Kortfattet Trigonometrie

for

Seminarier og Realskoler.

Af

Edvard Zeuthen.

Indbydelsesskrift

til

Afgangs- og Aars-Prøven

i

Slagelse Realskole

den 3die—6te Juli og 7de—15de Juli 1876.

Udgivet tilligemed Skoleefterretninger

af

Fr. Dahl,
Skolens Bestyrer.

SLAGELSE.

„Slagelse-Posten"s Bogtrykkeri.

1876.

Kortfattet

TRIGONOMETRI

for

Seminarier og Realskoler

af

Edvard Zeuthen.

Forord.

Trigonometriens praktiske Betydning synes at berettige den til at indtage en Plads i den mathematiske Undervisning som en naturlig Afslutning paa Undervisningen i Geometri paa vore Seminarier og Realskoler, og naar den hidtil ikke har været taget med paa de nævnte Skoler, saa kan man sikkert søge Grunden dertil i, at man i den Grad har stillet Trigonometrien som en fra Geometrien forskjellig Videnskab, der saa at sige kun med Uvillie har set sig nødt til at ty til dennes Resultater og Bevismaader, at dens praktiske Formaal — Trekantens Opløsning — først kunde naas, efterat en stor Mængde Formler vare fundne og indprentede i Hukommelsen. En saadan selvstændig og udførlig Fremstilling er visselig nødvendig for den, der vil gaa videre i det mathematiske Studium; men den kan ikke danne nogen naturlig Afslutning paa Undervisningen i den elementære Geometri. Skal den kunne dette, da maa den ikke fremtræde i en fremmed Skikkelse for Eleven, men slutte sig saa nær som muligt til Geometrien. Hvorvidt dette Hensyn er sket Fyldest i nærværende Fremstilling, maa sagkyndige dømme om.

Angaaende Enkelthederne skal jeg kun bemærke, at det geometriske Bevis i § 5 b er en Modification af et Bevis for Formlen $X - \sin X < \frac{1}{4}X^3$ af Joseph Joffroy (Math. Tidsskrift 1869 Side 77). De geometriske Beviser §§ 12—14 ere, saavidt jeg ved, først fremsatte af mig i Math. Tidsskrift 1875 Side 189. Stoffet er ordnet saaledes, at man paa de Steder, hvor man ikke tror at kunne faa alt med, kan indskrænke sig til den retvinklede Trekants Opløsning.

Slagelse, Maj 1876.

Edvard Zeuthen.

1. I **Geometrien** er vist[1]), at en Trekant er bestemt, naar enten alle 3 Sider eller 2 Sider og 1 Vinkel[2]) eller 1 Side og 2 Vinkler ere givne, endvidere, hvorledes Trekanten konstrueres[3]) af de givne Stykker, hvorefter de ubekjendte kunne findes ved Udmaaling.

I **Trigonometrien** læres, hvorledes de ubekjendte Stykker kunne findes ved Beregning, naar Trekanten paa en af ovennævnte Maader er bestemt.

Retvinklede Trekanter.

2. Da Forholdene mellem Katheterne og Hypotenusen og mellem Katheterne indbyrdes (Fig. 1) kun ere afhængige af en af de spidse Vinkler[4]), har man for disse Forhold indført følgende Benævnelser og Betegnelser:

a) Forholdet mellem den modstaaende Kathete og Hypotenusen kaldes Sinus af Vinklen, altsaa

$$\sin A = \frac{a}{c}, \ \sin B = \frac{b}{c}$$

b) Forholdet mellem den hosliggende Kathete og Hypotenusen kaldes Cosinus af Vinklen, altsaa

$$\cos A = \frac{b}{c}, \ \cos B = \frac{a}{c}$$

c) Forholdet mellem den modstaaende Kathete og den hosliggende kaldes Tangens af Vinklen, altsaa

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$$

1) Mundts Geometri §§ 118—121.
2) med en enkelt Undtagelse, se M. G. § 119 a.
3) M. G. §§ 245—250.
4) M. G. §§ 99, 272 og 274.

d) Forholdet mellem den hosliggende Kathete og den modstaaende kaldes **Cotangens** af Vinklen, altsaa

$$\cot A = \tfrac{b}{a},\quad \cot B = \tfrac{a}{b}$$

3. Man har altsaa

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B \,..\, (1).\qquad \cos A = \frac{b}{c} = \sin B \,..\, (2)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \cot B \,..\, (3).\qquad \cot A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B \,..\, (4)$$

d. e. **sin og tg af en Vinkel ere henholdsvis lig cos og cot af Komplementvinklen og omvendt.**

4. Af Formlerne (1)—(4) i Forbindelse med $a^2 + b^2 = c^2$ faas

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \ldots (5)$$

$$\sin A : \cos A = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A \,..\, (6)$$

$$\operatorname{tg} A \,.\, \cot A = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \ldots\ldots\ldots (7)$$

