantens Areal udvikles senere.

Kapitel 11. Regning med Rodstörrelser.

1. Ved $\sqrt[n]{a}$ forstaar man det eller de Tal, der opløftet til n^{te} Potens giver a.

Man har altsaa 1) $\sqrt[n]{a} = x$, dersom 2) $x^n = a$

Vi har før paavist, at $x^n = a$ har en positiv Rod, hvis a er positiv og n er positiv, hel. Under de samme Forudsætninger har $\sqrt[n]{a}$ en positiv, reel Værdi.

Indsættes nu $\sqrt[n]{a}$ i Stedet for x i 2), faar man $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Indsættes derimod x^n i Stedet for a i 1) faar man $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Disse to Ligninger viser, at hvis man uddrager den n^{te} Rod af et Tal og derpaa opløfter det udkomne til n^{te} Potens, eller omvendt, vil de to Operationer ophæve hinanden. Roduddragning og Potensopløftning er modsatte Regningsarter.

I Ligningen $\sqrt[n]{a} = x$ kaldes n Rodeksponent, a for Potensen eller for Tallet under Rodtegnet. Vi antager foreløbig n positiv og hel.

Da $\sqrt[n]{a} = x$ er rigtig, dersom $x^n = a$, kan man herefter göre Pröve paa enhver Roduddragnings Rigtighed: man opløfter nemlig det udkomne til n^{te} Potens – hvor n er Rodeksponenten – og skal da faa Tallet under Rodtegnet.

Denne Pröve kaldes Rodpröven og benyttes hyppig i det efterfölgende.

Eks.
$$\sqrt[5]{32} = 2, \quad \text{da} \quad 2^5 = 32.$$
$$\sqrt[3]{1000} = 10, \quad \text{da} \quad 10^3 = 1000$$
$$\sqrt[5]{-32} = -2, \quad \text{da} \quad (-2)^5 = -32$$
$$\sqrt{25} = \pm 5, \quad \text{da} \quad (\pm 5)^2 = 25$$
$$\sqrt[4]{16} = \pm 2, \quad \text{da} \quad (\pm 2)^4 = 16.$$

$\sqrt{-3}$ er ikke lig noget reelt Tal, thi saavel et positivt som et negativt Tal bliver positivt ved at opløftes til 2den Potens. Man kan saaledes ad denne Vej umulig faa $\div 3$. $\sqrt{-3}$ er altsaa ikke noget reelt Tal, men vi plejer at kalde $\sqrt{-3}$ for et Komplekst Tal og indförer dermed ved Siden af de reelle Tal en ny Slags Tal: de komplekse. Hvorledes man skal regne med disse vil blive omtalt senere.

$\sqrt[4]{-16}$ er ogsaa kompleks.

I Almindelighed kan man ved Rodpröven bevise fölgende Sætninger.

<u>Den ulige Rod af et positivt Tal er positiv.</u>
<u>Den ulige Rod af et negativt Tal er negativ.</u>
<u>Den lige Rod af et positivt Tal er baade positiv og negativ.</u>
<u>Den lige Rod af et negativt Tal er kompleks.</u>

2. <u>Man uddrager en Rod af et Produkt ved at uddrage Roden af hver Faktor for sig.</u>

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \quad ??$$

For at bevise denne Lignings Rigtighed gör man Rodpröve. Man undersöger om $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ virkelig er det Tal, som ifölge Definitionen er $\sqrt[m]{ab}$, hvilket er Tilfældet, hvis

$$\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m = a \cdot b$$

Dette bevises saaledes: $\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^m = a \cdot b$

3. <u>Man uddrager en Rod af en Brök ved at uddrage Roden af Tæller for sig og Nævner for sig.</u>

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad ??$$

Bevis: Man gör Rodpröve og undersöger om $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b}$. Dette viser sig at være Tilfældet, da

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}.$$

4. Naar man foretager en Roduddragning og en Potensopløfning efter hinanden er den Orden, hvori de to Operationer foretages, ligegyldig.

$$\sqrt[m]{a^p} = (\sqrt[m]{a})^p \quad ??$$

Bevis ved Rodprøve:

$$\left((\sqrt[m]{a})^p\right)^m = \left((\sqrt[m]{a})^m\right)^p = a^p.$$

Eks:

$$(\sqrt[72]{8})^{24} = \sqrt[72]{8^{24}} = \sqrt[72]{2^{72}} = 2.$$

5. Man har Lov at multiplicere eller dividere i Rodeksponent og Potenseksponent med et og samme Tal.

Begge Sætninger lader sig udtrykke ved Ligningen:

$$\sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[p]{a^q} \quad ??$$

Bevis ved Rodprøve:

$$\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{mp} = \left(\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^p\right)^m = (a^q)^m = a^{mq}.$$

Eks. $\sqrt[20]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$; $\sqrt{a^6} = a^3$; $\sqrt[16]{a^8} = \sqrt{a}$.

6. Man uddrager en Rod af en Rod ved at multiplicere Eksponenterne.

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a} \quad ??$$

Bevis ved Rodprøve:

$$\left(\sqrt[mp]{a}\right)^m = \sqrt[mp]{a^m} = \sqrt[p]{a}.$$

Vi vil give et Par Eksempler paa Anvendelsen af de fremførte Sætninger:

Eks 1. $\sqrt[3]{a^4 \cdot b^5 : c^6} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot a \cdot b^2 : c^6} = \frac{ab}{c^2} \cdot \sqrt[3]{ab^2}$

Eks 2. $\left(\sqrt[8]{\sqrt[6]{a^4}}\right)^3 = \sqrt[48]{a^{12}} = \sqrt[4]{a}$

Eks 3. $\sqrt[m]{a^{m+3} : b^{7m-2}} = \sqrt[m]{a^m \cdot a^3 : (b^{7m} : b^2)} =$

$$\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^{7m}} \cdot a^3 b^2} = \frac{a}{b^7} \cdot \sqrt[m]{a^3 b^2}.$$

7. $\sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$ Bevis ved Rodpröven:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{-m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{m} = a.$$

Ved Hjælp af Sætning 7 har vi fuldstændiggjort Læren om Rodstörrelser saavidt, at vi kender Betydningen af $\sqrt[n]{a}$, naar n er et helt Tal, der er forskelligt fra Nul.

Eks: $\sqrt[-3]{64} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$.

Kapitel 12. Regning med Rodstörrelser. (Fortsættelse).

