Aritmetik og Algebra

til Skolebrug

af

Julius Petersen.

II. Irrationale Størrelser.

III. Tillæg.

Syvende Udgave.

Kjøbenhavn.

Karl Schønbergs Boghandel.

1901.

II. Irrationale Størrelser.

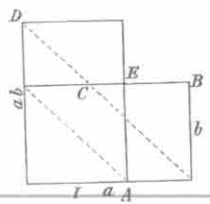
1. Vi have i Indledningen omtalt, at der paa et Liniestykke, hvor lidet det end er, findes uendelig mange Punkter, der ikke kunne benævnes ved rationale Tal, og at vi kalde de Benævnelser, vi indføre for dem, efterhaanden som vi træffe dem ved Løsning af Opgaver, irrationale Tal. For at indordne disse i Rækken af rationale maa vi angive Regnemetoder, der føre til dem ved en Indsnævring, der kan fortsættes saa længe, som man vil. I Reglen sker denne Indsnævring ved, at man efterhaanden bestemmer flere og flere Decimaler; for hver saadan, man føjer til, bliver Spillerummet, det vil sige det Liniestykke, paa hvilket Punktet maa ligge, ti Gange mindre. I Praksis standser man paa et vist Punkt af Indsnævringen, men man har da i Virkeligheden kun en Tilnærmelsesværdi til det irrationale Tal. Spillerummet kaldes *Fejlgrænsen*. Har man saaledes for et irrationalt Tal fundet 0,517, da er dette Tal for lille, men 0,518 for stort; i begge Tilfælde er Fejlen mindre end Fejlgrænsen 0,001. Undertiden kan man sige, at man virkelig har udtrykt det irrationale Tal ved en uendelig Decimalbrøk, nemlig hvis man kan finde en simpel Lov.

efter hvilken Cifrene gaa frem; denne Lov kan ikke være den, at den samme Periode af Cifre gentages, thi er dette Tilfældet, vide vi, at Tallet er rationalt. (I. 117.)

Da vi i det foregaaende stadig have forudsat, at de Tal, vi havde at gøre med, vare rationale, maa vi undersøge, om de Definitioner, vi have opstillet, og de Sætninger, vi have bevist, ogsaa gælde, naar Tallene ere irrationale. Heldigvis behøve vi ikke at gentage hele Udviklingen, idet det er tilstrækkeligt at undersøge de Sætninger, af hvilke de øvrige kunne udledes ved Slutninger, der gælde i alle Tilfælde.

Addition og Subtraktion volde os ingen Vanskeligheder, thi alt, hvad vi her støttede Udviklingen paa, var den Egenskab ved den rette Linie, at den kunde deles og Stykkerne sammensættes i en vilkaarlig Orden, uden at Liniens Længde forandredes. Da dette gælder, hvad enten Stykkernes Længder ere rationale eller irrationale, ville alle de Sætninger, vi have opstillet ved Addition og Subtraktion, ogsaa gælde om irrationale Tal.

Multiplikation volder større Vanskelighed; her er der kun Mening i den opstillede Definition paa Multiplikation, naar Tallene ere rationale; vi maa derfor opstille en Definition paa Multiplikation af irrationale Tal, og denne maa være en saadan, som indbefatter den tidligere Definition.



Idet vi repræsenterer ethvert Tal, rationalt eller irrationalt, ved et Liniestykke, ville vi da nu ved Produktet af to Tal a og b forstaa Arealet af det Rektangel, hvis to Sider ere a og b. For at indordne dette Areal i Rækken af vore Tal, tænke vi os Rektanglet omformet til et andet med samme Areal, og hvis ene Side er Enheden*); den anden Side er da det Liniestykke, der repræsenterer Produktet ab.

Den opstillede Definition indbefatter den, vi tidligere have givet under Forudsætning af hel Multiplikator, hvad man straks ser, naar man deler Multiplikator i dens Enheder og trækker Paralleler med Multiplikanden. En brudden Multiplikator kan opfattes som hel med en mindre Enhed. Af Definitionen følger straks, at $ab = ba$ samt at $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$ og $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$. Beviset for, at Faktorernes Orden er ligegyldig, krævede imidlertid (I. 29.) foruden Ligningen $ab = ba$ ogsaa Ligningen $cab = cba$, der ikke kan udledes af den anden; vi have imidlertid forudsat, at Enheden er vilkaarlig og kunne derfor vælge c til Enhed, hvorved Sætningens Rigtighed straks ses enten af en Figur eller ved Anvendelse af Ligningerne $1 \,.\, a = a$; $1 \,.\, b = b$.

Hvis man deler a i Stykkerne a_1, a_2 ... og gennem Delingspunkterne trækker Linier, parallele med b, faar man Rektanglet delt i andre Rektangler og derved

$$(a_1 + a_2 + \ldots) b = a_1 b + a_2 b + \ldots,$$

der viser os, at Sætningen om flerleddede Størrelsers Multiplikation ogsaa gælder for irrationale Tal.

Andre end de nu beviste Sætninger behøver man ikke for at bevise alle Sætningerne i Multiplikation, Divisjon og Potensopløftning, hvor vi dog foreløbig forudsætte, at Eksponenterne ere hele Tal. Vi kunne saaledes i det følgende benytte alt, hvad vi tidligere have

*) Beviset for den paa Figuren antydede Konstruktions Rigtighed forudsætter kun Kongruensbegrebet. ($\square AB = \square AC = \square AD = \square DE$.)

lært, uden Hensyn til, om Størrelserne ere rationale eller irrationale.

Hvergang en Opgave fører os til irrationale Størrelser, som vi ikke tidligere have betragtet, indføre vi ny Betegnelser for dem og søge at finde de Regler, som gælde for Regning med disse ny Betegnelser. For hver ny Klasse af irrationale Størrelser maa vi angive Metoder til ved Indsnævring at bestemme deres Plads i Talrækken, det vil sige til at beregne dem med saa mange Decimaler, som vi ville.

Til den første Klasse af irrationale Størrelser føres vi ved Ligningen

$$x^m = a,$$

hvor a og m ere givne; den kan kun undtagelsesvis løses ved rationale Størrelser; de ved Ligningen bestemte irrationale Størrelser kaldes Rodstørrelser.

Rod.

2. *Det Tal, som opløftet til m^{te} Potens giver a, kalde vi den m^{te} Rod af a*; det betegnes

$$\sqrt[m]{a};$$

m *kaldes Rodeksponenten, a Potensen.*

Vi have altsaa

$$b = \sqrt[m]{a}, \text{ dersom } b^m = a.$$

Af disse to Ligninger faar man

$$\sqrt[m]{b^m} = b; \quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Potensopløftning og Roduddragning kaldes derfor modsatte Regningsarter.

Af Definitionen følger

$$\sqrt[-m]{a} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}, \text{ thi } \left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Rodeksponenten 2 underforstaas; den 2^{den} Rod kaldes *Kvadratrod*, den 3^{dje} Rod kaldes *Kubikrod.*

Eks. $\sqrt[3]{8} = 2$, thi $2^3 = 8$; $\sqrt[m]{1} = 1$, thi $1^m = 1$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{256} = 4$; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[-2]{4} = \frac{1}{2}$;

$$\sqrt{a^2b^2} = ab; \quad \sqrt[3]{a^3 : b^3} = a : b; \quad \sqrt[4]{a^8b^4} = a^2b;$$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b; \quad \sqrt[3]{a^3 - 3a^2 + 3a - 1} = a - 1.$$

3. Opløfter man de hele Tal til m^{te} Potens, faar man *Potenstallene* af m^{te} Grad; Potenstallene af anden (1, 4, 9 ....), tredje (1, 8, 27 ....) og fjerde Grad (1, 16, 81 ....) kaldes henholdsvis *Kvadrattal, Kubiktal* og *Bikvadrattal.* Den m^{te} Rod af et Potenstal af m^{te} Grad er et helt Tal, medens den m^{te} Rod af ethvert andet Tal ikke kan være et helt Tal. En *saadan Rod kan heller ikke være en Brøk*, thi en Potens af en uforkortelig Brøk er atter en uforkortelig Brøk (I, 100). Saaledes kan f. Eks. $\sqrt{2}$ ikke være noget helt Tal, da 2 ikke er et Kvadrattal; da nu $\sqrt{2}$ heller ikke kan være en Brøk, kan man ikke finde noget Tal, hvis Kvadrat nøjagtig er 2, men man kan finde et Tal, hvis Kvadrats Forskel fra 2 er mindre end enhver given, selv nok saa lille Størrelse. Saaledes er $1{,}4^2 < 2$, men $1{,}5^2 > 2$; $1{,}41^2 < 2$, men $1{,}42^2 > 2$; $1{,}414^2 < 2$, men $1{,}415^2 > 2$ o. s. v. For hver Decimal, man føjer til, bliver Kvadratets Forskel fra 2 mindre og mindre, og man kan ved en Metode, vi senere lære, drive Tilnærmelsen (Indsnævringen) saa vidt, som man vil. Har et Kvadrat

Siden 1, vil Diagonalen ifølge Pythagoras Sætning være $\sqrt{2}$.

Rodstørrelser kaldes *ensbenævnte*, naar de have samme Rodeksponent; de kaldes *ensartede*, naar de desuden have samme Tal under Rodtegnet.

Vi skulle nu bevise de vigtigste Sætninger, som gælde om Regning med Rodstørrelser.

4. *Man kan uddrage en Rod af et Produkt ved at uddrage den af hver Faktor for sig.*

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b}, \text{ thi } \left(\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \left(\sqrt[m]{b}\right)^m = ab. \quad (1)$$

Heraf følger, at *en Faktor kan flyttes uden for et Rodtegn, naar man først uddrager Roden af den*, og omvendt, at en Faktor kan flyttes ind under Rodtegnet, naar den først opløftes til Potensen; man har nemlig

$$\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \,.\, \sqrt[m]{b} = a\sqrt[m]{b}.$$

For at flytte de rationale Faktorer uden for Rodtegnet opløser man Potensen i Primfaktorer, dersom man ikke straks kan se de Faktorer, af hvilke Roden kan uddrages.

Eks. $\sqrt{8} = \sqrt{4\,.\,2} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$;

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\,.\,2} = 3\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt{2527} = \sqrt{19^2\,.\,7} = 19\sqrt{7};$$

$$\sqrt[m]{a^{m+1} b^{m+2}} = ab\sqrt[m]{ab^2}; \quad \sqrt{a^2b^3c^4d^5} = abc^2d^2\sqrt{bd};$$

$$\sqrt{3a^2 - 6ab + 3b^2} = (a-b)\sqrt{3}. \quad (a > b)$$

(4)
Af (1) følger endvidere, *at man multiplicerer to ensbenævnte Rodstørrelser ved at multiplicere deres Potenser, medens Eksponenten bliver uforandret.*

Eks. $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$; $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}} = 1$;

$$(a + \sqrt{b})\,(a - \sqrt{b}) = a^2 - b;$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab};$$

$$\sqrt[m]{a^{m-1}b} \,.\, \sqrt[m]{ab^{m-1}} = \sqrt[m]{a^m b^m} = ab;$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}\,\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1;$$

$$(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\,(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = 30 + 13\sqrt{6};$$

$$(\sqrt{5} + 1)\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2\,(6 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \sqrt{(6 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})} = 4.$$

5. *Man kan uddrage en Rod af en Brøk ved at uddrage Roden af Tæller for sig og Nævner for sig.*

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad \text{thi} \quad \left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{a}{b}. \quad (2)$$

Oftest multiplicerer man før Roduddragningen Brøkens Tæller og Nævner med et saadant Tal, at man kan uddrage Roden af Nævneren. Man ser desuden af (2), at *ensbenævnte Rodstørrelser divideres i hinanden ved, at deres Potenser divideres.*

Eks. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4\,.\,3}{3^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}; \quad \sqrt{5\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\frac{16\,.\,3}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{3};$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{3}{81}} = \frac{\sqrt{3}}{9}; \quad \frac{\sqrt[m]{a^4 b^{m+1}}}{\sqrt[m]{a^3 b}} = b\sqrt[m]{a}.$$

6. *Skal man udføre en Potensopløftning og en Roduddragning efter hinanden, er Ordnen ligegyldig.*

$$\sqrt[m]{a^p} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^p, \text{ thi } \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^p\right)^m = \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right)^p = a^p. \quad (3)$$

Eks. $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5$; $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$.

7. Man uddrager en Rod af en Rod ved at multiplicere Eksponenterne; disses Orden er altsaa vilkaarlig. Omvendt kan en Roduddragning erstattes ved flere andre, naar Eksponenten er et deleligt Tal.

$$\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}, \text{ thi } \left(\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}\right)^{mp} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}\right)^{m}\right)^{p} = a. \quad (4)$$

Eks. $\sqrt[8]{256} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2;$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a};\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}.$$

8. Potens- og Rodeksponent kunne divideres og multipliceres med samme Tal.

$$\sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[p]{a^q};\ \text{thi } \left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{mp} = \left(\left(\sqrt[p]{a^q}\right)^{p}\right)^{m} = a^{mq}. \quad (5)$$

Af 6, 7 og 8 følger, at dersom man skal udføre flere Potensopløftninger og Roduddragninger efter hinanden, er Ordnen ligegyldig; man kan forkorte Potenseksponenterne mod Rodeksponenterne, som om de vare Tællere og Nævnere i Brøker, der skulde multipliceres; er dette gjort, multipliceres alle Rodeksponenterne for sig og alle Potenseksponenterne for sig.

Heraf følger da, at man kan uddrage en Rod af en Potens ved at dividere Rodeksponenten i Potenseksponenten, dersom Divisjonen gaar op.

Eks. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2};\ \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[9]{a^3} = \sqrt[12]{a^4}$, osv.

$$\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^4}}\right)^{10} = \sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a};\quad \sqrt[6q]{(a^{3p})^q} = \sqrt[6]{a^{3p}} = \sqrt{a^p}.$$

9. **Addition og Subtraktion.** Dersom Rodstørrelser ere ensartede, adderes og subtraheres de som andre ensartede Størrelser. Staar der forskellige Tal under Rodtegnene, kan Additionen eller Subtraktionen kun udføres, dersom Rodstørrelserne vise sig at være ensartede, naar de rationale Faktorer ere flyttede udenfor.

Eks. $5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3};\ \sqrt{8} + \sqrt{50} = 7\sqrt{2};$

$$3\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + \sqrt{147} = 14\sqrt{3};$$

$$\sqrt[3]{16} - \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{54} = \tfrac{17}{6}\sqrt[3]{2};$$

$$\sqrt{a^2m} + \sqrt{b^2m} - \sqrt{a^2m - 2abm + b^2m} = 2b\sqrt{m} \quad (a > b);$$

$$\sqrt{5\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{8\tfrac{1}{3}} + \sqrt{12} - 2\sqrt{\tfrac{1}{75}} + 5\sqrt{2\tfrac{1}{12}} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{16.3}}{3} - \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{25.3}}{3} + 2\sqrt{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{5.3} + 5\frac{\sqrt{25.3}}{2.3} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}\left(\tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{6} + 2 - \tfrac{2}{15} + \tfrac{25}{6} - 1\right) = \tfrac{83}{15}\sqrt{3}.$$

10. **Multiplikation og Divisjon.** Man skaffer Rodstørrelserne samme Rodeksponent og kan da anvende Reglerne i 4 og 5. Til fælles Rodeksponent tages Rodeksponenternes mindste fælles Mangefold; i dette divideres hver enkelt Rodeksponent, og med Kvotienten multipliceres Rod- og Potenseksponent. Man maa erindre, at hvor der ingen Potenseksponent staar, er 1 underforstaaet, medens 2 er underforstaaet, hvor der ingen Rodeksponent staar.

Eks. $\sqrt[3]{a}.\sqrt{a}:\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^2}.\sqrt[6]{a^3}:\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{1} = 1;$

$$\sqrt[3]{a^2b}:\sqrt[4]{ab^2}.\sqrt[6]{a^2b} = \sqrt[12]{a^8b^4}:\sqrt[12]{a^3b^6}.\sqrt[12]{a^4b^2} = \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[4]{a^3};$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 8 + 4\sqrt{3};\quad (-1 + \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5};$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} = \sqrt[6]{(2 + \sqrt{3})^3(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{2 + \sqrt{3}};$$

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) = 12(2 + \sqrt{6});$$

$$(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) = 1.$$

11. **Bortskaffelse af irrationale Nævnere.** Man kan altid skaffe en Brøk, i hvis Tæller og Nævner findes Rodstørrelser, rational Nævner. Her ville vi dog kun vise dette for to Tilfældes Vedkommende.

1) Nævneren har Formen $a\sqrt[n]{b}$; man multiplicerer da Brøkens Tæller og Nævner med $\sqrt[n]{b^{n-1}}$. Inde-

holder b Faktorer i højere end første Potens, multiplicerer man kun med den n^{te} Rod af et saadant Tal, at alle Faktorerne faa Potenseksponenter, der ere delelige med n.

$$\text{Eks.}\quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2};\quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3};\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{6}}{15}.$$

2) Nævneren indeholder kun Kvadratrødder. Er Nævneren $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, multipliceres Tæller og Nævner med $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Er Nævneren $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, multipliceres med $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, hvorved den ny Nævner bliver $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - c = a+b-c+2\sqrt{ab}$. Multipliceres nu Tæller og Nævner med $a+b-c-2\sqrt{ab}$, faar man rational Nævner. Har Nævneren flere Led, kan man gaa frem paa samme Maade, idet man hvergang bortskaffer een Rodstørrelse; man maa blot erindre, at man kun skal udføre Multiplikation af Rodstørrelser, naar Produktet bliver rationalt, da man ellers indfører ny Rodstørrelser; skal man multiplicere $\sqrt{a}$ med $\sqrt{b}$, skriver man altsaa $\sqrt{a}\sqrt{b}$ og ikke $\sqrt{ab}$. Dersom den Rodstørrelse, som man vil bortskaffe, findes som Faktor i flere Led, sættes den uden for en Parentes.

$$\text{Eks.}\quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b};$$

$$\frac{2\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{2+3\sqrt{6}} = \frac{-50\sqrt{3}}{-50} = \sqrt{3};$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{11+2\sqrt{6}-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-6}$$

$$= \frac{35+24\sqrt{6}-28\sqrt{3}-30\sqrt{2}}{23};$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})},$$

hvor Tæller og Nævner multipliceres med

$$1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}(1+\sqrt{2}),$$

hvorved den ny Nævner bliver $-27-20\sqrt{2}$, o. s. v.

12. **Rodtegns Bortfjærnelse af Ligninger.** Dersom en Ligning indeholder en enkelt Rodstørrelse, isoleres denne, og man opløfter de to lige store Størrelser til den samme Potens. Er der flere Kvadratrødder, isoleres en af disse, og man kvadrerer paa begge Sider, idet man gaar frem som ved Bortskaffelse af irrationale Nævnere for ikke at føre ny Rodstørrelser ind. Ere Rodstørrelserne bortskaffede, siges Ligningen at være bragt paa rational Form. Dette kan altid gøres, hvor mange Rodstørrelser der end findes, men vi ville her ikke betragte andre Tilfælde end de nævnte. Bekendte Rodstørrelser bortskaffes ikke af Ligningen.

$$\text{Eks.}\quad \sqrt{x-4}+\sqrt{2}=1;\quad \sqrt{x-4}=1-\sqrt{2};$$

$$x-4=3-2\sqrt{2};\quad x=7-2\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}+\sqrt{x-\tfrac{1}{2}}=2;$$

$$x+\tfrac{1}{2}=\left(2-\sqrt{x-\tfrac{1}{2}}\right)^2=x+\tfrac{7}{2}-4\sqrt{x-\tfrac{1}{2}};$$

$$4\sqrt{x-\tfrac{1}{2}}=3;\quad x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{9}{16}=\tfrac{17}{16}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $5\sqrt{8}-\sqrt{12}+3\sqrt{2}-2\sqrt{75}+\sqrt{200}-3\sqrt{147}-\sqrt{48}$.

2. $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{32}:\sqrt[4]{8}:\sqrt[12]{2}$.

3. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2-(2-\sqrt{3})^2$.

4. $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}}$

5. $\frac{2}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{12\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{8} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{18}}$.

6. $\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{\frac{1}{72}} - \sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

7. $\sqrt[m]{a^{m+3}} - b\sqrt[m]{a^{2m+3}} + c\sqrt[m]{a^{pm+3}}$.

8. $\sqrt[4]{a^{13}b^{15}} - 2\sqrt[4]{a^9b^3} - 3\sqrt[4]{ab^7} + ab\sqrt[4]{a^5b^3}$.

9. $(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})$.

10. $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} : \sqrt{a+b} \,.\, \sqrt{2a-2b} \,.\, \sqrt{\frac{9}{2}}$.

11. $\sqrt{2a^2+4ab+2b^2} - \sqrt{2a^2-4ab+2b^2}$.

12. $\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5$. Find x.

13. $(2-\sqrt{3}) : (7-4\sqrt{3})(3+\sqrt{3}) : (3-\sqrt{3})$.

14. $\left[\sqrt{\frac{a^2b}{a^3b^{-2}}}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2}} : \sqrt[6]{\frac{(a^2b)^2}{ab^{-1}}}\right]^3 : \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$.

15. $\frac{2+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$. 16. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

17. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^3}$.

18. $\sqrt{4x^2+x+4} + 2x = 5$. Find x.

19. Hvad er $k\sqrt{4-\left(\frac{k}{r}\right)^2}$, naar $k = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$?

20. $(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}})^2$.

21. $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$.

22. $\sqrt{5x+10} = 2 + \sqrt{5x}$.

23. $\frac{3x-1}{\sqrt{3x}+1} = 1 + \frac{\sqrt{3x}-1}{2}$.

24. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$.

25. $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}$.

26. $(\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[4]{xy^3} + \sqrt[5]{xy^4})(\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[5]{x^4y})$.

27. $\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+5)}{\sqrt{15}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)}$.

28. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-5} = 9$.

29. $\sqrt{3+\sqrt{5}} : \sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{7+3\sqrt{15}}$.

30. $(a+\sqrt{a^2-b})^2(a-\sqrt{a^2-b})^2$.

Brudne Eksponenter.

13. Efter vor Definition af Potens har $a^{\frac{p}{q}}$ ingen Betydning, undtagen naar q gaar op i p. I dette Tilfælde er

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}. \tag{4}$$

Vi vedtage nu i alle Tilfælde at lade $a^{\frac{p}{q}}$ betyde $\sqrt[q]{a^p}$; Rodstørrelser kunne derved skrives som Potenser, og vi skulle vise, at man kan regne med disse Potenser efter de samme Regler, som gælde, naar Eksponenterne ere hele Tal:

1. $a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} . \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = {}^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$.

2. $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

3. $(ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^pb^p} = \sqrt[q]{a^p}\sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} . b^{\frac{p}{q}}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.

5. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[qs]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}}$.

Vort Potensbegreb er herved saaledes udvidet, at Eksponenten kan være et hvilket som helst helt eller bruddent, positivt eller negativt Tal. Eksponenten kan da ogsaa være irrational, idet vi i saa Fald ved Potensen forstaa den Størrelse, til hvilken vi nærme os mere og mere, naar vi for Eksponenten sætte Brøker, der nærme sig mere og mere til den irrationale Eksponents Værdi.

Eks. $2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{6}} = 2$; $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2};\quad \sqrt[\infty]{a} = a^0 = 1;\quad \sqrt[\frac{p}{q}]{a} = a^{\frac{q}{p}}.$$

Kvadratrodsuddragning.

14. Vi skulle nu vise, hvorledes man kan finde Kvadratroden af et helt Tal med saa stor Nøjagtighed, som man vil; vi ville først vise, hvorledes den findes saa nøjagtig, at Fejlen er mindre end 1 (med Fejlgrænsen 1). For et Tal med et eller to Cifre kan Kvadratroden straks bestemmes med den angivne Nøjagtighed, idet man kender de første Kvadrattal:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ....

15. **Kvadratroden af Tal med 3 eller 4 Cifre.** Disse Tal ligge mellem 10^2 og 10^4; det søgte Tal maa derfor ligge mellem 10 og 10^2 og er altsaa et tocifret Tal; vi ville betegne Cifrene ved a og b; Tallet er da $10\,a + b$. Dersom det givne Tal er N, maa man have

$$N = (10\;a + b)^2 + R,$$

hvor R betegner R e s t e n, det vil sige Forskellen mellem det givne Tal og det nærmest lavere Kvadrattal. Ligningen

$$N = 100a^2 + 20\,ab + b^2 + R$$

viser nu, at man maa have

$$N > 100\,a^2,\quad \text{hvoraf } a < \sqrt{\frac{N}{100}}.$$

Da a er et helt Tal, kan man for $N:100$ tage det Tal, som man faar ved at bortskære det givne Tals Tiere og Enere; da man derved faar et Tal med et eller to Cifre, er a bekendt. Er saaledes $N = 536$, bliver $a < \sqrt{5}$, altsaa $a = 2$; er $N = 8738$, bliver $a < \sqrt{87}$, altsaa $a = 9$.