De 4 trigonometriske Størrelser sin, cos, tg og cot af samme Vinkel ere altsaa forbundne ved 3 af hinanden uafhængige Ligninger. Heraf følger, at naar en af disse Størrelser er bekjendt, kunne de andre findes ved at opløse Ligningerne. Man finder saaledes

$$\underline{\mathbf{sin\,A}} = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 A+1}} = \frac{1}{\sqrt{\cot^2 A+1}}$$

$$\sqrt{1-\sin^2 A} = \underline{\mathbf{cos\,A}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 A+1}} = \frac{\cot A}{\sqrt{\cot^2 A+1}}$$

$$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} = \underline{\mathbf{tg\,A}} = \frac{1}{\cot A}$$

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}} = \frac{1}{\operatorname{tg}. A} = \underline{\mathbf{cot\,A}}$$

5. Ad Veje, som her ikke nærmere skulle paavises, har man beregnet sin, cos, tg og cot af alle Vinkler fra 0° til 90° fra Minut til Minut, og deres Logarithmer

findes i de saakaldte logarithmisk-trigonometriske Tavler. Disse behøve dog kun at gaa fra 0° til 45°, idet f. Ex. log cot 67° 15′ findes ved at slaa op paa log tg 22° 15′, log sin 81° 14′ 11″ findes under log cos 8° 45′ 49″ (§ 3). Man behøver imidlertid ikke at beregne Komplementvinklen, da Tavlerne have dobbelt Indgang, idet man gaar ind fra oven og tilvenstre for Vinkler under 45°, fra neden og tilhøjre for Vinkler over 45°.

(5 b. At det er muligt at beregne de trigonometriske Størrelser, kan indses saaledes:

Betegner ch X den til en Bue paa X Grader svarende Korde i en Cirkel med Radius 1, har man (Fig. 2) $\sin X = \tfrac{1}{2}$ ch 2 X, saa at **sin** af en hvilkensomhelst Vinkel let findes, hvis man er i Stand til at beregne Korden til en Bue af det dobbelte Gradeantal. Nu er det vist i Geometrien[5]), hvorledes Korder til Buer paa 90°, 60° og 36° kunne beregnes tilligemed alle dem, der svare til Buer, som ere dannede af disse ved Fordobling, Halvering, Addition og Subtraktion. Derved er man alligevel ikke i Stand til at finde ch. 2′, som man maa kjende for at kunne beregne Korden til et hvilketsomhelst Multiplum af 2′ og derved sin af alle Vinkler fra Minut til Minut. Men jo mindre Vinklerne blive, desto mere nærme Korderne sig til Buerne[6]) og faa flere og flere Decimaler fælles med dem, saa at man for en tilstrækkelig lille Vinkel uden mærkelig Fejl kan antage Korden ligestor med Buen. Grænsen for den Fejl, man herved begaar, kan findes saaledes:

Fig. 3 er en Cirkel med Radius 1. Sættes Buen A D B = b, Korden til samme A B = K og Korden til den halve Bue A D = k. har man

$$\text{Sekt. ADBC} - \text{Firk. ADBC} = 2\,\text{Segm. AD} < 2\,\text{Trek. AGD} = 2\,\text{Trek. ADE}$$

altsaa

$$\tfrac{1}{2}\,b - \tfrac{1}{2}\,K < \tfrac{1}{2}\,K \cdot ED,\ \text{eller}\ b - K < K \cdot ED\ ;$$

men

$$FD.\,ED = 2\,ED = AD^2,$$

altsaa

$$b - K < \tfrac{1}{2}\,K.\,AD^2 < \tfrac{1}{2}\,b.\,(\tfrac{1}{2}\,b)^2 = \tfrac{1}{8}\,b^3.$$

Længden af en Bue paa 2′ er $\dfrac{2\pi}{180.60} = 0{,}000581776417$,

[5]) M. G. §§ 303—313. [6]) M. G. § 198.

og Fejlen, man begaar ved at antage Korden lig Buen, er

$$b - ch\,2' < \tfrac{1}{8} \cdot 0{,}000581776417 < \tfrac{1}{8} \cdot 0{,}0006^3 = 0{,}000000000027,$$

saa at man altsaa med 10 nøjagtige Decimaler har

$$ch\,2' = 0{,}0005817764,$$
$$\text{og } \sin 1' = 0{,}0002908882.\ )$$

6. Da Katheterne ere mindre end Hypotenusen, ere sin og cos altid ægte Brøker. Naar $A = 45^0$, er $a = b$, altsaa $tg\,45^0 = \cot 45^0 = 1$. Man ser fremdeles, at naar A voxer fra 0^0 til 90^0,

voxer	sin A fra	0 til 1	og	log sin A fra	$-\infty$	til	0
aftager	cos A -	1 - 0	-	log cos A -	0	-	$-\infty$
voxer	tg A -	0 - ∞	-	log tg A -	$-\infty$	-	$+\infty$
aftager	cot A -	∞ - 0	-	log cot A -	$+\infty$	-	$-\infty$

De trigonometriske Logarithmer ere altsaa negative med Undtagelse af log tg af Vinkler over 45^0 og log cot af Vinkler under 45^0. For at undgaa at angive den negative Karakteristik lader man denne overalt være -10 (i Stedet for $0{,}64009-2$ skriver man $8{,}64009-10$), som altsaa maa tilføjes overalt, hvor Logarithmen er negativ.

