Aritmetik og Algebra

til Skolebrug

S 42-6.4.

af

-46-45.

-54-1.

Julius Petersen.

I. Rationale Størrelser.

Syvende Udgave.

Kjøbenhavn.

Karl Schønberg.

1897.

Forord.

Det er sikkert gaaet mange Lærere som mig, at de ikke have fundet Indledningen til Algebraen, selv hos de bedste Forfattere, tilstrækkelig logisk begrundet. Jeg kan sige, at jeg i mere end en Menneskealder har tænkt over dette Spørgsmaal, men skønt jeg flere Gange har indført Forbedringer i min Indledning, har jeg dog aldrig selv følt mig tilfredsstillet. Det er først nu, at jeg er kommet til en Opfattelse, som synes mig uangribelig; da den imidlertid gaar stik imod den, som nu er den gængse overalt, vil jeg sige et Par Ord derom.

Mod den gængse Metode, der vil opbygge Algebraen paa et fuldstændig formelt Grundlag, vil jeg, foruden den naturligvis ikke afgørende Anke, at den gør Udviklingen besværlig og kedelig, indvende, at man aldrig kan have nogen Sikkerhed for, at de vilkaarligt opstillede Grundligninger ikke kunne være i Strid med hverandre. Sikkerheden kan kun ligge i, at man, uden at sige det, tænker paa en

Anvendelse. Men hvorfor saa ikke gøre Skridtet fuldt ud?

Det er det, jeg har gjort, og min Tanke er i Korthed følgende:

Vi betragte en omfattende Gruppe af konkrete Ting og visse Operationer, som vi kunne foretage med disse; vi vise da, hvorledes vi, i Stedet for at operere med selve Tingene, kunne operere (regne) med et System af Navne (Tal), som vi indføre for dem. Ved denne Betragtning bliver der ikke Plads for nogen uklar Opfattelse.

Julius Petersen.

Indledning.

Ved et **Individ** ville vi forstaa en enkelt af en **Samling**, f. Eks. en enkelt Soldat af et Kompagni, et enkelt Æble af en Bunke Æbler, en enkelt Krone af en Mands Formue, et enkelt Punkt af alle en Linies eller en Plans Punkter, et enkelt Øjeblik af et vist Tidsrum o. s. v.

Om en Samlings Individer forudsætte vi i Almindelighed, at de alle ere ens eller i alt Fald ved den foreliggende Undersøgelse skulle betragtes som ens. Naar vi f. Eks. tælle Soldaterne i et Kompagni, bryde vi os ikke om, at nogle ere rødhaarede, andre sorthaarede, nogle tykke, andre tynde; for os ere de alle Soldater og ikke andet.

To Samlinger siges at svare **entydig** (eller en-entydig) til hinanden, naar man kan tænke sig deres Individer saaledes parrede, at der til hvert Individ af den ene Samling svarer et bestemt Individ af den anden Samling og omvendt. Da en rigtig Forstaaelse af Begrebet Entydighed er meget vigtig, skulle vi give nogle Eksempler.

Hvis alle Individerne af en Samling Mennesker have forskellige Navne, svarer Samlingen af Navne og Samlingen af Mennesker entydig til hinanden; dette gælder derimod ikke, hvis flere have det samme Navn, thi til et saadant Navn vil der da svare flere Mennesker.

Hvis hver Elev i Klassen har en Tavle, ville Samlingen af Elever og Samlingen af Tavler svare entydig til hinanden. Hvis der ved hver Tavle hænger et Griffel, vil Samlingen af Grifler svare entydig til enhver af de to andre Samlinger.

Hvis man tegner en vilkaarlig Cirkel og en vilkaarlig ret Linie, kunne disses Punkter bringes til at svare entydig til hinanden (og det paa uendelig mange Maader); lad os nemlig vælge et vilkaarligt Punkt paa Cirklen og trække rette Linier gennem dette; enhver saadan Linie skærer Cirklen i et nyt Punkt (foruden det valgte) og den rette Linie i eet Punkt; lade vi de to Punkter svare til hinanden, have vi den entydige Forbindelse.

Vigtigheden af den entydige Forbindelse ligger deri, at vi i de Undersøgelser, vi have for Øje, kunne sætte Samlinger, der svare entydig til hinanden, i Stedet for hinanden. Skulle vi f. Eks. i det ovenfor nævnte Tilfælde tælle Klassens Elever, kunne vi lige saa godt tælle Tavlerne eller Griflerne.

I Aritmetikken og Algebraen er det vor Opgave at danne en Samling af Navne (Tallene), som kan bringes til at svare entydig til mange Samlinger, der hyppigt skulle behandles i Praksis; tillige skulle vi angive Metoder, ved hvis Hjælp vi kunne operere med Tallene i Stedet for med de virkelige Genstande. Have vi f. Eks. to Bunker med henholdsvis 137 og 219 Æbler, og ønske vi at vide, hvor mange Æbler, der bliver i den Bunke, som dannes ved Sammenføjning af de to andre, saa behøver den, der har lært Addition af hele Tal, ikke virkelig at tælle den samlede Bunke, men han adderer blot Tallene 137 og 219 og har saa Svaret. Barnet, der adderer ved at tælle paa Fingrene, kender ikke til Regne-

kunsten, men viser dog, ved at benytte Fingrene, at det ubevidst har opfattet Begrebet Entydighed.

Jo mere vi udvide vort Navnesystem, desto mere brugbart bliver det, idet det derved kan bringes til at svare entydigt til mere omfattende Samlinger. Saa længe vi kun have at gøre med Samlinger, der tælles (diskrete Samlinger, saasom Soldater, Æbler o. s. v.), ere de hele Tal tilstrækkelige. Samlinger, der maales (kontinuerte Samlinger*), saasom Længde, Fladeindhold, Tid o. s. v.), bringe os til at indføre Brøker eller brudne Tal; disse vise sig utilstrækkelige, og vi indføre irrationale Tal, som senere ville blive omtalte.

Da Samlinger, der svare entydig til hinanden, kunne sættes i Stedet for hinanden, er det tilstrækkeligt at betragte een saadan Samling, og det kommer da an paa at vælge denne saa omfattende som muligt, saa at den indbefatter alle de mindre omfattende. En saadan Samling har man i alle en Plans Punkter. Vi kunne imidlertid ikke straks benytte denne, da den kræver et Kendskab til Geometrien, som vi ikke tør forudsætte. Vi nøjes derfor foreløbig med at lade vor Samling bestaa af alle en ret Linies Punkter. Vor Opgave er da, saa vidt muligt, at give Navne til alle disse Punkter og at vise, hvorledes vi, naar visse Operationer skulle udføres med Punkterne, kunne finde Resultatet af Operationerne ved i Stedet for med Punkterne at operere (regne) med de dertil svarende Tal.

Tallene kaldes ofte Størrelser; et Tal kaldes da større end et andet, naar det kommer senere i Talrækken.

*) Diskrete Samlinger behandles ofte i Praksis som kontinuerte; saaledes tæller man ikke en Ladning Korn, men man maaler den.

Paa Linien vælge vi et vilkaarligt Punkt O, som vi betegne ved Tallet 0. Vi vælge et vilkaarligt Liniestykke (Enheden), og tænke os dette afsat et ubegrænset Antal Gange tilhøjre ud fra O; de Punkter, vi derved efterhaanden komme til, betegne vi ved 1, 2, 3 . . . . ; hvorledes disse Tal betegnes i Titalsystemet forudsættes bekendt ligesom Tegnene $>$ (større end) $<$ (mindre end) og $=$ (ligestor med). Det sidste Tegn (Lighedstegnet) angiver, at de to Udtryk, det forbinder, betegne det samme Individ af Samlingen og derfor kunne sættes i Stedet for hinanden. Udtryk forbundne ved et Lighedstegn danne en Ligning.

I alle de mærkede Punkter have vi eń Samling, der er entydig forbunden med alle Samlinger, der kunne tælles.