Naar a er fundet, faar man

$$\frac{N - 100\,a^2}{20\,a} = b + \frac{b^2 + R}{20\,a}.$$

Da her den sidste Brøk oftest er mindre end 1, kan man med Tilnærmelse sætte

$$\frac{N - 100\,a^2}{20\,a} = b;$$

er b derved fundet, findes Resten, idet man fra $N - 100\,a^2$ subtraherer $20\,ab + b^2$ eller $(20\,a + b)\,b$. Dersom man derved faar en negativ Rest, viser dette, at den ovenfor bortkastede Brøk har været større end 1. Vi have derfor taget Værdien af b for høj og maa nu prøve med en Værdi for b, der er 1 lavere, og saaledes videre, til vi faa en positiv Rest.

For at vise, hvorledes Regningerne skrives, ville vi beregne $\sqrt{8927}$.

$$\begin{array}{rrcll}
 & 89|27 & = & 100\,a^2 + 20\,ab + b^2 + R & a = 9 \\
 & 81 & = & 100\,a^2 & \\ \hline
184) & 8\,27 & = & 20\,ab + b^2 + R & \\
 & 7\,36 & = & (20\,a + b)\,b & \\
 & 91 & = & R &
\end{array}$$

Først finde vi $a = 9$. Efter $81 = 9^2$ er underforstaaet 2 Nuller. Foran 827 $(N - 100a^2)$ skrive vi $2 . a = 18$ og finde $b = 4$ ved at dividere 18 i 82 (180 i 827); det fundne Ciffer 4 føjes efter 18, og 184 $(20a + b)$ multipliceres med 4 (b); vi faa derved 736 $(20ab + b^2)$ og finde Resten 91 ved at subtrahere 736 fra 827. Man har saaledes $\sqrt{8927} = 94$, hvor Fejlen er mindre end 1, eller nøjagtigt $8927 = 94^2 + 91$.

16. **Flercifrede Tal.** Dersom Tallet har $2n - 1$ eller $2n$ Cifre, ligger det mellem 10^{2n-2} og 10^{2n}; dets Kvadratrod ligger da mellem 10^{n-1} og 10^n og skrives derfor med n Cifre. Inddele vi Tallet fra højre mod venstre i Klasser med to Cifre i hver Klasse (den første Klasse til venstre med et eller to Cifre), faar Kvadratroden derfor eet Ciffer for hver Klasse.

Kvadratroden kan ogsaa i dette Tilfælde skrives som $10a + b$, men a er da selv et flercifret Tal, der findes ved at man uddrager Kvadratroden af Tallet, efter at den sidste Klasse er bortskaaren. Kender man denne Kvadratrod, findes b og R som før; kender man den ikke, sættes $a = 10a_1 + b_1$, en Klasse bortskæres, og a_1 findes, idet man uddrager Kvadratroden af det Tal, der nu staar, o. s. v. Fortsætter man paa denne Maade, kommer man tilsidst til et a, der har eet Ciffer, og som findes, idet man tager Kvadratroden af den første Klasse; er dette a fundet, findes det tilsvarende b som ovenfor vist, og man kender nu to Cifre, altsaa det næste a; derved findes det næste b, o. s. v. Hvergang man har subtraheret, trækkes den næste Klasse ned; ved Divisjon med det dobbelte af det fundne Tal findes nu et Ciffer til, o. s. v.

Eks. $\sqrt{71|23|71|56|12} = 84402.$

$$\begin{array}{rr}
 & 64 \\
164) & 723 \\
 & 656 \\
1684) & 6771 \\
 & 6736 \\
168802) & 355612 \\
 & 337604 \\
 & 18008 = R.
\end{array}$$

Efter at have subtraheret $8^2 = 64$ og trukket den næste Klasse ned, skrive vi $2 . 8 = 16$ foran 723. Det næste Ciffer er da $72 : 16 = 4$, der skrives efter 16, samt i Resultatet. 164 multipliceres med 4 og giver 656; man subtraherer, trækker ned og skriver $2 . 84 = 168$ foran 6771. Det næste Ciffer er $67 : 16 = 4$, der skrives i Resultatet og efter 168, o. s. v.

Dersom et Ciffer bliver 0, skrives dette blot i Resultatet, og man trækker den næste Klasse ned.

17. **Restens Størrelse.** Dersom man har fundet $\sqrt{N} = a$ (Rest R), maa man have

$$N = a^2 + R; \quad N < (a+1)^2.$$

Heraf følger $\qquad R < 2a + 1,$

der viser, at den størst mulige Rest er det dobbelte af det fundne Tal.

For at undersøge om den søgte Rod ligger nærmest ved a eller ved $a + 1$, prøver man, om $a + \frac{1}{2}$ er større eller mindre end Roden. Nu er

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4}; \quad N = a^2 + R.$$

$a + \frac{1}{2}$ er derfor større end Roden, dersom $R < a + \frac{1}{4}$, mindre end Roden, dersom $R > a + \frac{1}{4}$. Man forhøjer derfor det sidst fundne Ciffer med en Enhed, dersom

Resten er større end den fundne Rod; man faar derved en Rod, der er for stor, men Fejlen er mindre end $\frac{1}{2}$.

Eks. $\sqrt{6115} = 78$ (R. 31); $\sqrt{611524} = 782$;
$\sqrt{956484} = 978$; $\sqrt{57198969} = 7563$;
$\sqrt{1607448649} = 40093$; $\sqrt{236144689} = 15367$;
$\sqrt[4]{429981696} = 144$; $\sqrt[8]{282429536481} = 27$.

18. **Kvadratroden med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$.** Dersom man vil uddrage Kvadratroden af et Tal N saa nøjagtigt, at Fejlen er mindre end en vis Brøk $\frac{1}{p}\left(\text{med Fejlgrænsen } \frac{1}{p}\right)$, uddrager man Kvadratroden af Np^2 og dividerer derpaa Resultatet med p. Man har nemlig

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{Np^2}}{p};$$

uddrages $\sqrt{Np^2}$, finder man et helt Tal a, saa at

$$a + 1 > \sqrt{Np^2} > a,$$

$$\frac{a+1}{p} > \sqrt{N} > \frac{a}{p},$$

hvorved $\sqrt{N}$ er fundet saa nøjagtigt, at der ikke mangler $\frac{1}{p}$.

Skal man finde $\sqrt{N}$ med n Decimaler, sættes $p = 10^n$; man faar da

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \cdot 10^{2n}}}{10^n},$$

der viser, at man til Tallet skal føje 2 Nuller for hver Decimal, man ønsker, og at de n Cifre, der findes ved Hjælp af de tilføjede Nuller, ere Decimaler.

Eks. $\sqrt{2} = 1,414\ldots$; $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$;
$\sqrt{11}$ (F. $\frac{1}{11}$) $= \frac{36}{11}$; $\sqrt{71}$ (F. $\frac{1}{19}$) $= \frac{160}{19}$.

19. **Kvadratrodsuddragning af Brøker.** Man uddrager Roden af Tæller for sig og Nævner for sig efter først at have skrevet Brøken saaledes, at Nævneren er et Kvadrattal. Man kan ogsaa forvandle Brøken til en Decimalbrøk; for at uddrage Kvadratroden af en saadan inddeler man i Klasser fra Kommaet til begge Sider, idet man tilføjer et Nul, dersom der er et ulige Antal Decimaler; man opnaar derved, at Brøkens Nævner bliver en Potens af 10 med lige Eksponent, og Kvadratroden heraf er atter en Potens af 10.

Er Brøken $0,0000\ldots ab\ldots$, bliver Resultatet $0,00\ldots c\ldots$ med et Nul efter Kommaet for hver Klasse af to Nuller i Tallet; det første Ciffer c af Roden, der ikke er Nul, (det første betydende Ciffer) findes da som Kvadratroden af den første Klasse af Tallet, der ikke bestaar af to Nuller, og man regner videre som ved hele Tal. Man har nemlig f. Eks.

$$\sqrt{0,00|05|60} = \frac{\sqrt{5,60}}{10^2} = \frac{2,3\ldots}{10^2} = 0,023\ldots$$

$$\text{Eks.}\quad \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0,774\ldots = \sqrt{0,6};$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1,732\ldots}{3} = 0,577\ldots = \sqrt{0,333333\ldots};$$

$$\sqrt{0,00789} = 0,0888\ldots;\ \sqrt{10\tfrac{3}{10}} = 3,21\ldots;\ \sqrt{\tfrac{5}{12}} = 0,645\ldots$$

20. **Kvadratrodsuddragning af Polynomier.** Dersom det ordnede Polynomium er N, maa det første Led af Roden være Kvadratroden af det første Led af N; de følgende Led findes da som ved Tal, kun med den Forskel, som følger af, at Leddene her ikke betegne Enere, Tiere o. s. v.; man faar altsaa

$$N = a^2 + 2ab + b^2 + R,$$

hvor a er det første Led af Roden, medens det næste bestemmes som første Led i Kvotienten

$$\frac{N - a^2}{2a}.$$

Eks. $\sqrt{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{array}{rl}
 & a^4 \\
2a^2 - 2ab) & -4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & -4a^3b + 4a^2b^2 \\
2a^2 - 4ab + b^2) & 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 & 0
\end{array}$$

Det dobbelte af a^2 er $2a^2$, der, divideret i $-4a^3b$, giver det næste Led $-2ab$, der lægges til $2a^2$, hvorpaa $2a^2 - 2ab$ multipliceres med $-2ab$, o. s. v.

Eks. $\sqrt{4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1} = 2x^2 - 3x + 1$;

$\sqrt{9x^6 - 6x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = 3x^3 - x^2 - x - 1$.

Kubikrodsuddragning.

21. De første Kubiktal ere

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729;

man finder derved $\sqrt[3]{N}$ med Fejlgrænsen 1, dersom $N < 1000$. Har N flere Cifre, faar $\sqrt[3]{N}$ saa mange Cifre, som man faar Klasser ved at inddele Tallet i saadanne fra højre mod venstre, med tre i hver Klasse; et Tal med $3n-2$, $3n-1$ eller $3n$ Cifre ligger nemlig mellem 10^{3n-3} og 10^{3n}; dets Kubikrod maa da ligge mellem 10^{n-1} og 10^n og følgelig skrives med n Cifre.

Sætte vi $\qquad \sqrt[3]{N} = 10a + b$,

faa vi $N = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + R$,

der viser, at a^3 indeholdes i Tallets Tusinder, og at a derfor findes, naar man uddrager Kubikroden af N efter at have bortskaaret de tre sidste Cifre.

Er a fundet, faar man

$$\frac{N - 1000a^3}{300a^2} = b + \frac{30ab^2 + b^3 + R}{300a^2},$$

hvor den sidste Brøk oftest er mindre end 1; man finder derfor b ved at dividere $N - 1000a^3$ med $300a^2$, men kan derved faa en for stor Værdi; man søger nu Resten ved at subtrahere $300a^2b + 30ab^2 + b^3$; faas Resten derved negativ, maa man tage b en Enhed mindre og saaledes videre, til man faar en positiv Rest. Dersom a selv har flere Cifre, maa disse findes efterhaanden, idet man sætter $a = 10a_1 + b_1$ og saaledes videre, til man kommer til et a, der findes som Kubikroden af den første Klasse. I Eksemplet er skrevet a og b for a_1 og b_1, da dette ikke kan misforstaas.

$$\begin{array}{lrl}
\text{Eks.} & \sqrt[3]{834|516|419} & = 941 \\
 & 729 & = 1000a^3 \\
 & 105516 & = 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + R \\
3a^2 = 243 & 972 & = 300a^2b \\
b = \dfrac{1055}{243} = 4 & 432 & = 30ab^2 \\
 & 64 & = b^3 \\
 & 101584 & \\
a = 94 & 3932419 & = 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + R \\
3a^2 = 26508 & 26508 & = 300a^2b \\
b = 1 & 2821 & = 30ab^2 + b^3 \\
 & 2653621 & \\
 & 1278798 & = R.
\end{array}$$

22. For at uddrage Kubikroden med Fejlgrænsen $\frac{1}{p}$ sætter man

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{Np^3}}{p}.$$

For at uddrage Kubikroden af en Decimalbrøk deler man denne i Klasser med tre Cifre i hver, idet man gaar ud fra Kommaet; ere de første Cifre 0,00 . . ., faar man et Nul i Resultatet for hver Klasse af Nuller i Tallet. Almindelige Brøker forvandles til Decimalbrøker eller skaffes Nævnere, der ere Kubiktal. Rigtigheden af de angivne Metoder indses som ved Kvadratrod.

For at uddrage Kubikroden af et Polynomium ordnes dette, og man gaar frem som ved Tal med den Forskel, som medføres deraf, at de enkelte Led ikke her ere Tiere, Hundreder o. s. v.

Man faar altsaa her

$$N = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + R.$$

Eks.

$$\sqrt[3]{a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1} = a^2 - 2a + 1$$

$$\begin{array}{l}
a^6 \\ \hline
-\,6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \quad b = \dfrac{-6a^5}{3a^4} \\
-\,6a^5 \\
\quad + 12a^4 \\
\qquad - 8a^3 \\ \hline
\qquad 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \quad b = \dfrac{3a^4}{3a^4} \\
\qquad 3a^4 - 12a^3 + 12a^2 \\
\qquad\qquad 3a^2 - 6a \\
\qquad\qquad\qquad + 1 \\ \hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Regning med tilnærmede Tal.

23. Vi have lært at bestemme en enkelt Kvadrat- eller Kubikrod med saa stor Nøjagtighed, som vi ønske;

dersom man har et sammensat Udtryk, hvis enkelte Dele kun kunne beregnes med Tilnærmelse, maa man imidlertid undersøge, hvilken Nøjagtighed man skal benytte i Mellemregningerne for at faa en vis opgiven Nøjagtighed i det endelige Resultat. Man regner i saadanne Opgaver næsten altid med Decimalbrøker, og vi ville derfor her forudsætte, at Opgaven er at bestemme et Udtryks Værdi saaledes, at et vist givet Antal Decimaler ere paalidelige.

Hvert Led maa beregnes med det samme Antal Decimaler. Dersom et Led har flere paalidelige Decimaler end et andet, har man nemlig ingen Nytte deraf, da de tilsvarende Decimaler i Resultatet maa blive upaalidelige.

Man beregner derfor, hvis Leddenes Antal ikke overstiger 10, hvert Led med een Decimal flere, end man ønsker i Resultatet; da Fejlen i hvert Led, udtrykt i den sidst søgte Decimals Enhed, er mindre end $\frac{1}{10}$, bliver Fejlen i den flerleddede Størrelse mindre end 1.

Dersom man skal beregne f. Eks. $5\sqrt{3}$ med Fejlgrænsen a, maa $\sqrt{3}$ beregnes med Fejlgrænsen $\frac{1}{5}a$, thi Fejlen bliver efter Roduddragningen multipliceret med 5. Skal man derimod beregne f. Eks. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ med Fejlgrænsen a, kan man nøjes med at beregne $\sqrt{3}$ med Fejlgrænsen $5a$.

Eks. $7\sqrt{3} - \frac{1}{12}\sqrt{5} + \frac{1}{100}\sqrt{7} - 208\sqrt{11}$

skal beregnes med fire rigtige Decimaler; hvert Led beregnes da med 5 Decimaler. $\sqrt{3}$ uddrages med 6 Decimaler, da $\sqrt{3}$ skal multipliceres med 7; $\sqrt{5}$ uddrages med 4 Decimaler, da Divisjonen med 12 gør den 5te Decimal paalidelig, $\sqrt{7}$ uddrages med 3, $\sqrt{11}$ med 8

Decimaler. I det endelige Resultat beholdes da kun 4 Decimaler.

24. Dersom man skal finde de n første Cifre af Kvadrat- eller Kubikroden af et tilnærmet Tal, behøver man kun at finde de $n+1$ første Cifre af dette og tilføje Nuller for de øvrige. Skal man f. Eks. finde de 4 første Cifre af $\sqrt{12+\sqrt{3}}$, finder man $\sqrt{3} = 1{,}732$ og bestemmer derpaa $\sqrt{13{,}732000}$; den Fejl, der kommer i Resten, er højst 999, men da det fundne Tal (uden Hensyn til Kommaet) bliver større, kan denne Fejl ikke foraarsage en Fejl af $\frac{1}{2}$ i det sidst fundne Ciffer. En lignende Betragtning kan anvendes ved Kubikrod.

Skal man finde et vist Antal Cifre af en Kvadratrod, kan man finde de sidste ved en Divisjon. Lad nemlig $\sqrt{N}$ være søgt og a være det fundne Tal, lad $a+x$ være den nøjagtige Værdi; vi have da

$$N = a^2 + 2ax + x^2 \text{ og } N = a^2 + R,$$

altsaa $$2ax + x^2 = R; \quad x = \frac{R}{2a} - \frac{x^2}{2a}.$$

Dersom vi altsaa til det fundne Tal addere $\frac{R}{2a}$, ville vi faa et Resultat, der er $\frac{x^2}{2a}$ for stort; vi kunne tænke os, at N er et helt Tal og $a = \sqrt{N}$ med Fejlgrænsen 1. x er da mindre end 1 og $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2a}$; vi kunne derfor paa denne Maade, naar vi have fundet n Cifre, finde n eller i alt Fald $n-1$ Cifre til ved den angivne Divisjon. Ved Kubikroden kan man paa lignende Maade indse, at man, ved til a at addere $\frac{R}{3a^2}$, kan finde n eller, under ugunstige Omstændigheder, mindst $n-2$ Cifre til.

Eks. $\sqrt{5643}$; $a = 75$; $R = 18$; $R:2a = 0{,}12$, altsaa $\sqrt{5643} = 75{,}12$; uddrages Roden paa almindelig Maade, faar man 75,1199.

Eksempler til Øvelse.

1. $\sqrt{11} - 3\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{19} - \sqrt{0{,}001}$ (3 Dec.)
2. $\sqrt{\frac{5}{8}} - \frac{1}{15}\sqrt{\frac{5}{6}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}$ (3 Dec.)
3. $\sqrt[3]{0{,}05} - \frac{1}{8}\sqrt{7} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (3 Dec.)
4. $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ (3 Dec.)
5. $\sqrt[3]{3+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$ (4 Dec.)

Reelle og imaginære Størrelser.

25. Vi have hidtil ved Roduddragning kun omtalt de numeriske Værdier; skal man uddrage en Rod af et Tal med Fortegn, bestemmes Resultatets numeriske Værdi paa den tidligere angivne Maade, medens dets Fortegn bestemmes efter følgende Regler:

Er Rodeksponenten et ulige Tal, faar Roden samme Fortegn som Potensen. Den sædvanlige Prøve viser, at Sætningen er rigtig.

Eks. $\sqrt[3]{-8} = -2$, thi $(-2)^3 = -8$;

$$\sqrt[2n-1]{-1} = -1; \quad \sqrt[5]{+32} = 2;$$

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9.$$

En lige Rod af et positivt Tal har to Værdier, idet Fortegnet baade kan være + og —, thi baade et positivt og et negativt Tal give positive Resultater, naar de opløftes til lige Potenser.

Eks. $\sqrt{16} = \pm 4$; $\sqrt[2n]{1} = \pm 1$;

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm(a - b).$$

Man har vedtaget at benytte brudne Eksponenter, naar man taler om begge Rodens Værdier, medens man, naar man benytter Rodtegn, kun mener den ene Værdi; i de anførte Eksempler bør altsaa skrives

$16^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$; $(a^2 - 2ab + b^2)^{\frac{1}{2}} = \pm(a - b)$ o. s. v.; derimod er

$$\sqrt{16} = 4;\quad -\sqrt{16} = -4;\quad \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \begin{cases} a - b \\ b - a \end{cases},$$

hvor man læser $a - b$, naar $a > b$, men $b - a$, naar $b > a$.

Man maa derfor, naar man benytter Rodtegn og mener begge Værdier, sætte dobbelt Fortegn for Rodstørrelsen.

En lige Rod af et negativt Tal er hverken positiv eller negativ, da man ikke ved Potensopløftning kan faa negativt Resultat, naar Eksponenten er et lige Tal.

26. Man kan udvide Talsystemet saaledes, at ogsaa en lige Rod af et negativt Tal faar Betydning. De ny Tal, der hverken ere positive eller negative, kaldes imaginære, i Modsætning til de positive og negative Størrelser, der kaldes reelle. $\sqrt{-4}$ har den numeriske Værdi 2, men Fortegnet for 2 kan hverken være + eller —; man skriver $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\ 2$, hvor $\sqrt{-1}$ da spiller et nyt Fortegns Rolle; det ny Fortegn betegnes ogsaa ved Bogstavet i, saa at man har $\sqrt{-4} = i2$ eller $(i2)^2 = -4$. To Størrelser med Fortegnet i have altsaa negativt Produkt.

Ordene «imaginær» og «reel» ere uheldige, idet de lede til at opfatte de ny Størrelser som ikke eksisterende i Modsætning til de reelle Størrelser. I Virkeligheden kan man imidlertid, som det senere vil blive vist, anvende Algebraen paa Opgaver, hvor de imaginære Løsninger have lige saa megen Betydning som de reelle. Sagen er altsaa den, at alle vore Tal ere Navne og som saadanne uden Betydning, saalænge vi ikke selv tillægge dem en saadan, idet vi anvende Algebraen paa Opgaver, hentede fra Virkeligheden. Efter Opgavens Natur kunne da negative, brudne, ja selv positive, hele Løsninger vise, at Opgaven er umulig (Sønnen 32 Aar, Faderen 30 Aar). Forskellen er altsaa blot, at saa længe vi ikke have udvidet vore Begreber paa den antydede Maade, maa vi sige, at en Opgave, som kun har imaginære Løsninger, er umulig.

Vi have allerede i Indledningen antydet den Udvidelse, der senere vil blive givet Størrelsesbegrebet, nemlig til Betegnelse af alle en Plans Punkter eller af Liniestykker, der ende i disse Punkter og begynde i 0. Vi have set, at man ved + eller — kan angive, om et Liniestykke skal afsættes ud fra et Punkt i een Retning eller i den modsatte; Linien kan imidlertid afsættes ud fra Punktet i uendelig mange Retninger, og det kan da være naturligt at betegne ogsaa de andre Retninger ved Fortegn; nu vil det netop vise sig, at man ved en Linie ia maa forstaa en Linie a, afsat i en Retning, vinkelret paa den, der betegnes ved +, dersom man vil kunne regne med imaginære Størrelser efter de samme Regler som med reelle Størrelser. Vi naa derved til den fulde Udvikling af vort Navnesystem, men have ved de fleste Opgaver kun Brug for en Del af Systemet.

27. Da de imaginære Størrelser paa vort nuværende Standpunkt ikke have nogen Betydning, kan der heller ikke være nogen Mening i at tale om deres Sum, Produkt o. s. v. Naar vi alligevel i det følgende paa enkelte Steder gøre dette, er det kun for vor Bekvemmeligheds Skyld. Summen af $a+\sqrt{b}$ og $a-\sqrt{b}$ er $2a$, naar b er et positivt Tal, men betyder Intet, naar b er et negativt Tal; for ikke at behøve at undersøge, om b er positiv eller negativ, sige vi derfor, at Summen altid er $2a$, men vi mene da ikke Andet med Ordet Sum end det Resultat, som vi komme til, naar vi regne med imaginære Tal efter de samme Regler, som vi benytte ved reelle Tal. Paa samme Maade sætte vi da

$$(a+\sqrt{-1}\,b)\,(a-\sqrt{-1}\,b) = a^2-(-b^2) = a^2+b^2;$$

$$(a+\sqrt{-1}\,b)\,(c-\sqrt{-1}\,d) = ac+bd+\sqrt{-1}\,(bc-ad);$$

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1};\ (\sqrt{-1})^2 = -1;\ (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = 1;\ (\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1} \text{ o. s. v.}$$

Ligninger af anden Grad.

28. Dersom en Ligning efter at være bragt paa rational, hel Form antager Formen

$$Ax^2+Bx+C = 0,$$

siges den at være af anden Grad eller at være en kvadratisk Ligning; ved Divisjon med A skaffe vi x^2 Koefficienten 1, hvorved Ligningens Form bliver

$$x^2+ax+b = 0. \qquad (1)$$

Før vi løse denne Ligning, ville vi betragte to specielle Tilfælde.

1. $a = 0$; Ligningen $x^2+b = 0$ kaldes ren kvadratisk. Man faar $x^2 = -b$; $x = \pm\sqrt{-b}$; Ligningen har altsaa 2 Rødder, der ere reelle, dersom b er negativ, imaginære, dersom b er positiv.