1. Addition og Subtraktion.

To Rodstörrelser, der har samme Rodexponent kaldes *ensbenævnte*. Dersom de tillige har samme Tal under Rodtegnet kaldes de *ensartede*.

Man kan addere og subtrahere Rodstörrelser, naar de enten er eller kan göres ensartede.

Eks: $5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

Eks: $2\sqrt{50} - 1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{98} \div 1{,}4\cdot\sqrt{8} = 2\sqrt{25\cdot 2} \div 1\frac{1}{2}\sqrt{49\cdot 2} \div 1{,}4\sqrt{4\cdot 2} =$

$$10\sqrt{2} \div 10\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \div 2{,}8\sqrt{2} = -3{,}3\cdot\sqrt{2}.$$

2. Multiplication og Division.

I 11,2 har vi bevist Ligningen $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$, der udtrykker, at $\sqrt[m]{ab}$ og $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$ er ligestore. Man har derfor ogsaa Lov til at skrive: $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$. Heraf ser man:

Man multiplicerer to ensbenævnte Rodstörrelser ved at ved at multiplicere Tallene under Rodtegnet.

I 11,3 har vi bevist Ligningen $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$. Denne Ligning kan ogsaa skrives $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, hvorved man har bevist Sætningen: Man dividerer ensbenævnte Rodstörrelser ved at dividere Tallene under Rodtegnet.

Hvis de forelagte Rodstörrelser ikke er ensbenævnte, göres de ensbenævnte ved Hjelp af Sætningen i 11,5.

Eks: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 3^2} = \sqrt[6]{72}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^6}\cdot\sqrt[12]{a^8}\cdot\sqrt[12]{a^{15}}:\sqrt[12]{a^{10}} =$$

$$\sqrt[12]{a^6\cdot a^8\cdot a^{15}:a^{10}} = \sqrt[12]{a^{19}} = a\cdot\sqrt[12]{a^7}$$

Opgave 1.

$$(\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2 \div (\sqrt{2} \div 2\sqrt{3})^2 \div \sqrt{5}\cdot(6\sqrt{2} - 12\sqrt{3})$$

Opgave 2

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{8})\cdot(\sqrt{2} \div \sqrt[5]{4}).$$

3. Irrationale Nævnere.

Det er ofte fordelagtigt at omdanne en forelagt Brök, hvis Nævner er irrational, til en ny Brök, hvis Nævner er rational. Man kalder denne Operation at bortskaffe Brökens irrationale Nævner.

Vi vil ved nogle Eksempler vise, hvorledes man bortskaffer irrationale Nævnere.

Eks 1. $\frac{1}{\sqrt[14]{a^9}}$. Man multiplicerer i Tæller og Nævner med $\sqrt[14]{a^5}$. Derved faar man:

$$\frac{1}{\sqrt[14]{a^9}} = \frac{\sqrt[14]{a^5}}{\sqrt[14]{a^9}\cdot\sqrt[14]{a^5}} = \frac{\sqrt[14]{a^5}}{\sqrt[14]{a^{14}}} = \frac{\sqrt[14]{a^5}}{a}$$

Eks 2. $\frac{1}{\sqrt[14]{a^{25}}} = \frac{1}{\sqrt[14]{a^{14}\cdot a^{11}}} = \frac{1}{a\cdot\sqrt[14]{a^{11}}}$. Vi multiplicerer derpaa i Tæller og Nævner med $\sqrt[14]{a^3}$. Derved faar man:

$$\frac{\sqrt[14]{a^3}}{a\cdot\sqrt[14]{a^{14}}} = \frac{\sqrt[14]{a^3}}{a^2}.$$

Eks 3. $\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}}$ hvor vi forudsætter $n > p$. Man multiplicerer da i Tæller og Nævner med $\sqrt[n]{a^{n-p}}$. Derved faar man:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^{n-p}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^p\cdot a^{n-p}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{\sqrt[n]{a^n}} =$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{a}.$$

Hvis Nævneren har Formen $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ multiplicerer man i Tæller og Nævner med $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$.

Eks 4. $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\div b}$$

Eks 5. $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]\cdot[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]} =$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}}.$$ Man multiplicerer derpaa i Tæller og Nævner med

$a+b-c-2\sqrt{ab}$, hvorved Nævneren bliver $=(a+b-c)^2-(2\sqrt{ab})^2=(a+b-c)^2-4ab$, hvorefter Nævneren er rational.

Opgave 1. Omskriv Brøken $\frac{3+2\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$, saaledes at Nævneren bliver rational.

Opgave 2. Omskriv Brøken $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, saaledes at Nævneren bliver rational.

Opgave 3. $1\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{2}\div 2\frac{1}{4}\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}+3\cdot\sqrt{12\frac{1}{2}}$

Opgave 4. Find x af Ligningen:

$$x+1+\frac{2(x-\sqrt{3})}{\sqrt{6}}=\frac{x+3}{\sqrt{3}}$$

Opgave 5.

$$(2-\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}} \div (2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Kapitel 13. Tilnærmet Beregning af et irrationalt Tal

1. Naar a er et positivt Tal, vil vi i det følgende ved $\sqrt{a}$ forstaa det positive Tal, som opløftet til 2den Potens giver a, medens vi ved $-\sqrt{a}$ vil forstaa det negative Tal som opløftet til 2den Potens giver a.

At finde største hele Tal i et irrationalt Tal vil sige at finde det mindste af de to paa hinanden følgende, hele Tal i Talrækken, mellem hvilke det irrationale Tal er beliggende.

1) Største hele Tal i Kvadratroden af et Tal med 1 eller 2 Ciffre.

Lad det givne Tal være N. Da vil:

$$100>N\geqq 1 \quad \text{hvoraf:}$$
$$\sqrt{100}>\sqrt{N}\geqq\sqrt{1}$$
$$10>\sqrt{N}\geqq 1.$$

Største hele Tal i $\sqrt{N}$ har derfor 1 Ciffer. Naar man derfor opløfter Tallene $1, 2, 3 \ldots 9$ til 2den Potens, lader største hele Tal sig finde.

Eks. Største hele Tal i $\sqrt{46}$ er $=6$, thi $7^2>46>6^2$

2) N har 3 eller 4 Ciffre.

Man har da $\quad 10^4>N\geqq 10^2$ hvoraf:

$$\sqrt{10^4}>\sqrt{N}\geqq\sqrt{10^2}$$
$$10^2>\sqrt{N}\geqq 10$$

$\sqrt{N}$ har derfor 2 Ciffre før Kommaet.

Eks: Find største hele Tal i $\sqrt{3943}$.