7. Exempler paa Interpolation.

Til Lettelse ved Interpolationen ere Differenserne i Almindelighed angivne i Tabellen. log sin og log cos have hver sin Differensrække betegnet med d, medens log tg og log cot have en fælles Differensrække betegnet med d. c. (differentia communis).

Da log sin og log tg voxe med Vinklen, blive deres Differenser at betragte som positive, hvorimod Differenserne for log cos og log cot ere negative, da disse aftage, naar Vinklen voxer.

Ex. 1. At opsøge log sin $23^0\,15'\,24''$

I Tabellen findes log sin $23^0\,15' = 9{,}59632-10$

Da Logarithmerne i en længere Række have en konstant Differens af 29 Enheder af sidste Decimal for hver Minuts Tilvæxt til Vinklen, sluttes, at en Tilvæxt af $24''$ eller $\frac{24}{60}'$ maa frembringe en Tilvæxt af $\frac{24}{60} \cdot 29$ Enheder af sidste Decimal til Logarithmen. Altsaa

$$\begin{aligned} \log\sin 23^0\,15' &= 9{,}59632-10 \\ +\tfrac{24}{60}\cdot 29 &= \quad +12 \\ \hline \log\sin 23^0\,15'\,24'' &= 9{,}59644-10 \end{aligned}$$

Ex. 2. At opsøge log cos $84^0\,17'\,9''$

$$\begin{aligned} \log\cos 84^0\,17' &= 8{,}99830-10 \\ -\tfrac{9}{60}\cdot 126 &= \quad -19 \\ \hline \log\cos 84^0\,17'\,9'' &= 8{,}99811-10 \end{aligned}$$

Ex. 3. At opsøge log tg $68^0\,59'\,21''$

$$\begin{aligned} \log tg\, 68^0\,59' &= 0{,}41545 \\ +\tfrac{21}{60}\cdot 37 &= \quad +13 \\ \hline \log tg\, 68^0\,59'\,21'' &= 0{,}41558 \end{aligned}$$

Ex. 4. At opsøge log cot $49^0\,39'\,29''$

$$\begin{aligned} \log\cot 49^0\,39' &= 9{,}92920-10 \\ -\tfrac{29}{60}\cdot 26 &= \quad -13 \\ \hline \log\cot 49^0\,39'\,29'' &= 9{,}92907-10 \end{aligned}$$

Ex. 5. log sin A $= 9{,}67123-10$. Find A.

I Tabellen findes log sin $27^0\,58' = 9{,}67113-10$.

Da Logarithmerne have en Differens af 24 Enheder af sidste Decimal for hver Minuts Tilvæxt til Vinklen, sluttes, at en Tilvæxt af 10 Enheder til Logarithmen maa frembringe en Tilvæxt af $\frac{10}{24}'$ eller $\frac{10}{24}\cdot 60''$ til Vinklen. Altsaa

$$\begin{aligned} \log\sin 27^0\,58' &= 9{,}67113-10 \\ 25'' &= 60\cdot\tfrac{10}{24} \\ \hline A = 27^0\,58'\,25'' & \end{aligned}$$

Ex. 6. log cos B $= 9{,}85317-10$. Find B.

$$\begin{aligned} \log\cos 44^0\,30' &= 9{,}85324-10 \\ 35'' &= 60.\tfrac{-7}{-12} \\ \hline B = 44^0\,30'\,35'' & \end{aligned}$$

Ex. 7. log tg C $= 0{,}12345$. Find C.

$$\begin{aligned} \log tg\, 53^0\,2' &= 0{,}12341 \\ 9'' &= 60.\tfrac{4}{26} \\ \hline C = 53^0\,2'\,9'' & \end{aligned}$$

Ex. 8. log cot D $= 9{,}75186-10$. Find D.

$$\begin{aligned} \log\cot 60^0\,32' &= 9{,}75205 \\ 39'' &= 60.\tfrac{-19}{-29} \\ \hline D = 60^0\,32'\,39''. & \end{aligned}$$

Den retvinklede Trekants Opløsning.

8. Formlerne i § 3 i Forbindelse med de fra Geometrien bekjendte $A + B + C = 180^0$ (eller $A + B = 90^0$, da $C = 90^0$) og $a^2 + b^2 = c^2$ indeholde alt hertil fornødent. De 5 Tilfælde ere fremstillede i følgende Tabel.