Vi komme nu til Brøkerne, idet vi dele vor Enhed i et vilkaarligt Antal lige store Dele og benytte en af disse som en ny Enhed. Det Punkt, vi komme til, naar den oprindelige Enhed er delt i q Dele, og vi henad Linien fra O have afsat p saadanne, betegnes ved Brøken $\frac{p}{q}$, hvor p er Tælleren, og q Nævneren. De ved hele Tal betegnede Punkter blive herved ogsaa betegnede ved Brøker (uegentlige Brøker), og disse Brøker ere da lige store med de tilsvarende hele Tal, da de betegne det samme Individ. Saaledes har man

$$\frac{q}{q} = 1,$$

hvilket Tal end q betyder. Er Tælleren mindre end Nævneren, kaldes Brøken ægte, er den større, uægte. De uægte Brøker kunne ogsaa skrives som blandede Tal, hvad der senere vil blive vist.

Efter at vi have indført alle mulige Brøker i vort

Navnesystem, kunde man tro, at dette nu var tilstrækkeligt til at betegne alle Liniens Punkter. Dette er dog ikke Tilfældet; der er mange Operationer, der føre os til Punkter, som ikke nøjagtigt falde sammen med noget Punkt, der betegnes ved et helt eller bruddent Tal, ja paa hvert nok saa lille Liniestykke ligger der i Virkeligheden uendelig mange saadanne Punkter. Efterhaanden som vi træffe dem ved vore Operationer, give vi dem Navne. Vi kunne saaledes f. Eks. ud fra O afsætte Diagonalen i et Kvadrat med Enheden til Side; vi komme derved til et Punkt, om hvilket vi i det følgende bevise, at det ikke kan udtrykkes ved et helt eller bruddent Tal; af Grunde, der senere ville blive forklarede, betegne vi Punktet ved $\sqrt{2}$; denne Betegnelse giver imidlertid ingen Oplysning om det ny Tals Plads i Talrækken, og man maa derfor give Metoder til at bestemme denne saa nøjagtigt, som man ønsker det, ved fortsat Indsnævring; vi mene hermed, at Metoden skal tjene til at bestemme to Brøker, mellem hvilke $\sqrt{2}$ er beliggende, derpaa to andre, der ligge hinanden nærmere end de foregaaende, og mellem hvilke $\sqrt{2}$ ogsaa er beliggende og saaledes videre, indtil Afstanden mellem de to Grænsepunkter er bleven saa lille, som man vil. Hvor langt man skal drive Indsnævringen, beror paa den Anvendelse, man vil gøre af Tallet; en Instrumentmager maa føre den videre end en Snedker, en Astronom videre end en Landmaaler.

Alle saadanne Tal, der ikke nøjagtigt kunne udtrykkes ved hele Tal eller Brøker, kaldes irrationale, medens de hele Tal og Brøkerne kaldes rationale. Disse Benævnelser ville vi ogsaa bruge om de til Tallene svarende Punkter.

De rationale og irrationale Tal danne en Samling, som svarer entydig til Punkterne tilhøjre for O; vi ledes derved til at udvide Systemet saaledes, at vi ogsaa faa Betegnelser for Punkterne tilvenstre for O; vi gøre dette, idet vi betegne et Punkt tilvenstre ved det samme Tal som det Punkt, der ligger tilhøjre i samme Afstand fra O, kun at vi sætte en Prik over Tallet for at undgaa Forveksling; vort Talsystem har derved (naar alle irrationale Tal tænkes indførte) faaet sin foreløbige Afslutning, idet det nu svarer entydig til alle Liniens Punkter; de ny Tal kaldes n e g a t i v e, i Modsætning til de oprindelige, der kaldes p o s i t i v e.

Ved Siden af Punkterne ville vi indføre en ny Samling, som svarer entydig til Punkterne, men undertiden er bekvemmere at benytte. Er A et Punkt af Linien, vil dette svare entydigt til Liniestykket OA. Ved disse Liniestykker er det imidlertid ikke nok, at Længden tænkes bekendt, da der paa Linien er to Punkter, som have samme Afstand fra O; man maa derfor, naar Punktet A skal være entydig bestemt, tænke sig givet ikke alene Længden af OA, men ogsaa, om A ligger tilhøjre eller tilvenstre for O, eller som vi ville udtrykke det, Liniestykket OA m e d L æ n g d e og R e t n i n g. Man ser da, at man i alle mulige Liniestykker med Længde og Retning har en Samling, der svarer entydig til Samlingen af Punkter og derfor ogsaa entydig til den hele Samling af positive og negative Tal.

To Liniestykker med samme Længde, men med modsatte Retninger (eller de tilsvarende Punkter eller Tal) kaldes m o d s a t t e. De svare til det samme Tal med og uden Prik. Tallene a og $\dot{a}$ have den samme n u m e r i s k e V æ r d i a, hvilket Tal end a betyder.

Dersom man vil skrive et Tal, og det er ligegyldigt, hvilket Tal man skriver, sætter man et Bogstav, ligegyldigt hvilket, i Tallets Sted; et Bogstav betegner altsaa et hvilket som helst Tal, dog saaledes, at det samme Bogstav i den samme Regning overalt betegner det samme Tal. Ved Anvendelsen af Bogstaver opnaa vi den Fordel, at de Resultater, vi komme til, udtrykke Sætninger, der gælde for alle Tal; saaledes udtrykte vi ovenfor ved Ligningen

$$\frac{q}{q} = 1,$$

at enhver Brøk, hvis Tæller og Nævner ere lige store, er lig 1, medens vi ved Ligningerne $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{9}{9} = 1$ o. s. v. kun vilde udtrykke, at Sætningen gælder netop i de anførte Tilfælde. En Parentes udtrykker, at det, der staar i Parentesen, skal tænkes beregnet for sig. Parentesen er derfor at opfatte som et enkelt Tal.

I. Rationale Størrelser.

Addition og Subtraktion.

1. Med to eller flere Punkter A, B, C..., eller de tilsvarende Liniestykker OA, OB, OC... kan man foretage en vis Operation, som kaldes Addition. De enkelte Punkter eller Liniestykker kaldes Addender, det Punkt eller Liniestykke, som Operationen fører os til, kaldes Summen. At OB skal adderes til OA, og at Resultatet er OM, skrives

$$OA + OB = OM,$$

hvor Tegnet $+$ (plus) læses «hvortil skal lægges».

Den nævnte Operation er følgende: Man afsætter fra O den første Addend (med Størrelse og Retning); derved kommer man til A; fra A afsættes paa samme Maade den anden Addend OB (altsaa tilhøjre eller venstre for A, eftersom B ligger tilhøjre eller venstre for O) og saaledes videre; er M det Punkt, man paa denne Maade ender med, vil OM være Summen.

Da vi ved Additionen kun benytte Addendernes Længde og Retning, gør det ingen Forskel, om man lader Addenderne begynde i et andet Punkt end O, naar blot deres Længde og Retning blive uforandrede.

2. Addendernes Orden er ligegyldig.

Lad os først betragte to Addender OA og OB. Efter Reglen afsætte vi da $AM = OB$ (i Størrelse og Retning). Hvad enten nu A og B ligge begge tilhøjre for O eller begge tilvenstre eller det ene tilhøjre og det andet tilvenstre, bliver $BM = OA$, thi de to Endepunkter af OB maa ved Flytningen af OB til Stillingen AM være forskudte lige meget til Siden. Deraf følger, at OM baade er lig $OA + OB$ og lig $OB + OA$, hvorved Sætningen er bevist.

Eleven bør selv tegne Figurer, der svare til de forskellige Tilfælde.

3. Hvis der gaar flere Addender forud for OA og OB, er Sætningen dog rigtig, thi efter at de første Additioner ere udførte, ere vi komne til et vist Punkt; vi kunne nu flytte OA og OB, saa at de begynde i dette Punkt, og Beviset er da som før. Da Ombytningens Tilladelighed ikke kan afhænge af Addender, der følge efter OA og OB, have vi saaledes vist, at i en Række af Addender kunne to, der følge efter hinanden, altid ombyttes.

Heraf følger atter, at Addendernes Orden er ligegyldig, hvor mange der end er, thi ved gentagne Ombytninger af to Addender, der følge efter hinanden, kan man faa Addenderne i hvilken Orden, man vil; man bringer den, man vil have paa første Plads, derhen, derpaa den, man vil have paa næstførste Plads, derhen o. s. v.