$\sqrt{3943}$ er beliggende i 60^{erne}, thi

$$70^2 > 3943 > 60^2$$

Man kan derfor sætte

$$3943 = (60+x)^2 + R \qquad (1),\ \text{hvor } x < 10$$

Heraf faar man:

$$3943 = 3600 + 120x + x^2 + R \ , \ \text{hvoraf}$$

$$343 = 120x + x^2 + R \qquad (2)$$

Heraf ser man, at $343 > 120x$ ɔ: $x < 3$

Ligning (2) skrives nu

$343 = (120+x)\cdot x + R$, hvorefter man forsøgsvis sætter $x = 2$. Derved faar man:

$$343 = 122\cdot 2 + R \ \text{ eller}$$

$$R = 99.$$

Indsættes nu i (1) faar man $3943 = 62^2 + 99$. Desuden ser man af den forudgaaende Udvikling, at

$$63 > \sqrt{3943} > 62 \qquad (3)$$

Största hele Tal i $\sqrt{3943}$ er derfor $= 62$.

Uligheden (3) viser, at man gör en Fejl < 1 ved at sætte $\sqrt{3943} = 62$ (eller $= 63$). Man siger derfor, at $\sqrt{3943}$ er bestemt med Fejlgrænsen 1.

En praktisk Udförelse af Udregningen er hosstaaende:

$$\begin{array}{rl} & \ \ 6\ \ 2 \\ & \sqrt{39|43} \\ & \ \ 36 \\ 120^2) & \ \ 343 \ (2 \\ & \ \ 244 \\ & \ \ \ \ 99. \end{array}$$

Forklaring paa Opstillingen er fölgende:
Man dividerer 3943 med 100 — antydet i Udregningen ved Stregen efter 9-tallet. — Största hele Tal i $\sqrt{39}$ er derpaa bestemt $= 6$. Fra 3943 er derpaa subtraheret $6^2\cdot 100 = 3600$, og det fundne Tal 6 multipliceres med 20. 120 divideret ind i 343 viser, at $x < 3$.

Vi prøver derfor med $x = 2$ og multiplicerer 122 med 2 og trækker det udkomne fra 343. Derved faas Resten $= 99$.

3) N har 5 eller 6 Ziffer.

Man har da $10^6 > N \geqq 10^4$ eller

$10^3 > \sqrt{N} \geqq 10^2$, hvoraf det fremgaar, at $\sqrt{N}$ har 3 Ziffer.

Eks: $\sqrt{394365}$

Vi bestemmer største hele Tal i $\sqrt{3943}$ og dette er ifølge Udregningen i 2) $= 62$

Man har da:

$$630^2 > 394365 > 620^2,$$ og man kan sætte

$$(1) \quad 394365 = (620+x)^2 + R, \text{ hvor } x < 10$$

hvoraf $394365 = 384400 + 1240x + x^2 + R$

eller $9965 = 1240x + x^2 + R \quad (2)$

Heraf ser man $9965 > 1240x$ eller $x < 9$.

Man omskriver da (2) til følgende Ligning:

$$(3) \quad 9965 = (1240+x)x + R$$ og prøver at sætte $x = 8$. Man faar da

$9965 = 1248 \cdot 8 + R$, der giver R negativ

$x = 8$ er altsaa for stor og man prøver $x = 7$.

Indsættes nu i (3) faar man:

$9965 = 1247 \cdot 7 + R$ eller

$R = 1236$

Vi har dermed fundet:

$$394365 = 627^2 + 1236$$ og

$$628 > \sqrt{394365} > 627.$$

Største hele Tal i $\sqrt{394365}$ er altsaa $= 627$.

Naar man sætter $\sqrt{394365} = 627$ (eller 628) gör man en Fejl, der er < 1. Kvadratroden er altsaa bestemt med Fejlgrænsen 1.
Den praktiske Opstilling ser saaledes ud:

$$\begin{array}{rl}
 & 6\;\;2\;\;\;7 \\
 & \sqrt{39|43|65} \\
 & 36 \\
120^{2}) & 343\ (2 \\
 & 244 \\
1240^{7}) & 9965\ (7 \\
 & 8729 \\
 & 1236
\end{array}$$

4) Hvis N har 7 eller 8 Cifre, afskæres de to sidste, og man bestemmer störste hele Tal til Kvadratroden af det fremkomne Tal efter Metoden i 3). Derpaa fortsættes som i 3). Paa denne Maade kan störste hele Tal bestemmes, naar N har et vilkaarligt Antal Cifre.

2. At bestemme $\sqrt{N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$.

ɔ: at bestemme et Tal a, hvis Forskel fra $\sqrt{N}$ er numerisk $< \frac{1}{p}$.

Eks: At bestemme $\sqrt{11}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{14}$.
Man bestemmer störste hele Tal i $\sqrt{11 \cdot 14^2} = \sqrt{2156}$.
Man faar da
$$47 > \sqrt{11 \cdot 14^2} > 46\text{ , hvoraf}$$
$$\frac{47}{14} > \frac{\sqrt{11 \cdot 14^2}}{14} > \frac{46}{14}$$
$$\frac{47}{11} > \sqrt{\frac{11 \cdot 14^2}{14^2}} > \frac{46}{14}.$$
$$\frac{47}{14} > \sqrt{11} > \frac{46}{14}$$
Dersom man derfor sætter $\sqrt{11} = \frac{46}{14}$ (eller $\frac{47}{14}$) begaar man en Fejl $< \frac{1}{14}$, thi $\sqrt{11}$ afviger mindre fra hver af de to Grænser, end Grænserne afviger fra hinanden.

Skal man i Almindelighed bestemme $\sqrt{N}$ med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$, bestemmer man först största hele Tal i $\sqrt{Np^2}$. Lad dette være a, da vil

$$a+1 > \sqrt{N \cdot p^2} > a$$

$$\frac{a+1}{p} > \frac{\sqrt{N \cdot p^2}}{p} > \frac{a}{p} \quad \text{eller}$$

$$\frac{a+1}{p} > \sqrt{N} > \frac{a}{p}.$$

Sætter man derfor $\sqrt{N} = \frac{a}{p}$ (eller $\frac{a+1}{p}$) begaar man en Fejl $< \frac{1}{p}$.

Eks. $\sqrt{7}$ skal bestemmes med Fejlgrænsen $\frac{1}{100}$ eller, som man plejer at sige, med 2 Decimalers Nöjagtighed.