Givet	Opløsning.
A, c.	$B = 90^0 - A$; $a = c \sin A$; $b = c \cos A$.
A, b.	$B = 90^0 - A$; $a = b \operatorname{tg} A$; $c = \frac{b}{\cos A}$
A, a.	$B = 90^0 - A$; $b = a \cot A$; $c = \frac{a}{\sin A}$
a, c.	$\sin A = \cos B = \frac{a}{c}$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} = c \cos A$.
a, b.	$\operatorname{tg} A = \cot B = \frac{a}{b}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Exempler.

Ex. 1. Givet $A = 32^0\,16'\,17''$, $c = 6414{,}4$ Fod. B, a og b søges.

Opløsning. $B = 90^0 - 32^0\,16'\,17'' = 57^0\,43'\,43''$

$$\begin{array}{rl} \log c &= 3{,}80716 \\ \log \sin A &= 9{,}72749 - 10 \\ \hline \log a &= 3{,}53465 \\ a &= 3424{,}9 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c &= 3{,}80716 \\ \log \cos A &= 9{,}92713 - 10 \\ \hline \log b &= 3{,}73429 \\ b &= 5423{,}6 \end{array}$$

Ex. 2. Givet $A = 32^0\,16'\,17''$, $b = 5423{,}6$. B, a og c søges.

Opl. $B = 90^0 - 32^0\,16'\,17'' = 57^0\,43'\,43''$

$$\begin{array}{rl} \log b &= 3{,}73429 \\ \log \operatorname{tg} A &= 9{,}80034 - 10 \\ \hline \log a &= 3{,}53463 \\ a &= 3424{,}7 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log b &= 3{,}73429 \\ \log \cos A &= 9{,}92713 - 10 \\ \hline \log c &= 3{,}80716 \\ c &= 6414{,}4 \end{array}$$

Ex. 3. Givet $a = 3424{,}9$, $b = 5423{,}6$. c, A og B søges.

Opl.
$$\begin{array}{rl} \log a &= 3{,}53465 \\ \log b &= 3{,}73429 \\ \hline \log \operatorname{tg} A &= 9{,}80036 - 10 \\ A &= 32^0\,16'\,17'' \\ B &= 57^0\,43'\,43'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a &= 3{,}53465 \\ \log \sin A &= 9{,}72749 - 10 \\ \hline \log c &= 3{,}80716 \\ c &= 6414{,}4 \end{array}$$

Opgaver.

At bestemme de ubekjendte Stykker af en retvinklet Trekant, naar

1. $A = 30^0$; $c = 65{,}5$ Fod.
2. $B = 16^0\,3'\,10''$; $c = 0{,}028$ Fod.
3. $A = 3^0\,5'\,50''$; $c = 300$ Fod
4. $A = 2^0\,15'\,7''$; $b = 100{,}6$ Fod.
5. $A = 70^0$; $b = 20$ Fod.
6. $B = 88^0\,0'\,15''$; $a = 26{,}484$ Fod
7. $A = 68^0\,17'\,30''$; $a = 20$ Fod.
8. $B = 10^0\,9'\,8''$; $b = 390{,}496$ Fod.
9. $A = 45^0\,45'\,45''$; $a = 9$ Fod 11 Tom. 4 Lin.
10. $a = 3{,}498$ Fod; $c = 34{,}98$ Fod.
11. $b = 16000$ Fod; $c = 16009$ Fod.
12. $a = 36$ Fod 10 Tom. 3 Lin.; $c = 71$ Fod 5 Tom. 8 Lin.
13. $a = 15$ Fod; $b = 22$ Fod.
14. $a = 1{,}429$ Fod; $b = 100{,}72$ Fod.
15. $a = 30{,}416$; $b = 22{,}812$ Fod.
16. Hypotenusen er 19 Fod; $A : B = 5 : 8$.
17. en af de spidse Vinkler er 20^0; den hosliggende Kathete 20 Fod.
18. en af de spidse Vinkler er $16'$; den modstaaende Kathete 444 Fod.
19. Hypotenusen er $\sqrt{34}$ Fod; den ene Kathete $\sqrt{17}$ Fod.
20. Den mindste Kathete er $13{,}457$ Fod; den største 3 Gange saa stor.

---

21. Beregn Arealerne af Trekanterne i 1, 4, 7, 10, 13 og 19.
22. I en ligebenet Trekant er Grundlinien $13{,}28$ Fod, en hosliggende Vinkel $72^0\,7'\,51''$. Find de ubekjendte Stykker og Trekantens Areal.