4. Ved at et Liniestykke skal subtraheres, forstaa vi, at det modsatte Stykke skal adderes. At OB subtraheret fra OA giver OC, skrives

$$OA - OB = OC.$$

OA kaldes Minuenden, OB Subtrahenden, OC Differensen eller Resten.

Vi kunne nu udlede følgende Sætninger:

5. I en Række af Addender og Subtrahender er Ordnen ligegyldig.

Dette følger af, at enhver Subtrahend ifølge Definitionen kan forandres til en Addend, og om Addender er Sætningen bevist.

6. Forekommer det samme Liniestykke som Addend og som Subtrahend, hæve de hinanden.

De kunne nemlig ved Ombytning af Ordnen bringes til at følge efter hinanden; den samme Længde skal da afsættes først til den ene Side og derpaa til den modsatte, og disse to Operationer hæve hinanden.

7. Dersom vi i Ligningen

$$OA - OB = OC \qquad (1)$$

adderer OB paa begge Sider af Lighedstegnet, faa vi

$$OA = OC + OB, \qquad (2)$$

der viser, at

Minuenden = Differensen + Subtrahenden.

Omvendt kan man af den anden Ligning udlede den første, saa at den ene af disse Ligninger er rigtig, naar den anden er det.

8. En Række af Addender og Subtrahender kaldes en flerleddet Størrelse (et Polynomium); hvert Led har sit Fortegn + eller —, idet dog + foran det første Led i Reglen underforstaas. Et Monomium har eet Led, et Binomium to Led. En Parentes repræsenterer, som tidligere angivet, kun et enkelt Liniestykke og tæller derfor kun som eet Led. Selv om vi i det følgende indføre ny Tegn, blive + og — Hovedtegnene, der bestemme Antallet af Led. Hvert Led skal beregnes for sig og Additionerne og Subtraktionerne derpaa udføres.

9. Et Led kan i en Ligning flyttes fra den ene Side af Lighedstegnet til den modsatte, naar man samtidig forandrer dets Fortegn.

Dette er bevist ovenfor i Ligningerne (1) og (2).

10. En Parentes, der har Fortegnet +, kan bortkastes eller sættes efter Behag.

Parentesen bevirker nemlig blot, at Additionerne og Subtraktionerne udføres i en anden Orden, og vi have bevist, at Ordnen er ligegyldig.

11. En Parentes, der har Fortegnet — kan bortkastes, naar man giver alle Leddene i Parentesen modsatte Fortegn.

Man har altsaa

$$OA - (OB + OC - OD) = OA - OB - OC + OD.$$

Sætningens Rigtighed følger (7) af, at Differens + Subtrahend giver Minuenden, idet

$$OA - OB - OC + OD + (OB + OC - OD) = OA.$$

Man maa erindre, at samtidig med Parentesen bortfalder dens Fortegn; i dets Sted kommer det forandrede (underforstaaede) Fortegn for det første Led i Parentesen.

Af Sætningen følger, at man kan sætte en Parentes med Fortegnet — om nogle af Leddene, naar man samtidig forandrer disses Fortegn.

12. Vi ville nu vise, at den Samling, vi have undersøgt, og de Operationer, vi have tænkt os foretagne med dens Individer, indbefatter mange Samlinger, der hyppigt anvendes i Praksis.

Alle Samlinger, der tælles, svare entydigt til de Punkter (eller Liniestykker), som vi have benævnt ved hele, positive Tal. Ved Addition af to saadanne Samlinger forstaar man deres Sammenføjning til een Samling. Denne

Sammenføjning svarer ganske til det, som vi udføre, naar vi addere de tilsvarende Liniestykker. To saadanne, der f. Eks. svare til Tallene 7 og 5, give ved Addition eet, der svarer til Tallet 12, ligesom 2 Bunker med henholdsvis 7 og 5 Æbler ved Sammenføjning give en Bunke med 12 Æbler. Det forholder sig paa samme Maade med Subtraktion; dog maa her forudsættes, at Minuenden ikke er mindre end Subtrahenden, da Opgaven ellers er meningsløs. Betragte vi to Samlinger, der maales, f. Eks. to Bunker Korn, faa ogsaa Brøkerne Betydning, og Liniestykkernes Addition svarer stadig til Bunkernes Sammenføjning.

13. Medens vi ved disse Anvendelser kun kom til at betragte Punkterne tilhøjre for O, vil Betragtning af en Mands Formue ogsaa give os Anledning til at betragte Punkterne tilvenstre. For at bestemme Mandens Formue maa vi betragte dels hans Fordringer og dels hans Gæld. Et Antal Kroner Fordring og en Gæld paa lige saa mange Kroner hæve hinanden ved Formuens Bestemmelse, ganske som et Liniestykke med den ene Retning og et lige saa stort Liniestykke med den modsatte Retning hæve hinanden i en Sum af Liniestykker. Naar vi derfor lade de Poster, der staa paa Mandens Kreditside (hans Fordringer) svare til de positive Liniestykker med den tilsvarende Længde, og de Poster, der staa paa hans Debetside (hans Gæld) svare til de negative Liniestykker, vil Formuens Størrelse svare til Summen af Liniestykkerne. Man kan derved faa til Resultat, at Formuen er negativ, hvad der viser, at Manden har Overskud af Gæld.

14. Vi have saaledes vist, hvorledes vi kunne besvare mange vigtige praktiske Spørgsmaal ved at foretage simple Operationer med Punkter paa en ret Linie; denne Metode

er imidlertid ikke bekvem, og vi have derfor tilbage at vise, hvorledes vi, i Stedet for at operere med Punkterne eller Liniestykkerne, kunne operere med de tilsvarende Navne, eller med andre Ord regne med de tilsvarende Tal. Herved beholde vi de indførte Tegn, men disse komme nu til at betegne aritmetiske i Stedet for geometriske Operationer.

15. Lad os antage, at vi til Liniestykket 7 skulle addere Stykket 5; vi skulle da afsætte Stykket 5 tilhøjre fra Punktet 7; vi kunne gøre dette ved at afsætte Enheden 5 Gange; sætte vi Tallene i Stedet for Punkterne, se vi, at Additionen udføres ved fra 7 at tælle 5 Pladser frem i Talrækken.

En saadan Fremadtællen vilde for store Addenders Vedkommende blive besværlig; man undgaar den, idet man lærer Additionstabellen for etcifrede Tal udenad og, idet Tallene skrives i Titalsystemet, adderer Enere for sig, Tiere for sig o. s. v. Det nærmere herved forudsættes bekendt. Det forholder sig paa samme Maade ved Subtraktion, hvor dog Minuenden ikke maa være mindre end Subtrahenden.

16. Gaa vi over til Punkter, der betegnes ved Brøker, bliver der ingen væsentlig Forskel, hvis Brøkerne have samme Nævner, da de saa kunne opfattes som hele Tal med en ny Enhed. Man faar saaledes Reglen:

B r ø k e r m e d s a m m e N æ v n e r a d d e r e s e l l e r s u b t r a h e r e s, n a a r m a n a d d e r e r e l l e r s u b t r a h e r e r T æ l l e r n e o g g i v e r R e s u l t a t e t d e n f æ l l e s N æ v n e r.

Vi lære senere, at to eller flere Brøker med hvilke som helst Nævnere altid kunne omskrives, saa at de blive ens benævnte (faa samme Nævner). Naar dette er lært, have vi da vist, hvorledes man kan erstatte de geometriske Additioner og Subtraktioner af Punkter tilhøjre for O ved Regning med positive Tal. Vi kunne nu vise, at til det her betragtede Tilfælde kunne alle Additioner og Subtraktioner føres tilbage, hvorledes end Punkterne ere beliggende, og derved vil da den Opgave, vi have stillet os, være fuldstændig løst.

17. Betragte vi OO som et Liniestykke med Længden Nul, vil det som Led i en flerleddet Størrelse ikke have nogen Indflydelse paa Resultatet; det samme gælder da om Tallet 0 i en Sum af Tal; vi kunne derfor i Stedet for $0 - a$ skrive blot $-a$, der da kommer til at betegne det samme Punkt som $\dot{a}$. Denne sidste Betegnelse bliver saaledes overflødig, og vi ville i det følgende erstatte den ved Betegnelsen $-a$. Tegnet $-$ faar derved egentlig en dobbelt Betydning, nemlig som Subtraktionstegn og som Kendemærke for de negative Tal, men ved begge Opfattelser bliver det ved Tallet bestemte Punkt det samme. Lignende Bemærkninger gælde om Tegnet $+$.