2. $b = 0$; Ligningen $x^2+ax = 0$ skrives

$$x(x+a) = 0.$$

Denne Ligning er tilfredsstillet, dersom $x = 0$, og dersom $x+a = 0$; Ligningen har altsaa de to Rødder

$$x = 0;\quad x = -a.$$

29. Vi ville nu løse den almindelige (blandede) kvadratiske Ligning

$$x^2+ax+b = 0.$$

Den skrives $\qquad x^2+ax = -b,$

hvorpaa $\frac{a^2}{4}$ adderes paa begge Sider; man har da

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}-b$$

eller $\qquad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}-b,$

hvoraf

$$x+\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b},$$

altsaa $\qquad x = -\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}. \qquad (2)$

Ligningen har saaledes to Rødder, der ere reelle, dersom $\frac{a^2}{4} > b$, imaginære, dersom $\frac{a^2}{4} < b$. Dersom $\frac{a^2}{4} = b$, faar man blot

$$x = -\frac{a}{2};$$

man siger i dette Tilfælde, at Ligningen har to lige store Rødder eller blot lige Rødder.

(2) viser, at den ubekendte i en ordnet anden Grads Ligning, hvor x^2 har Koefficienten 1, findes, naar man tager det halve af Koefficienten til x med modsat Fortegn, plus eller minus Kvadratroden af den samme Størrelses Kvadrat, efterfulgt af sidste Led med modsat Fortegn.

Eks. $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$; $x^2 + 7 = 0$;

$$x = \pm\sqrt{-7} = \pm i\sqrt{7};\quad x^2 + 6x = 0;\quad x = 0,\ x = -6;$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0;\quad x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases},$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0;\quad x^2 + \tfrac{5}{3}x - \tfrac{8}{3} = 0;$$

$$x = -\tfrac{5}{6} \pm \sqrt{\tfrac{25}{36} + \tfrac{8}{3}} = -\tfrac{5}{6} \pm \tfrac{11}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\tfrac{8}{3} \end{cases};$$

$$x^2 - ax + ab = bx;\quad x^2 - (a+b)x + ab = 0;$$

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - ab} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}};$$

$$x = \frac{a+b}{4} \pm \frac{a-b}{2} = \begin{cases} a \\ b \end{cases}.$$

30. **Røddernes Sum og Produkt.** Betegne vi de to Rødder ved α og β, have vi

$$\alpha = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$\beta = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

hvoraf

$$\alpha + \beta = -a;\quad \alpha\beta = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b. \qquad (3)$$

Summen af Rødderne er altsaa lig Koefficienten til x med modsat Fortegn, medens Produktet af Rødderne er lig Ligningens sidste Led.

Ved at benytte disse Sætninger, kan man paa en let Maade prøve, om en kvadratisk Ligning er rigtig løst.

Eks. $x^2 + 6x + 8 = 0$;

$$x = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1 = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases};$$

Prøve: $-4 - 2 = -6$; $(-4)(-2) = 8$.

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + a^2b^2 = 0;$$

$$x = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{4} - a^2b^2}.$$

$$x = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{4}} = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \frac{a^2-b^2}{2} = \begin{cases} a^2 \\ b^2 \end{cases}.$$

$$x^2 - 4x + 7 = 0;$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-7} = 2 \pm \sqrt{-3} = 2 \pm i\sqrt{3};$$

Prøve: $(2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$;

$$(2 + i\sqrt{3})(2 - i\sqrt{3}) = 7. \text{*)}$$

$$ax^2 + abx + x + b = 0;\quad ax^2 + (ab+1)x + b = 0;$$

$$x^2 + \frac{ab+1}{a}x + \frac{b}{a} = 0;$$

$$x = -\frac{ab+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{(ab+1)^2}{4a^2} - \frac{b}{a}};$$

$$x = -\frac{ab+1}{2a} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2 - 2ab + 1}{4a^2}}$$

$$= -\frac{ab+1}{2a} \pm \frac{ab-1}{2a} = \begin{cases} -b \\ -\dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Prøve: $-b - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{ab+1}{a}$; $(-b)\left(-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{b}{a}$.

$$x^2 + ab(b^2 - a^2) = a^2x + b^2x;$$

$$x^2 - (a^2 + b^2)x + ab(b^2 - a^2) = 0;$$

*) Dette Eksempel viser os, hvorledes vi ved at indføre imaginære Tal have opnaaet, at vi kunne udtale Sætningen ovenfor almindeligt; i modsat Fald maatte vi have sagt, at den kun gjaldt, hvis Størrelsen under Rodtegnet ikke var negativ.

$$x = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2 - 4ab(b^2-a^2)}{4}};$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)^2 - 4ab(b^2-a^2)}$$

$$= \sqrt{a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} = a^2 + 2ab - b^2;$$

$$x = \frac{a^2+b^2}{2} \pm \frac{a^2+2ab-b^2}{2} = \begin{cases} a^2+ab \\ b^2-ab \end{cases}.$$

$$a^2+ab+b^2-ab = a^2+b^2;$$

$$(a^2+ab)(b^2-ab) = ab(b^2-a^2).$$

31. Ved Hjælp af Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt kan man danne en Ligning med givne Rødder. Skulle saaledes Rødderne være $\alpha = 5$, $\beta = 7$, har man $a = -(5+7) = -12$, $b = 5.7 = 35$, saa at Ligningen bliver

$$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

Eks. $\alpha = 2+\sqrt{3}$; $\beta = 2-\sqrt{3}$; $a = -4$; $b = 1$.
$\alpha = p+qi$, $\beta = p-qi$; $a = -2p$; $b = p^2+q^2$.

32. Dersom man har de to Ligninger

$$\begin{aligned} x+y &= a, \\ xy &= b, \end{aligned} \qquad (4)$$

findes derfor de to ubekendte x og y som Rødder i den kvadratiske Ligning.

$$z^2 - az + b = 0;$$

x bliver da hvilken af de to Rødder man vil, medens y bliver den anden Rod. Er saaledes $x+y = 11$, $xy = 28$, findes x og y af Ligningen

$$z^2 - 11z + 28 = 0,$$

hvoraf $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = z = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} = \begin{cases} 7 \\ 4 \end{cases}.$

I de to Ligninger (4) kunne x og y ombyttes, uden at Ligningerne forandres; Ligninger med denne Egenskab kaldes symmetriske. To symmetriske Ligninger kunne altid omskrives, saa at de kun indeholde $x+y$ og xy;

man sætter da $x+y = u$, $xy = v$ og søger først u og v; ere disse fundne, findes x og y.

Eks. 1. $x^2+y^2 = 26$; $x+y+xy = 11$.

Man har $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;
altsaa er $u^2 - 2v = 26$; $u+v = 11$
hvoraf $u^2 + 2u = 48$;

$$u = \begin{cases} 6 \\ -8 \end{cases}; \quad v = \begin{cases} 5 \\ 19 \end{cases},$$

altsaa

$$z^2 - 6z + 5 = 0 \quad \text{og} \quad z^2 + 8z + 19 = 0;$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}; \quad \left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = -4 \pm \sqrt{-3}.$$

Eks. 2. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Kvadraterne af Rødderne i Ligningen $x^2+ax+b = 0$.

Kaldes Rødderne i den givne Ligning α og β, bliver den søgte Ligning

$$y^2 - (\alpha^2+\beta^2)y + \alpha^2\beta^2 = 0;$$

nu er $\alpha+\beta = -a$; $\alpha\beta = b$,
altsaa $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2b$; $\alpha^2\beta^2 = b^2$,
saa at den søgte Ligning bliver

$$y^2 - (a^2 - 2b)y + b^2 = 0.$$

Man kunde ogsaa have sat

$$y = x^2, \text{ altsaa } x = \sqrt{y},$$

der, indsat i den givne Ligning, giver

$$y + a\sqrt{y} + b = 0;$$

af denne Ligning bortskaffes $\sqrt{y}$, og man faar den samme Ligning som ovenfor.

Eks. 3. Find Siderne af et Rektangel, hvis halve Perimeter er s, og hvis Areal er A, og angiv, hvilket Rektangel med en given Omkreds, der er det største.

Kaldes de to Sider x og y, har man

$$x + y = s, \quad xy = A,$$

altsaa

$$z^2 - sz + A = 0;$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - A}.$$

Man ser heraf, at den største Værdi, som A kan have, naar s er given, er $\frac{s^2}{4}$, da Siderne for en større Værdi af A vilde blive imaginære. For denne Værdi af A bliver $x = y = \frac{s}{2}$; det største Rektangel med given Perimeter er altsaa et Kvadrat. Paa lignende Maade kan man ofte bestemme den største eller mindste Værdi, som en Størrelse kan faa. (Dens Maximum eller Minimum).

33. **Opløsning i Faktorer.** Vi have tidligere bevist, at $x - a$ gaar op i et Polynomium, dersom dette bliver Nul for $x = a$ (I. 55). Skal man opløse et Polynomium i Faktorer, maa man derfor søge de Værdier af et af de forekommende Bogstaver, der gøre Polynomiet til Nul.

Er Polynomiet af anden Grad med Hensyn til det Bogstav, vi betragte, findes de søgte Værdier ved at løse en kvadratisk Ligning. Skal man f. Eks. opløse

$$a^2 - 5a + 6$$

i Faktorer, faar man, idet x er den Værdi af a, som gør Polynomiet til Nul,

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad x = \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right.,$$

altsaa

$$a^2 - 5a + 6 = (a - 2)(a - 3).$$

Dersom der findes flere Bogstaver i Polynomiet, ordner man efter det, med Hensyn til hvilket Polynomiet er af lavest Grad; skal man f. Eks. opløse

$$a^2 - (m + n)a + mn,$$

kan man vel søge de Værdier af a, der gøre Polynomiet til Nul, men søger man Værdierne af m og n, faar man kun en Ligning af første Grad at løse. I Praksis sætter man ikke x for den Værdi, man søger, men beholder Betegnelsen; vi sætte altsaa

$$a^2 - (m + n)a + mn = 0,$$

hvoraf

$$m(n - a) = na - a^2,$$

$$m = \frac{a(n - a)}{n - a} = a;$$

$m - a$ er altsaa den ene Faktor; man ser let, at den anden Faktor er den, som bortforkortes, altsaa her $n - a$; man har altsaa

$$a^2 - (m + n)a + mn = (m - a)(n - a).$$

Dersom man, før Ligningen løses, bortdividerer en Faktor, maa man føje denne til de fundne; er f. Eks. Polynomiet

$$3x^2 + 5x - 8,$$

sætter man

$$x^2 + \tfrac{5}{3}x - \tfrac{8}{3} = 0; \quad x = \left\{\begin{matrix} 1 \\ -\frac{8}{3} \end{matrix}\right.,$$

saa at

$$3x^2 + 5x - 8 = 3(x - 1)(x + \tfrac{8}{3}) = (x - 1)(3x + 8).$$

Ligesom man saaledes løser en Ligning for at opløse et Polynomium i Faktorer, kan man omvendt dele en Ligning i flere simplere, dersom Udtrykket paa venstre Side af Lighedstegnet i den ordnede Ligning (med Nul paa højre Side af Lighedstegnet) kan opløses i Faktorer; kan en Ligning f. Eks. skrives

$$A \,.\, B \,.\, C \ldots = 0,$$

hvor A, B, C ... ere Polynomier, deler Ligningen sig i

$$A = 0, \; B = 0, \; C = 0 \ldots$$

Man ser nemlig let, at en Rod i $A = 0$ eller $B = 0 \ldots$ ogsaa er en Rod i $ABC \ldots = 0$, og omvendt, at Produktet $ABC \ldots$ ikke kan blive Nul, uden at en af Faktorerne er Nul.

Eks. 1. $$x^3 - 1 = 0$$
deler sig i $x - 1 = 0$ og $x^2 + x + 1 = 0$,
saa at $$x = 1 \text{ og } x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Eks. 2. $$x(x^2 - 4)(x^2 - 3x + 2) = 0$$
deler sig i $x = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$, saa at Rødderne ere $0, -2, +2, 1$ og 2. 2 er altsaa lige Rod.

34. **Ligninger, der løses som kvadratiske Ligninger.** Ofte kan man i en Ligning betragte en Størrelse, der indeholder x, som den ubekendte; Ligningen løses da med Hensyn til denne Størrelse, og derefter findes x.

Eks. 1. $x^4 + ax^2 + b = 0$. Ligningen er kvadratisk, naar x^2 tages som den ubekendte; man faar

$$x^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \quad x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}.$$

2. $x - 5 + 2\sqrt{x-5} = 24$; $\sqrt{x-5} = -1 \pm \sqrt{25}$;
$$x = \begin{cases} 41 \\ 21 \end{cases}.$$

3. $$(x^2 + 3x + 1)^2 + 3x^2 + 9x = 37;$$
$$(x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2 + 3x + 1) = 40;$$
$$x^2 + 3x + 1 = \begin{cases} 5 \\ -8 \end{cases}; \quad x^2 + 3x - 4 = 0;$$
$$x^2 + 3x + 9 = 0, \text{ o. s. v.}$$

35. **Uendelig store Rødder.** Af Ligningen
$$Ax^2 + Bx + C = 0$$
finde vi $$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Vi kunne altsaa kun faa $x = \infty$ for $A = 0$. I dette Tilfælde vender man tilbage til den givne Ligning, der reduceres til første Grad, nemlig
$$Bx + C = 0; \quad x = -\frac{C}{B}.$$

Ved en første Grads Ligning maa man altsaa mærke sig, at dersom den skal betragtes som et specielt Tilfælde af en Ligning af anden Grad, er $x = \infty$ den manglende Rod. Det kan, navnlig ved geometriske Opgaver, være af Vigtighed, at man ikke glemmer denne Rod, der kan vise en lige saa gyldig Løsning af Opgaven som den endelige Rod.

Eks. $(a - b)x^2 - 2ax + a + b = 0$; spc. $b = a$.
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (a-b)(a+b)}}{a-b} = \frac{a \pm b}{a - b} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{a+b}{a-b} \end{cases}.$$

For $b = a$ faas $x = \infty$ og $x = 1$; den givne Ligning reduceres for $b = a$ til
$$-2ax + 2a = 0, \quad \text{hvoraf } x = 1.$$

36. **Dobbelt irrationale Størrelser.** Man kalder en Størrelse dobbelt irrational, naar den har Rodtegn under Rodtegn. Særlig betragtes Udtryk af Formen
$$+\sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$
Et saadant Udtryk kan undertiden faa enkelt irrational Form; for at opnaa dette sætte vi
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}, \tag{5}$$
$$a \pm \sqrt{b} = x + y \pm \sqrt{4xy}.$$
Dersom $\sqrt{b}$ er irrational, medens a, b, x og y ere rationale, kan denne Ligning, som vi nedenfor ville bevise det, kun være rigtig, dersom de rationale og de irratio-

nale Størrelser paa begge Sider af Lighedstegnet hver for sig ere ens; man har altsaa

$$x+y=a,\ xy=\frac{b}{4},$$

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{a\pm k}{2},\ \text{idet } k=\sqrt{a^2-b}. \tag{6}$$

For at Opgaven skal kunne løses, maa k være rational, da i modsat Fald $\sqrt{x}$ og $\sqrt{y}$ selv blive dobbelt irrationale; er k rational, har man da

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+k)}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-k)}. \tag{7}$$

Vi forudsætte b positiv; skal Resultatet være reelt, maa man da nødvendigvis have $a^2>b$, da ellers k bliver imaginær, og a positiv, da ellers $\sqrt{\frac{1}{2}(a-k)}$ bliver imaginær.

Eks. $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. $(k=1)$.

$$\sqrt{51-36\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{51+3}{2}}-\sqrt{\frac{51-3}{2}}=3\sqrt{3}-2\sqrt{6}.$$

$$(k=\sqrt{51^2-36^2.2}=3).$$

$$\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{97-56\sqrt{3}}}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$
$$=2-\sqrt{3}.$$

37. Vi benyttede ovenfor den Sætning, at man ikke kan have

$$a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y},$$

hvor a, b, x og y ere rationale, medens $\sqrt{b}$ og $\sqrt{y}$ ere irrationale, uden at have

$$a=x;\ \sqrt{b}=\sqrt{y}.$$

Man faar nemlig af

$$\sqrt{b}=x-a+\sqrt{y}$$

$$b=(x-a)^2+y+2(x-a)\sqrt{y},$$

der vilde give en rational Værdi for $\sqrt{y}$, dersom man ikke havde $x=a$ og altsaa ogsaa $y=b$.

38. **Polynomiet af anden Grad.** Det er ofte af Vigtighed at afgøre, for hvilke reelle Værdier af x Polynomiet

$$y=Ax^2+Bx+C$$

er positivt, Nul eller negativt. For at afgøre dette, løser man Ligningen $y=0$; lad denne have Rødderne α og β. Følgende Tilfælde kunne forekomme:

1) α og β ere imaginære. y kan da ikke blive Nul for nogen reel Værdi af x; da nu y, idet x forandrer sin Værdi, kun kan skifte Fortegn ved at passere Nul, maa Fortegnet for y være det samme for alle reelle Værdier af x; y har altsaa altid samme Fortegn som C, da y har dette Fortegn for $x=0$.

2) α og β ere reelle; man har da

$$y=A(x-\alpha)(x-\beta).$$

Dersom A er positiv, bliver y positiv for Værdier af x, der er større end den største eller mindre end den mindste af Rødderne α og β, negativ for Værdier af x, der ligge mellem α og β. Dersom A er negativ, bliver derimod y positiv for Værdier af x, der ligge mellem α og β, Nul for $x=\alpha$ og $x=\beta$, negativ for andre Værdier.

3) $\alpha=\beta$. Man har da

$$y=A(x-\alpha)^2,$$

der viser, at y har samme Fortegn som A for alle Værdier af x, undtagen for $x=\alpha$, der gør $y=0$.

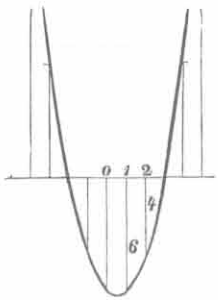
39. En Størrelse y siges at være en **Funktion** af en anden Størrelse x, naar der eksisterer en Ligning mellem y og x, saa at Værdien af y forandres, naar Værdien af x forandres. Man kan ved et Billede faa et godt Overblik over disse Værdiforandringer.

Paa en ret Linie tænker man sig ud fra et Punkt O (Nulpunktet) afsat lige store Stykker, der repræsentere Enheden, til begge Sider. Værdierne af x repræsenteres da ved Størrelsen af Afstandene fra O (positive eller negative). I hvert Punkt oprejses nu en vinkelret, og dennes Længde gøres lig den til Værdien af x svarende Værdi af y (opad, dersom y er positiv, nedad, dersom y er negativ). En krum Linie gennem Endepunkterne af de vinkelrette vil da vise, hvorledes, naar x vokser, y vokser eller aftager, bliver positiv, Nul eller negativ.

Er f. Eks. $y = x^2 - x - 6$,
vil hosstaaende Skema vise, hvilke Værdier y faar, naar x faar Værdierne $-4, -3 \ldots 4, 5$:

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y =$	14	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14

herved konstrueres da følgende Figur.



Gaa vi videre til begge Sider, stiger Kurven meget stærkt; vi se altsaa, at for $x = -\infty$ er $y = \infty$, at y derpaa aftager og bliver Nul for $x = -2$, at y derpaa bliver negativ og faar sin mindste Værdi, naar x er mellem 0 og 1, derpaa atter vokser, bliver Nul for $x = 3$, paa ny bliver positiv og vokser i det uendelige, naar x vokser i det uendelige.

Til Øvelse tegnes de krumme Linier, som repræsentere Ligningerne
$y = x^2 + x + 1$; $y = x^2 - 2x - 8$; $y = x^2 + 2x + 1$,
der netop ere Eksempler paa de tre overfor behandlede Tilfælde.

Eksempler til Øvelse.

1. $x^2 + 11x + 28 = 0$; **2.** $x^2 - 6x = 7$;
3. $5x^2 - x - 4 = 0$.
4. $(x + 1)(2x - 3) = (3x - 1)(x - 2) + 3$;
5. $x(x - 3) = x(x - 5)$; **6.** $(x + 1)(x - 1) = a^2 + 2a$;
7. $x^2 + a = ax + x$; **8.** $bx^2 - abx + a = bx$;
9. $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$;
10. $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 4) = 6(2x - 5)$;
11. $(2x + 3)^2 = 8x$; **12.** $x^2 - ab = ax - bx$;
13. $2x^2 + 7x + 3 = 0$; **14.** $13x^2 - 7x = 1$;
15. $x^2 - 4x + 5 = 0$; **16.** $x^4 + 8 = 9x^2$;
17. $x^2 + (a + 2b)(3a - 2b) = 4ax$; **18.** $x + 3\sqrt{x} = 18$;
19. $\frac{x^2 - 5x}{x + 3} = x - 3 + \frac{1}{x}$; **20.** $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{5}{6}$;
21. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x + 5} = \frac{23}{7}$; **22.** $x + 2\sqrt{x - 3} = 6$;
23. $\sqrt{x - 3} + 2\sqrt{x} = 5$; **24.** $3bx^2 - 3b^2x + b^2 = a$;
25. $2a^2x^2 = b(ax - 3b)$; **26.** $a(x^2 + 1) = (a^2 + 1)x$;
27. $3a^2 + 2a - 5$ opl. i Fakt.; ligeledes Eks. 28—32.
28. $a^2 - (m + 2n)a + 2mn$; **29.** $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$;
30. $3a^2 - 7ab - 6b^2$; **31.** $a^2 + 2bc - 2ab - c^2$;
32. $a^2 + ac - b^2 + 5bc - 6c^2$;
33. $x + y = 17$; $xy = 70$;
34. $x + y = a + 1$; $xy = a$;

35. $x^2 + y^2 = 13,\ xy = 6;$

36. $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2),\ xy = a^2 - b^2;$

37. $x^3 + y^3 = 28,\ x + y = 4;$

38. $x^3 + y^3 = a^3 - 1,\ x + y = a - 1;$

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6},\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6};$ **40.** $\sqrt{19 - 6\sqrt{2}};$

41. $x^2 - 3x + 2\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2;$

42. $(x^2 - 2x)^2 + 3x^2 - 6x = 18;$

43. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1)(x^2 - 3x)(x^2 + 7)x(x + 1) = 0;$

44. $x^4 - 1 = 0;$ **45.** $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}};$

46. $x^3 - 8 = 0;$ **47.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0;$

48. $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}};$ **49.** $\sqrt{1 + 4\sqrt{-3}};$

50. $\sqrt{3a^2 + 3b^2 - 2ab + 2\sqrt{2}(a^2 - b^2)};$

51. $x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} = 80;$

52. $3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ ($x = 1$ er den ene Rod);

53. $x^4 + 4a^2b^2 = (a^2 + 4b^2)x^2;$

54. $x^2 - 2\frac{a + b}{a - b}x + 1 = 0$ (sp. $a = b$);

55. $abx^2 - 2x(a + b)\sqrt{ab} = (a - b)^2;$

56. $\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{a^2}{x^2 - x};$ **57.** $7^x + 7^{-x} = \frac{50}{7};$

58. $x^2 - 4ax + 3ab + b^2 = 0;$ ere Rødderne reelle?

59. $\frac{1}{x + \sqrt{18 - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{18 - x^2}} = \frac{x}{16};$

60. $\frac{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}}{\sqrt{a - x} - \sqrt{x - b}} = \sqrt{\frac{a - x}{x - b}}.$

61. Hvilken Ligning har Rødderne $2\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$?

62. Tallet 2268 skal deles i to Faktorer, hvis Sum er 99.

63. Find to Tal, af hvilke det ene er 10 større end det andet, og hvis Kvadraters Sum er 148.

64. *A* køber for 4 Kr. Æbler; havde hvert Æble kostet en Øre mindre, havde han faaet 20 Æbler flere; hvormange fik han?

65. Et tocifret Tal har Tværsummen 10; multipliceres det med det omvendte Tal, faar man 2944. Find Tallet.

66. Fra Byerne *A* og *B*, der ligge 13 Mil fra hinanden, gaa to Mænd hinanden imøde og mødes efter $10\frac{1}{2}$ Times Forløb; den ene bruger et Kvarter mere til at gaa en Mil, end den anden; hvor lang Tid bruger hver?

67. Gennem et Rør kan et Kar fyldes 2 Timer hurtigere end gennem et andet Rør; ere de begge aabne, fyldes Karret i $1\frac{7}{8}$ Time; hvor lang Tid er hvert Rør om at fylde Karret?

68. Man lader en Sten falde ned i en Brønd og hører den falde efter 7 Sekunders Forløb; hvor dyb er Brønden? Stenen antages i t Sekunder at falde $16t^2$ Fod og Lyden at gennemløbe 1100 Fod i Sekundet.

Ligninger med flere ubekendte.