23. Største Radius i en regulær Syvkant er 1; hvor stor er Syvkantsiden og Arealet?
24. Hvor stor er en regulær Nikants Side, største Radius og mindste Radius, naar Arealet er 1 Kvadratfod?
25. Under hvor stor en Vinkel ses Jordens Diameter fra Maanen, naar Iagttageren befinder sig paa et Punkt paa Maanen, der er 60 Jordradier fra Jordens Centrum?

Skjævvinklede Trekanter.

sin (cos, tg og cot) af stumpe Vinkler.

9. Ligesom man ved sin af den spidse Vinkel CAB (Fig. 4) forstaar Forholdet $\frac{CD}{CA}$, saaledes forstaar man ogsaa ved sin af den stumpe Vinkel $C'A'B'$ (Fig. 5) Forholdet $\frac{C'D'}{C'A'}$; men $\frac{C'D'}{C'A'}$ er ogsaa sin af Vinkel $C'A'D'$, saa at sin af en stump Vinkel er lig sin af Supplementvinklen, eller $\sin A = \sin 180^0 - A$.

(cos, tg og cot af stumpe Vinkler komme ikke til Anvendelse ved Trekantens Opløsning. For Fuldstændigheds Skyld kan dog tilføjes:

I Overensstemmelse med

$$\left.\begin{aligned}\cos CAB &= \frac{AD}{AC}\\ \operatorname{tg} CAB &= \frac{CD}{AD}\\ \cot CAB &= \frac{AD}{CD}\end{aligned}\right\} \text{ sættes } \left\{\begin{aligned}\cos C'A'B' &= \frac{A'D'}{A'C'}\\ \operatorname{tg} C'A'B' &= \frac{C'D'}{A'D'}\\ \cot C'A'B' &= \frac{A'D'}{C'D'}\end{aligned}\right.$$

men $A'D'$ betragtes som negativ, fordi den ligger i Grundliniens Forlængelse. cos, tg og cot af en stump Vinkel blive altsaa negative, men numerisk ligestore med cos, tg og cot af den spidse Supplementvinkel).

10. Saavel i den stumpvinklede som i den spidsvinklede Trekant har man

$$CD = a \sin B = b \sin A$$
$$\text{eller } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

d. e. Siderne i en Trekant forholde sig som sin af de modstaaende Vinkler.

Af Hensyn til de følgende Beregninger er det bekvemt at udtrykke denne Sætning saaledes

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \ldots \quad (8)$$

Den skjævvinklede Trekants Opløsning.

11. Givet 2 Vinkler og 1 Side.

Den tredie Vinkel bestemmes strax, idet $A + B + C = 180^0$. Er a den givne Side, har man dernæst (ifølge § 10):

$$b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B \;;\; c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$$

12. Givet Siderne.

Betegnes Radius i Trekantens indskrevne Cirkel med r, Afstandene fra Vinkelspidserne til Røringspunkterne med α, β og γ, har man (Fig. 6)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{\alpha} \;;$$

men r er som bekjendt fra Geometrien lig $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

og $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = a + b + c = 2s$

altsaa $\alpha + \beta + \gamma = s$. Subtraheres herfra

$\beta + \gamma = a$

---

faas $\alpha = s - a$

Man har altsaa

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= \frac{r}{s-b} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Anm. Skulle alle 3 Vinkler beregnes, er det bekvemmest først at beregne r og benytte Formlen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{s-a}$$

Af (9) faas

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{r^2}{(s-a)(s-b)} = \frac{s-c}{s} = \frac{a+b-c}{a+b+c} \quad . . (10)$$

13. Givet 1 Vinkel og 2 hosliggende Sider C, a og b.

Afsættes $\angle BAD = \angle B$ (Fig. 7) og sættes $CD = m$, har man $AD = DB = a - m$, og $\angle CAD = A - B$.

Ifølge (10) er

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{m+(a-m)-b}{m+(a-m)+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

altsaa

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2} C \quad . . (11)$$

Af $A + B + C = 180^0$ faas $\tfrac{1}{2}(A+B) = 90^0 - \tfrac{1}{2} C$, og nu har man

$$\left.\begin{array}{l} A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B) \\ B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B) \end{array}\right\} \quad . . (12)$$

Endelig er $c = \dfrac{a}{\sin A} \cdot \sin C$.

14. Givet en Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side A, a og b.

Vinkel B bestemmes ved

$$\sin B = \frac{\sin A}{a} \cdot b$$

Derefter har man $C = 180^0 - (A+B)$

og $c = \dfrac{a}{\sin A} \cdot \sin C$.

Ifølge Geometrien ere følgende Tilfælde mulige:

Er $a > b$, maa B nødvendigvis være spids.

Er $a = b$, ligeledes. Trekanten er ligebenet og kan som saadan løses ved Formlerne for den retvinklede Trekant.