Största hele Tal i $\sqrt{7 \cdot 100^2}$ er 264. Man har altsaa:

$$265 > \sqrt{7 \cdot 100^2} > 264$$

$$2,65 > \frac{\sqrt{7 \cdot 100^2}}{100} > 2,64$$

$$2,65 > \sqrt{7} > 2,64.$$

Sættes $\sqrt{7} = 2,64$ begaar man en Fejl $< \frac{1}{100}$.

Opgave 1. At bestemme $\sqrt{6,38}$ med 3 Decimalers Nöjagtighed.

$$\sqrt{6,38 \cdot 1000^2} = \sqrt{6380000}$$

$$2526 > \sqrt{6,38 \cdot 1000^2} > 2525 \quad \text{eller}$$

$$2,526 > \sqrt{6,38} > 2,525$$

Altsaa har man $\sqrt{6,38} = 2,525$ med 3 Decimalers Nöjagtighed.

Den praktiske Udregning kan foretages saaledes:

```
          2, 5  2  5
        √6,38|00|00
     5   4
    40) 238  (5
        225
         1300   o.s.v.
```

<u>Opgave 2.</u> Beregn $5\sqrt{2} - \sqrt{6,34} + \frac{1}{15}\sqrt{7}$ med 2 Decimalers Nöjagtighed o: med Fejlgrænsen $\frac{1}{10^2}$.
Hvert enkelt Led beregnes med 3 Decimaler. Man kan omdanne Udtrykket til

$$\sqrt{50} \div \sqrt{6,34} + \frac{1}{15}\sqrt{7}$$

og da beregne $\sqrt{50}$ og $\sqrt{6,34}$ med 3 Decimalers Nöjagtighed.
$\sqrt{7}$ kan beregnes med 2 Decimalers Nöjagtighed, da Fejlen ved Udregning af $\frac{1}{15}\sqrt{7}$ bliver divideret med 15. Leddet bliver derved bestemt med en Fejl $< \frac{1}{15\cdot 100} < \frac{1}{10^3}$.

<u>Opgave 3.</u> Beregn $\frac{\sqrt{5} \div \sqrt{7}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ med 3 Decimalers Nöjagtighed. (Man begynder med at göre Nævneren rational).

Kapitel 14. Ligningen af 2den Grad.

<u>1.</u> En Ligning af 2den Grad kan altid bringes paa Formen

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

For at finde de Værdier af x, som tilfredsstiller denne Ligning, kan man gaa saaledes frem:

1) <u>$A \gtrless 0$.</u>

Man dividerer paa begge Sider af Lighedstegnet med A og faar $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$. For Nemheds Skyld betegner vi $\frac{B}{A}$ ved a og $\frac{C}{A}$ ved b og faar derpaa:

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

Naar en 2den Grads Ligning er bragt paa denne Form, siges den at være <u>ordnet</u>. I en ordnet 2' Grads Ligning har x^2 derfor altid Koefficienten 1.

Vi faar derpaa $$x^2 + ax = -b \qquad (2)$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b \qquad (3)$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b \qquad (4)$$
$$x+\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \qquad (5)$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \qquad (6)$$

Man ser heraf, at ethvert Tal, der tilfredsstiller (1) vil ogsaa tilfredsstille (2), (3) o.s.v. Det maa derfor være et af de to Tal, som findes i (6). Vi kan derfor være sikker paa, at (1) ikke har andre Rødder end $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$. Vi har saaledes faaet alle (1)s Rødder med. At ogsaa begge de to Tal er Rødder i Ligning (1) ses ved at gøre Prøve.

Diskussion.

Af Ligning (6) ser man, at $x^2+ax+b=0$ har to forskellige Rødder, naar $\frac{a^2}{4} > b$.

Dersom $\frac{a^2}{4} = b$, faar man $x = -\frac{a}{2}$, og den opgivne Ligning faar altsaa kun én Rod. Man siger dog ogsaa i dette Tilfælde, at Ligningen har to Rødder, der begge er $= -\frac{a}{2}$. Dette hænger sammen med, at Ligningens venstre Side i dette Tilfælde kan skrives som $x^2+ax+\frac{a^2}{4}$ eller som $(x+\frac{a}{2})^2$. Den nærmere Forklaring heraf maa dog gemmes til senere. Man siger i dette Tilfælde, at $x^2+ax+b=0$ har lige Rødder eller at Ligningen har en Dobbeltrod.

Dersom $\frac{a^2}{4} < b$ vil Tallet under Kvadratroden blive negativt, og Ligningen faar derfor i dette Tilfælde to komplekse Rødder.

Ved Indførelsen af de komplekse Tal har vi faaet udvidet vort Talbegreb, saaledes at den Samling af Tal, vi for Fremtiden vil regne med, kan deles i:

1) De reelle Tal.

Disse er enten rationale eller irrationale

a) De rationale Tal er Samlingen af positive og negative, hele Tal og Brøker samt Tallet 0.

b) De irrationale Tal er Samlingen af Tal, der bestemmes ved Tilnærmelsesrækker, der ikke bestemmer noget rationalt Tal. (De rationale Tal kan nemlig ogsaa bestemmes paa denne Maade). Som Eksempel paa irrationale Tal kan nævnes $\sqrt{5}$ og $\sqrt[7]{11}$.

2) De komplekse Tal.

Af disse har vi foreløbig truffet Rodstørrelser, der er lige Rødder af negative Tal. Som Eksempel kan nævnes $\sqrt{-3}$, der i Almindelighed skrives som $\sqrt{-1\cdot 3} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{3} = i\sqrt{3}$, hvor i er en forkortet Betegnelse for $\sqrt{\div 1}$.

Vi har tidligere vist, at de reelle Tal svarer én-entydig til en ret Linies Punkter, og vi vil senere komme til at vise, at de komplekse Tal svarer én-éntydig til Planens Punkter.

Som Resultat af det foregaaende faas:

<u>Rødderne i en ordnet 2den Grads Ligning er = det halve af Koefficienten til x med modsat Fortegn $\pm$ Kvadratroden af det samme Tal, opløftet til 2den Potens, efterfulgt af Ligningens sidste Led med modsat Fortegn.</u>

Desuden saa vi, at $x^2+ax+b=0$ har to forskellige, reelle Rødder, naar $\frac{a^2}{4}>b$, medens den har to ligestore, reelle Rödder, hvis $\frac{a^2}{4} = b$. Ligningen har to komplekse Rödder, hvis $\frac{a^2}{4} < b$.