18. Ved Addition af positive og negative Tal kunne følgende Tilfælde forekomme (a og b betyde positive hele Tal)

$$+a + (+b) = a + b.$$

Regningen kan udføres; som anført forudsætte vi, at Addition og Subtraktion af Tal skrevne i Titalsystemet er lært.

$$+a + (-b) = a - b = -(b - a).$$

Er $a > b$, bruges Formen $a - b$, er $a < b$, bruges $-(b - a)$. I begge Tilfælde kan Regningen udføres; man ser, at Reglen bliver:

Et positivt og et negativt Tal adderes, idet man trækker det mindste (den numeriske Værdi) fra det største og giver det udkomne det størstes Fortegn.

$$-a + (-b) = -a - b = -(a + b).$$

Regningen kan udføres.

Man ser af det fundne, at i en Sum af to Tal har Resultatet altid samme Fortegn, som det numerisk største af Tallene.

Vi have nu betragtet de Tilfælde, der kunne forekomme ved to Tals Addition; Subtraktion kræver ingen nærmere Undersøgelse, da en Subtraktion kan forandres til en Addition ved at man forandrer Subtrahendens Fortegn.

19. Ved Beregning af en flerleddet Bogstavstørrelse, hvor givne Tal skulle indsættes for Bogstaverne, gør man i Reglen bedst i først at hæve de yderste Parenteser (idet der i Parentesen atter kan findes Parenteser), derpaa de, der nu ere de yderste o. s. v.; man ordner derpaa Leddene, i Reglen efter Bogstavernes Plads i Alfabetet og trækker saa meget sammen som muligt. For Kortheds Skyld skriver man $2a$ for $a + a$, $3a$ for $a + a + a$, o. s. v.

Eksempler:

$$a - [a - (b + a) + (a - b)]$$
$$= a - a + (b + a) - (a - b)$$
$$= a - a + b + a - a + b = a - a + a - a + b + b = 2b.$$
$$a - [b - (a - b) + c] + [(a - c) - b]$$
$$= a - b + (a - b) - c + (a - c) - b = 3a - 3b - 2c.$$

Eksempler til Øvelse.

1. En Mand har 300 Kr. F., 700 Kr. F. og 1100 Kr. G.; hvor stor er hans Formue?

2. A gaar ud fra en By, først 7 Mil mod Nord, derpaa 11 Mil mod Syd, derpaa 3 Mil mod Nord og derpaa 8 Mil mod Syd; hvor mange Mil befinder han sig nu Nord for Byen?

3. Et Thermometer viste Ispunktet (0 Grader), steg derpaa først 3 og saa 7 Grader, men faldt derefter 13 Grader; hvor mange Grader Varme viste det nu?

4. Adder Tallene -6, $+11$, -3, $+17$, subtraher derpaa fra det udkomne efterhaanden -9, $+3$, -5, -6.

5. Hvor stor er Summen af 5 paa hinanden følgende hele Tal i Talrækken, naar det mellemste af Tallene er a? Eks. $a = 7$; $a = -4$.

6. Hvor meget er -11 mindre end -3?

7. Hvor meget er -11 større end -3?

8. Dersom $a > b$, er saa $-a > -b$ eller er $-a < -b$?

9. $a - (b - (a + b)) - a$ reduceres; $a = 3$, $b = -4$ indsættes saa vel før som efter Reduktionen.

10. Hvad er $3a - 2b$, naar $a = -5$, $b = -2$?

11. Adder 3, -1, $+5$, -9, og subtraher derpaa -5, $+3$ og -2.

12. $(a - b) - (2a - 3b) - (3a - 2b) + (a - b)$; indsæt $a = 3$, $b = -2$ før og efter Reduktionen.

13. $2a - [3b - (b - a) + (a - b)] - (2a - 3b)$.

14. $\frac{a + b}{2} + \frac{2a - b}{2}$; $\frac{a + b}{2} - \frac{2a - b}{2}$.

15. $(a + b - c) + (a - b + c) - (-a - b + c)$; $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$.

16. $3a - 2b - [a - (a - [b - a] + 2b) - b] - 4a$; $a = -1$; $b = 2$; $c = 3$.

17. Hvilket Tal maa man lægge til -4 for at faa -7?

18. Hvad maa man lægge til $a + b$ for at faa $a - b$?

19. Hvorledes kan $15 - 9 + 3 - 7 + 11 - 12$ beregnes, saa at man kun udfører een Subtraktion?

20. $\frac{a + b}{a - b} + \frac{a}{a - b} - \frac{a + 2b}{a - b}$.

21.
$$\frac{2a - 3b}{a + b} - \frac{3a - 2b}{a + b} + \frac{a - 4b}{a + b} - \frac{4a - b}{a + b} + \frac{5a + 4b}{a + b} + \frac{b}{a + b}.$$

22. $a + \frac{a}{a - b} - \left(a + \frac{b}{a - b}\right)$.

23. $3a - [a + b - (a + b + c - [a + b + c + d])]$.

24. $a - [5b - (a - [3c - 3b] + 2c - [a - 2b - c])]$.

25. $a + 2x - [b + y - (a - x - [b - 2y] - y) + b]$.

26. $\frac{a - b - 1}{a + 2b} - \frac{a - 2b + 3}{a + 2b} - \frac{2a - 3b + 1}{a + 2b}$;

27. Adder $a + 2b$ til $2a - 3b$ og subtraher derpaa det, som $2a - 5b$ er større end $3a - 4b$; $a = 5$, $b = -1$.

Multiplikation.

20. Idet vi gaa over til Multiplikation, vilde det være naturligst og bedst stemmende med Udviklingen af Addition, hvis vi ved Multiplikation vilde forstaa en vis Operation med Punkter og Liniestykker, benytte dette til Udledelse af de gældende Sætninger og derpaa vise, hvorledes Regning med Tallene kan erstatte de geometriske Operationer. Dette kan i Virkeligheden ogsaa gøres, og vil senere blive gjort, men det kræver et

Kendskab til Geometri, som vi her ikke tør forudsætte. Vi nødes derfor til at gaa gradvis frem og begynde da med hele Tal for derpaa efterhaanden at udvide vore Definitioner og Sætninger til alle positive og negative Tal.

at multiplicere a med m vil sige at a skal sættes m Gange som Addent

At en Størrelse a skal **multipliceres** med m vil sige, at sætte a m Gange som Addend. ~~m Størrelser a skulle adderes.~~ a kan være en hvilken som helst Størrelse, medens m maa være et ubenævnt positivt, helt Tal.

a kaldes **Multiplikanden**, m **Multiplikator**, det udkomne **Produktet**. Multiplikator og Multiplikand kaldes med et fælles Navn **Faktorer**.

At a skal multipliceres med m, skrives $a \,.\, m$ eller $a \times m$ eller blot am. Tegnene . og $\times$ læses «Gange»; dersom begge Faktorer ere Tal, kan Tegnet ikke udelades. Vi have altsaa $am = a + a + a \ldots (m \text{ Gange})$.

Et benævnt Tal er egentlig et Produkt. I 7 Fod er 7 Multiplikator, 1 Fod Multiplikanden. Her staar altsaa Multiplikator forrest. Nogle Forfattere sætte derfor altid Multiplikator forrest, hvilket vi, naar vi have skrevet $3a$, $7b$ o. s. v., ogsaa hidtil have gjort. Andre sætte den derimod, som vi nu gøre det, bagest, saa at Regningerne, ligesom ved de to første Regningsarter, blive at udføre fra venstre mod højre;

$$abcd$$

betyder da, at a først skal multipliceres med b, det udkomne derpaa med c, det udkomne med d.

Eks. $3 \,.\, 5 \,.\, 4 = 15 \,.\, 4 = 60$; $a \,.\, 1 = a$; $1 \,.\, a = a$; $0 \,.\, a = 0 + 0 + 0 \ldots = 0$.