Er $a < b$, er der to Opløsninger. B kan baade være spids og stump, saa at man foruden den i Tabellen fundne spidse Vinkel B_1, maa tage

Supplementvinklen $180 - B_1 = B_2$. For C og c faas da ligeledes to Værdier, bestemte ved

$$C_1 = 180^0 - (A + B_1), \quad C_2 = 180^0 - (A + B_2),$$

$$c_1 = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C_1 \quad \text{og} \quad c_2 = \frac{a}{\sin A} \sin C_2$$

15. De forskjellige Tilfælde ere fremstillede i følgende Tabel.

Givet	Opløsning.
A, B, a eller C, B, a	$\left.\begin{array}{l} C = 180^0 - (A+B) \\ A = 180^0 - (B+C) \end{array}\right\}$; $b = \dfrac{a}{\sin A} \cdot \sin B$; $c = \dfrac{a}{\sin A} \cdot \sin C$.
a, b, c,	$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \dfrac{r}{s-a}$ $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \dfrac{r}{s-b}$ $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \dfrac{r}{s-c}$ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$
a, b, C,	$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \dfrac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2} C$; $\begin{array}{l} A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B) \\ B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B) \end{array}$; $c = \dfrac{a}{\sin A} \cdot \sin C$.
a, b, A.	$\sin B = \dfrac{\sin A}{a} \cdot b$; $C = 180^0 - (A+B)$; $c = \dfrac{a}{\sin A} \cdot \sin C$.

Exempler.

Ex. 1. Givet $A = 43^0\, 10'\, 22''$; $B = 57^0\, 0'\, 58''$; $a = 28{,}463$.

Opl. $C = 180^0 - (A+B) = 79^0\, 48'\, 40''$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 1{,}45428 \\ \log \sin A = & 9{,}83518 - 10 \\ \hline & 1{,}61910 \\ \log \sin B = & 9{,}92367 - 10 \\ \log \sin C = & 9{,}99309 - 10 \\ \hline \log b = & 1{,}54277 \\ \log c = & 1{,}61219 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ b = 34{,}895 \\ c = 40{,}944 \end{array}$$

Ex. 2. Givet $a = 28{,}463$; $b = 34{,}895$; $c = 40{,}944$

Opl.

$\log(s-a) = 1{,}37453$	$a = 28{,}463$
$\log(s-b) = 1{,}23694$	$b = 34{,}895$
$\log(s-c) = 1{,}04949$	$c = 40{,}944$
$3{,}66096$	$2s = 104{,}302$
$\log s = 1{,}71726$	$s = 52{,}151$
$2 \log r = 1{,}94370$	$s-a = 23{,}688$
$\log r = 0{,}97185$	$s-b = 17{,}256$
	$s-c = 11{,}207$

$\log tg \frac{1}{2} A = 9{,}59732-10$	$\frac{1}{2} A = 21^0 35' 11''$	$A = 43^0 10' 22''$
$\log tg \frac{1}{2} B = 9{,}73491-10$	$\frac{1}{2} B = 28^0 30' 29''$	$B = 57^0\ 0' 58''$
$\log tg \frac{1}{2} C = 9{,}92236-10$	$\frac{1}{2} C = 39^0 54' 21''$	$C = 79^0 48' 42''$
		Prøve $A+B+C = 180^0\ 0'\ 2''$

Ex. 3. Givet $a = 580$ Fod; $b = 605{,}59$ Fod; $C = 59^0 48'$

Opl. $b+a = 1185{,}59$; $b-a = 25{,}59$; $\frac{1}{2} C = 29^0 54'$

$\log(b-a) = 1{,}40807$	$\frac{1}{2}(B+A) = 90^0 - \frac{1}{2} C = 60^0 6'$
$\log(b+a) = 3{,}07393$	
$8{,}33414-10$	
$\log \cot \frac{1}{2} C = 0{,}24031$	$\log a = 2{,}76343$
$\log tg \frac{1}{2}(B-A) = 8{,}57445-10$	$\log \sin A = 9{,}92818-10$
$\frac{1}{2}(B-A) = 2^0 8' 58''$	$2{,}83525$
$\frac{1}{2}(B+A) = 60^0 6'\ 0''$	$\log \sin C = 9{,}93665-10$
$A = 57^0 57' 2''$	$\log c = 2{,}77190$
$B = 62^0 14' 58''$	$c = 591{,}43$

Ex. 4. Givet $a = 580$ Fod; $b = 605{,}59$; $A = 57^0 57' 2''$

Opl.