40. Ved flere Ligninger med flere ubekendte bør man kun bruge Substitutionsmetoden, dersom nogle af de ubekendte kunne udtrykkes rationalt ved de andre; er dette ikke muligt, forsøger man at regne saaledes med de givne Ligninger, at man faar simplere Ligninger,

og disse sættes da for de mest sammensatte af de givne Ligninger. For at danne saadanne simplere Ligninger af to givne anvender man hyppigt med Fordel følgende Metoder:

1. Den ene Ligning kan ofte divideres i den anden.

Eks. Af $x^3+y^3 = 9$, $x+y = 3$

dannes $x^2-xy+y^2 = 3$.

2. Ved Addition eller Subtraktion bortskaffes de højeste Potenser af en eller flere ubekendte.

Eks. Af $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+3x-y = 6 \\ x^2+y^2-x+y = 2 \end{array}\right\}$ faas $4x-2y = 4$.

3. For at kunne anvende den forrige Regel opløfter man ofte den ene Ligning til en Potens.

Eks. $x^2-xy+y^2 = 3$; $x+y = 3$. Af den sidste Ligning faar man $x^2+2xy+y^2 = 9$; substraheres herfra den første, faar man $3xy = 6$ eller $xy = 2$, saa at man nu har

$$x+y = 3; \quad xy = 2.$$

4. Af de givne Ligninger dannes en ny, der kan reduceres ved Roduddragning.

Eks. Af $\left.\begin{array}{r} x+y = a \\ xy = b \end{array}\right\}$ faas $\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2 = a^2 \\ 4xy = 4b \end{array}$,

hvoraf ved Subtraktion

$$x^2-2xy+y^2 = a^2-4b; \quad x-y = \pm\sqrt{a^2-4b}.$$

5. Ny ubekendte indføres for sammensatte Udtryk.

Eks. $3(x^2+y^2)+5xy = 25$.

$2(x^2+y^2)-3xy = 4$.

Sætte vi $x^2+y^2 = u$, $xy = v$,

faa vi $3u+5v = 25$; $2u-3v = 4$,

hvoraf $u = 5$, $v = 2$; vi have nu

$$x^2+y^2 = 5, \quad xy = 2, \quad \text{hvoraf } (x+y)^2 = 9;$$

$$(x-y)^2 = 1, \text{ o. s. v.}$$

41. Dersom begge Ligninger ere af anden Grad med Hensyn til x, og x skal elimineres, elimineres x^2, og man kan da søge x. Ligningerne kunne skrives

$$ax^2+bx+c = 0,$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1 = 0,$$

hvor Koefficienterne indeholde den anden ubekendte; man faar heraf, idet x^2 elimineres

$$(ba_1-ab_1)x = c_1a-a_1c;$$

af denne Ligning kan nu x indsættes i en af de givne Ligninger; man vil imidlertid derved faa en Ligning i den anden ubekendte, der i Reglen ikke kan løses ved kvadratiske Ligninger.

42. Vi have tidligere lært, at Rodtegn kunne bortskaffes af en Ligning ved Potensopløftning. En Kvadratrod bortskaffes saaledes, idet man isolerer den og kvadrerer; man faar herved imidlertid den samme Ligning, hvad enten Kvadratroden har Fortegnet + eller —, saa at man i den ved Kvadrering erholdte Ligning har indbefattet en ny Ligning, foruden den givne; man faar derved Rødder, som ikke vedkomme Opgaven (fremmede Rødder), og som maa udskilles ved Prøve. Saaledes af

$$x+\sqrt{x-5} = 11 \quad \text{faar man} \quad \sqrt{x-5} = 11-x;$$

$$x-5 = (11-x)^2; \quad x^2-23x+126 = 0;$$

$$x = 9 \quad \text{og} \quad x = 14.$$

Prøven giver nu $6+\sqrt{4} = 11$; $14-\sqrt{9} = 11$, saa at den sidste Rod tilhører Ligningen

$$x-\sqrt{x-5} = 11,$$

der ogsaa fører til samme Ligning af anden Grad. Man ser saaledes, at man efter at have bortskaffet Rodtegnene faar en Ligning, der i sig indeholder alle de Ligninger, som kunne dannes af den givne ved Forandring af Rodstørrelsernes Fortegn. Prøven maa da vise, hvilke Rødder der svare til de forskellige Kombinationer af Fortegn. Det kan endogsaa træffe sig, at der ingen Rod svarer til en eller flere af Kombinationerne. Saaledes faar man af

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}}+\sqrt{x-\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \text{ kun } x = \tfrac{17}{16},$$

der stemmer, naar man af den første Rod tager den positive, af den anden den negative Værdi, medens de tre andre Ligninger, der kunne dannes ved Forandring af Fortegnene, ingen Rødder have.

Af det udviklede følger, at det er naturligt at betragte ethvert Rodtegn (hvorunder den ubekendte findes) i en Ligning, som om det havde begge Fortegn, selv om man kun skriver eet; efter at Ligningen er løst, undersøger man derpaa, til hvilke Kombinationer de forskellige Rødder svare.

43. Ligninger som de her betragtede erstattes med Fordel ved flere Ligninger med flere ubekendte, idet man betragter de forekommende Rodstørrelser som ny ubekendte. Saaledes sætte vi i Ligningen ovenfor

$$\begin{array}{lll} \sqrt{x+\frac{1}{2}} = y & & x+\frac{1}{2} = y^2 \\ \sqrt{x-\frac{1}{2}} = z & \text{altsaa} & x-\frac{1}{2} = z^2 \quad \text{eller} \quad \begin{array}{l} 1 = y^2 - z^2 \\ \frac{1}{2} = y + z \end{array}, \\ & & y+z = \frac{1}{2} \end{array}$$

hvoraf $y+z = \frac{1}{2}$; $y-z = 2$; $y = \frac{5}{4}$; $z = -\frac{3}{4}$. $x = \frac{17}{16}$.

Man opnaar herved for det første, at Løsningen i Reglen bliver lettere, for det andet, at man, da man søger selve Rodstørrelserne, uden Prøve faar at vide, om man skal benytte deres positive eller deres negative Værdier. Saaledes vise her Værdierne af y og z, at den første Rodstørrelse i Ligningen maa være positiv, den anden negativ.

Eksempler til Øvelse.

1. $x^4+y^4 = 17$; $x^2+y^2 = 5$.

2. $x^5+y^5 = 33$; $x+y = 3$.

3. $x^2+2y^2-x-y = 7$; $x^2+2y^2+x-2y = 12$.

4. $x+y+3xy = 23$; $x^2+y^2+xy = 19$.

5. $x^2+y^2+z^2 = 14$; $x+y+z = 6$; $xy = 6z^2$.

6. $\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x-8} = 1$.

7. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b} = c$.

8. $xy = a$; $xz = b$; $yz = c$.

9. $x^3 = ayz$; $y^3 = bxz$; $z^3 = cxy$.

10. $x+y = 2z$; $x^2+y^2 = 5z$; $x^3+y^3 = 7z^2$.

11. $y^2 = xz$; $x+y+z = 21$;
$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 = 378$.

12. $x^2-(y-z)^2 = -3$; $y^2-(x-z)^2 = -5$;
$z^2-(x-y)^2 = 15$.

13. $x+y = 7$; $z+v = 3$; $x+z^2 = 8$; $y+v^2 = 4$.

14. $x(y+z) = a$; $y(x+z) = b$; $z(x+y) = c$.

15. $\dfrac{y+z}{a} = \dfrac{x+z}{b} = \dfrac{x+y}{c}$;
$(y+z)^2+(x+z)^2+(x+y)^2 = 1$.

16. $x+y = 5z$; $x-y = 2z$; $x^3+y^3 = 185z$.

17. $\sqrt{2x-1}-3\sqrt{x-1} = 9$.

18. $\sqrt{x+a}+2\sqrt{x+b} = c$.

19. $x+y = z$; $(x^2+y^2)z = 15$; $x^3+y^3 = 9$.

20. $(1-xy)(z+1) = 2$; $(x-y)(z+1) = 4$;
$(x^2-y^2)(z+1)^2 = 16z$.

Rækker.

44. **Differensrækker.** (Aritmetiske Progressioner.) En Differensrække er en Række Tal, af hvilke

ethvert findes ved at addere den samme Størrelse (Differensen) til det foregaaende.

Kaldes Rækkens første Led a, Differensen d, bliver Rækken

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d\ \ldots$$

Betegner a_n Rækkens n^{te} Led, er $a_n = a+(n-1)d$. Summen s af de n Led findes, idet man har

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + a_n$$

og $$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + a,$$

hvor den nederste Række er den samme som den øverste, men Leddene ere tagne i den omvendte Orden. Addition af de to Rækker giver

$$2s = n(a+a_n), \quad \text{altsaa} \quad s = \frac{n(a+a_n)}{2}.$$

Mellem de 5 Størrelser a, a_n, n, d og s har man saaledes de to Ligninger.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a+(n-1)d \\ s &= \frac{n}{2}(a+a_n) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

og følgelig kunne to af Størrelserne findes, naar de tre ere givne. I nogle af Tilfældene maa man for at finde de ubekendte løse en Ligning af anden Grad.

Eks. 1. Mellem to givne Tal a og b skal indskydes p Tal, saa at de $p+2$ Tal danne en Differensrække; spc. $a = 1$, $b = 77$, $p = 18$.

Man har $$b = a + (p+1)d,$$

altsaa $$d = \frac{b-a}{p+1}.$$

For de givne Tal faar man $d = 4$, saa at Rækken er

$$1,\ 5,\ 9 \ldots 77.$$

Disse Tal have Summen $10(77+1) = 780$.

Eks. 2. Givet $a = 1$, $d = 4$, $s = 780$.

Af den anden Ligning faas

$$a_n = \frac{2s}{n} - a,$$

hvorved den første bliver

$$\frac{2s}{n} - a = a + (n-1)d$$

eller $$dn^2 - n(d-2a) - 2s = 0,$$

altsaa $$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 8sd}}{2d};$$

spc. $n = 20$, $a_n = 77$. Den anden Løsning er meningsløs.

45. **Kvotientrækker.** (Geometriske Progressioner). En Kvotientrække er en Række Tal, af hvilke ethvert findes ved at multiplicere det foregaaende med den samme Størrelse (Kvotienten).

Kalde vi Kvotienten q, medens vi forøvrigt bruge de samme Betegnelser som ovenfor, er Rækken

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots,$$

hvoraf $$a_n = aq^{n-1}. \qquad (2)$$

Endvidere er

$$s = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1};$$

altsaa $$sq = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n,$$

hvoraf $$s(1-q) = a - aq^n = a(1-q^n),$$

altsaa $$s = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{q^n-1}{q-1}, \qquad (3)$$

hvor de to Udtryk for s bruges, eftersom $q < 1$ (aftagende Kvotientrækker) eller $q > 1$ (voksende Kvotientrækker). En tredje Form for Summen faar man, idet

$$s = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a - a_n q}{1-q}. \qquad (4)$$

Af Ligningerne (2) og (3) eller (4) kunne to af de fem Størrelser findes, naar de tre ere givne; dog kommer man derved i flere Tilfælde til Ligninger, hvis Behandling vi endnu ikke have lært. Søger man q af (4), faar man en Ligning, der er værd at lægge Mærke til, nemlig

$$q = \frac{s - a_n}{s - a}.$$

Rækken kan have uendelig mange Led og dog en endelig Sum, dersom $q < 1$. I dette Tilfælde er nemlig $q^n = q^\infty = 0$, altsaa

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

Efter hvad vi have sagt om Begrebet «Uendelig» er Meningen her, at vi kunne tage saa mange Led med af Rækken, at det, der mangler i den angivne Sum, er mindre end enhver, selv nok saa lille, given Størrelse.

Eks. 1. Mellem a og b skal indskydes p Tal, saa at de $p + 2$ Tal danne en Kvotientrække; spc. $a = 1$, $b = 256$, $p = 7$.

Man har

$$b = aq^{p+1}, \text{ altsaa } q = \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}.$$

spc. $q = \sqrt[8]{256} = \sqrt[4]{16} = 2$, saa at Rækken er

$$1, 2, 4 \ldots 256;$$

disse Tal have Summen $\dfrac{2^9 - 1}{2 - 1} = 511$.

Eks. 2. Produktet af Leddene i Rækken

$$a, aq, aq^2 \ldots aq^{n-1}$$

er $P = a^n q^{1+2\ldots+(n-1)} = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(aq^{\frac{n-1}{2}}\right)^n = t^n$, hvor t, dersom n er ulige, er Rækkens mellemste Led.

Eks. 3. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots = 2;$

$$0{,}111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots = \frac{1}{9}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. Find Summen af alle ulige Tal fra 1 til 100.

2. I en Differensrække er $n = 22$, $d = 4$, $s = 99$. Find første og sidste Led.

3. Det 7de Led af en Differensrække er 10, det 17de er 50; find a_1 og d.

4. De 37 første Led af en Differensrække have Summen 888; Forskellen mellem det 31te og det 13de Led er 126; find a_1 og d.

5. I en Differensrække er Summen af Kvadraterne af det 4de og 12te Led 1170, Summen af det 7de og 15de Led 60; find a_1 og d.

6. Find Summen $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$

7. $a = 4$; $q = 6$; $a_n = 186624$; find s.

8. $a^{10} - a^9 b + a^8 b^2 - \ldots - ab^9 + b^{10}$.

9. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots (x < 1)$.

10. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots (x < 1)$.
Man gaar frem, som vi gjorde, da vi fandt s.

11. I en retvinklet Trekant, hvis Hypotenuse er a, og hvis ene Vinkel er 30°, fældes Højden; fra dennes Fodpunkt fældes en vinkelret paa den største Katete, fra dennes Fodpunkt en vinkelret paa a og saaledes videre i det uendelige; find Summen af de vinkelrette.

Logaritmer.

46. Af Ligningen

$$a^x = b \tag{1}$$

bestemmes b ved Potensopløftning, naar x og a ere givne, a ved Roduddragning, naar x og b ere givne.

Man kan imidlertid ogsaa søge x, naar a og b ere givne; x kaldes da **Logaritmen** til b med **Grundtal** (Basis) a og skrives

$$x = \log_a b,$$

en Ligning, der saaledes under en anden Form udtrykker det samme som (1).

Logaritmen til et Tal er altsaa Eksponenten til den Potens af Grundtallet, der er lig Tallet. Grundtallet 10 underforstaas i Betegnelsen, saa at man blot skriver $\log b$. Vi benytte forøvrigt kun Grundtal større end 1. Af $a > b$ følger da $\log a > \log b$.

Eks. $\log_a 1 = 0$, thi $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, thi $a^1 = a$; $\log_a 0 = -\infty$, thi $a^{-\infty} = 0$; $\log_a \infty = \infty$, thi $a^\infty = \infty$. $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 10^n = n$; $\log 0{,}1 = -1$; $\log 0{,}01 = -2$; $\log 0{,}0001 = -4$; $\log 0{,}000001 = -6$; $\log_3 \sqrt{27} = 1{,}5$; $\log_5 \sqrt[4]{125} = 0{,}75$.

47. Man har ved Metoder, som vi ikke her kunne udvikle, med Tilnærmelse beregnet Logaritmerne til alle hele Tal indtil en vis Grænse og opført disse i de saakaldte Logaritmetabeller eller Logaritmetavler. Logaritmernes Opfinder, **Neper**, benyttede et irrationalt Grundtal mellem 2 og 3, da Logaritmerne lettest beregnes for dette Grundtal; hans Medarbejder **Briggs** indførte derimod 10 som Grundtal, og dette benyttes nu, da derved Logaritmernes Anvendelse lettes. Man benytter navnlig Tavler, der gaa til 10000 og give Logaritmerne med 5 Decimaler (Lalande, Hoüel, Dahlerup, Larsen), og større Tavler med 7 Decimaler (Vega, Schrön).

48. **Karakteristiken** er det hele Tal i Logaritmen, medens Decimalerne kaldes **Mantissen**. Man bruger altid positiv Mantisse; er Logaritmen negativ,

omskrives den derfor, idet man adderer og subtraherer et saadant helt Tal, at Mantissen bliver positiv. Er f. Eks. Logaritmen til et Tal $-1{,}23456$, sætter man

$$-1{,}23456 = 2 - 1{,}23456 - 2 = 0{,}76544 - 2;$$

man faar derved positiv Mantisse, medens Karakteristiken (-2) er negativ og skrives efter Mantissen.

49. **Karakteristiken er $n - 1$, dersom Tallets (numerus) Hele har n Cifre; den er $-n$, dersom Tallet har n Nuller foran det første betydende Ciffer,** Nullet foran Kommaet medregnet

Et n-cifret Tal ligger nemlig mellem 10^{n-1} og 10^n; dets Logaritme ligger da mellem $n-1$ og n og har følgelig Karakteristiken $n-1$. Begynder Tallet med n Nuller $(0{,}000\ldots)$, ligger det mellem $10^{-(n-1)}$ og 10^{-n}; dets Logaritme ligger derfor mellem $-(n-1)$ og $-n$ og da Mantissen er positiv, bliver Karakteristiken $-n$.

Eks. $\log 137 = 2,\ldots$; $\log 17693 = 4,\ldots$;
$\log 0{,}7 = 0,\ldots -1$; $\log 43928160 = 7,\ldots$;
$\log 0{,}000321 = 0,\ldots -4$.

50. **Mantissen afhænger ikke af Kommaets Plads i Tallet.** Lad nemlig et Tal b have Logaritmen x; man har da, idet n er et vilkaarligt helt Tal,

$$10^x = b, \text{ hvoraf } 10^{n+x} = 10^n . b,$$

der viser, at $\log(10^n . b) = n + x$. Logaritmen bliver altsaa n større, naar Tallet multipliceres med 10^n; da n er et helt Tal, kan Mantissen ikke derved forandres.

51. I Tavlerne findes Tallene og de tilhørende Logaritmer opførte i to Kolonner ved Siden af hinanden. I Tavlerne med 5 Decimaler kan man derved finde Logaritmen til ethvert Tal med indtil 4 Cifre.

Vi kunne nu ogsaa finde Logaritmen til enhver Decimalbrøk med indtil 4 betydende Cifre. Først bestemmes Karakteristiken efter Reglerne ovenfor; Kommaet tænkes derpaa rykket hen efter det fjerde betydende Ciffer, hvilket, som vi have vist, ingen Indflydelse har paa Mantissen. Da Tallet nu er helt, kan Mantissen findes i Tabellen.

Eks. $\log 17{,}32 = 1, \ldots$ I Tavlen findes til 1732 Mantissen 23855 (læs 238 — 55), altsaa er $\log 17{,}32 = 1{,}23855$, $\log 173{,}2 = 2{,}23855$, $\log 0{,}1732 = 0{,}23855 - 1$,

$\log 0{,}001732 = 0{,}23855 - 3$; $\log 130000 = 5{,}11394$,

$\log 0{,}0943 = 0{,}97451 - 2$, $\log 2608000 = 6{,}41631$,

$\log 0{,}0002589 = 0{,}41313 - 4$.

52. Søges det til en given Logaritme svarende Tal, findes de fire første Cifre af dette, idet man i Tabellen søger den Mantisse, der er nærmest (lavere) den givne. Kommaets Plads bestemmes derpaa ved den givne Karakteristik. Vi betegne det til Logaritmen x svarende Tal med nl. x.

Eks. nl. $2{,}41647 = 260{,}9$. I Tavlen findes ved Mantissen 41647 Tallet 2609; da Karakteristiken er 2, sættes Kommaet efter det tredje Ciffer.

nl. $5{,}67852 = 477000$; nl. $0{,}58320 - 3 = 0{,}003830$.

nl. $0{,}30125 - 1 = 0{,}2001$; nl. $0{,}31576 = 2{,}069$.

nl. $0{,}53769 - 4 = 0{,}0003449$; nl. $3{,}54518 = 3509$.

53. I n t e r p o l a t i o n. Man kan let tegne den krumme Linie, der paa den tidligere angivne Maade repræsenterer Ligningen $y = \log x$. Et negativt Tal har ingen reel Logaritme; de ægte Brøker have negative Logaritmer; man har

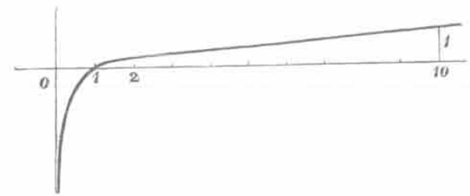
$\log 0 = -\infty, \ldots$; $\log 0{,}001 = -3$;

$\log 0{,}01 = -2$; $\log 0{,}1 = -1$;

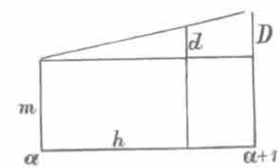
endvidere er

$\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2 \ldots$

Man ser derved, at Kurven har den i Figuren viste Form.



Figuren viser, at Kurven for nogenlunde store Tal paa et lille Stykke uden mærkelig Fejl kan betragtes som en ret Linie; idet man gaar ud herfra, kan man mellem to paa hinanden følgende Logaritmer til fircifrede Tal i de smaa Tavler indskyde (interpolere) de manglende Logaritmer og Tal. Lad Figuren forestille et Stykke af Kurven, hvor $m = \log a$; $m + d = \log(a+h)$ og $m + D = \log(a+1)$, idet h er en ægte Brøk; man har da



$$d : D = h : 1$$

eller
$$d = hD;\quad h = \frac{d}{D}. \qquad (2)$$

m findes i Tabellen; D er Forskellen mellem $\log(a+1)$ og $\log a$; denne Forskel findes i en særlig Kolonne i Tabellen; man kan altsaa beregne d, naar h er bekendt, og omvendt. D og d tages som hele Tal, men ere i Virkeligheden Hundredetusendedele.

Skulle vi f. Eks. finde $\log 3509{,}16$, findes i Tavlen $\log 3509 = 3{,}54518$; $D = 13$; endvidere er $h = 0{,}16$, altsaa $d = 13 \cdot 0{,}16 = 2$, idet man her tager det nærmeste hele Tal; man skal altsaa lægge 2 til den femte Decimal af Logaritmen, naar man lægger 0,16 til Tallet; følgelig er $\log 3509,16 = 3,54520$.

Søger man nl. 3,67574, findes i Tavlen

$$\text{nl.}\, 3,67569 = 4739;\quad D = 9;$$

altsaa er $d = 74 - 69 = 5$; $h = 5:9 = 0,56$;

$$\text{nl.}\, 3,67574 = 4739,56.$$

Flere end to Cifre af h ere ikke paalidelige, og hvor D er lille, bør man kun tage eet.

54. Vi kunne nu opstille følgende Regler:

At søge Logaritmen til et givet Tal. Bestem Karakteristiken, flyt derpaa Kommaet hen efter det fjerde betydende Ciffer og søg Mantissen til det fircifrede Tal; multiplicer Decimalbrøken med D og læg det ved det fundne nærmeste hele Tal til den fundne Mantisse.

At søge Tallet til en given Logaritme. Den nærmest lavere Mantisse opsøges i Tavlen, og det dertil svarende fircifrede Tal opskrives; Forskellen d mellem den givne Logaritme og den fundne divideres med D; de to første Decimaler af Kvotienten føjes efter de fundne fire Cifre; endelig bestemmes Kommaets Plads ved Hjælp af den givne Karakteristik.

Eks. $\log 4740,54 = 3,67583$; nl. $2,67583 = 474,056$;
$\log 0,47443 = 0,67617 - 1$; nl. $0,67617 = 4,74430$;
$\log 835516 = 5,92196$; nl. $(0,92196 - 1) = 0,83552$;
$\log 1,00004 = 0,00002$; nl. $3,00007 = 1000,16$;
$\log 0,0111111 = 0,04575 - 2$;
nl. $(-1,23456) = 0,058269$.

55. I de fleste Tavler er i særlige Rubriker, hvorover Differensen D staar, beregnet de til hinanden svarende Værdier af d og h. Søger man f. Eks. i Schröns Tavle $\log 24503,618$, finder man $\log 24503 = 4,3892193$; $D = 177$; $h = 0,618$. I Rubriken med Overskrift 177 finde vi nu de til 6, 1 og 8 svarende Differenser; disse adderes til den fundne Logaritme, idet man for hver følgende rykker Differensen en Plads til højre, da Cifrene af h faa en 10 Gange lavere Værdi for hvert Ciffer, vi rykke frem; vi faa altsaa

$$\begin{array}{lll} \log\ 24503 & = & 4,3892193 \\ h = 0,6 & d = & \quad\ \ 1062 \\ h = 0,01 & d = & \qquad\ 177 \\ h = 0,008\ & d = & \qquad\ 1416 \\ \hline \log 24503,618 & = & 4,3892302. \end{array}$$

Man slutter let heraf, hvorledes man gaar frem, naar Tallet søges.