21. Multiplikation med $-m$ har ifølge den givne Definition ingen Betydning, undtagen naar m selv betyder et negativt Tal, altsaa $-m$ et positivt Tal; man kan derfor forstaa, hvad man vil, ved at multiplicere med $-m$,

naar man blot sørger for, at den ny Definition stemmer med den oprindelige, naar m er negativ. Man vedtager da ved en **Multiplikator $-m$ at betegne, at man skal multiplicere med m og derpaa forandre Produktets Fortegn**; at multiplicere med $-(-m)$ bliver da at multiplicere med m, thi at forandre Produktets Fortegn to Gange er det samme som at lade det blive uforandret.

22. Man har nu

$$(+a)(+m) = a + a + a \ldots (m \text{ G.}) = +am;$$
$$(-a)(+m) = (-a) + (-a) \ldots (m \text{ G.}) = -am;$$
$$(+a)(-m) = -am;$$
$$(-a)(-m) = -(-a)\,m = +am.$$

Disse 4 Formler vise, at **man finder Produktet af to Tal ved at tage Produktet af deres numeriske Værdier og give dette Fortegnet $+$, dersom Faktorerne have ens, $-$, dersom de have forskellige Fortegn.**

Dersom Produktet har flere Faktorer, skifter Fortegnet, hver Gang vi multiplicere med en negativ Faktor. At skifte Tegn et lige Antal Gange er imidlertid det samme som ikke at skifte Tegn. **Produktet bliver derfor negativt, dersom det indeholder et ulige Antal negative Faktorer, i modsat Fald positivt.**

Man kan udtrykke dette ved at sige, at **Tallene multipliceres for sig, Fortegnene for sig; Fortegnenes Produkt er da $-$, naar $-$ findes mellem dem et ulige Antal Gange, ellers $+$.**

Eks. $(-a)(-b)(-c) = -abc$; $(-1)(-a) = a$; $(-3)(-2) \,.\, 5 = 30$; $(-1)(a - b) = -(a - b) = b - a$;

$$(-a)(-a) \ldots (7 \text{ G.}) = -a \,.\, a \,.\, a \ldots (7 \text{ G.});$$
$$a\,(-1) = -a;\ (-1)\,a = -a.$$

Dersom $y = (x - 5)(x - 1)$, bliver y positiv for $x > 5$ og for $x < 1$, negativ for $5 > x > 1$.

23. I Stedet for $a . a \ldots (m\text{ G.})$ skrives kortere a^m, der læses »a i m^{te} Potens«. a^2 kaldes ogsaa Kvadratet af a, a^3 Kubus af a.

Eks. $2^3 = 8$; $1^5 = 1$; $(aaa)(bb) = a^3b^2$;

$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$; $(-3)^3 = -27$;

$0^4 = 0$; $a^1 = a$; $(-1)^{17} = -1$.

24. Man multiplicerer en Brøk ved at multiplicere dens Tæller.

$$\frac{a}{b} . m = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \ldots (m\text{ G.}) = \frac{a + a \ldots (m\text{ G.})}{b}$$

$$= \frac{am}{b};\ \left(\frac{a}{b}\right)(-m) = -\left(\frac{a}{b}\right)m = -\frac{am}{b} = \frac{-am}{b},$$

hvor den sidste Ligning definerer Betydningen af en Brøk med negativ Tæller, som ifølge vor oprindelige Definition var uden Betydning. a maa betyde et helt Tal, da Brøken ellers er uden Betydning

25. Man multiplicerer en flerleddet Størrelse ved at multiplicere alle dens Led.

$$(a+b-c)m = (a+b-c) + (a+b-c) + (a+b-c) \ldots (m\text{G.})$$

$$= a + a + a .. (m\text{G.}) + b + b + b .. (m\text{G.}) - c - c - c .. (m\text{G.})$$

$$= am + bm - (c + c .. [m\text{ G.}]) = am + bm - cm;$$

$$(a+b-c)(-m) = -(a+b-c)\,m$$

$$= -(am + bm - cm) = -am - bm + cm.$$

Man ser let, at det samme Bevis kan føres for et hvilket som helst Antal Led.

Omvendt kan man for $am + bm - cm$ skrive $(a+b-c)\,m$. Man kalder denne Omskrivning at sætte den fælles Faktor m uden for en Parentes; dersom den Multiplikator, der sættes uden for Parentesen,

har Fortegnet $-$, faa alle Leddene i Parentesen forandrede Fortegn.

Eks. $(a - b + c - d)\,m = am - bm + cm - dm$;

$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$;

$am + bm - cm - dm = (a+b)\,m - (c+d)\,m$;

$(a+b)\,a - (a+b)\,b = a^2 + ab - (ab + b^2) = a^2 - b^2$;

$(a^3 + b^2)\,a^2 = a^3a^2 + b^2a^2$; $(a - b)(-a) = -a^2 + ba$;

$-ma - mb = (a+b)(-m) = -(a+b)\,m$.

26. Naar en Brøk multipliceres med sin Nævner, faar man Tælleren.

$$\frac{a}{b} . b = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ldots (a\text{G.})\right) b$$

$$= 1 + 1 + 1 \ldots (a\text{ G.}) = a.$$

27. Multiplikand og Multiplikator kunne ombyttes, naar de ere hele Tal.

Sætningen gælder, som det let ses, om Fortegnene, da disses Orden ingen Rolle spiller, naar man bestemmer Produktets Fortegn; vi behøve altsaa kun at betragte to positive hele Tal:

$ab = (1 + 1 + 1 \ldots [a\text{G.}])\,b = b + b + b \ldots (a\text{G.}) = ba.$

Dersom Multiplikanden er benævnt, ombyttes kun Tallene, medens Benævnelsen bliver staaende, f. Eks.

$$7\,\text{Kr.} . 3 = 3\,\text{Kr.} . 7 = 21\,\text{Kr.}$$

Man ombytter dog undertiden ogsaa Benævnelsen, da dette ikke kan misforstaas. 7 . 5 Kr. betyder altsaa egentlig 5 Kr. . 7.

De beviste Sætninger gælde ogsaa i det Tilfælde, hvor en Multiplikator er 0, dersom vi vedtage, at $a . 0 = 0$. Et Produkt bliver da 0, naar en af Faktorerne er 0.

Man har nu f. Eks.

$bac = abc = (ab)\,c$; $b(a+c) = (a+c)\,b = ab + cb$;

$(-b)(a-c) = -(a-c)\,b = -(ab - cb) = cb - ab$.

28. Man multiplicerer et Produkt af to Faktorer ved at multiplicere den ene Faktor og det udkomne med den anden.

$(ab)\,c = (a + a \ldots [b\,\mathrm{G.}])\,c = ac + ac \ldots (b\,\mathrm{G.}) = (ac)\,b$

eller blot $abc = acb$.

Man ser heraf, at man kan ombytte to Faktorer, selv om der gaar en Faktor foran disse; man kan da ogsaa ombytte dem, naar der gaar flere Faktorer foran, thi Multiplikationen af disse skal udføres først, og de kunne derfor tænkes sammentrukne til een Faktor. Det er end videre tydeligt, at man kan ombytte to Faktorer i et Produkt, hvor mange Faktorer der end følge bagefter disse, da disse Faktorer først skulle benyttes, naar man har fundet Produktet af de foregaaende. Man kan altsaa ombytte to hvilke som helst efter hinanden følgende Faktorer i et Produkt af positive og negative hele Tal.

29. Faktorernes Orden er ligegyldig ved hele Tal. Man kan nemlig bringe Faktorerne i en hvilken som helst Orden ved fortsat Ombytning af dem to og to, idet man derved først bringer den paa den første Plads, som skal staa der, saa den paa den anden Plads, som skal staa der, o. s. v. Skal f. Ex. $abcd$ skrives som $dbca$, ombyttes d efterhaanden med c, b og a, hvorved man faar $dabc$; ombyttes derpaa b med a og endelig c med a, har man $dbca$.

30. I en Række af Faktorer kan man sætte eller bortkaste Parenteser efter Behag.

Om de forreste Faktorer ser man, at Sætningen gælder; $abcd$ og $(abc)\,d$ betegne det samme. Skal man nu sætte en Parentes, kunne de Faktorer, der skulle staa i en saadan Parentes, bringes forrest, og Parentesen kan da sættes; denne er nu at betragte som en

enkelt Faktor; et andet Sæt Faktorer bringes nu forrest, en ny Parentes sættes o. s. v.