Eks. 1. $2x^2 + 7x - 9 = 0$. Man dividerer med 2 og faar:

$x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2} = 0$, hvoraf ved Hjælp af Reglen ovenfor:

$$x = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{9}{2}} = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16}} = -\frac{7}{4} \pm \frac{11}{4} = \begin{cases} 1 \\ \div 4\frac{1}{2} \end{cases}$$

Eks. 2.

$$\frac{1 + \frac{x-2}{x-6}}{1 - \frac{x-6}{x-2}} = \frac{x-4}{x-6}$$

Brøksbrøken behandles paa sædvanlig Maade ved at gange i Tæller og Nævner med Smaabrøkernes Generalnævner, der her er $(x-6)(x-2)$. Man faar derved

$$\frac{(x-6)(x-2) + (x-2)^2}{(x-6)(x-2) - (x-6)^2} = \frac{x-4}{x-6}$$

$$\frac{2x^2 - 12x + 16}{4x - 24} = \frac{x-4}{x \div 6}.$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{2(x-6)} = \frac{x-4}{x-6}. \quad ^{x)}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 2x - 8$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$x = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4$. Ligningen har altsaa to ligestore Rödder, der begge er $= 4$.

Eks. 3. $\frac{x}{2x-6} + \frac{3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6x+18}$

Vi multiplicerer paa begge Sider af Lighedstegnet med Generalnævneren, som her er $= 6 \cdot (x-3)(x+3)$

<u>Derved</u> faar man:

x) Da $x = 6$ gör begge Bröker numerisk uendelig, kan man pröve at indsætte $x = 6$ i den opgivne Ligning. $x = 6$ er ikke Rod.

$3x(x+3) + 18 = x - 3$ eller

$3x^2 + 8x - 21 = 0$

$x^2 + \frac{8}{3}x - 7 = 0$ hvoraf $x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 7}$

ɔ: $x = \frac{-4 \pm i\sqrt{47}}{3}$ Ligningen har altsaa to komplekse Rödder.

Som specielle Eksempler vil vi löse fölgende Ligninger

a) $x^2 + ax = 0$

$x(x+a) = 0$ der tilfredsstilles af $x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$

b) $x^2 + b = 0$

$x^2 = -b$

$x = \pm\sqrt{\div b}$, hvor Rödderne er komplekse for $b > 0$. Ellers er Rödderne reelle.

De to sidste Ligninger kan ogsaa löses efter den almindelige Regel.

2) $\underline{\underline{A = 0.}}$ $\underline{B \gtrless 0.}$

Ligningen $Ax^2 + Bx + C = 0$ gaar da over til 1ste Grads Ligningen $Bx + C = 0$.

Det har imidlertid Interesse – navnlig for de geometriske Anvendelsers Skyld – at faa at vide, hvorledes det gaar med Rödderne i $Ax^2 + Bx + C = 0$, naar A svinder ind mod Nul gennem en faldende eller stigende Række af Tal.

Vi skriver da Ligningen $A + B\cdot\left(\frac{1}{x}\right) + C\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$ eller

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{B}{C}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{A}{C} = 0,$$ der derpaa löses paa sædvanlig Maade, idet $\frac{1}{x}$ betragtes som den ubekendte.

Man faar da: $\frac{1}{x} = -\frac{B}{2C} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4C^2} - \frac{A}{C}}$

eller

$$\frac{1}{x} = -\frac{B}{2C} \pm \sqrt{\frac{B^2-4AC}{4C^2}} \quad \text{eller}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2C}$$

Dersom vi nu lader A nærme sig Nul gennem en stigende eller faldende Talrække, der har Grænseværdien 0, vil den ene Værdi af $\frac{1}{x}$ nærme sig ubegrænset til $-\frac{B+B}{2C}$, der er $=0$. Grænseværdien for $\frac{1}{x}$ vil altsaa være 0, og x vil følgelig faa Grænseværdien numerisk uendelig. Som tidligere omtalt vil dette sige, at man kan vælge A saa nær ved Nul, at x bliver numerisk $> R$.

Den anden Værdi af $\frac{1}{x}$ vil for $A=0$ blive $= \frac{-B-B}{2C}$ $= -\frac{B}{C}$ eller $x = -\frac{C}{B}$.

<u>Naar altsaa A nærmer sig ubegrænset mod Nul, vil den ene af Ligningens Rødder numerisk vokse over enhver Grænse.</u>

Man udtrykker dette kortere ved at sige, at <u>naar $A=0$, vil den ene af Ligningens Rødder være uendelig stor.</u>

3) <u>$A = B = 0$</u>.

Den oprindelige Ligning reduceres da til $C=0$, der er uden Interesse.

Det har derimod sin Betydning at faa at vide, hvad der sker med Rødderne i Ligningen, naar baade A og B svinder ind mod Nul gennem Talrækker, der hver for sig har Grænseværdien 0.

Af Udtrykket for $\frac{1}{x}$ ses det, at begge Værdier af $\frac{1}{x}$ da har Grænseværdien 0.

Naar baade A og B nærmer sig übegrænset til Nül, vil altsaa begge Ligningens Rödder numerisk vokse i det üendelige.
Man üdtrykker dette kortere ved at sige, at naar $A = B = 0$, vil begge Ligningens Rödder være uendelig store.

Eks: $Ax^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$ löses med Hensyn til $\frac{1}{x}$. Man faar da

$$\frac{1}{x} = -4 \pm \sqrt{16 - 2A}.$$ Vi vil betragte Ligningen

$$\frac{1}{x} = -4 + \sqrt{16 - 2A}$$ lidt nærmere.

Lad först A nærme sig Nül gennem Rækken

$1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}01 \quad 0{,}001 \ldots\ldots$, $\frac{1}{x}$ vil da nærme sig Nül gennem Rækken $-4+\sqrt{14}$, $-4+\sqrt{15{,}8}$, $-4+\sqrt{15{,}98}$ $-4+\sqrt{15{,}998} \ldots\ldots$

Lad derpaa A nærme sig Nül gennem Rækken

$-1 \quad -0{,}1 \quad -0{,}01 \quad -0{,}001 \ldots\ldots$, $\frac{1}{x}$ vil da nærme sig Nül gennem Rækken

$-4+\sqrt{18}$, $-4+\sqrt{16{,}2}$, $-4+\sqrt{16{,}02}$, $-4+\sqrt{16{,}002} \ldots$

2. Sætninger om Röddernes Sum og Produkt.

Vi kalder Rödderne i $x^2 + ax + b = 0$ for p og q. Man har da:

$$p = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$
$$q = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Af disse to Ligninger faas ved Addition:

$$p + q = \div a$$ og ved Multiplication:

$$p \cdot q = \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)\left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right) =$$
$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = +b.$$

Heraf ser man:
Jen ordnet 2^den Grads Ligning er Röddernes Sum = Koefficienten til x med modsat Fortegn, medens Röddernes Produkt er lig med Ligningens selvst. Led.