$\log \sin A = 9{,}92818-10$	$\log a = 2{,}76343$
$\log a = 2{,}76343$	$\log \sin A = 9{,}92818-10$
$7{,}16475-10$	$2{,}83525$
$\log b = 2{,}78218$	$\log \sin C_1 = 9{,}93666-10$
$\log \sin B = 9{,}94693-10$	$\log \sin C_2 = 8{,}87463-10$
$B_1 = 62^0 14' 51''$	$\log c_1 = 2{,}77191$
$B_2 = 117^0 45'\ 9''$	$\log c_2 = 1{,}70988$
$C_1 = 180^0 - (A+B_1) = 59^0 48'\ 7''$ [7]	$c_1 = 591{,}44$
$C_2 = 180^0 - (A+B_2) = 4^0 17' 49''$	$c_2 = 51{,}272$

[7]) eller lettere $C_1 = B_2 - A$ og $C_2 = B_1 - A$, hvilket den flinke Elev let selv vil kunne bevise.

Opgaver.

Find de ubekjendte Stykker og Trekantens Areal, naar

26) $A = 38^0 57'$; $B = 107^0 16'$; $c = 17$ Fod.
27) $A = 13^0 13' 13''$; $B = 14^0 14' 14''$; $a = 9{,}7008$ Fod
28) $a = 13$ Fod; $b = 14$ Fod; $c = 15$ Fod.
29) $a = 7{,}024$ Fod; $b = 3{,}05$ Fod; $c = 10$ Fod.
30) $b = 16$ Fod; $c = 30$ Fod; $A = 125^0 16' 38''$.
31) $a = 98{,}989$ Fod; $c = 100$ Fod; $B = 13^0 7' 48''$.
32) $a = 320$ Fod; $b = 400$ Fod; $A = 48^0 37' 29''$.
33) $a = 19{,}772$ Fod; $b = 15{,}815$ Fod; $A = 100^0$.
34) $a = 15$ Fod; $b = 3$ Fod; $B = 15^0 11' 18''$.

---

35) I et Paralleltrapez ere de parallele Sider 19 Fod og 23 Fod, de ikke parallele Sider 5 Fod og 6 Fod. Vinklerne og Arealet søges.
36) Hvor højt er et Taarn, som kaster en 5 Fod kortere Skygge, naar Solen staar 40^0 over Horisonten, end naar den staar 39^0 over Horisonten?

Resultater.

1. $B = 60^0$; $a = 32{,}75$ Fod; $b = 56{,}724$ Fod.
2. $A = 83^0 56' 50''$; $a = 0{,}021374$ Fod; $b = 0{,}0077427$ Fod.
3. $B = 86^0 54' 10''$; $a = 16{,}209$ Fod; $b = 299{,}56$ Fod.
4. $B = 87^0 44' 53''$; $a = 3{,}9559$ Fod; $c = 100{,}68$ Fod.
5. $B = 20^0$; $a = 54{,}949$ Fod; $c = 58{,}476$ Fod.
6. $A = 1^0 59' 49''$; $b = 759{,}98$ Fod; $c = 760{,}45$ Fod.
7. $B = 21^0 42' 30''$; $b = 7{,}9623$ Fod; $c = 21{,}527$ Fod.
8. $B = 79^0 50' 52''$; $a = 2180{,}7$ Fod; $c = 2215{,}5$ Fod.
9. $B = 44^0 14' 15''$; $b = 9$ Fod 8 Tom. 2,4 Lin.; $c = 13$ Fod 10 Tom. 6,7 Lin.
10. $A = 5^0 44' 21''$; $b = 84^0 15' 39''$; $b = 34{,}805$ Fod.
11. $A = 1^0 54'$; $B = 88^0 6'$; $a = 530$ Fod.
12. $A = 31^0 2' 26''$; $B = 58^0 57' 34''$; $b = 61$ Fod 2 Tom. 10,2 Lin.
13. $A = 34^0 17' 13''$; $B = 55^0 42' 47''$; $c = 26{,}627$ Fod.
14. $A = 0^0 48' 46''$; $B = 89^0 11' 14''$; $c = 100{,}73$ Fod.
15. $A = 53^0 7' 46''$; $B = 36^0 42' 14''$; $c = 38{,}02$ Fod.