$abcdef = (ef)\,(cd)\,(ab)$, thi $abcdef = (ab)\,cdef = cdef\,(ab)$

$= (cd)\,ef\,(ab) = (ef)\,(cd)\,(ab)$.

Dersom der i et Produkt er en Talfaktor, sættes denne forrest og kaldes Koefficienten.

31. Man kan nu multiplicere et vilkaarligt Antal Produkter paa følgende Maade:

Først bestemmes Produktets Fortegn; derpaa bestemmes dets Koefficient ved Multiplikation af alle Faktorernes Koefficienter; Bogstavfaktorerne stilles derpaa efter hinanden (for Overskueligheds Skyld i Almindelighed i alfabetisk Orden) saaledes, at de, der ere ens, samles og skrives paa den vedtagne korte Maade (23).

Eks. $(ab)\,(ab)\,(ab) = aaabbb = a^3b^3$;

$a^3a^4 = aaaaaaa = a^7$; $aa^5 = a\,(aaaaa) = a^6$;

$ab^2a^2b = aaabbb = a^3b^3$;

$3a^2b \,.\, 2ab^2 \,.\, 3ab = 3 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, a^2 \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b^2 \,.\, b = 18a^4b^4$;

$(a^2b)^3 = a^2b \,.\, a^2b \,.\, a^2b = a^2a^2a^2bbb = a^6b^3$;

$(-2ab^2)\,(-3ab^3)\,(-2c) = -12aab^2b^3c = -12a^2b^5c$;

$(-3a^3bc)\,(2ab^2c)\,(-2ab) = 12a^3aabb^2bcc = 12a^5b^4c^2$;

$(-2ac^2b)\,(-2a^2bcd)\,(-3ad^3)\,(-a) = 12a^5b^2c^3d^4$.

32. To flerleddede Størrelser multipliceres ved, at man multiplicerer alle Leddene i den ene efterhaanden med hvert Led i den anden og adderer de udkomne Led.

$(a+b)\,(c+d) = a\,(c+d) + b\,(c+d)$

$= ac + ad + bc + bd$;

$(a-b)\,(c-d) = a\,(c-d) - b\,(c-d)$

$= ac - ad - bc + bd$.

Ved Multiplikationens Udførelse skrives Faktorerne under hinanden, og de udkomne ensartede Led under hinanden for derpaa at sammentrækkes; skal man f. Eks. finde Produktet $(a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c)$, skrives Regningen saaledes

$$\begin{array}{llll}
a - 2b + 3c & & & \\
a + 2b - 3c & & & \\
\hline
a^2 - 2ab + 3ac & & & \\
\quad + 2ab & - 4b^2 + & 6bc & \\
\quad\quad - 3ac & + & 6bc - 9c^2 & \\
\hline
a^2 & - 4b^2 + & 12bc - 9c^2, &
\end{array}$$

altsaa

$$(a - 2b + 3c)(a + 2b - 3c) = a^2 - 4b^2 + 12bc - 9c^2.$$

33. Kvadratet af en toleddet Størrelse faar tre Led, nemlig Kvadratet af det første Led (altid positivt), det dobbelte Produkt af de to Led (positivt eller negativt, efter som disse have ens eller forskelligt Fortegn) og Kvadratet af det andet Led (positivt).

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Denne Regel kan ogsaa anvendes paa en Størrelse med flere Led, idet da i denne flere af Leddene tages som eet Led.

$$(a + b - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc;$$
$$(a + b - c - d)^2 = ((a + b) - (c + d))^2$$
$$= (a + b)^2 - 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2 \text{ o. s. v.}$$

34. To Størrelsers Sum, multipliceret med de samme to Størrelsers Differens, giver den første Størrelses Kvadrat minus den anden Størrelses Kvadrat.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$
$$(-a + b)(-a - b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)^2 - c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - c^2;$$
$$(a + b + c + d)(a - b + c - d)$$
$$= [(a + c) + (b + d)][(a + c) - (b + d)]$$
$$= (a + c)^2 - (b + d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 - 2bd - d^2;$$
$$25c^2 - 9d^2 = (5c + 3d)(5c - 3d);$$
$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$$
$$= a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c).$$

35. Skal en flerleddet Størrelse om muligt skrives som et Produkt, have vi foreløbig intet andet Middel end at forsøge at finde Faktorerne ved at sætte fælles Faktorer uden for Parenteser. Man kan ofte benytte Formlen $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Eks. $am + bm - an - bn = m(a + b) - n(a + b)$

$$= (m - n)(a + b);$$
$$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 5x - 2x + 10$$
$$= x(x - 5) - 2(x - 5) = (x - 2)(x - 5);$$
$$a^2 + a - ab - b = a(a + 1) - b(a + 1) = (a + 1)(a - b);$$
$$a^2 - 2cb + b^2 - c^2 = (a - b)^2 - c^2$$
$$= (a - b + c)(a - b - c);$$
$$a^2 - b^2 - (a + b)^2 = (a + b)(a - b) - (a + b)^2$$
$$= (a + b)[a - b - (a + b)] = -2b(a + b);$$
$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

36. Den fundne Regel for Multiplikation af flerleddede Størrelser anvendes, naar man multiplicerer Tal større end 10, idet et saadant Tal med Cifrene $a, b, c \ldots$ (fra højre mod venstre) har Værdien

$$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + \ldots$$

Ved Multiplikationen skrives da som sædvanlig de ensartede Led under hinanden, men Enhederne udelades. Skrives Enhederne f. Eks. i 73×31, vil Regningen se saaledes ud

$$\begin{array}{r} 7 \,.\, 10 + 3 \\ 3 \,.\, 10 + 1 \\ \hline 7 \,.\, 10 + 3 \\ 2 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 10^2 + 9 \,.\, 10 \quad\quad \\ \hline 2 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 10^2 + 6 \,.\, 10 + 3 = 2263. \end{array}$$

Eksempler til Øvelse.

1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

3. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

4. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

5. $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab\,(a^2 + b^2)$.

6. $(a + 2b - 3c)\,(a + 2b + 3c) - (a + 2b)^2 = -9c^2$.

7. $5a + 5b + ab + b^2$ opløses i Faktorer.

8. $4a^2 - 25b^2$ opløses i Faktorer.

9. $(x^2 - 3x + 1)^2 = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$.

10. $a\,(a + 2b)^2 - b\,(b + 2a)^2 = a^3 - b^3$.

11. $(x-1)^3 - x\,(x-1)^2 + x\,(x-1) - x + 1 = 0$.

12. $(2x^2 - 3x + 1)^2 - (2x^2 - 3x)^2 - 2x\,(2x - 3) = 1$.

13. $(x^2y - y^2x)^2 - 2x^2y^2\,(x - y)^2 + xy\,(x^2 + y^2)\,xy = 2x^3y^3$.

14. $2a - 3\,[a - 2\,(3a - 2b) + 3\,(a - b)] = 8a - 3b$.

15. $(a+b)\,(b+c)\,(c+a) - (a-b)\,(b-c)\,(c-a)$
$$= 2\,(a^2b + b^2c + c^2a + abc).$$

16. Find Produktet af 5 paa hinanden følgende Tal i Talrækken, af hvilke det mellemste er a.

17. $\left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + a\right)a - \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + b\right)b$ reduceres og opløses i Faktorer.

18. $(a^2 - 2ab - b^2)^2 - b^2\,(2a + b)^2 + 2a^2b\,(2a + b) = a^4$.

19. $\frac{b+c}{d} \,.\, a - \frac{a+b}{d} \,.\, c = \frac{b\,(a-c)}{d}$.

20. $ab - 2ac + 2b^2 + 2c^2 - 5bc$ opløses i Faktorer; $(-5bc = -4bc - bc)$.

21. Eks. 11 reduceres ved at sætte uden for Parentes.

22. $(a + b + c)\,(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

23. $(a-b)\,(b-c)\,(c-a) - a^2\,(c-b) - b^2\,(a-c) - c^2\,(b-a) = 0$.

24. $(x^2 - x + 1)\,(x^2 + x + 1)\,(x^4 - x^2 + 1) - (x^4 + 1)^2 = -x^4$.

25. $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2 - 4x^3y = 4xy^3$.