Eks 1. Find Röddernes Sum og Produkt i Ligningen

$$5x^2+7x-3=0$$

Man skaffer först x^2 Koefficienten 1. Derved faar man $x^2+\frac{7}{5}x-\frac{3}{5}=0$. Ligningen er derved ordnet. Man har da

$$p+q=-\frac{7}{5} \;;\; p\cdot q=-\frac{3}{5}.$$

Eks 2. Man skal, uden at löse Ligningen $2x^2+3x+6=0$, finde Værdien af Udtrykket

$$y=\frac{p^2}{q}+\frac{q^2}{p}\text{, naar } p \text{ og } q \text{ er Rödder}$$

i den opgivne Ligning.
Man har da $$y=\frac{p^3+q^3}{pq}=\frac{(p+q)^3-3pq(p+q)}{pq}$$
Nu er imidlertid
$$p+q=-\frac{3}{2} \quad \text{og} \quad pq=3$$ Man indsætter da dette og faar:
$$y=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3-9\left(-\frac{3}{2}\right)}{3}=\frac{-\frac{27}{8}+\frac{27}{2}}{3}=\frac{27}{8}.$$

Eks 3
Dan den Ligning, hvis Rödder er Kvadratet paa Rödderne i Ligningen $2x^2+3x+6=0$.
Den søgte Ligning maa være
$$z^2-(p^2+q^2)z+p^2q^2=0$$
Vi har imidlertid $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=\left(-\frac{3}{2}\right)^2\div 6=\div 3\frac{3}{4}$.

og $p^2q^2=(pq)^2=9$. Den søgte Ligning er derfor
$$z^2+3\frac{3}{4}z+9=0.$$

Opgaver:

1. Find x af Ligningen:

$$\frac{5}{x-3} + \frac{6}{4x-12} + \frac{5x-1}{x+1} + 1\frac{1}{4} = 0.$$

2. I Ligningen $x^2 + ax + a + 2\frac{3}{4} = 0$ er Forskellen mellem Rödderne = 1. Bestem a og find Rödderne.

3. Find x af Ligningen $\frac{x-1}{2} = \frac{k}{x+5}$ og angiv de Værdier af k, for hvilke x er reel. Hvilken er den störste Værdi, k kan have, naar x skal være reel.

4. Lös Ligningen $x^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{6})x + 2\sqrt{3} = 0$.

5. Dan den anden Grads Ligning, hvis Rödder er $2+\sqrt{3}$ og $2-\sqrt{3}$.

6. Dan den Ligning, hvis Rödder er $\frac{1}{2}$ större end Rödderne: $2x^2 + 5x + 110 = 0$

7. I $\triangle ABC$, hvor $\angle A$ er stump, er $CA = 13$ m, $CB = 20$ m og Höjden fra $C = 12$ m. Find AB, samt Radierne i den omskrevne og den indskrevne Cirkel.

8. Omkredsen af en retvinklet Trekant er 14,4 m, Radius i den indskrevne Cirkel er 1,2 m. Find Trekantens Sider.

9. I en retvinklet Trekant er den ene Katete = 6 cm, medens den anden Katetes Projektion paa Hypotenusen er = 16 cm. Find Trekantens Sider.

10. I en ligebenet Trekant er Grundlinien = 16 m og Benene = 10 m. Find Længden af de 3 Medianer.

11. I $\triangle ABC$ er $\angle C = 90°$. Desuden er $a = 9$ cm, $b = 12$ cm. Find v_A og v_B, samt de Stykker, hvori de deler hinanden.

Kapitel 15: Polynomiet af 2^{den} Grad.

Ax^2+Bx+C er den almindelige Form for et Polynomium af 2^{den} Grad.

Det vil imidlertid vise sig tilstrækkeligt at behandle Polynomiet $\quad y = x^2+ax+b$

1. Opløsning i Faktorer.

<u>Lad $x^2+ax+b=0$ have Rødderne p og q. Polynomiet kan da skrives $\quad y=(x-p)\cdot(x-q)$.</u>

Bevis:

$$(x-p)(x-q) = x^2-px-qx+pq = x^2-(p+q)\cdot x+pq.$$

Men $p+q=\div a$ og $p\cdot q = b$. Man faar da:

$$(x-p)(x-q) = x^2+ax+b,$$ hvormed Sætningen er bevist.

<u>Eks:</u> $3x^2+5x-8$ opløses i Faktorer.

Man skriver $\quad 3x^2+5x-8 = 3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}\right)$ og opløser derpaa Parentesen i Faktorer. Man finder først Rødderne i $\quad x^2+\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}=0$, som viser sig at være $x=\begin{cases}1\\ \div\frac{8}{3}\end{cases}$. Derpaa har man:

$$3x^2+5x-8 = 3\cdot(x-1)\left(x+\frac{8}{3}\right) = (x-1)(3x+8)$$

2. Polynomiets Fortegn

Vi maa undersøge 3 Tilfælde:

1) <u>$x^2+ax+b=0$ har **reelle og forskellige Rødder.**</u>

Lad disse være p og q og lad $p>q$. Man kan da skrive

$$y = (x-p)\cdot(x\div q)$$

Heraf ser man, at y er positiv for $x>p$ og for $x<q$.

y er negativ for $p>x>q$.

$y=0$ for $x=p$ og $x=q$. Altsaa:

<u>Naar $x^2+ax+b=0$ har reelle og forskellige Rødder, vil</u>

x^2+ax+b være positivt, naar x er större end den största eller mindre end den mindste af Rödderne. Det er negativt, naar x er beliggende mellem Rödderne og det er Nul, naar x er lig én af Rödderne.

Eks: $y = x^2-3x-10$

Man faar let: $y = (x-5)(x+2)$

y er altsaa positiv for $x > 5$ og $x < \div 2$

y er negativ for $5 > x > -2$

y er Nül for $x = 5$ og $x = \div 2$

2) $x^2+ax+b=0$ har ligestore Rödder.

I dette Tilfælde er $b = \frac{a^2}{4}$, og man har derfor

$$y = x^2+ax+\frac{a^2}{4} = (x+\frac{a}{2})^2.$$

y er altsaa altid positiv, undtagen for $x = -\frac{a}{2}$, for hvilken Værdi y er $= 0$.