16. A = 34° 36′ 55″; B = 55° 23′ 5″; a = 10,793 Fod; b = 15,636 Fod.
17. 70°; 7,2795 Fod; 21,283 Fod.
18. 89° 44′; 95396 Fod; 95398 Fod.
19. 45°; 45°; $\sqrt{17}$ Fod.
20. 18° 26′ 6″; 71° 33′ 54″; 42,555 Fod.
21. 1) 9288,6; 4) 198,98; 7) 79,623; 10) 60,874; 13) 165; 19) 8,5 Kvadratfod.
22. 35° 44′ 18″; 2,0375 Fod; 136,76 Kf.
23. Siden = 0,86776; Arealet = 2,73637.
24. Siden = 0,4022 Fod; største Radius = 0,58798 Fod; mindste Radius = 0,55253 Fod.
25. 1° 54′ 36″.
26. C = 33° 47′; a = 19,219 Fod; b = 29,195 Fod; T = 150,66 Kf.
27. C = 152° 32′ 33″; b = 10,432 Fod; c = 19,559 Fod; T = 23,332 Kf.
28. A = 53° 7′ 48″; B = 59° 29′ 22″; C = 67° 22′ 48″; T = 84 Kf.
29. A = 10° 34′; B = 5° 34′; C = 164° 52′; T = 2,798 Kf.
30. B = 18° 24′ 39″; C = 36° 18′ 43″; a = 41,357 Fod; T = 195,93 Kf.
31. A = 80° 54′ 26″; C = 85° 57′ 46″; b = 22,773 Fod; T = 1124,3 Kf.
32. $\begin{cases} B_1 = 69^\circ 43'; \; C_1 = 61^\circ 39' 31''; \; c_1 = 375{,}33 \text{ F.}; \; T_1 = 56329 \text{ Kf.} \\ B_2 = 110^\circ 17'; \; C_2 = 21^\circ 5' 31''; \; c_2 = 153{,}46 \text{ F.}; \; T_2 = 23032 \text{ Kf.} \end{cases}$
33. B = 51° 58′ 24″; C = 28° 1′ 36″; c = 9,4338 F.; T = 73,465 Kf.
34. Trekanten er umulig.
35. A = 82° 49′ 10″; B = 97° 10′ 50″; C = 34° 13′ 44″; D = 55° 46′ 16″; 104,18 Kf.
36. 115,89 Fod.

Erklæring,

afgiven af Fr. Dahl 2. April 1876.

Paa Foranledning af det høie Ministerium for Kirke- og Underviisnings-Væsenet har Sorø Amts Skoleraad afæsket mig en Erklæring om de hos os fremkomne, en Forbindelse mellem Planerne for den lærde Skole og for Almueskolen tilsigtende Forslag, der have fremkaldt et ministerielt Skrift, som i Korthed sammenfatter de vigtigste hjemlige Udtalelser om det nævnte Emne.

Da jeg, saavidt jeg veed, er den Første, der hos os har været Talsmand for den Tanke at tilveiebringe en organisk Forbindelse mellem Almueskolens og den lærde Skoles Opgaver — idet jeg har foreslaaet en Ordning af Skolevæsenet med en Barneskole eller Forskole for 6—10 Aars Alderen, en Borgerskole eller Almeenskole for 10—14 Aars Alderen og en Lærdskole for 14—18 Aars Alderen, dog saaledes, at disse Skoler ikke sammensmeltes i een Anstalt, men, hver for sig bestaaende, sammenknyttes af en Læreplan, der gjør det muligt for enhver af de nævnte høiere Alders-klassers Skoler umiddelbart at bygge videre paa det i den foregaaende Aldersklasses Skole vundne Dannelsestrin — turde jeg maaskee kunne betragte de af mig offentliggjorte Udtalelser og Begrundelser angaaende dette Spørgsmaal som min egentlige Erklæring. Jeg skal da først nævne mine to Pjecer: „I Skolesagen“ (1870), samt et af Overlærer Joh. Hoffmann og mig udgivet Skrift: „Grundtræk til en Omordning af Borger- og Almue-Skolevæsenet“ (1873), og tillade mig tillige

Fig. 1.

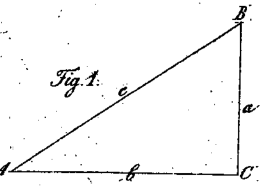


Fig. 2.

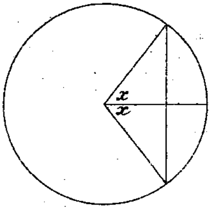


Fig. 3.

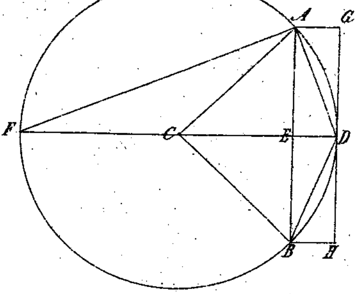


Fig. 4.

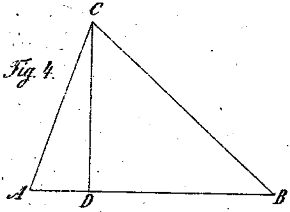


Fig. 5.

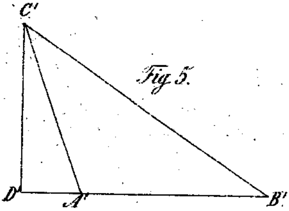


Fig. 6.

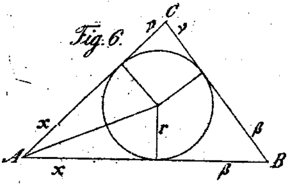
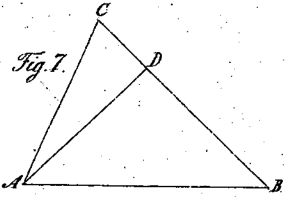


Fig. 7.



Slagelse Postens Stentr.