56. **Sammensatte Udtryks Logaritmer.** Man kan ikke finde Logaritmen til en flerleddet Størrelse af de enkelte Leds Logaritmer; man søger derfor i Praksis at omskrive flerleddede Størrelser til Produkter; er dette ikke muligt, maa man beregne hvert Led for sig og udføre Additionerne og Subtraktionerne paa sædvanlig Maade.

57. Logaritmen til et Produkt er Summen af Faktorernes Logaritmer.

Af $\qquad x = 10^{\log x};\quad y = 10^{\log y}$

faas $\qquad xy = 10^{\log x + \log y}$,

altsaa $\qquad \log(xy) = \log x + \log y$.

58. Logaritmen til en Brøk er Tællerens Logaritme minus Nævnerens Logaritme.

Af $\qquad x = 10^{\log x};\quad y = 10^{\log y}$

faas $\qquad \dfrac{x}{y} = 10^{\log x - \log y}$,

altsaa $\qquad \log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y$.

59. Logaritmen til en Potens er Eksponenten Gange Rodens Logaritme.

Af $x = 10^{\log x}$ følger $x^m = 10^{m \log x}$,

altsaa $\log x^m = m \log x$.

Da m er vilkaarlig, kunne vi for m sætte $\frac{1}{m}$; man faar da

$$\log x^{\frac{1}{m}} = \log \sqrt[m]{x} = \frac{\log x}{m},$$

der viser, at:

60. Logaritmen til en Rod er Potensens Logaritme, divideret med Rodeksponenten.

Vi have ved disse fire Sætninger benyttet Grundtallet 10, men vi kunde lige saa godt have benyttet et vilkaarligt Grundtal.

Eks. $\log (ab : c^3) = \log a + \log b - 3 \log c.$

$$\log (\sqrt[n]{a} \cdot b^m : c) = \frac{1}{n} \log a + m \log b - \log c.$$

$$\log \frac{\sqrt{5} \cdot 0{,}01}{\sqrt[3]{7} \cdot 15} = \tfrac{1}{2} \log 5 + \log 0{,}01 - \tfrac{1}{3} \log 7 - \log 15$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}69897 - 2 - \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}84510 - 1{,}17609$$
$$= 0{,}34949 - 3{,}45779 = 0{,}89170 - 4.$$

61. Følgende Regler anvendes i Praksis:

1) Dersom en større Logaritme skal subtraheres fra en mindre, adderes et saadant helt Tal til denne, at Subtraktionen kan udføres; det hele Tal maa da tilføjes som Subtrahend.

Eks. $\log \frac{5}{7} = 0{,}69897 - 0{,}84510$
$$= (1{,}69897 - 1) - 0{,}84510 = 0{,}85387 - 1.$$

$$\log \frac{0{,}3}{6} = 0{,}47712 - 1 - 0{,}71815$$
$$= (1{,}47712 - 2) - 0{,}77815 = 0{,}69897 - 2.$$

2) Dersom en negativ Logaritme skal divideres med et Tal, adderes et saadant Tal til begge den negative Logaritmes Led, at Divisionen i det sidste Led gaar op.

Eks. $\log \sqrt[3]{0{,}5} = \tfrac{1}{3}(0{,}69897 - 1) = \tfrac{1}{3}(2{,}69897 - 3)$
$$= 0{,}89966 - 1.$$
$$\log \sqrt[7]{0{,}04} = \tfrac{1}{7}(5{,}60206 - 7) = 0{,}80029 - 1.$$

3) Da man ved Logaritmer kun kan beregne numeriske Værdier, maa en Størrelse, i hvilken der findes negative Tal, ændres saaledes, at der kun forekommer positive Tal.

Eks. $x = \sqrt[3]{-3} \,.\, (-0{,}4) = \sqrt[3]{3} \,.\, 0{,}4;$
$$\log x = \tfrac{1}{3} \log 3 + \log 0{,}4;$$
$$x = \sqrt[5]{-5} \,.\, (-11) : (-\sqrt{7}); \quad -x = \sqrt[5]{5} \,.\, 11 : \sqrt{7};$$
$$\log (-x) = \tfrac{1}{5} \log 5 + \log 11 - \tfrac{1}{2} \log 7 = 0{,}75863;$$
$$-x = \text{nl.}\, 0{,}75863 = 5{,}7363; \quad x = -5{,}7363.$$

62. Vi kunne nu ved Logaritmer beregne en Størrelse, idet vi først søge Størrelsens Logaritme og derpaa søge det tilsvarende Tal. Har Størrelsen flere Led, maa disse, hvis Størrelsen ikke kan gøres logaritmisk, beregnes hvert for sig. Undertiden kan det Udtryk, som man faar ved at tage Logaritmen, være saa sammensat, at man atter tager Logaritmen.

Eks. 1. $x = \frac{\sqrt{0{,}12567} \,.\, 0{,}5^3}{\sqrt[3]{12{,}419}}.$

$$\log x = 0{,}54962 - 1 + 0{,}09691 - 1 - 0{,}36469.$$
$$\log x = 0{,}28184 - 2; \quad x = 0{,}019136.$$

Eks. 2.

$$x = \sqrt{3}^{\sqrt{3}}; \ \log x = \frac{\sqrt{3}}{2} \log 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, 0{,}47712.$$

$$\log\log x = 0{,}23856 - 0{,}30103 + 0{,}67863 - 1.$$
$$\log\log x = 0{,}61616 - 1;\quad \log x = 0{,}41320;$$
$$x = 2{,}5894.$$

Eks. 3. $x = \sqrt[\sqrt[a]{a}]{a}$, hvor $a = 0{,}8152$.

$$\log x = \frac{\log a}{\sqrt[a]{a}} = \frac{0{,}91126 - 1}{\sqrt[a]{a}} = \frac{-0{,}08874}{\sqrt[a]{a}}$$

$$\log(-\log x) = 0{,}94812 - 2 - \frac{0{,}91126 - 1}{0{,}8152}.$$

$$b = -\frac{0{,}91126 - 1}{0{,}8152} = \frac{0{,}08874}{0{,}8152}.$$

$$\log b = 0{,}94812 - 2 - 0{,}91126 + 1;\quad b = 0{,}10886.$$
$$\log(-\log x) = 0{,}94812 - 2 + 0{,}10886 = 0{,}05698 - 1.$$
$$-\log x = 0{,}11402;\quad \log x = 0{,}88598 - 1;\quad x = 0{,}7691.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $\sqrt[6]{235{,}78} = 2{,}48553$. **2.** $\left(\frac{9}{8}\right)^{21} = 11{,}86$.

3. $\sqrt{\frac{13}{16}} = 0{,}959323$. **4.** $\sqrt[4]{0{,}00035246} = 0{,}137018$.

5. $0{,}53182 \,.\, 0{,}0614 : 5{,}1324$. **6.** $\sqrt{0{,}56} \,.\, 25{,}7132$.

7. $\sqrt[3]{\frac{1}{19}} : 5{,}1624$. **8.** $1501{,}62 \,.\, 1{,}035^7$.

9. $\dfrac{20{,}7583 \,.\, 3{,}97258}{27{,}50083} = 2{,}998601$.

10. $0{,}27583 \,.\, 0{,}00768 \,.\, 7080{,}3 \,.\, 0{,}8279 = 12{,}41745$.

11. $0{,}023697 \,.\, 0{,}0039741 \,.\, 1{,}00053 = 0{,}00009422417$.

12. $52{,}8173 : 0{,}17483 = 302{,}1066$.

13. $\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}1615$. **14.** $\sqrt[10000]{2} = 1{,}000069$.

15. $\sqrt[5]{0{,}2} = 0{,}72478$. **16.** $713{,}005\sqrt[4]{0{,}031421}$.

17. $\sqrt{0{,}4} + 0{,}51723^3$. **18.** $0{,}61325^2 - 0{,}51423^2$.

19. Find $\sqrt{9a^2 - 4b^2}$, naar $a = 17{,}316$ og $b = 5{,}9123$.

20. $\dfrac{1}{1{,}035^{10}}$. **21.** $\dfrac{1759}{0{,}035}\left(1 - \dfrac{1}{1{,}035^{10}}\right)$.

22. $\log x = 3\log a + \frac{1}{5}\log b - \frac{1}{2}(2\log c - \log d)$; find x.

23. $\log x = 2\log a - \frac{2}{3}\log b + 1$; find x.

24. $\sqrt{\dfrac{0{,}5936 \,.\, 1{,}42^2}{1{,}3200 \,.\, 7{,}1^3}} \,.\, \sqrt[5]{-0{,}3}$. **25.** $\sqrt{5}^{\sqrt{5}}$.

26. $\sqrt[3]{-1{,}7325} \,.\, \sqrt[5]{-0{,}3}$. **27.** $\sqrt[7]{\log 0{,}5}$.

28. Find $a^2 - 3a + 2$, naar $a = 6{,}00007$.

29. $\sqrt[7]{1 - \sqrt[3]{0{,}51632}}$. **30.** $\sqrt[3]{\sqrt{3{,}1} + 1{,}6396^2}$.

31. Bevis, at $x^{\log y} = y^{\log x}$.

32. Find $\log_5 713$, $\log_2 1024$ og $\log_3 1{,}73205$.

33. Tallene R, S og T ere a_r, a_s og a_t baade i en Differens- og i en Kvotientrække; find en Ligning mellem R, S og T.

Eksponentielle Ligninger.

63. En Ligning kaldes algebraisk, naar den ubekendte kun forekommer som Addend, Subtrahend, Faktor, Divisor, opløftet til Potens eller under Rodtegn (med rationale Eksponenter). Finder man derimod i Ligningen Udtryk som $\log x$, $a^x \ldots$, kaldes Ligningen transcendent. Af transcendente Ligninger ville vi her kun omtale de eksponentielle Ligninger, hvor den ubekendte forekommer som Eksponent.

Den simpleste eksponentielle Ligning har Formen
$$a^x = b;$$
man løser den ved at tage Logaritmen paa begge Sider af Lighedstegnet, hvorved man faar
$$x\log a = \log b;\quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Man ser, at en Logaritmetabel ikke er andet end en Tabel, der indeholder Løsningerne af Ligningerne

$$10^x = 1, \quad 10^x = 2, \quad 10^x = 3 \ldots.$$

Sammensatte eksponentielle Ligninger kunne kun løses i enkelte Tilfælde:

1. Dersom der kun er eet Led paa hver Side af Lighedstegnet, reduceres Ligningen til en algebraisk Ligning, naar man tager Logaritmen.

Eks. $\quad 3^x \,.\, 4^{1-x} = 5^{2-x}.$

$$x \log 3 + (1 - x) \log 4 = (2 - x) \log 5.$$

$$x (\log 3 - \log 4 + \log 5) = 2 \log 5 - \log 4, \text{ o. s. v.}$$

2. Dersom Ligningen ikke kan skrives med eet Led paa hver Side af Lighedstegnet, søger man at reducere den til en algebraisk Ligning ved at indføre en ny ubekendt for et eksponentielt Udtryk.

Eks. 1. $\quad 5 \,.\, 3^x - 2 \,.\, 3^{-x} = \frac{403}{9}.$

$$\text{Sæt } 3^x = y, \text{ altsaa } 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \frac{1}{y}.$$

$$5y - \frac{2}{y} = \frac{403}{9}; \quad 5y^2 - \frac{403}{9} y - 2 = 0; \quad y = \begin{cases} 9 \\ -\frac{2}{45} \end{cases}.$$

Nu har man

$$3^x = y = 9 \text{ og } 3^x = -\tfrac{2}{45}.$$

Af den første af disse Ligninger faas $x = 2$; den anden giver ingen reel Værdi af x.

Eks. 2. $\quad 2 \,.\, 5^{1-x} + 3 \,.\, 5^{x-2} = \frac{13}{4}.$

$$5^x = y; \quad 5^{1-x} = \frac{5}{5^x} = \frac{5}{y}; \quad 5^{x-2} = \frac{5^x}{5^2} = \frac{y}{25}, \text{ o. s. v.}$$

De forekommende Tal bør opløses i Primfaktorer, da man derved, uden at bruge Logaritmetavlerne, vil finde rationale Løsninger, hvis der gives saadanne.

Eks. 3. $\quad \sqrt{5}^{x^2-3} \,.\, \sqrt{3}^{x+1} = 1125.$

Eks. 4. $\quad (5x)^{\log x} = 50.$

Eks. 5. $\quad 2 \,.\, 3^{3-x} + 5 \,.\, 3^{x-1} = \frac{137}{3}.$

Eks. 6. Hvorledes findes $\log_a m$?

Rentesregning.

64. Den Afgift, som svares af en laant Kapital, kaldes Rente; i Reglen angives Renten af hvert Hundrede (pro Cent) for den valgte Tidsenhed (Termin); her foretrække vi at gaa ud fra Rentefoden, det vil sige Forholdet mellem Renten og Kapitalen eller Renten af Kapitalen 1.

65. Betegne vi Kapitalen ved A, dens Rente i een Termin ved R, Rentefoden ved r, have vi altsaa

$$r = \frac{R}{A}; \quad R = Ar. \qquad (1)$$

Eks. Til en Rente af 5 pCt. (5%) svarer $r = 5 : 100 = 0{,}05$, til $3\frac{1}{4}$ pCt. svarer $r = 3\frac{1}{4} : 100 = 0{,}0325$, til $4\frac{1}{3}$ pCt. $r = 0{,}0433 \ldots$ o. s. v.

Naar Rentefoden er 0,04, er Renten af 200 Kr. 0,04 . 200 Kr. = 8 Kr.; er $r = 0{,}0425$, bliver Renten af 850 Kr. 0,0425 . 850 Kr. = 36 Kr. 12,5 Ø. o. s. v.

66. **Simpel Rentesregning.** Er Kapitalen a, Rentefoden r, bliver Renten i een Termin ar, i n Terminer nar; Kapitalen a er altsaa efter n Terminers Forløb vokset til

$$b = a + nar = a(1 + nr).$$

Ved Hjælp af denne Ligning kan en af de fire Størrelser a, b, n og r findes, naar de tre andre ere bekendte. Man maa erindre, at det her forudsættes, at den vundne Rente ikke selv forrentes.

Eks. En Mand har købt 4 pCts. Obligationer for 90 og sælger dem to Aar efter for 92; hvor mange pCt. p. a. (pro anno, aarlig) har han tjent? (simpel Rente).

Da han i de to Aar har haft 8 i Rente, har han givet 90 og faaet 100; altsaa er $b = 100$, $a = 90$, $n = 2$, hvoraf $100 = 90(1+2r)$; $r = \frac{1}{18} = 0{,}055\ldots$; han har altsaa faaet $100 \,.\, 0{,}055\ldots = 5\frac{5}{9}$ pCt. p. a. af sine Penge.

67. **Sammensat Rentes Regning.** Vi forudsætte her, at Renten ved hver Termins Slutning lægges til Kapitalen og forrentes med denne. Kalde vi den oprindelige Kapital a, Rentefoden r, Kapitalens Størrelse efter n Terminers Forløb a_n, finde vi

$$a_1 = a + ar = a(1+r),$$

der viser os, at en Kapital ved at staa een Termin multipliceres med $(1+r)$; nu staar Kapitalen a_1 atter een Termin og vokser derved til $a_2 = a(1+r)^2$ o. s. v., saa at man faar

$$a_n = a(1+r)^n, \tag{3}$$

$$a = \frac{a_n}{(1+r)^n} = a_n(1+r)^{-n}. \tag{4}$$

Vi se heraf, at en Kapital forandrer sig med Tiden, saaledes, at man ikke alene maa angive en Kapitals Størrelse, men tillige det Tidspunkt, da den har denne Størrelse; de to Formler (3) og (4) vise os, at:

Man kan flytte en Kapital frem i Tiden, naar man for hver Termin, den føres frem, multiplicerer med $(1+r)$, og man kan føre den tilbage i Tiden, naar man for hver Termin dividerer den med $(1+r)$.

Eks. En Kapital er a Kr. 1860; hvor stor er den 1870, og hvor stor var den 1850, naar Rentefoden er r? 1870 er den $a(1+r)^{10}$, og 1850 var den $a:(1+r)^{10}$.

68. Den fundne Ligning

$$a_n = a(1+r)^n$$

tjener til Bestemmelse af en af de fire Størrelser, naar de tre andre ere givne. I Reglen benyttes Logaritmer til Beregning, og er n den ubekendte, kan Ligningen kun løses ved Hjælp af Logaritmer; man har

$$\left.\begin{aligned}
a_n &= a(1+r)^n; \quad \log a_n = \log a + n \log(1+r).\\
a &= a_n:(1+r)^n; \quad \log a = \log a_n - n\log(1+r).\\
1+r &= \sqrt[n]{\frac{a_n}{a}}; \quad \log(1+r) = \frac{1}{n}(\log a_n - \log a).\\
n &= \frac{\log a_n - \log a}{\log(1+r)}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Eks. 1. 500 Kr. vokse i 7 Aar til 600 Kr. Find Rentefoden.

$$\log(1+r) = \tfrac{1}{7}(\log 600 - \log 500) = 0{,}01131;$$
$$1 + r = 1{,}0264; \quad r = 0{,}0264.$$

Eks. 2. Hvorlænge skal en Kapital staa paa Rente til 4 pCt. for at fordobles?

$$2a = a \,.\, 1{,}04^n; \quad \log 2 = n \log 1{,}04;$$
$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}01703} = 17{,}7.$$

Man ser, at a gaar bort af Ligningen; derved vises, at Resultatet ikke afhænger af Kapitalens Størrelse.

Eks. 3. En Kapital staar 4 Aar til 4 pCt., derpaa 5 Aar til 5 pCt., derpaa 6 Aar til 6 pCt. Til hvormange pCt. maatte den staa alle de 15 Aar for at give samme Resultat?

$$a \,.\, 1{,}04^4 \,.\, 1{,}05^5 \,.\, 1{,}06^6 = a(1+r)^{15}.$$
$$\log(1+r) = \tfrac{1}{15}(0{,}06812 + 0{,}10595 + 0{,}15186).$$
$$\log(1+r) = 0{,}02173; \quad 1 + r = 1{,}0513,$$

altsaa 5,13 pCt.

69. Dersom man i en Opgave har at gøre med flere Kapitaler, maa disse for at kunne adderes eller subtraheres henføres til samme Tid, i Reglen bedst til den Tid, da den ubekendte Kapital tænkes udbetalt.

Eks. 1. A har en Fordring a, der forfalder 1879, en Fordring b, der forfalder 1900, og en Fordring c, der forfalder 1890; B har en Fordring d, der forfalder 1882, og en Fordring e, der forfalder 1897; hvormeget skal B give A i Bytte i 1892? (Rentefod r).

A's Fordringer ere 1892 henholdsvis

$$a(1+r)^{13}, \quad b:(1+r)^{8}, \quad c(1+r)^{2}.$$

B's Fordringer ere samme Aar

$$d(1+r)^{10}, \quad e:(1+r)^{5}.$$

Eks. 2. A satte 500 Kr. ud 1860 og 300 Kr. 1870; 1880 havde han i Alt 2600 Kr.; hvor stor var Rentefoden?

$$500(1+r)^{20}+300(1+r)^{10} = 2600.$$

Denne Ligning er af anden Grad med Hensyn til $(1+r)^{10}$; man faar

$$(1+r)^{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+520}}{10} = \frac{-3+23}{10} = 2,$$

$$r = 0{,}0718,$$

idet den anden Løsning maa forkastes.

70. **Brudne Terminer.** Ligning (4) viser, at (3) ogsaa gælder for et negativt Antal Terminer, naar man ved at føre en Kapital $-n$ Terminer frem i Tiden forstaar, at den skal føres n Terminer tilbage. Formlen gælder ogsaa for n brudden, naar vi, ved at dele en Termin i flere mindre, bestemme den til den lille Termin svarende Rentefod saaledes, at hverken Kreditor eller Debitor har

Fordel af Delingen. Dele vi en Termin (Rentefod r) i q mindre (Rentefod r_1), skulle vi altsaa have

$$a(1+r_1)^q = a(1+r),$$

da denne Ligning udtrykker, at Kapitalen a vokser lige meget, hvad enten den staar ude i den ene hele Termin eller i de q lige store Terminer, i hvilke denne er delt; man faar altsaa

$$1+r_1 = \sqrt[q]{1+r}. \tag{6}$$

Eks. Hvormange pCt. halvaarlig svare til 4 pCt. helaarlig?

$$1+r_1 = \sqrt{1{,}04} = 1{,}0198, \text{ altsaa } 1{,}98 \text{ pCt.}$$

Staar nu en Kapital i n hele og p af de smaa Terminer, vokser den til

$$a(1+r)^n(1+r_1)^p = a(1+r)^n(1+r)^{\frac{p}{q}} = a(1+r)^{n+\frac{p}{q}},$$

der viser, at (3) ogsaa gælder, naar Terminernes Antal er bruddent.

71. **Annuiteter.** En Annuitet er en Række lige store Summer, der betales een hver Termin; Annuitetens Kapitalværdi til et vist Tidspunkt er den Kapital, som til dette Tidspunkt har samme Værdi som alle de enkelte Udbetalinger have tilsammen. Man finder derfor Kapitalværdien ved at føre alle de enkelte Udbetalinger hen til det angivne Tidspunkt og addere dem.

Lad Rentefoden være r, Terminernes Antal n, medens de lige store Summer ere a, og A er Annuitetens Kapitalværdi samtidig med, at a betales sidste Gang. Den sidste Udbetaling har da paa dette Tidspunkt Værdien a, medens den forrige har Værdien $a(1+r)$, den forrige Værdien $a(1+r)^2$ o. s. v. Den første Udbetaling har da, da den skal føres $n-1$ Terminer frem, Værdien $a(1+r)^{n-1}$; man har altsaa

$$A = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots a(1+r)^{n-1}.$$

Paa højre Side have vi en Kvotientrække med n Led og Kvotienten $(1+r)$; altsaa er

$$A = \frac{a}{r}((1+r)^n - 1). \tag{7}$$

Denne Formel benyttes f. Eks., dersom man søger, hvor stor en Kapital man har samlet, naar man hver Termin i længere Tid har sat den samme Sum paa Rente. Dersom man derimod afbetaler en Gæld G med n aarlige lige store Afdrag (Rentefod r), saaledes, at det første Afdrag betales en Termin efter, at Gælden er stiftet, bliver G Kapitalværdien en Termin før den første Udbetaling. Den findes, naar man fører den ovenfor fundne Kapitalværdi n Terminer tilbage i Tiden ved Division med $(1+r)^n$; man faar altsaa

$$G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right). \tag{8}$$

72. Af denne Ligning kan man finde G, a eller n, dersom i hvert af Tilfældene de tre manglende Størrelser ere bekendte; r kan derimod i Reglen kun findes ved Forsøg, da Ligningen med Hensyn til r er af Graden $n+1$.

Naar G beregnes, søger man først $\frac{1}{(1+r)^n}$ ved Hjælp af Logaritmer; kaldes denne Størrelse q, har man

$$\log q = -n \log(1+r);\ q = 0, \ldots$$

og derpaa

$$G = \frac{a}{r}(1-q). \tag{9}$$

Dersom a og r ere smaa Tal, udføres den sidste Regning uden Logaritmer.

Søges a, faar man

$$a = \frac{rG}{1-q}. \tag{10}$$

Søges n, faar man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{rG}{a} = 1 - \frac{1}{(1+r)^n};\ \frac{1}{(1+r)^n} = 1 - \frac{rG}{a} = \frac{a-rG}{a};\\ &(1+r)^n = \frac{a}{a-rG};\ n = \frac{\log a - \log(a-rG)}{\log(1+r)}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

73. Dersom $a = rG$, er $\log(a-rG) = \log 0 = -\infty$; man betaler i dette Tilfælde kun Renten af Gælden og faar derfor aldrig Gælden afbetalt; dersom $a < rG$, betaler man ikke engang Renten af Gælden; $a-rG$ bliver negativ og har ingen reel Logaritme. For $a > rG$ er derimod Opgaven altid mulig.

74. Dersom man søger n, finder man i Reglen ikke et helt Tal, men man faar $n = p + \beta$, hvor p er et helt Tal og $\beta < 1$. Naar man har betalt p Afdrag, er Gælden ikke betalt, men betaler man a engang til, har man betalt for meget; man kan derfor gøre sin sidste Udbetaling noget større, saa at hele Gælden er betalt efter p Terminer; er Forøgelsen x, altsaa ført tilbage $\frac{x}{(1+r)^p}$, har man derfor

$$G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{p+\beta}}\right) \text{ og } G = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^p}\right) + \frac{x}{(1+r)^p},$$

hvoraf

$$x = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^\beta}\right).$$

Eks. 1. En Gæld A til 4 pCt. afbetales, idet man i 10 Aar betaler 100 Kr. aarlig; hvor stor er Gælden?

$$A = \frac{100}{0{,}04}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{10}}\right).$$

$$\log q = -10 \,.\, 0{,}01703 = 0{,}82970 - 1;\ q = 0{,}6756.$$

$$A = 100 \,.\, 0{,}3244 : 0{,}04 = 811.$$

Der er ikke interpoleret ved Bestemmelsen af q, da den sidste Decimal af Logaritmen er upaalidelig.