Hvis altsaa $x^2+ax+b=0$ har lige Rödder, vil Polynomiet x^2+ax+b være Nul for $x = -\frac{a}{2}$; ellers er det altid positivt.

Eks: $y = x^2+6x+9$

Man har da $y = (x+3)^2$

y er altsaa altid positiv, undtagen for $x = \div 3$; for denne Værdi er $y = 0$.

3) $x^2+ax+b=0$ har komplekse Rödder.

I dette Tilfælde er $\frac{a^2}{4} < b$.

Man skriver da

$$y = x^2+ax+b = x^2+ax+\frac{a^2}{4}+b-\frac{a^2}{4} = (x+\frac{a}{2})^2+(b-\frac{a^2}{4}).$$

Men begge de to Parenteser er altid positive[x]. Heraf fölger:

[x] Den förste er dog Nul for $x = -\frac{a}{2}$.

<u>Naar $x^2+ax+b=0$ har komplekse Rödder, er Polynomiet x^2+ax+b altid positivt.</u>

3. Hvis man vil bestemme Fortegnet for
$$y = Ax^2+Bx+C$$
omskriver man dette til
$$y = A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right).$$
Parentesens Fortegn lader sig da bestemme efter Reglerne ovenfor. Deraf bestemmes Fortegnet for y. – Eks: $y = x^2+x+1$.

<u>Opgave 1.</u> Fremstil grafisk de tre Funktioner
$$y = x^2-3x\div 10$$
$$y = x^2+6x+9 \quad \text{og}$$
$$y = x^2+x+1$$
og paavis Overensstemmelsen mellem den geometriske Fremstilling og de i §2 fundne Resultater.

<u>Opgave 2</u>

Bestem y's Fortegn for reelle Værdier af x, naar
$$y = \frac{4-3x-x^2}{6x^2+12x+45}.$$
Vi omdanner först det opgivne Udtryk til
$$y = \frac{\div 1\,(x-1)\cdot(x+4)}{6\cdot\left(x^2+2x+7\tfrac{1}{2}\right)}$$
Da $x^2+2x+7\frac{1}{2}=0$ har komplekse Rödder, vil Nævneren altid være positiv.

y er derfor positiv, naar $1>x>-4$

y er negativ, naar $x>1$ eller $x<-4$.

y er Nul, naar $x=1$ eller $x=-4$.

<u>Opgave 3</u>.

For hvilke reelle Værdier af x er
$$\frac{x^2-2x-18}{x-3} > 2 ?$$

Opgaven er den samme som at finde de Værdier af x, som gör
$$\frac{x^2-2x-18}{x-3} - 2 > 0 . \quad \text{eller}$$
$$\frac{x^2-4x-12}{x-3} > 0 \quad \text{eller}$$
$$\frac{(x-6)(x+2)}{x-3} > 0 .$$
Man sætter da: $$y = \frac{(x-6)(x+2)}{x \div 3}$$
Man ser nu, at

$x > 6$	gör	y positiv.
$6 > x > 3$	gör	y negativ.
$3 > x > -2$	gör	y positiv.
$x < -2$	gör	y negativ.

Heraf ser man, at
$$\frac{x^2-2x-18}{x-3} > 2 \quad \text{for} \quad x > 6 \quad \text{og} \quad 3 > x > -2 .$$

<u>Opgave 4.</u>
Naar x og y er reelle Tal, skal man finde den störste Værdi (Maksimum) og den mindste Værdi (Minimum) af y, naar
$$y = \frac{4x^2+5}{4x+4} .$$

Man tænker sig x variere fra $-\infty$ til $+\infty$ o: tænker sig x antage efterhaanden en Række Talværdier, der vokser fra $\div K$ til $+K$. og beregner de tilsvarende Værdier af y. Man spörger nu, for hvilken Værdi af x faar y sin störste og sin mindste Værdi.
Vi löser den opgivne Ligning med Hensyn til x.

$$4xy + 4y = 4x^2 + 5$$

$$x^2 - xy - y + \frac{5}{4} = 0$$

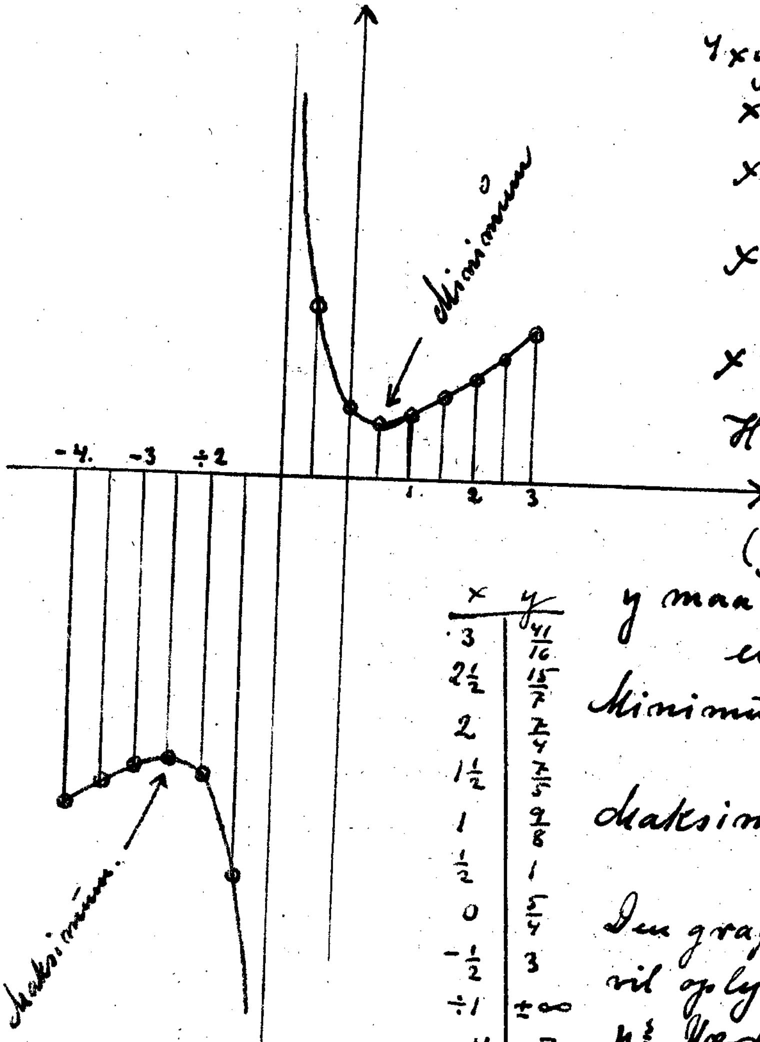
$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + y - \frac{5}{4}}$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y - 5}}{2}$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{(y-1)(y+5)}}{2}$$