26. $\frac{a+b}{c}\,(a+b) - \frac{a-b}{c}\,(a-b) - \frac{4ab - c}{c} = 1$.

27. $\frac{a+b-c}{a+b+c}\,c + \frac{a-b+c}{a+b+c}\,b - \frac{a-b-c}{a+b+c}\,a + \frac{(a-b+c)^2}{a+b+c}$
$$= \frac{4ac}{a+b+c}.$$

28. Hvad bliver $xy^2 - yx^2$, naar $x = a + b$, $y = a - b$?

29. $x\,(x+1)\,(x+2)\,(x+3) - (x^2 + 3x + 1)^2 = -1$.

30. $x^8 - 1$ opløses i Faktorer.

31. For hvilke Værdier af x er y positiv, Nul eller negativ, naar $y = (x-9)\,(x-3)$?

32. For hvilke Værdier af x er y positiv, Nul eller negativ, naar $y = (x-9)\,(x-3)\,(x-1)$?

Divisjon.

37. **At dividere** et Tal a med et Tal b vil sige, at finde det Tal, som multipliceret med b giver a. a kaldes da **Dividenden**, b **Divisor**, det udkomne **Kvotienten**. «Divideret med» betegnes : .

Man har altsaa

$$a : b = c, \text{ dersom } cb = a. \tag{1}$$

Man prøver derfor en Divisjons Rigtighed ved at undersøge, om

Kvotienten × Divisor = Dividenden.

Dersom Kvotienten er et helt Tal, siger man, at Divisjonen gaar op eller, at Divisor gaar op i Dividenden.

I en Række Størrelser med Tegnene . og : skal Regningen udføres fra venstre mod højre;

$$a : b \,.\, c : d : e$$

betegner altsaa, at a skal divideres med b, det udkomne multipliceres med c, det udkomne divideres med d, det udkomne med e.

Eks. $2 . 3 : 2 . 5 : 3 = 5$; $5 . 3 . 4 : 5 . 3 : 9 . 2 : 4 = 2$.

38. De to Ligninger (1) udsige altsaa det samme, blot under en forskellig Form. Heraf følger, at Dividenden (Multiplikanden) kan være et benævnt Tal; er Divisor da ubenævnt, faar Kvotienten den samme Benævnelse som Dividenden; ved Divisjonen deler man den benævnte Størrelse i saa mange lige store Dele, som Divisor angiver.

Eks. 10 ℔ : 2 = 5 ℔, thi 5 ℔ . 2 = 10 ℔;

$$8 \text{ Kr.} : 5 = \frac{8}{5} \text{ Kr.}$$

Dividend og Divisor knnne ogsaa være benævnte og maa da være ensbenævnte eller i alt Fald kunne gøres ensbenævnte. Kvotienten er da et ubenævnt Tal og siges

at angive **Forholdet** mellem Dividend og Divisor, det vil sige det Antal Gange, Divisor indeholdes i Dividenden.

Eks. 10 ℔ : 5 ℔ = 2;

1 ℔ : 10 Kvint = 100 Kv. : 10 Kv. = 10.

Man maa her erindre, at vi, naar vi skrive $a . b$ ℔, egentlig mene a ℔ . b.

39. Af Ligningerne (1) ses, ved at man sætter lige store Størrelser i Stedet for hinanden, at

$$c . b : b = c; \quad a : b . b = a,$$

der vise, at Multiplikation og Divisjon med samme Tal, udførte efter hinanden, hæve hinanden. Divisjon og Multiplikation kaldes derfor **modsatte Regningsarter**.

40. **Kvotienten $a : b$ betegner det samme som Brøken $\frac{a}{b}$,** naar a er et helt Tal.

Man har

$$a : b = \frac{a}{b}, \text{ thi } \frac{a}{b} . b = a. \tag{2}$$

De to Betegnelser bruges herefter i Flæng, idet vi da ved Brøken $\frac{a}{b}$, hvor a ikke er et helt Tal, egentlig forstaa $a:b$. Sætningen og Beviset i 24 gælde nu ogsaa, naar a ikke er hel.

41. **Kvotienten bliver positiv, naar Dividend og Divisor have ens, negativ, naar de have forskellige Fortegn.**

$$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}; \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

Man ser let ved at anvende Prøven, at disse Formler ere rigtige.

Da disse Regler ere de samme som de, vi fandt for Tegnene ved Multiplikation, **kunne vi, naar vi have en Række af Faktorer og Divisorer, regne med Tallene for sig og med Fortegnene for sig;**

finde vi mellem disse — et ulige Antal Gange, bliver Resultatet negativt, ellers positivt.

Eksp. $\frac{3 \,.\, 5}{3} = 5$; $\frac{6\,(-3)}{-9} = 2$;

$$(-3)(-4):(-6):2 = -1;$$

$$(-1)(-1)(-1):(-1):(-1):(-1) = 1;$$

$$\frac{a}{1} = a; \ \frac{a}{-a} = -1; \ \frac{am}{a} = m; \ a^3 : a = a^2;$$

$$(-a^3b^2):(ab) = -a^2b; \ \frac{a-b}{b-a} = -1; \ \frac{0}{a} = 0;$$

$$(-a):(-b) \,.\, (-c) = -a:b \,.\, c;$$

$$(-a^5):(-a):(-a):(-a):(-a) = -a.$$

42. En Faktor og en Divisor, der følge efter hinanden, kunne ombyttes.

$a \,.\, b : c = a : c \,.\, b$, thi $a : c \,.\, b \,.\, c = a : c \,.\, c \,.\, b = ab$.

43. To Divisorer, der følge efter hinanden, kunne ombyttes.

$a : b : c = a : c : b$, thi $a : c : b \,.\, c = a : c \,.\, c : b = a : b$.

44. Ved efterhaanden at anvende disse to Sætninger kunne vi skrive en Række af Faktorer og Divisorer i en hvilken som helst Orden.

Eks. $a \,.\, b : c : d \,.\, e = a \,.\, b \,.\, e : c : d$; $a : b = 1 : b \,.\, a$.

I det sidste Eksempel have vi sat Faktoren 1 til, der altid kan tænkes underforstaaet.

45. I en Række af Faktorer og Divisorer kan man sætte eller bortkaste en Parentes efter Behag, naar blot Parentesen staar som Faktor (har Tegnet .).

Man ser nemlig let, at Sætningen er rigtig, naar Parentesen staar eller sættes om de første Faktorer og Divisorer. Da man nu kan bringe hvilke Faktorer og Divisorer, man vil, forrest, gælder Sætningen altid.

Eks. $a \,.\, b : c : d = a \,.\, (b : c : d)$, thi $a \,.\, b : c : d$
$= b : c : d \,.\, a = (b : c : d)\, a = a\, (b : c : d)$.

46. Dersom Parentesen staar som Divisor (har Tegnet :), kan man ogsaa sætte den eller bortkaste den efter Behag, naar man samtidig i Parentesen forandrer Tegnene (. til : og : til .).

Man behøver, idet man gaar frem som ovenfor, kun at bevise, at Sætningen gælder om de forreste Faktorer og Divisorer. Man har imidlertid

$$a : (b : c \,.\, d) = a : b \,.\, c : d,$$

thi $a : b \,.\, c : d \,.\, (b : c \,.\, d) = a : b \,.\, c : d \,.\, b : c \,.\, d = a$, et Bevis, der let ses at gælde, hvor mange Faktorer og Divisorer der end findes i Parentesen.

47. Man tør dog kun bruge de her beviste Sætninger saaledes, at man ikke ved at sætte en Parentes faar en brudden Divisor eller Multiplikator, da en saadan, efter vore Definitioner, ikke har nogen Betydning. Det ligger da nær, at man for at undgaa denne Indskrænkning vedtager, at man ved Multiplikation med en Brøk vil forstaa Multiplikation med Tælleren og Divisjon med Nævneren; derved kommer det hidtil (naar c ikke gaar op i b) meningsløse Udtryk $a \,.\, (b : c)$ til at betegne det samme som $a \,.\, b : c$, saa at Parentesen ogsaa i dette Tilfælde kan sættes.

Divisjon med en Brøk har nu ogsaa Betydning og betegner Multiplikation med den omvendte Brøk:

$$a : \frac{b}{c} = a \,.\, \frac{c}{b}, \text{ da } a \,.\, \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} = a \,.\, c : b \,.\, b : c = a.$$

Tillige ser man, at Produktet af en Brøk og den omvendte Brøk er 1; $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = a : b \,.\, b : a = 1$.