Eks. 2. En Gæld paa 1622 Kr. til 4 pCt. skal være afbetalt i 10 Aar; hvor stort er det aarlige Afdrag?

$$a = \frac{1622 \,.\, 0{,}04}{1-q} = \frac{1622 \,.\, 0{,}04}{0{,}3244} = 200.$$

Eks. 3. En Gæld paa 2000 Kr. til 5 pCt. forrentes og afdrages med 150 Kr. aarlig; efter hvor lang Tids Forløb er den betalt?

$$n = \frac{\log 150 - \log(150-100)}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}47712}{0{,}02119} = 22{,}516.$$

$$x = \frac{150}{0{,}05}\left(1 - \frac{1}{1{,}05^{0{,}516}}\right) = \frac{150}{0{,}05} \,.\, 0{,}0249 = 74{,}7.$$

Eks. 4. En Gæld A betales i 10 Aar, idet den aarlige Udbetaling er det dobbelte af Renten af den oprindelige Gæld; find r.

$$A = \frac{2Ar}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{10}}\right);\ (1+r)^{10} = 2;\ r = 0{,}0718.$$

Eks. 5. En Gæld A (Rentefod r) kan afbetales i n Aar ved et vist Afdrag; hvor længe varer det, naar Afdraget fordobles?

$$A = \frac{a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) = \frac{2a}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^x}\right);$$

$$(1+r)^x = \frac{2(1+r)^n}{(1+r)^n + 1};$$

$$x = \frac{\log 2 + n\log(1+r) - \log((1+r)^n + 1)}{\log(1+r)}.$$

Eksempler til Øvelse.

(Rente af Rente.)

1. 713 Kr. 25 Øre staa i 15 Aar til $3\frac{1}{2}$ pCt. aarlig; hvormeget har man da?

2. Til hvilken Rentefod skal en Kapital staa for i 20 Aar at blive 3 Gange saa stor, som den oprindelig var?

3. Hvormange Aar skal 7291 Kr. 75 Øre staa for at vokse til 20000 Kr., naar den aarlige Rente er 24 Øre af 5 Kr.?

4. Paa en Kapital a tabes aarlig $100r$ pCt.; hvor stor er den efter n Aars Forløb?

5. Paa en Kapital a vindes n Aar og tabes derpaa n Aar aarlig $100r$ pCt.; hvor stor er den efter de $2n$ Aars Forløb? hvor stor er den, dersom der først tabes og derpaa vindes?

6. Til hvilken Sum vil 1 Øre til 5 pCt. vokse i 1901 Aar?

7. Kjøbenhavn havde 100000 Indbyggere Aar 1800, 210000 Indbyggere Aar 1876; hvormange Indbyggere vil den have Aar 2000, dersom Folkemængden aarlig vokser lige mange pCt.?

8. A skal betale 713 Kr. 1890, 1911 Kr. 1886 og 1000 Kr. 1878; han ønsker at betale hele sin Gæld 1884; hvormeget skal han da betale, naar Renten er $4\frac{1}{2}$ pCt.?

9. 300 Kr. staa et vist Antal Aar og 500 Kr. dobbelt saa mange Aar til 5 pCt. De to Summer ere tilsammen voksede til 1500 Kr. Hvormange Aar?

10. Hvilken maanedlig Rente svarer til 6 pCt. p. a.?

11. En Øre af 100 Kr. i Rente daglig, hvormange pCt. p. a. er det?

12. A har nu en Gæld, som han skal betale om 15 Aar; den Sum, han da skal betale, adderet til den Sum, han skulde have betalt, hvis han havde afgjort Gælden for 15 Aar siden, udgør Gælden, multipliceret med 2,5. Find Rentefoden.

13. A sætter aarlig 700 Kr. i Sparekassen; hvormeget har han efter 20 Aars Forløb, naar Renten er 3,8 pCt. p. a.?

14. Hvorlænge varer det, før en Gæld er afbetalt, naar Renten er 4 pCt. og der aarlig betales 6 pCt. af den oprindelige Gæld?

15. A handler med en Kapital paa 20000 Kr. og tjener aarlig 20 pCt.; til at leve for bruger han aarlig 2000 Kr., der lægges tilside ved Aarets Begyndelse; hvormeget ejer han efter 25 Aars Forløb?

16. Paa en Gæld af 775 Kr. til 4 pCt. afbetales aarlig 31 Kr. Hvorlænge varer det, før Gælden er betalt?

17. To Kar rumme hvert 100 Potter; det ene er fyldt med Vin, det andet med Vand; samtidig tages der en Pot op af hvert Kar og hældes over i det andet Kar; hvad er der i Karrene, naar denne Operation er gentagen 20 Gange?

18. Hvormeget skal man indskyde i en Sparekasse aarlig i 10 Aar for i de følgende 10 Aar at kunne hæve 800 Kr. aarlig? Renten er $3\frac{1}{2}$ pCt. p. a.

III. Tillæg.

Permutationer og Kombinationer.

1. **Permutationer.** Dersom en Gruppe af Genstande f. Eks. Bogstaver (Elementer) stilles efter hinanden i en bestemt Orden, danne de en Række. Ved Antallet af Permutationer af n Elementer forstaa vi Antallet af forskellige Rækker, der kunne dannes af disse Elementer. Vi ville betegne dette Antal ved P_n. Man har da f. Eks. $P_3 = 6$, idet 3 Elementer kunne opstilles paa 6 Maader (*abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*, *cba*).

2. n Elementer kunne permuteres paa $1.2.3\ldots n$ Maader.

Lad a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ være de n Elementer. Af Rækkerne ville vi betragte dem, der begynde med a_1; af disse er der saa mange, som der er Maader, paa hvilke man kan stille de øvrige $n-1$ efter a_1; dette Antal er P_{n-1}; da der er lige saa mange af de P_n Rækker, der begynde med a_2, med a_3 o. s. v., har man altsaa

$$P_n = nP_{n-1},$$

hvoraf

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= (n-1)P_{n-2}, \\ P_{n-2} &= (n-2)P_{n-3}, \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ P_2 &= 2P_1, \\ P_1 &= 1, \end{aligned}$$

hvoraf ved Multiplikation

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2 \cdot 1.$$

Dette Tal betegnes for Kortheds Skyld ved $[n]$ eller $n!$

3. Dersom α af Elementerne ere ens, blive de Rækker ens, der kun ere forskellige derved, at de ens Elementer ere omsatte indbyrdes. Der falder saaledes $[\alpha]$ og $[\alpha]$ Rækker sammen til een, og det hele Antal Permutationer er derfor $[n] : [\alpha]$; ere β andre Elementer ens, maa Antallet yderligere divideres med $[\beta]$, o. s. v.

Eks. En By har Form af et Rektangel; den har $m+1$ parallele Gader paa den ene Led og $n+1$ paa den anden; paa hvormange forskellige Maader kan man, uden at forlænge sin Vej, gaa fra det ene Hjørne af Byen til det modsatte?

Lad os sætte et a, hvergang vi gaa et enkelt Stykke i den ene Retning; et b, naar vi gaa i den derpaa vinkelrette Retning; en Række som

$$aababbbaaba\ \ldots,$$

hvor a forekommer m, b n Gange, vil da repræsentere een Vej; der er altsaa saa mange forskellige Veje, som der kan dannes Rækker af $m+n$ Elementer, af hvilke henholdsvis m og n ere ens; det søgte Antal er derfor $[m+n] : [m] : [n]$.

4. Ved $P_{n,m}$ (Permutationer af n Elementer til m) forstaa vi det Antal Rækker med m i hver, som kunne dannes af de n Elementer $(m < n)$. Af Rækker, der begynde med a_1, er der saa mange, som der er Maader at udtage de manglende $m-1$ mellem a_2, a_3 ... a_n; da dette Antal er $P_{n-1,m-1}$ og Antallet af Rækker, som begynde med a_2, a_3 ... maa være det samme som Antallet af dem, der begynde med a_1, faar man

$$P_{n,m} = n P_{n-1,m-1}$$

og

$$P_{n-1,m-1} = (n-1) P_{n-2,m-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{n-m+2,2} = (n-m+2) P_{n-m+1,1},$$

$$P_{n-m+1,1} = n-m+1,$$

hvoraf

$$P_{n,m} = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{[n]}{[n-m]}.$$

Eks. Find Summen af alle de Tal, der skrives med 5 forskellige Cifre, og i hvilke 0 ikke forekommer.

Ethvert Ciffer staar paa samme Plads i $P_{8,4}$ af Tallene og lige saa hyppigt paa de andre Pladser; Summen er derfor $(1+2+\ldots+9)(1+10+10^2+10^3+10^4) P_{8,4}$.

5. **Permutationer med Gentagelser.** Vi forstaa herved saadanne Permutationer, ved hvilke det samme Element kan forekomme flere Gange i den samme Række. Ved de Rækker, der begynde med a_1, blive da de manglende $m-1$ Elementer ikke som ovenfor at udtage mellem $n-1$, men mellem n Elementer; vi faa derfor, idet vi betegne denne Slags Permutationer ved Π,

$$\Pi_{n,m} = n \Pi_{n,m-1},$$

$$\Pi_{n,m-1} = n \Pi_{n,m-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_{n,2} = n \Pi_{n,1},$$

$$\Pi_{n,1} = n,$$

hvoraf

$$\Pi_{n,m} = n^m.$$

Eks. Antallet af Tal i Rækken 0, 1, 2 ... $10^n - 1$ er 10^n. Skrives de Tal, der have færre end n Cifre, som n-cifrede, idet der sættes Nuller foran, danne Tallene i Rækken alle de her betragtede Permutationer af de 10 Cifre til n; Formlen giver ogsaa Antallet 10^n.

6. **Kombinationer.** Dersom vi mellem n Elementer udtage Grupper paa m uden at tage Hensyn til Ordnen af disse m, danne Grupperne Kombinationer af n til m; vi betegne deres Antal ved $K_{n,m}$.

Da der af hver Gruppe af m Elementer kan dannes $[m]$ Rækker og vi derved faa alle Permutationerne, er

$$[m]\, K_{n,m} = P_{n,m},$$

altsaa

$$K_{n,m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m} = \frac{[n]}{[m]\,[n-m]}.$$

Da Antallet maa være et helt Tal, ser man heraf, at Produktet af de m første Tal af Talrækken gaar op i Produktet af hvilke som helst m paa hinanden følgende Tal. Endvidere ser man, at Antallet er det samme, hvad enten man kombinerer n til m eller til $n-m$; dette er ogsaa umiddelbart indlysende, thi hvergang man udtager m, lader man $n-m$ blive tilbage.

Eks. Gennem to og to af n vilkaarlige Punkter trækkes rette Linier; hvormange Skæringspunkter, foruden de givne, faa disse Linier?

Gennem 4 vilkaarlige af Punkterne kan man trække 6 Linier, og disse faa 3 ny Skæringspunkter; det søgte Antal er derfor $3\,K_{n,4}$.

7. Ved Opgaver af den her behandlede Art bør man vogte sig for at komme til Rækker. Skal man f. Eks. finde Antallet af Skæringspunkter for n Linier, bør man ikke ræsonnere saaledes: den ene Linie skærer de $n-1$ andre, den næste $n-2$, den næste $n-3$ o. s. v.; men man bør sige: et Skæringspunkt dannes ved Kombinationen af to Linier, altsaa er der $K_{n,2}$ Skæringspunkter.

Eksempler til Øvelse.

1. En Mand har 5 Par Benklæder, 4 Veste og 3 Frakker; hvor ofte kan han vise sig i forskellig Paaklædning?

2. Paa hvormange Maader kunne 52 Kort deles lige mellem 4 Personer?

3. En Plan er bestemt ved 3 Punkter; hvormange Planer kan der lægges gennem tre og tre af n vilkaarlige Punkter, og hvor mange Skæringslinier, der ikke gaa gennem et af de givne Punkter, faa disse Planer?

4. Hvormange forskellige Udtryk kan man, ved Ombytning af Bogstaverne, danne af $(a+b)(c+d)(e+f)\ldots$, hvor Bogstavernes Antal er $2n$?

5. Paa hvormange Maader kunne n Herrer og n Damer sidde om et Bord, naar hver Dame skal sidde mellem to Herrer?

6. Bevis, at Antallet af Tal, der gaa op i $a^m b^n c^p \ldots$, hvor $a, b, c \ldots$ ere Primtal, er

$$(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$$

7. I en Permutation af Tallene 1, 2, 3 … n danne to vilkaarlige af Tallene en Inversjon, naar det første er det største. Hvormange Inversjoner finder man i alle de $[n]$ Permutationer af Tallene?

Binomialformlen.

8. Man har

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1 a_2;$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$$
$$= x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3.$$

Vi ville nu søge et almindeligt Udtryk for Produktet

$$P_n = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n). \tag{1}$$

For Kortheds Skyld ville vi ved $S_{n,p}$ forstaa Summen af Produkterne af p og p af de n Størrelser $a_1, a_2, \ldots a_n$; man har altsaa

$$\left.\begin{array}{l} S_{n,1} = a_1 + a_2 + \ldots a_n \\ S_{n,2} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n,n} = a_1 a_2 \ldots a_n \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Derved skrives Ligningerne ovenfor

$$P_2 = x^2 + S_{2,1} x + S_{2,2},$$
$$P_3 = x^3 + S_{3,1} x^2 + S_{3,2} x + S_{3,3};$$

man slutter heraf, at man i Almindelighed maa have

$$\left.\begin{array}{l} P_n = x^n + S_{n,1} x^{n-1} + S_{n,2} x^{n-2} + \ldots \\ \qquad + S_{n,p} x^{n-p} + \ldots S_{n,n-1} x + S_{n,n} \end{array}\right\}. \tag{3}$$

For at bevise Rigtigheden af denne Slutning benytte vi det saakaldte **Induktionsbevis**. Dette bestaar deri, at vi bevise, at dersom Formlen (3) gælder for een Værdi af n, gælder den ogsaa for den følgende Værdi af n; naar dette er bevist, kunne vi slutte, at Formlen er almengyldig, thi den gælder for $n = 3$ og derfor ogsaa for $n = 4$, men gælder den for $n = 4$, gælder den ogsaa for $n = 5$ o. s. v.

Af P_n danne vi P_{n+1} ved Multiplikation med $x + a_{n+1}$; vi faa derved

$$P_{n+1} = x^{n+1} + (S_{n,1} + a_{n+1}) x^n \ldots$$
$$+ (S_{n,p} + a_{n+1} S_{n,p-1}) x^{n-p+1} + \ldots a_{n+1} S_{n,n}.$$

Nu bestaar $S_{n+1,p}$ dels af Led, der ikke indeholde Faktoren a_{n+1}, dels af Led, der indeholde denne Faktor; de første Led ere netop $S_{n,p}$; i de sidste kan man sætte den fælles Faktor a_{n+1} uden for en Parentes; i Parentesen findes da Summen af Produkterne af $p - 1$ og $p - 1$ af Størrelserne $a_1, a_2 \ldots a_n$; men denne Sum er netop $S_{n,p-1}$; man har altsaa

$$S_{n+1,p} = S_{n,p} + a_{n+1} S_{n,p-1} \tag{4}$$

og følgelig

$$P_{n+1} = x^{n+1} + S_{n+1,1} x^n + \ldots S_{n+1,p} x^{n-p+1} + \ldots S_{n+1,n+1},$$

der viser, at Formlen (3) gælder for $n + 1$, dersom den gælder for n; den gælder altsaa almindeligt.

9. Dersom $a_1 = a_2 \ldots = a_n = a$,

bliver $\qquad P_n = (x + a)^n,$

medens alle Leddene i $S_{n,p}$ blive a^p. Antallet af saadanne Led er lig det Antal Maader, paa hvilket p Størrelser kunne udtages mellem n, altsaa $K_{n,p}$. Af (3) faar man derved

$$\left.\begin{array}{l} (x + a)^n = x^n + K_{n,1} x^{n-1} a \\ \qquad + K_{n,2} x^{n-2} a^2 + \ldots K_{n,p} x^{n-p} a^p + \ldots + a^n \end{array}\right\}, \tag{5}$$

hvor $\qquad K_{n,1} = \dfrac{n}{1}; \quad K_{n,2} = \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2}; \ldots$

$$K_{n,p} = \frac{n(n-1) \ldots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p};$$

Ved Hjælp af denne Formel, den saakaldte **Binomialformel**, kan en toleddet Størrelse opløftes til n^{te} Potens. Da $K_{n,n-p} = K_{n,p}$, danne Koefficienterne en symmetrisk Række. Have x og a forskellige Fortegn, blive Leddenes Fortegn afvekslende $+$ og $-$. Det er naturligvis underforstaaet, at n er et positivt, helt Tal.

Eks.

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5xa^4 + a^5.$$
$$(x - a)^6 = x^6 - 6x^5 a + 15x^4 a^2 - 20x^3 a^3 + 15x^2 a^4$$
$$- 6xa^5 + a^6.$$
$$(a + bi)^7 = a^7 - 21a^5 b^2 + 35a^3 b^4 - 7ab^6$$
$$+ i(7a^6 b - 35a^4 b^3 + 21a^2 b^5 - b^7).$$

(1,3?)

Bevis, at $1 + K_{n,1} + K_{n,2} + \ldots K_{n,n-1} + 1 = 2^n$.
Hvilken Formel kan udledes ved Sammenligning af Koefficienterne til x^n i Identiteten

$$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}?$$

Taylors Formel.

10. Et Udtryk, der indeholder x, og hvis Værdi derfor er afhængig af den Værdi, som man tillægger x, kaldes en Funktion af x. Saaledes er f. Eks. $\sqrt{x}$, $\log x$, ax^n, $3x^2 + 5x + 1$ o. s. v. Funktioner af x. For Funktioner af x bruges Fællesbenævnelsen $f(x)$, hvor dog f kan erstattes ved andre Bogstaver. $f(x)$ betegner altsaa ethvert Udtryk, der indeholder x. Her ville vi kun betragte hele, rationale Funktioner af x, det vil sige Funktioner af Formen

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n. \qquad (1)$$

11. Af en given Funktion af x, $f(x)$, dannes en ny Funktion af x, den afledede Funktion af $f(x)$, paa følgende, rent mekaniske Maade: Af ethvert Led i $f(x)$ dannes et Led af den afledede Funktion, idet man multiplicerer Leddet med Eksponenten til x og trækker 1 fra Eksponenten. Af $4x^3$ dannes saaledes $3 \cdot 4x^{3-1} = 12x^2$; af ax^n dannes nax^{n-1}, af a eller ax^0 dannes $0 \cdot ax^{-1}$, saa at Led, der ikke indeholde x, ingen Betydning faa ved Dannelsen af den afledede Funktion. Den afledede Funktion af $f(x)$ betegnes ved $f'(x)$; af denne kan atter dannes dens afledede Funktion $f''(x)$, og saaledes dannes videre $f'''(x) \ldots f^{(n)}(x)$.

Eks.
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5x - 1. \\ f'(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 12x + 5. \\ f''(x) &= 12x^2 - 18x + 12. \\ f'''(x) &= 24x - 18. \\ f^{IV}(x) &= 24. \\ f^{V}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Man ser let, at dersom $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$, bliver $f^{(n)}(x) = a_0 n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, medens de følgende afledede Funktioner ere Nul.

12. Det hænder ofte ved Anvendelser af Algebraen, at man i en Funktion af x skal ombytte x med $x + h$, hvor h er vilkaarlig, og man ønsker da i Reglen Resultatet ordnet efter Potenser af h. Saaledes af

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

faar man

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 3(x+h)^2 + 2(x+h) + 1 \\ &= 3x^2 + 2x + 1 + h(6x+2) + 3h^2. \end{aligned}$$

Denne Ordning kan naturligvis altid i de forekommende Tilfælde udføres, idet man udvikler de forekommende Potenser af $x+h$ efter Binominalformlen og ordner; man kan imidlertid ved Hjælp af de afledede Funktioner danne en almindelig Formel.

Af $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$

dannes

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + a_2(x+h)^{n-2} + \ldots,$$

hvor

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}h^2 + \ldots$$

$$(x+h)^{n-1} = x^{n-1} + \frac{n-1}{1}x^{n-2}h + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}x^{n-3}h^2 + \ldots$$

$$(x+h)^{n-2} = x^{n-2} + \frac{n-2}{1}x^{n-3}h + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}x^{n-4}h^2 + \ldots$$

. . . .

For at faa $f(x+h)$ multiplicerer man disse Ligninger henholdsvis med a_0, a_1, a_2 . . . og adderer. Man faar derved

$$f(x+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots,$$

hvor

$$A_0 = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots \qquad = f(x),$$

$$A_1 = \frac{n}{1} a_0 x^{n-1} + \frac{n-1}{1} a_1 x^{n-2} + \frac{n-2}{1} a_2 x^{n-3} + \ldots = f'(x),$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{1.2} a_0 x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_1 x^{n-3} + \ldots = \frac{1}{1.2} f''(x),$$

. . . . ,

hvorved

$$\left. \begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} \\ &+ f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots + a_0 . h^n \end{aligned} \right\}, \qquad (2)$$

idet $f^{(n)}(x) = a_0 n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$.

Denne Formel er bekendt under Navn af Taylors Formel; det er her forudsat, at n er et helt, positivt Tal.

Eks. Hvad bliver $f(x+1)$, naar

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1?$$

Man har

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1;\; f'(x) = 3x^2 + 4x + 1;$$
$$f''(x) = 6x + 4;\; f'''(x) = 6;\; h = 1,$$

altsaa

$$f(x+h) = x^3 + 2x^2 + x - 1 + (3x^2 + 4x + 1)h$$
$$+ (3x+2)h^2 + h^3;\; f(x+1) = x^3 + 5x^2 + 8x + 3.$$

13. Af

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

følger

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + \ldots$$

Denne Ligning er identisk, og vi kunne derfor overalt sætte $h = 0$; derved falde alle Led paa højre Side af

Lighedstegnet undtagen $f'(x)$ bort. Brøken paa venstre Side bliver ubestemt, men faar en vis Grænseværdi, naar h nærmer sig til Nul (I, 122); man har altsaa

$$f'(x) = \lim . \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad (3)$$

hvor Tegnet lim . betyder, at man paa højre Side skal tage Grænseværdien, det vil sige den Værdi, til hvilken Brøken nærmer sig, naar h aftager mod Nul. Saaledes faar man f. Eks. for $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim . \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim . \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$
$$= \lim (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

14. Medens der ifølge vor Definition kun kan dannes afledede Funktioner af hele, rationale Funktioner, har derimod Brøken i (3) en Grænseværdi ogsaa for andre Funktioner. Differentialregningen gaar ud paa at bestemme denne Grænseværdi for alle Funktioner, og, idet man da ved $f'(x)$ forstaar denne, viser man, at Taylors Formel med visse Indskrænkninger bliver almengyldig.

Eks. $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(x) = \lim \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

Multipliceres Brøkens Tæller og Nævner med

$$\sqrt{x+h} + \sqrt{x},$$

faar man

$$f'(x) = \lim \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. Find $f(x-2)$, naar $f(x) = 3x^3 - x - 1$.
2. Find $f(x+h)$, naar $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.
3. Find $f'(x)$, naar $f(x) = (x+a)^n$.
4. Find $f'(x)$, naar $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Kædebrøk.

15. En Kædebrøk er en Sum af et helt Tal og en Brøk, hvis Tæller er 1, og hvis Nævner er en ny Kædebrøk.

Skal en Brøk forvandles til Kædebrøk, skrives den som blandet Tal; Brøken i dette skrives som 1, divideret med den omvendte Brøk, der atter skrives som et blandet Tal o. s. v.

Eks.

$$\frac{85}{33} = 2 + \frac{19}{33};\ \frac{19}{33} = \frac{1}{1 + \frac{14}{19}};\ \frac{14}{19} = \frac{1}{1 + \frac{5}{14}} \text{ o. s. v.},$$

altsaa

$$\frac{85}{33} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}.$$

Man ser let, at man netop udfører de samme Regninger, som naar man søger største fælles Faktor for Tæller og Nævner, og at de Tal, som man søger, netop ere de Kvotienter, som faas ved Divisjonerne.

Eks. $\frac{117}{41}$, $\frac{331}{75}$ og $\frac{113}{400}$ forvandles til Kædebrøker.