Hvis x nu skal være reel, maa

$$(y-1)(y+5) > 0.$$



x	y
3	$\frac{41}{16}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{15}{7}$
2	$\frac{7}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{5}$
1	$\frac{9}{8}$
$\frac{1}{2}$	1
0	$\frac{5}{4}$
$-\frac{1}{2}$	3
÷1	$\pm\infty$
$-1\frac{1}{2}$	-7
-2	$-\frac{21}{4}$
$-2\frac{1}{2}$	÷5
-3	$-\frac{41}{8}$
$-3\frac{1}{2}$	÷5,4.

y maa altsaa være $\geqq 1$
eller $\leqq ÷5$

Minimum for y er derfor

$$y = 1$$

Maksimum for y er

$$y = ÷5.$$

Den grafiske Fremstilling vil oplyse Sagen klart: y's Værdier ligger

1) mellem $+\infty$ og 1 og
2) mellem -5 og $-\infty$.

For den første Samling af Værdier er $y = \infty$ et Maksimum og $y = 1$ et Minimum. For den anden Samling er $y = ÷5$ et Maksimum og $y = -\infty$ et Minimum. Vi vil senere give en udtømmende Behandling af Spörgsmaalet Maksimum og Minimum.

Opgave 5
Find Maksimum og Minimum af y, naar
$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 3y + 2\tfrac{1}{2} = 0.$$
Opgave 6. Bestem Fortegnet af
$$y = 2x + 4 - 2x^2$$ og fremstil derpaa Funktionen grafisk.
Opgave 7.
For hvilke Værdier af x er $2 > \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x+1} > \div 1$

Kapitel 16.
Ligninger, der löses som 2^den^ Grads Ligninger.

1. Ligninger af höjere Grad.

Den almindelige Teori for Lösningen af Ligninger af höjere end anden Grad kan ikke gives her. Man har imidlertid Metoder, hvorved man altid kan löse en 3^die^ eller 4^de^ Grads Ligning, saaledes at Rödderne udtrykkes ved Rodstörrelser. Derimod kan Ligninger, hvis Grad er > 4, i Almindelighed ikke löses ved Hjælp af Rodstörrelser.

I specielle Tilfælde kan Ligninger af höjere Grad löses som 2^den^ Grads Ligninger.

Dette gælder f. Eks. Ligningen $x^{2n} + ax^n + b = 0$
Man sætter nemlig $x^n = y$ og omdanner derved Ligningen til
$$y^2 + ay + b = 0,$$ hvoraf
$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$ Man har derfor
$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$ og endelig
$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}$$

Ad denne Vej kan man dog kun finde nogle af Ligningens Rödder.

Eks 1. $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ Sætter vi $x^3 = y$, faar vi

$$y^2 \div 26y - 27 = 0 \quad \text{, hvoraf}$$

$$y = 13 \pm \sqrt{169 + 27} = 13 \pm 14 = \begin{cases} 27 \\ -1 \end{cases}$$

Altsaa er x^3 enten $= 27$, eller $x^3 = -1$, hvoraf

$$x = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Ligningen har dog endnu 4 komplekse Rödder, som det senere vil blive vist.

Eks 2 $x^{-10} + 31x^{-5} - 32 = 0$

2. Ligninger, hvor x findes under Rodtegn.

Man isolerer det ene af de Rodtegn, hvorunder x findes og opløfter derpaa til en saadan Potens paa begge Sider af Lighedstegnet, saaledes at det isolerede Rodtegn forsvinder. Den nye Ligning behandles som den opgivne, og saaledes fortsætter man, indtil man faar en Ligning, i hvilken x ikke mere findes under Rodtegn. Ligningen siges da at være bragt paa rational Form. Det fraraades at bortskaffe Rodtegn, under hvilke x ikke forekommer, da dette fører til en Endeligning, der er af höjere Grad end nödvendigt.

Eks 1. $$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = 3 \qquad (1)$$

$$\sqrt{2x-1} = -\sqrt{x+3} + 3 \qquad (2)$$

Opløfter til 2den Potens: $$2x - 1 = x + 3 + 9 \div 6\sqrt{x+3} \qquad (3)$$

$$6\sqrt{x+3} = 13 - x \qquad (4)$$

$$36(x+3) = 169 - 26x + x^2 \qquad (5)$$

$$x^2 - 62x + 61 = 0 \qquad (6)$$

$$x = \begin{cases} 1 \\ 61 \end{cases} \qquad (7)$$

Man ser heraf, at ethvert Tal, der tilfredsstiller
(1) ogsaa maa tilfredsstille (2), (3) o.s.v. Det maa da være et af de to Tal, som findes i (7).
Fremgangsmaaden ovenfor vil derfor altid skaffe os alle Ligning (1)s Rödder; men vi faar maaske ad denne Vej tillige Rødder, som er (1) uvedkommende. (de saakaldte fremmede Rödder). Man maa da ved Pröve forvisse sig om, hvorvidt de fundne Tal passer i den forelagte Ligning. Her i dette Eks. vil det vise sig, at $x = 1$ er Rod i Ligningen, medens $x = 61$ er en fremmed Rod. $x = 61$ er imidlertid Rod i en af de 4 Ligninger $\pm\sqrt{2x-1} \pm \sqrt{x+3} = 3$, (a)
der alle fire, naar Rodtegnene bortskaffes, förer til Ligningen $x^2 - 62x + 61 = 0$
Naar man löser denne Ligning, löser man fölgelig alle 4 Ligninger i (a) paa én Gang.
61 er Rod i Ligningen $+\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = 3$.

Eks 2. $\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} + 2 = 0$.

Paa samme Maade som för findes $x = \begin{cases}4\\0\end{cases}$, der begge er fremmede Rödder. Den forelagte Ligning har altsaa slet ingen Rödder.

$x = 0$ er Rod i Ligningen $-\sqrt{6x+1} - \sqrt{2x+1} + 2 = 0$.

$x = 4$ er Rod i Ligningen $-\sqrt{6x+1} + \sqrt{2x+1} + 2 = 0$.

Eks 3. $2x - \sqrt{2} = \sqrt{x^2+10}$

JJ