16. Den almindelige Form for en Kædebrøk er

$$\frac{y}{z} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}},$$

hvor a_0, a_1, a_2 . . kaldes de ufuldstændige Kvotienter, medens enhver af disse, naar den følgende Kædebrøk adderes til den, giver en fuldstændig Kvotient; den til a_p svarende fuldstændige Kvotient

ville vi betegne ved x_p; man har altsaa

$$\frac{y}{z} = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \text{ o. s. v.}$$

Dersom man standser Kædebrøken ved en ufuldstændig Kvotient og bortkaster det øvrige, faar man en Konvergent til Kædebrøken. Standse vi ved a_p, faa vi saaledes en Konvergent, hvis Tæller og Nævner vi ville betegne henholdsvis med y_p og z_p; man har altsaa

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1};\ \frac{y_1}{z_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} \text{ o. s. v.},$$

der egentlig bør skrives

$$y_0 = a_0,\ z_0 = 1;\ y_1 = a_0 a_1 + 1,\ z_1 = a_1 \text{ o. s. v.}$$

17. **Beregning af Konvergenterne.** Man har ved almindelig Reduktion

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1};\ \frac{y_1}{z_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1};$$

$$\frac{y_2}{z_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 y_1 + y_0}{a_2 z_1 + z_0};$$

$$\frac{y_3}{z_3} = \frac{a_3 y_2 + y_1}{a_3 z_2 + z_1} \text{ o. s. v.}$$

Man slutter heraf, at man almindelig maa have

$$\frac{y_r}{z_r} = \frac{a_r y_{r-1} + y_{r-2}}{a_r z_{r-1} + z_{r-2}}, \tag{1}$$

og Slutningens Rigtighed vises ved Induktion. Betragtning af Kædebrøken viser, at man kan danne $\frac{y_{r+1}}{z_{r+1}}$ af $\frac{y_r}{z_r}$ ved i den sidste for a_r at sætte $a_r + \frac{1}{a_{r+1}}$; man faar altsaa, hvis (1) gælder,

$$\frac{y_{r+1}}{z_{r+1}} = \frac{\left(a_r + \frac{1}{a_{r+1}}\right) y_{r-1} + y_{r-2}}{\left(a_r + \frac{1}{a_{r+1}}\right) z_{r-1} + z_{r-2}} = \frac{a_{r+1} y_r + y_{r-1}}{a_{r+1} z_r + z_{r-1}},$$

der viser, at (1) gælder for enhver Værdi af r, dersom dersom den gælder for den nærmest lavere.

Man kan nu let danne Konvergenterne efterhaanden, idet man først opskriver de to første og benytter (1).

Eks. 1. Ere de ufuldstændige Kvotienter 2, 1, 1, 2, 1, 3, 2, faar man Konvergenterne

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{5},\ \frac{18}{7},\ \frac{67}{26},\ \frac{152}{59};$$

den sidste Konvergent er selve Kædebrøken.

Eks. 2. Find Konvergenterne, naar de ufuldstændige Kvotienter ere 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3.

Eks. 3. Find Konvergenterne til Kædebrøken

$$(a,\ a,\ a,\ a,\ a,\ a,\ a)^{*}).$$

18. (1) viser, at enhver Konvergent ligger mellem de to foregaaende og nærmest ved den sidste (I, 81); dens Tæller og Nævner ere nemlig dannede ved Addition af de to foregaaendes, efter at den sidste af disse i Tæller og Nævner er multipliceret med a_r. Sætter man x_r for a_r, faar man selve Kædebrøken i Stedet for Konvergenten $\frac{y_r}{z_r}$; selve Kædebrøken ligger derfor ogsaa mellem to hvilke som helst paa hinanden følgende Konvergenter og nærmest ved den sidste.

19. Lad os nu paa en vertikal ret Linie afsætte Punkterne A_0, A_1, A_2.., hvis Højder angive Konvergenternes Værdier. A_1 ligger da over A_0; A_2 falder mellem A_1 og A_0 og nærmest ved A_1; A_3 falder mellem A_2 og A_1, nærmest ved A_2 o. s. v. Da den sidste Konvergent er selve Kædebrøken, slutte vi heraf, at:

*) En Kædebrøk betegnes ofte saaledes ved sine ufuldstændige Kvotienter.

Kædebrøken er større end Konvergenterne med lige, mindre end Konvergenterne med ulige Indeks; Konvergenten med Indeks 0 er den mindste, den med Indeks 1 den største af dem alle.

20. Ligningen (1) staar egentlig i Stedet for de to Ligninger

$$\left.\begin{aligned} y_r &= a_r y_{r-1} + y_{r-2} \\ z_r &= a_r z_{r-1} + z_{r-2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Af disse faas, naar a_r elimineres,

$$y_r z_{r-1} - z_r y_{r-1} = -(y_{r-1} z_{r-2} - z_{r-1} y_{r-2}),$$

der viser, at man i et Udtryk som det paa venstre Side af Lighedstegnet kan gøre Indeks 1 lavere, naar man samtidig giver Udtrykket modsat Fortegn; fortsætter man paa denne Maade, faar man tilsidst

$$y_1 z_0 - z_1 y_0 = (a_0 a_1 + 1) - a_1 a_0 = 1.$$

For $r = 1$ faa vi altsaa Værdien 1, for $r = 2$ faa vi da Værdien -1 o. s. v., saa at man almindeligt har

$$y_r z_{r-1} - z_r y_{r-1} = (-1)^{r-1}. \qquad (3)$$

Heraf følger, at Konvergenterne ikke kunne forkortes.

Man faar nu

$$\frac{y_r}{z_r} - \frac{y_{r-1}}{z_{r-1}} = \frac{(-1)^{r-1}}{z_r z_{r-1}}. \qquad (4)$$

Denne Ligning viser, at Forskellen mellem to paa hinanden følgende Konvergenter bliver numerisk mindre og mindre, jo større r bliver, og at denne Forskel er afvekslende positiv og negativ. Da Kædebrøken ligger mellem de to Konvergenter, ser man tillige, at man ved for Kædebrøken at sætte $\frac{y_{r-1}}{z_{r-1}}$ begaar en Fejl, der er mindre end $\frac{1}{z_{r-1}^2}$.

21. **Enhver Brøk, hvis Nævner er mindre end en Konvergents Nævner, kan ikke ligge Kædebrøken saa nær som denne Konvergent.**

Lad Konvergenten være $\frac{y_r}{z_r}$ og $q < z_r$; da er

$$\frac{p}{q} - \frac{y_r}{z_r} = \frac{pz_r - qy_r}{qz_r}; \quad \frac{p}{q} - \frac{y_{r+1}}{z_{r+1}} = \frac{pz_{r+1} - qy_{r+1}}{qz_{r+1}},$$

hvor de to Differensers numeriske Værdier er større end $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$, da deres Tællere mindst ere 1. $\frac{p}{q}$ kan derfor ikke ligge mellem de to Konvergenter, da disses Forskel er $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$; Forskellen mellem $\frac{p}{q}$ og Kædebrøken maa da være større end i alt Fald den ene af Differenserne ovenfor og derfor ogsaa større end $\frac{1}{z_r z_{r+1}}$, der atter er større end Forskellen mellem Kædebrøken og $\frac{y_r}{z_r}$; denne Konvergent er derfor nærmere ved Kædebrøken end $\frac{p}{q}$.

Konvergenterne have altsaa den Egenskab, at de for Kædebrøken give tilnærmede Udtryk, der skrives med mindre Tal end alle andre Brøker, der udtrykke Kædebrøken med lige saa stor Nøjagtighed.

22. Kædebrøker kunne være uendelige, men maa da have en irrational Værdi, da alle rationale Tal forvandles til endelige Kædebrøker. Kædebrøkens irrationale Værdi er den Grænseværdi, til hvilken Konvergenterne nærme sig, naar Indeks vokser uden Grænse.

En uendelig Kædebrøk kan være **periodisk** (ren eller blandet), idet de samme ufuldstændige Kvotienter stadig gentages i samme Orden; Værdien af en saadan Kædebrøk bestemmes som Rod i en kvadratisk Ligning. Er f. Eks. $x = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$

Blandet periodisk NB.

har man
$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}},$$

idet Kædebrøken maa have Værdien x, selv om man afskærer den første Periode; Konvergenterne ere

$$\frac{1}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{10}{7}, \ \frac{10x+3}{7x+2},$$

hvor den sidste er selve Kædebrøken; man har altsaa

$$7x^2 + 2x = 10x + 3, \text{ hvoraf } x = \frac{4 + \sqrt{37}}{7},$$

idet den negative Værdi af x maa forkastes. Omvendt kan en positiv Rod i en kvadratisk Ligning udvikles i en uendelig periodisk Kædebrøk; vi ville kun vise dette ved et Eksempel.

Eks. Er $x = \sqrt{13}$, sætte vi $x = 3 + \frac{1}{x_1}$, idet 3 er det største hele Tal i $\sqrt{13}$; vi faa da

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

idet Brøken ligger mellem 1 og 2; nu er

$$x_2 = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{x_3};$$

$$x_3 = \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{x_4}.$$

Fortsætte vi saaledes, faa vi

$$x = (3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1 \ldots).$$

Eks. 1. Find Konvergenterne til (2, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 1, 4).

2. Find Konvergenterne til 431273 : 391524.

3. Find Værdien af $(1, 2, \overline{2, 1, 3}, 2, 1, 3 \ldots)$; beregn den sjette Konvergent og undersøg Afvigelsen.

4. Find de 4 første Konvergenter til 3,14159265.

Om hele Tal.

23. **Den ubestemte Ligning af første Grad.** Ligningen

$$ax - by = c \tag{1}$$

kan ikke bestemme de to ubekendte x og y. ~~I~~ Stedet For at
at løsningen
for den manglende Ligning kan man sætte den Bestemmelse, at x og y skulle være hele Tal. a, b og c antages at betegne hele Tal. a og b kunne forudsættes indbyrdes primiske, da en fælles Faktor for a og b ogsaa, hvis Opgaven er mulig, maatte findes i c og da kunde bortdivideres.

Ligningen har uendelig mange Løsninger, men disse findes let alle, naar man kender een Løsning. Antag nemlig, at Ligningen tilfredsstilles af $x = \alpha$ og $y = \beta$; man har da

$$a\alpha - b\beta = c$$

og ved Subtraktion fra (1)

$$a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0, \text{ hvoraf } \frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

Da $\frac{b}{a}$ er en uforkortelig Brøk, maa man her have (I, 99)

$$x - \alpha = mb; \quad y - \beta = ma,$$

altsaa

$$x = \alpha + mb; \quad y = \beta + ma, \tag{2}$$

hvor m er et vilkaarligt helt Tal.

Ofte er det tillige givet, at x og y skulle være positive; man kan i saa Fald kun benytte saadanne Værdier af m, for hvilke

$$\alpha + mb > 0; \quad \beta + ma > 0.$$

24. Vi behøve saaledes kun at finde een Løsning for at kende alle Løsninger. Til at finde den ene Løsning har man forskellige Metoder.

1) Da Værdierne af x danne en Differensrække med Differensen b, maa to vilkaarlige Tal med denne Differens

enten begge være Værdier af x, eller ogsaa maa der mellem dem ligge een Værdi af x. Man prøver derfor, idet man for x indsætter alle hele Tal fra $-\frac{1}{2}b$ til $\frac{1}{2}b$ (eller for y alle Tal fra $-\frac{1}{2}a$ til $\frac{1}{2}a$), til man finder det, for hvilket y (eller x) ogsaa bliver et helt Tal.

Eks. $3x - 11y = 5$.

For y indsættes -1, 0 og $+1$; $y = -1$ giver $x = -2$; den fuldstændige Løsning er altsaa

$$x = -2 + 11m; \quad y = -1 + 3m.$$

2) Dersom Koefficienten til x er negativ, forandres alle Tegnene; er Koefficienten til y derefter positiv, sættes $y = -y_1$.

Man udvikler $a : b$ i Kædebrøk og beregner Konvergenterne; lad den næstsidste af disse være $p : q$; man har da (20)

$$aq - bp = \pm 1, \text{ altsaa } \pm acq \mp bcp = c,$$

$$x = \pm cq + mb; \quad y = \mp cp + ma.$$

Tallene $\pm cq$ og $\pm cp$ blive ofte store; man kan da faa dem erstattede med mindre Tal ved for m at sætte $(m - \alpha)$ og give α en passende hel Værdi.

Eks. $152x - 59y = 13$.

Den næstsidste Konvergent til $152 : 59$ er $67 : 26$; man har nu

$$152 . 26 - 59 . 67 = -1$$

eller

$$152 . (-338) - 59 . (-871) = 13;$$

altsaa

$$x = -338 + 59(m + 6) = 16 + 59m;$$

$$y = -871 + 152(m + 6) = 41 + 152m.$$

Har man to Ligninger med 3 ubekendte, elimineres den ene, og Endeligningen behandles som ovenfor lært; har man to ubekendte flere, end man har Ligninger, kan den ene ubekendte vælges vilkaarlig, og for hver Værdi af denne bestemmes da de andre ubekendte.

25. **Fermats Sætning.** Dersom p er et Primtal, gaar p op i

$$\cancel{a^{p-1}-1,}\quad a^p - a = a(a^{p-1}-1)$$

naar a er et vilkaarligt Tal, der ikke er deleligt med p.

Dersom to Tal a og b ved Divisjon med et Tal p give samme Rest, siger man, at a er kongruent med b for Modulus p; det skrives

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Vi skulle altsaa bevise, at, idet p er Primtal,

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

Tallene $a, 2a, 3a \ldots (p-1)a$ ere ikke delelige med p, og to af dem kunne ikke ved Divisjon med p give samme Rest, da p i saa Fald maatte gaa op i deres Differens, hvilket man let ser er umuligt. De $p-1$ Tal maa altsaa ved Divisjon med p give $p-1$ forskellige Rester, hvoriblandt 0 ikke findes; disse Rester maa da være Tallene $1, 2, 3, \ldots p-1$, uden at vi dog vide Noget om den Orden, i hvilken de fremkomme. Produktet af alle Tallene maa give samme Rest som Produktet $1 . 2 . 3 \ldots (p-1)$ (I. 88).

Altsaa har man

$$a . 2a . 3a \ldots (p-1)a \equiv [p-1] \pmod{p}.$$

eller

$$[p-1]\,a^{p-1} - [p-1] = [p-1](a^{p-1}-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

p gaar saaledes op i Produktet $[p-1](a^{p-1}-1)$; da nu p ikke gaar op i den første Faktor, maa p gaa op i $a^{p-1}-1$.

26. Den ubestemte Ligning

$$x^{p-1} - 1 = yp$$

eller, som det kaldes, Kongruensen

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{4}$$

har altsaa til Løsninger alle mulige hele Værdier af x, der ikke ere delelige med p. Dersom et Tal x tilfredsstiller Kongruensen (4), men ikke nogen Kongruens af samme Form, men med lavere Eksponent, kaldes x en primitiv Rod i Kongruensen. Saaledes er i Kongruensen

$$x^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

2 og 3 primitive Rødder, medens 4 ikke er det, da man har $4^2 \equiv 1$.

Læren om de primitive Rødder har mange vigtige Anvendelser, især i Ligningernes Theori.

27. **Wilsons Sætning.** Dersom p er et Primtal, gaar p op i $[p-1]+1$.

Ligningen

$$ax - py = 1 \quad \text{eller} \quad ax \equiv 1 \pmod{p}$$

har, som vi have vist (24), altid een og kun een Værdi af x mellem 0 og p, naar a ikke er delelig med p.

Vælge vi et Tal $a < p$, finde vi altsaa et saadant Tal $x < p$, at $ax \equiv 1$; a og x ere forskellige undtagen for $a = 1$ og $a = p-1$; dersom nemlig $x = a$, bliver $a^2 \equiv 1$ eller $a^2 - 1 \equiv 0$. p maa da gaa op i $a-1$ eller $a+1$, og dette er kun muligt i de to nævnte Tilfælde.

Tallene $2, 3, \ldots (p-2)$ kunne altsaa tages sammen to og to, saa at Produktet af to sammenhørende ved Divisjon med p giver Resten 1. Produktet $[p-1]$ giver altsaa Resten -1, som det skulde bevises.

Dersom $p\,(>4)$ ikke er et Primtal, ser man let, at $[p-1]$ er delelig med p. Wilsons Sætning angiver saaledes en Egenskab, som findes ved alle Primtal, men ikke ved andre Tal.

28. **Talsystemer.** I Stedet for 10 kan man som Grundtal for et Talsystem benytte et andet helt Tal k;

man maa da have Cifre for Tallene $0, 1, 2 \,.\,. \, k-1$; for øvrigt bibeholdes den Regel for Skrivemaaden, at et Ciffer faar en k Gange højere Værdi, for hver Plads det rykker mod venstre. Det Tal, der fra højre mod venstre skrives med Cifrene $a, b, c, d \ldots\ldots$, har altsaa Værdien

$$a + bk + ck^2 + dk^3 + \ldots$$

Sætninger om dette Tals Delelighed med Tal, der gaa op i $k, k^2 \,.\,. \, k-1, k+1$, udledes som de analoge Sætninger om Tal i Titalsystemet (I, 92).

Eks. For at skrive 1735 i Syvtalsystemet dividere vi med 7 og finde $1735 = 247 \cdot 7 + 6$; endvidere er $247 = 35 \cdot 7 + 2$; $35 = 5 \cdot 7 + 0$, saa at 1735 i Syvtalsystemet skrives 5026.

Eksempler til Øvelse.

1. $139x + 51y = 1705$. (x og y pos. hele Tal.)

2. En Mand købte Svin og Faar for 350 Kroner; hvert Svin kostede 29 Kr., hvert Faar 31 Kr.; hvormange købte han af hver Slags?

3. Find den laveste primitive Rod i $x^{16} \equiv 1$ (mod. 17).

4. En Mand købte 100 Dyr for 325 Kr., nemlig Ænder til 2 Kr., Gæs til 7 Kr. og Lam til 5 Kr. Stykket; hvormange fik han af hver Slags?

5. Bevis, at $a^7 - a$ er delelig med 42, naar a er et helt Tal.

6. Hvorledes skrives 17923 i Femtalsystemet?

7. Hvorledes skrives 29132 i Tolvtalsystemet, naar vi for 10 og 11 benytte Cifrene α og β?

8. I hvilket Talsystem skrives 15247 som 10501?

9. Hvilket Tal, mindre end 1000, giver ved Divisjon med 17, 19 og 35 henholdsvis Resterne 16, 7 og 25?

10. Siderne i en retvinklet Trekant udtrykkes ved tre hele, indbyrdes primiske Tal; hvilke Værdier kunne disse have?

Determinanter.

29. Man benytter den forkortede Betegnelse

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

der kaldes en Determinant af anden Orden; Determinanten af n^{te} Orden

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & k_n \end{vmatrix}$$

med n Rækker, n Søjler og n^2 Elementer betegner en flerleddet Størrelse, hvis Led er alle de Produkter af n af Elementerne, der kunne dannes saaledes, at der ikke i samme Produkt findes to Elementer af samme Række eller to Elementer af samme Søjle. Det samme Bogstav eller den samme Indeks kan altsaa ikke findes to Gange i samme Produkt. Det halve Antal af Leddene faar Fortegnet $+$, det halve Antal $-$, efter en Regel, som vi straks skulle angive. Leddet $a_1 b_2 c_3 \ldots$ (Diagonalrækken) har altid Fortegnet $+$ og kaldes det principale Led. Determinanten betegnes undertiden ved dette Led, sat i en Parentes.

30. Af det principale Led

$$a_1 b_2 c_3 \ldots k_n$$

kan man danne de andre Led ved at lade Bogstaverne blive staaende og ombytte deres Indices paa alle mulige Maader. Derved faas nemlig alle mulige Produkter, i hvilke hverken et Bogstav eller en Indeks forekommer to Gange.

Antallet af Led i en Determinant af n^{te} Orden, hvor intet Element er Nul, er følgelig $[n]$.

Fortegnet for et Led bestemmes paa følgende Maade: De n Elementer, der forekomme i Leddet, tænkes, som de staa i Determinanten, forbundne to og to paa alle mulige Maader; hvis der da imellem Forbindelseslinierne findes et ulige Antal, der gaa opad tilhøjre, faar Leddet —, ellers +.

Eks.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 . \end{array}$$

Antallet af Forbindelseslinier, der gaa opad tilhøjre, ere i de 6 Led henholdsvis 0, 2, 2, 1, 1, 3. De 6 Led ere dannede af det første ved i dette at permutere Indices paa alle Maader. Hvor en lavere Indeks staar efter en højere (de to Indices siges da at danne en *Inversjon*), ville de to Elementers Forbindelseslinie gaa opad tilhøjre, saa at man ogsaa kan bestemme et Leds Fortegn ved Antallet af Inversjoner i de n Bogstavers Indices.

31. *En Determinant forandres ikke ved, at Rækkerne gøres til Søjler og omvendt, naar for Resten Følgeordnen bibeholdes.*

Da man danner alle de Led, hvis Faktorer findes een i hver Række og een i hver Søjle, blive Leddene i begge Tilfælde de samme. Et Led faar ogsaa i begge Tilfælde samme Fortegn, thi et Elements nye Plads er symmetrisk med den oprindelige Plads med Hensyn til Diagonalrækken, og man ser let, at de Forbindelseslinier, der gaa opad tilhøjre før Ombytningen, ogsaa gøre det efter Ombytningen.

32. *En Determinant skifter Fortegn, dersom to af dens Rækker (Søjler) ombyttes.*

Dersom de to Rækker følge efter hinanden, ville alle Forbindelseslinier vedblive at være af samme Art, undtagen den, der forbinder de to Elementer i de ombyttede Rækker. Denne erstattes ved en Forbindelseslinie af den modsatte Art, og ethvert Led skifter derfor Fortegn.

Er der p Rækker mellem de to, der ombyttes, kan man først bringe den øverste paa dens Plads ved $p+1$ Ombytninger med den nærmest lavere; den nederste bringes derpaa paa sin Plads ved p Ombytninger med den nærmest højere; da der derved er foretaget $2p+1$ Ombytninger, og Determinanten for hver af disse skifter Tegn, har den faaet modsat Fortegn, naar den endelige Ombytning er udført.

Heraf følger, at *en Determinant er Nul, naar den har to ens Rækker (Søjler)*; den skifter nemlig Tegn og bliver dog uforandret, naar de to Rækker ombyttes.

33. *En Determinant multipliceres med et Tal, naar alle Elementer i en af dens Rækker (Søjler) multipliceres med Tallet.*

Af de multiplicerede Elementer findes nemlig eet og kun eet i hvert af Determinantens Led.

34. **Underdeterminanter.** Sættes a_1 uden for en Parentes i de Led af Determinanten, hvor a_1 findes, faar man inden i Parentesen alle de Led, der kunne dannes af
$$b_2 c_3 d_4 \ldots,$$
naar Indices ombyttes paa alle Maader; disse Led ere de samme som de, man faar ved at udslette den Række og den Søjle, hvori a_1 findes, og udvikle den Determinant af Ordnen $n-1$, der bliver tilbage. Denne Determinant kaldes den til a_1 svarende Underdeterminant og betegnes ved A_1.

De Led, der indeholde a_2, kunne ligeledes skrives $a_2 A_2$, hvor A_2 da er den Determinant, der bliver tilbage, naar den første Søjle og anden Række udslettes. Dog har denne Determinant og A_2 modsatte Fortegn, thi ombytte vi de to første Rækker, skifte alle Led Fortegn, og den til a_2 svarende Underdeterminant findes nu ved at udslette den første Række og den første Søjle.

Fortsætte vi saaledes, faa vi for Determinanten D
$$D = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots a_n A_n, \qquad (1)$$
hvor enhver af Underdeterminanterne A_p findes ved at udslette den Række og den Søjle, hvori a_p findes, og give den tiloversblevne Determinant af Ordnen $n-1$ $+$ eller $-$, eftersom p er ulige eller lige.

Paa lignende Maade faar man
$$D = b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots b_n B_n$$
$$= c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_n C_n \text{ o. s. v.},$$
hvor enhver Underdeterminant er dannet ved at udslette den Række og Søjle, der indeholder det tilsvarende Element, idet dog den tiloversblevne Determinant faar modsat Fortegn, naar Rækkens Nummer plus Søjlens Nummer er et ulige Tal. Rigtigheden heraf indses let, naar man

gør den udslettede Række til den første Række og den udslettede Søjle til den første Søjle.

Paa samme Maade kan man opløse en Determinant i Underdeterminanter ved at gaa ud fra Elementerne i en Række; man faar da
$$\left.\begin{aligned} D &= a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + \ldots \\ &= a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
Sætter man i disse eller de forrige Ligninger en anden Rækkes (Søjles) Elementer i Stedet for den benyttede Rækkes (Søjles), faar man en Determinant med to ens Rækker (Søjler); da denne er Nul, har man
$$\left.\begin{aligned} a_k A_1 + b_k B_1 + c_k C_1 + \ldots &= 0 \\ d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$
i alle Tilfælde, hvor k ikke er 1, og d ikke er a.

35. En Determinant forandres ikke, naar man til en Rækkes (Søjles) Elementer adderer en anden Rækkes (Søjles) Elementer, multiplicerede med et vilkaarligt Tal.

Sætter man nemlig i (1) $a_k + m d_k$ for a_k, faar man
$$(a_1 + m d_1) A_1 + (a_2 + m d_2) A_2 + \ldots (a_n + m d_n) A_n$$
eller
$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots a_n A_n + m(d_1 A_1 + d_2 A_2 + \ldots d_n A_n),$$
der netop er D, da Størrelsen i Parentesen er Nul.

Ved Anvendelse af denne Sætning kan man ændre en Determinant, saa at alle Leddene i en Række (Søjle) blive Nul paa eet nær, og saaledes reducere Determinanten til en anden, der er en Orden lavere.

Eks.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

36. Løsning af n lineære Ligninger med n ubekendte. Lad de n Ligninger med n ubekendte

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 \ldots i_1x_n = k_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 \ldots i_2x_n = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 \ldots i_nx_n = k_n \end{array}\right\} \quad (4)$$

være givne.

$$D = \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \ldots i_1 \\ a_2b_2c_2 \ldots i_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_nb_nc_n \ldots i_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

kaldes Ligningernes Determinant; multiplicere vi Ligningerne henholdsvis med $A_1, A_2 \ldots A_n$, og addere vi derpaa, faa vi som Koefficient til x_1

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots a_nA_n = D$$

og som Koefficient til x_2

$$b_1A_1 + b_2A_2 + \ldots b_nA_n = 0,$$

og paa samme Maade blive de øvrige Koefficienter Nul; man faar altsaa

$$Dx_1 = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots k_nA_n. \quad (6)$$

Paa lignende Maade faas ved Multiplikation med $B_1, B_2 \ldots$ og Addition

$$Dx_2 = k_1B_1 + k_2B_2 + \ldots + k_nB_n \text{ o.s.v.}$$

Enhver af de ubekendte er altsaa lig en Brøk, hvis Nævner er Ligningernes Determinant, og hvis Tæller dannes af Ligningernes Determinant ved i denne at ombytte den ubekendtes Koefficienter med de tilsvarende Tal paa højre Side af Lighedstegnene.

Dersom $D = 0$, og A_1 er en Underdeterminant, der ikke er 0, multiplicere vi som ovenfor med $A_2, A_3 \ldots A_n$ og addere de $n-1$ Ligninger. Vi faa da ved at benytte (2) og (3)

$$-A_1(a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + i_1x_n) = k_2A_2 + k_3A_3 + \ldots k_nA_n,$$

der viser, at den ene Ligning enten kan udledes af de andre eller er i Strid med dem.

37. Elimination af $n-1$ Størrelser mellem n lineære Ligninger.

Ligningerne skrives som sædvanligt, blot at alle Leddene samles paa venstre Side af Lighedstegnene. Slettes de ubekendte ud, behøver man blot at sætte to Streger til for at faa en Determinant, som, sat lig Nul, er Resultatet af Eliminationen. Ere Ligningernes bekendte Led $k_1, k_2 \ldots k_n$, faar man dette Resultat ved at multiplicere Ligningerne med de til disse Elementer svarende Underdeterminanter og addere.

Saaledes faar man f. Eks. ved Elimination af x og y mellem Ligningerne

$$ax + by + c = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

Endeligningen

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

38. Determinanters Multiplikation. Vi betragte de tre Systemer af n Ligninger

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a_px_1 + b_px_2 \ldots + i_px_n = k_p \\ 2) & a'_py_1 + b'_py_2 \ldots + i'_py_n = x_p \\ 3) & \alpha_py_1 + \beta_py_2 \ldots + \iota_py_n = k_p \end{array}\right\} (p = 1, 2 \ldots n)$$

med Determinanterne D_1, D_2 og Δ. Ligningerne 3 ere dannede ved at indsætte Værdierne af Størrelserne x af 2 i 1. Søge vi først Størrelserne x af 1 og derpaa y af 2, faa vi disse som Brøker med Nævneren D_1D_2, medens vi ved at søge Størrelserne y af 3 faa Nævneren Δ; man har derfor, da de to Nævnere ere af samme Grad,

$$D_1 D_2 = \Delta,$$

hvor Elementerne af Δ ere

$$a_p a'_1 + b_p a'_2 + \ldots + i_p a'_n$$

og de analoge. Vi kunne derved multiplicere to Determinanter af n^{te} Orden, saa at Produktet ogsaa er en Determinant af n^{te} Orden. Er den ene Faktor af en lavere Orden, bringer man den til at være af n^{te} Orden ved at tilføje Elementer 1 i Diagonalrækken, medens de andre Pladser fyldes med Nuller.

Eks. 1.

$$x + y + z = 1;\ ax + by + cz = d;\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2.$$

$$x = K:D, \text{ hvor}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+b \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a);$$

$$K = (b-d)(c-b)(c-d) \text{ o. s. v.}$$

Eks. 2. Løs ved Determinanter Opgaverne i I. Pg. 65 Eks. 1, Pg. 67 Eks. 9 og Pg. 68 Eks. 15.

Eks. 3. I Determinanten af tredje Orden i 30 ombyttes a_1, b_1, c_1, a_2 ... med de tilsvarende Underdeterminanter A_1, B_1 ...; bevis, at den ny Determinant er Kvadratet af den givne. Hvorledes lyder den analoge almindelige Sætning?

Eks. 4. Eliminer Siderne mellem

$$a = b\cos C + c\cos B$$

og de to analoge Relationer mellem en Trekants Stykker.

Komplekse eller imaginære Tal.

39. Vi ville nu udvide vort System til at omfatte alle en Plans Punkter; det gælder da om at finde dertil svarende Udvidelser af vore Operationer og vort Talsystem.

I Planen trække vi en ret Linie med positiv Retning X og betegne dens Punkter paa sædvanlig Maade ved vore reelle Tal; gennem Nulpunktet O lægge vi en anden Linie, vinkelret paa den første gennem O og give den en positiv Retning Y, saaledes at $(XY) = \frac{\pi}{2}$, idet vi have valgt en Omløbsretning for voksende Vinkler. Vi betegne Punkterne paa den anden Linie som paa den første, kun at vi, for at skille de første fra de sidste, sætte Mærket i foran Betegnelsen. Punktet $i7$ er saaledes det Punkt, som dækkes af Punktet 7, naar OX drejes Vinklen $\frac{\pi}{2}$ om O. Den anden Linie kaldes de imaginære (eller rent imaginære) Tals Akse, medens den første kaldes de reelle Tals Akse.

Om Planens Punkter gælder, at de svare en-entydig til de Liniestykker, der forbinde dem med O. Disse Liniestykker ere Individer, til hvis Bestemmelse, der hører baade en Længde og en Retning; den sidste regnes fra O, der er Stykkernes fælles Begyndelsespunkt. I Fysikens Kræfter eller Hastigheder have vi Eksempler paa saadanne Retningsstørrelser.

40. **Addition.** Vi ledes herved til den Udvidelse, vi maa give vort Begreb Addition og derved Tegnet $+$. Ved Summen af OA og OB (eller af A og B) ville vi forstaa OC (eller C), idet OC er Diagonal i det ved OA og OB bestemte Parallelogram. For flere Addender finder

man da Summen, idet man danner en brudt Linie, der begynder i O, og hvis enkelte Stykker ere lige store og parallele med Addenderne; Summen er da den Linie, der forbinder O med den brudte Linies Endepunkt. Man ser straks, at den givne Definition medfører, at Addendernes Orden er vilkaarlig, og at den indbefatter Definitionen af reelle Punkters Addition som specielt Tilfælde.

Hvis et Punkt A projiceres paa de to Akser i de Punkter, der betegnes ved a og ib, bliver det Summen af disse og maa derfor betegnes ved $a+ib$; vi have saaledes dannet et udvidet Talsystem (komplekse Tal), hvis Tal svare en-entydig til Planens Punkter eller Liniestykker (med Retning); ved simple geometriske Sætninger ser man straks, at hvis $a+ib$ og a_1+ib_1 ere to Punkter, vil $a+a_1+i(b+b_1)$ være deres Sum. De komplekse Tal adderes derfor efter samme Regler som de reelle, idet Mærket i behandles som en Faktor, eller man har

$$(a+ib)+(a_1+ib_1) = a+a_1+i(b+b_1). \tag{1}$$

41. **Modulus og Argument.** Vi indføre nu en ny Bestemmelse af Planens Punkter, idet et saadant Punkt A bestemmes entydig ved den positive Længde $r = OA$ og dennes Vinkel v, regnet fra X. Vi have da, idet A svarer til $a+ib$

$$a = r\cos v;\quad b = r\sin v, \tag{2}$$

altsaa

$$r = \sqrt{a^2+b^2};\quad \operatorname{tg} v = \frac{b}{a}, \tag{3}$$

hvorved

$$a+ib = r(\cos v + i\sin v).$$

r kaldes Størrelsens Modulus (absolute Værdi), v dens Argument. r regnes altid positiv; naar a og b ere givne, findes r og v af (3). Da (2) viser, at Fortegnene for a og b bestemme den Kvadrant, i hvilken v ligger, har v kun een Værdi imellem 0 og 2π.

To komplekse Tal, der have samme Modulus og Argumenter, der ere lige store med modsatte Tegn, kaldes konjugerede ($a+ib$ og $a-ib$).

Positive Tal have Argumentet 0, negative Tal Argumentet π, medens Modulus i begge Tilfælde er Tallets numeriske Værdi. Tallet ib ligger paa OY, til den ene eller den anden Side af O, eftersom b er positiv eller negativ.

Ved Begrebet Addition er Begrebet Subtraktion umiddelbart bestemt.

Eks. 1. Afsæt Punkterne -3, $3i$, $-3i$, $1+2i$, $1+i$, $2-3i$, $3+4i$, $-3+4i$ og bestem deres Moduler og Argumenter.

Eks. 2. En Cirkel om O med Radius 2 deles i 6 lige store Dele, saa at det ene Delingspunkt falder i OX. Angiv Delingspunkternes Moduler og Argumenter.

42. **Multiplikation.** Vi ville nu udvide vort Begreb Multiplikation og derved Betydningen af de dertil hørende Operationstegn. Vi have set, at Additionen af to vilkaarlige Punkter er fuldkommen bestemt, naar Nulpunktet er givet; Multiplikationen kræver derimod ogsaa, at Punktet 1 er lagt fast, idet Produktet er afhængigt af den valgte Enhed.

Lad nu E betegne Punktet 1 og A og B være to vilkaarlige Punkter. Ved Produktet af OA og OB ville vi da forstaa OC, idet C bestemmes saaledes, at $\triangle COB \sim \triangle AOE$. Heraf følger, idet OA, OB o. s. v. betegne Længderne eller Modulerne

$$OC.OE = OA.OB,\quad \angle EOC = \angle EOA + \angle EOB,$$

der vise, at:

Produktets Modulus er Produktet af Faktorernes Moduler. Produktets Argument er Summen af Faktorernes Argumenter.

Man har altsaa:

$$r(\cos v + i \sin v) . r_1(\cos v_1 + i \sin v_1)$$
$$= rr_1(\cos(v+v_1) + i \sin(v+v_1)), \qquad (4)$$

og denne Formel stemmer med de sædvanlige Multiplikationsregler, naar man lader i, der hidtil kun har betegnet et Mærke, betyde $\sqrt{-1}$.

Man ser straks, at det udvidede Multiplikationsbegreb indbefatter det oprindelige (idet de positive og negative Tal henholdsvis have Argumenterne 0 og π), og at ogsaa med det Faktorernes Orden er ligegyldig.

Af Reglen for Multiplikation udleder man, at to komplekse Tal divideres, naar man dividerer deres Moduler og subtraherer deres Argumenter.

Af (4) kunne de tidligere beviste Sætninger om Multiplikation og Divisjon udledes; de vedblive derfor at gælde med den udvidede Betydning af Begreberne.

Eks. $(+2)(-3) = -6$, idet $2 . 3 = 6$; $0 + \pi = \pi$.
$i . i = -1$, idet $1 . 1 = 1$; $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$.
$(-i)i3 = 3$, idet $1 . 3 = 3$; $\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = 2\pi$.
$(1+i):(1-i) = i$, idet $\sqrt{2}:\sqrt{2} = 1$;
$\frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi$.

43. **Potensopløftning.** Af (4) følger

$$(r(\cos v + i \sin v))^p = r^p(\cos pv + i \sin pv), \qquad (5)$$

idet p er et helt, positivt Tal; man opløfter altssa et komplekst Tal til en Potens ved at opløfte Modulus til Potensen og multiplicere Argumentet med Eksponenten. Heraf følger, at man uddrager en Rod af et komplekst Tal ved at uddrage Roden af Modulus (hvorved kun Rodens positive Værdi benyttes) og dividere Argumentet med Eksponenten.

Ved Roduddragningen er der et særligt Hensyn at tage. Naar vi have sagt, at et komplekst Tal har et bestemt Argument, er dette at forstaa saaledes, at Argumentet kun har een Værdi i de første fire Kvadranter; er denne Værdi v, bliver Argumentet i Virkeligheden $2p\pi + v$, hvor p er et vilkaarligt helt Tal, thi Stillingen af OA forandres ikke ved, at denne Linie gør et Antal hele Omdrejninger. Leddet $2p\pi$ have vi hidtil udeladt, fordi det bliver uden Betydning ved Addition, Multiplikation og Potensopløftning; ved Roduddragning, hvor Argumentet skal divideres, er det derimod nødvendigt at tage Leddet $2p\pi$ med, da man kan faa virkelig forskellige Løsninger for forskellige Værdier af p. Uddrager man den q^{de} Rod, faar man saaledes forskellige Løsninger for $p = 0, 1, 2 \ldots q-1$, men større kan det ikke nytte at tage p, da man derved blot faar de samme Løsninger periodisk igen.

Eks. $1^{\frac{1}{3}}$. Modulus er 1, Argumentet $2p\pi$; den søgte Modulus er altsaa 1, medens det søgte Argument har de tre Værdier ($p = 0$, 1 og 2)

$$0, \frac{2\pi}{3} \text{ og } \frac{4\pi}{3}. \quad \text{(Smlgn. II. 33, Eks. 1.)}$$

$1^{\frac{1}{4}}$ har Mod. 1 og Argumenterne 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, saa at Værdierne ere

$$+1, \ +i, \ -1, \ -i.$$

$(-32)^{\frac{1}{5}}$; den søgte Modulus er $\sqrt[5]{32} = 2$. For Argumenterne faas de 5 Værdier

$$\frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

I (5) forudsatte vi p positiv, hel; man ser imidlertid let, at (5) ogsaa gælder for p negativ og brudden.

44. **Den binome Ligning.** Vi forstaa herved Ligningen

$$x^n = a. \tag{6}$$

Denne Ligning kan nu løses fuldstændig, idet dens Rødder ere alle Værdierne af $a^{\frac{1}{n}}$. Vi ville her forudsætte a reel; a er da positiv eller negativ.

1) a positiv. x faar Modulus $\sqrt[n]{a}$; Argumenterne ere

$$0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \ldots \frac{(2n-2)\pi}{n}.$$

Det første Argument tilhører en positiv Rod; er n lige, maa π findes i Rækken af Argumenter, saa at man ogsaa faar en negativ Rod, medens de øvrige $n-2$ Rødder ere komplekse; er n ulige, kan π ikke findes mellem Rækken af Argumenter; man faar altsaa 1 positiv og $n-1$ komplekse Rødder.

2) a negativ. x faar Modulus $\sqrt[n]{-a}$; Argumenterne ere

$$\frac{\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\ \frac{5\pi}{n},\ \ldots \frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

Er n lige, findes hverken 0 eller π i denne Række; alle Rødderne ere komplekse; er n ulige, findes π i Rækken, nemlig for $2p+1 = n$; man faar altsaa 1 negativ og $n-1$ komplekse Rødder.

De komplekse Rødder ere altsaa i alle Tilfælde til Stede i lige Antal; ved at undersøge Rækkerne af Argumenter ser man, at to og to Argumenter have Summen 2π; de komplekse Rødder ere derfor konjugerede to og to.

Til Øvelse eftervises Beliggenheden af Rødderne i $x^2 = \pm 16$; $x^3 = \pm 8$; $x^6 = \pm 1$; $x^7 = \pm 1$; $x^8 = \pm 1$.

45. **Inkomplette Ligninger.** Sætningerne om Regning med Potenser maa undersøges nærmere, thi ved Beviserne for disse forudsatte vi ikke, at $a^{\frac{m}{n}}$ kan have flere Værdier; vi maa derfor undersøge, om de Ligninger, vi opstillede, give alle de søgte Værdier eller kun nogle af dem; i det sidste Tilfælde kalde vi Ligningerne inkomplette.

Af Ligningerne

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a,\quad (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$$

er den første komplet, men den anden inkomplet, thi man har kun een Værdi paa højre, men n Værdier paa venstre Side af Lighedstegnet; Ligningen bør skrives

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = a \cdot 1^{\frac{1}{n}}$$

og er da komplet.

Ligningen

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{sq}}$$

er komplet, naar Brøkerne ere uforkortelige, thi man har qs Værdier paa begge Sider af Lighedstegnet.

Ligningen

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

er komplet; paa venstre Side have vi q Værdier; paa højre Side har hver Faktor q Værdier; Produktet har dog ikke q^2, men kun q Værdier, thi Produktets q^{de} Potens har kun een Værdi. Man maa derfor faa alle Produktets q Værdier, naar man multiplicerer de q Værdier af den ene Faktor med en vilkaarlig af den anden Faktors Værdier; paa denne Maade faar man nemlig q forskellige Værdier.

Ligningen

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$$

er komplet, naar den sidste Eksponent ikke forkortes, thi begge Sider have qs Værdier.

46. Vi have nu udvidet vort Størrelsesbegreb og Regningsarternes Begreber saaledes, at vore Sætninger gælde baade om reelle og komplekse Størrelser; dog maa vi stadig forudsætte Eksponenterne rationale og reelle; Udvidelsen til irrationale og komplekse Eksponenter, der frembyde særlige Vanskeligheder, gennemføres i den almindelige Funktionslære.

At visse ubekendte Tal i en Opgave vides at være reelle, kan ved deres Bestemmelse ofte erstatte en Ligning; saaledes kan man kun have

$$a + ib = c + id,$$

hvor a, b, c og d ere reelle, hvis $a = c$ og $b = d$.

Eks. Af Ligningen (Moivres Formel)

$$(\cos v + i \sin v)^n = \cos nv + i \sin nv$$

findes, naar Binomialformlen anvendes paa venstre Side, en Ligning, der deler sig i de to

$$\cos nv = \cos^n v - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \cos^{n-2} v \sin^2 v + \ldots,$$

$$\sin nv = n \cos^{n-1} v \sin v - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cos^{n-3} v \sin^3 v + \ldots$$

Om Ligninger.

47. Den almindelige algebraiske Ligning af n^{te} Grad antager, naar den er ordnet, Formen

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (1)$$

Vi have bevist (I. 55), at dersom $x = a_1$ gør $f(x)$ til Nul, maa $x - a_1$ gaa op i $f(x)$, saa at man identisk har

$$f(x) = (x - \alpha_1)\, Q,$$

hvor Q er et helt Polynomium; bliver $f(x)$ ogsaa Nul for $x = \alpha_2$, maa Q blive Nul for $x = \alpha_2$; man har da identisk

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\, Q_1,$$

hvor Q_1 er et helt Polynomium; fortsætte vi saaledes, se vi, at dersom $f(x)$ bliver Nul for $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, har man identisk

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Da $f(x)$ er af n^{te} Grad, kan der kun findes n Faktorer paa højre Side af Lighedstegnet. En Ligning af n^{te} Grad har altsaa højst n Rødder.

48. Dersom en ordnet algebraisk Ligning af n^{te} Grad altid har mindst een Rod, maa Ligningen af n^{te} Grad netop have n Rødder. Er nemlig α_1 Rod i $f(x) = 0$, kan denne Ligning deles i de to

$$x - \alpha_1 = 0 \quad \text{og} \quad Q = 0;$$

den sidste har mindst een Rod, f. Eks. α_2; den deler sig da i de to

$$x - \alpha_2 = 0 \quad \text{og} \quad Q_1 = 0.$$

Fortsætte vi saaledes, faa vi Ligningen af n^{te} Grad delt i n Ligninger af første Grad.

Det gælder altsaa om at bevise, at enhver algebraisk Ligning har i alt Fald een Rod; vi ville nøjes med at antyde, hvorledes dette temmelig sammensatte Bevis føres.

Indsætte vi $\alpha + i\beta$ for x i $f(x)$, vil Resultatet ikke blive Nul, med mindre $\alpha + i\beta$ er Rod i Ligningen; man kan nu vise, at man, naar Resultatet ikke bliver Nul, kan ændre α og β lidt, saaledes at man faar et Resultat med mindre Modulus end det tidligere; fortsætter man nu, idet man stadig ændrer α og β saaledes, at Resultatets Modulus bliver mindre og mindre, maa man tilsidst finde Værdier af α og β, for hvilke Resultatets Modulus er Nul, og man har da fundet en Rod i Ligningen.

49. Af Faktorerne $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ ... kunne flere være ens; er $(x-\alpha)^p$ Faktor i $f(x)$, siger man, at α er Rod p Gange i $f(x)=0$ (lige Rødder, multiple Rødder); man opnaar ved denne Vedtægt at kunne udtale den Sætning som fuldstændig almengyldig, at enhver Ligning af n^{te} Grad har n Rødder.

Idet vi forudsætte, at den givne Ligning har reelle Koefficienter, kunne vi bevise, at Ligningens komplekse Rødder altid ere konjugerede to og to. Antag nemlig, at $a+ib$ er Rod; indsættes denne Rod i $f(x)$, faar man ved Anvendelse af Binominalformlen et Udtryk af Formen $A+iB$, hvor A og B ere reelle; dette Udtryk maa have Værdien Nul, hvilket kun er muligt, hvis $A=0$ og $B=0$. Indsætter man $a-ib$ i $f(x)$, faar man et Resultat, der kan udledes af det forrige ved at ombytte b med $-b$; i A forekommer imidlertid b overalt med lige Eksponent, medens alle Leddene i B indeholder en Faktor b med ulige Eksponent. A bliver derfor uforandret, medens B skifter Fortegn, idet b ombyttes med $-b$; man faar altsaa $f(a-ib)=A-iB$, men dette Udtryk har Værdien Nul, da $A=0$ og $B=0$. $a-ib$ er altsaa Rod i Ligningen.

50. **Koefficienterne udtrykte ved Rødderne.** Idet Rødderne i $f(x)=0$ ere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, har man identisk

$$x_n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$
$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Udføres Multiplikationen paa højre Side (8), og sammenlignes Koefficienterne i de identiske Udtryk paa begge Sider af Lighedstegnet, faar man

$$\left.\begin{array}{rl} -a_1 &= \alpha_1+\alpha_2 \ldots + \alpha_n, \\ a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \ldots \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ -a_3 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^n a_n &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

I Almindelighed er altsaa Koefficienten a_p lig Summen af alle de Produkter af p og p af Rødderne, som kunne dannes (i Antal $K_{n,p}$), med samme eller modsat Tegn, efter som p er lige eller ulige. Ved Hjælp af denne Sætning kan man danne en Ligning, hvis Rødder ere opgivne.

Eks. Ligningen med Rødderne 1, 2 og 3 er

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Da sidste Led af en ordnet Ligning, hvor x^n har Koefficienten 1, er Produktet af Rødderne med samme eller modsat Tegn, kan det være hensigtsmæssigt at prøve, om et af de positive eller negative hele Tal, som gaa op i a_n (der er forudsat hel), er Rod i Ligningen.

Eksempler til Øvelse.

1. Hvilken Ligning har Rødderne -1, 1, 2 og 3?
2. Hvilken Ligning har Rødderne $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ og 2?
3. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Kvadraterne af Rødderne i $x^3+ax^2+bx+c=0$.
4. Dan den Ligning, hvis Rødder ere Summerne af to og to af Rødderne i Ligningen i Eks. 3.

5. I en Ligning af tredje Grad $f(x) = 0$ er α 2 Gange Rod; bevis, at α ogsaa er Rod i Ligningen $f'(x) = 0$.
6. Find Rødderne i $x^{12} - 65x^6 + 64 = 0$.
7. Find Summen af Kvadraterne af Rødderne i den almindelige Ligning af tredje Grad.
8. Kan den almindelige Ligning af fjerde Grad reduceres til en kvadratisk Ligning ved, at man tager et Udtryk af anden Grad som ny ubekendt?
9. Hvilken Værdi maa y have, naar de to Ligninger
$$x^3 - x^2 - x + y = 0 \text{ og } 3x^2 - 2x - y = 0$$
have en Rod fælles?