Ved denne Definition af en brudden Multiplikator falder nu den ovenfor nævnte Indskrænkning bort, og alle de beviste Sætninger gælde almindelig for en hvilken som helst Række af Faktorer og Divisorer, hvad enten disse ere hele Tal eller Brøker. Saaledes er f. Eks. Faktorernes Orden ogsaa vilkaarlig, naar de ere Brøker, thi

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = a:b.c:d = c:d.a:b = \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

I de her beviste Sætninger er en Mængde specielle Sætninger indbefattet; vi ville nævne de vigtigste.

48. En Brøks Værdi forandres ikke, naar dens Tæller og Nævner multipliceres eller divideres med samme Tal.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \text{ thi } am:(bm) = am:b:m = a:b.$$

En Brøk forkortes, naar dens Tæller og Nævner divideres med samme Tal; kan Brøken ikke forkortes, siges den at være bragt paa sin simpleste Benævning.

Eksp. $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$; $\frac{abc}{bcd} = \frac{a}{d}$; $\frac{a^3b^2}{5a^4b} = \frac{b}{5a}$;

$$\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Foreløbig maa vi for om muligt at forkorte en Brøk forsøge paa at opløse Tælleren og Nævneren i Faktorer, for derpaa at bortdividere de fælles Faktorer.

En Brøk kan omformes til en anden med en hvilken som helst Nævner, i hvilken den givne Nævner gaar op.

Har Brøken Nævneren a, og ønske vi at skaffe den Nævneren ab, multipliceres Tæller og Nævner med b.

Eksp. $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb} = \frac{a^2+ab}{ab+b^2}$ o. s. v.;

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)};$$

$$\frac{ab+ac}{mb+mc} = \frac{a(b+c)}{m(b+c)} = \frac{a}{m};$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5};$$

$$\frac{a^2-b^2}{ma+mb} = \frac{a-b}{m}.$$

49. To Brøker multipliceres ved, at man multiplicerer Tællerne for sig og Nævnerne for sig.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \text{ thi } a:b.(c:d) = a:b.c:d = a.c:(b.d).$$

Da $\frac{ac}{bd}$ kan forkortes med ethvert Tal, der gaar op i a eller c og tillige i b eller d, dividerer man, før Multiplikationen udføres, ikke alene a og b, c og d, men om muligt a og d, b og c med samme Tal; man kalder dette sidste at forkorte over Kors. Dersom den ene Faktor er et helt Tal, skrives den som en Brøk med Nævneren 1, og man gaar frem paa samme Maade. Da man, i Stedet for at dividere med en Brøk, multiplicerer med den omvendte Brøk, behøves der ingen særlige Regler for Divisjon.

Eks. $\frac{16}{25}\cdot\frac{15}{8} = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{1} = \frac{6}{5}$;

$$\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{bc}{ad} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^3}:\frac{(a-b)^3}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)^3}\cdot\frac{a+b}{(a-b)^3}$$

$$= \frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\frac{a+b}{(a-b)^3} = \frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{1}{(a+b)(a-b)^2}.$$

Særlig mærkes:

Dersom en Brøk skal multipliceres med et helt Tal, i hvilket dens Nævner gaar op, divideres Nævneren i det hele Tal, og med Kvotienten multipliceres Tælleren.

$$\frac{a}{b}\cdot bc = a\,.\,(bc):b = a\,(bc:b) = ac.$$

En Brøk divideres med et helt Tal, idet man dividerer Tælleren eller multiplicerer Nævneren med Tallet.

$$\frac{a}{b}:c = a:b:c = a:(bc) = \frac{a}{bc};$$

$$\frac{ab}{c}:b = ab:c:b = \frac{a}{c}.$$

Flere særlige Tilfælde er det unødvendigt at fremhæve. Vi skulle nu give nogle Eksempler paa Anvendelsen af den almindelige Sætning

$$a:(b\,.\,c:(d:e)) = a:b:c\,.\,d:e = ad:(bce);$$

$$a:b:[a:b:(a\,.\,c:b)\,.\,a] = a:b:a\,.\,b\,.\,a\,.\,c:b:a = c:b;$$

$$\frac{a\,.\,\frac{b}{c}:d}{b\,.\,\frac{cd}{a}:a} = a\,.\,b:c:d:(b\,.\,c\,.\,d:a:a)$$

$$= a\,.\,b:c:d:b:c:d\,.\,a^2 = a^3:c^2:d^2.$$

50. En flerleddet Størrelse divideres ved, at man dividerer hvert Led for sig.

$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d},$$

thi $$\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}\right)d = a+b-c.$$

Heraf følger, at Sætningen i 25 ogsaa gælder for en brudden Multiplikator.

$$(a+b-c)\frac{d}{e} = (a+b-c)\,d:e = (ad+bd-cd):e$$

$$= a\,.\,\frac{d}{e}+b\,.\,\frac{d}{e}-c\,.\,\frac{d}{e}.$$

51. **Brøkers Addition.** Vi have lært, hvorledes Brøker adderes og subtraheres, naar de have samme Nævner. Dersom de ikke have samme Nævner, omskrives de, saa at de faa samme Nævner, hvorpaa Additionerne og Subtraktionerne udføres. Den Nævner, vi skaffe alle Brøkerne, kaldes Generalnævneren. Det maa være en Størrelse, i hvilken alle Nævnerne gaa op; man kan derfor til Generalnævner benytte Nævnernes Produkt, men man kan ofte benytte et mindre Tal. Senere lære vi, hvorledes den simpleste Generalnævner findes; men foreløbig maa vi søge at komme til den ved Betragtning af Nævnernes Faktorer. Disse maa alle findes i Generalnævneren; men dersom den samme Faktor findes i flere Nævnere, behøver man kun at tage den een Gang med i Generalnævneren. Ere saaledes Nævnerne ab, ac og bc, bliver Generalnævneren abc; ere Nævnerne a^2b og ab^2, bliver Generalnævneren a^2b^2, o. s. v.

Saa snart Generalnævneren er funden, divideres den med enhver af Nævnerne, og med Kvotienten multipliceres Brøkens Tæller og Nævner.

Generalnævneren holdes opløst i Faktorer, da Divisjonen med Nævnerne derved lettes.

Eks.

Nævnere	Generalnævner
$ab,\ abc,\ a^2b,\ b^2$	$a^2b^2c;$
$(a+b)^2,\ a^2-b^2$	$(a+b)^2\,(a-b);$
$a-b,\ b-c,\ c-a$	$(a-b)\,(b-c)\,(c-a);$
$a+b,\ a-b,\ a^2-b^2$ . . .	$a^2-b^2;$
$6a,\ 4a^2b,\ 3ab^2,\ a+b$ . . .	$12a^2b^2\,(a+b);$

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{12}{20}-\frac{10}{20}+\frac{15}{20} = \frac{17}{20};$$

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}-\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab} = \frac{1-b+a}{ab};$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}-\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2};$$

$$\frac{a}{5}-\frac{a-b}{3}+\frac{2b-a}{2}=\frac{6a}{30}-\frac{10a-10b}{30}+\frac{30b-15a}{30}$$
$$=\frac{40b-19a}{30};$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$$
$$=\frac{(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

$$\frac{1}{6a}-\frac{a^2+b^2}{4a^2b}+\frac{a^2-b^2}{3ab^2}-\frac{2}{a+b}$$
$$=\frac{4a^4+a^3b-29a^2b^2-5ab^3-3b^4}{12a^2b^2(a+b)}.$$

52. En Sum af et helt Tal og en Brøk kaldes et blandet Tal. Da det hele Tal kan skrives som en Brøk med Nævneren 1, kan et blandet Tal omskrives til en Brøk, og omvendt kan en Brøk omskrives ved, at Divisjonen udføres i de Led, hvor den gaar op.

Eks. $3\frac{1}{5}=3+\frac{1}{5}=\frac{15}{5}+\frac{1}{5}=\frac{16}{5};$

$$7\frac{9}{11}=\frac{7.11+9}{11}=\frac{86}{11};\quad a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c};$$

$$a-\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{a^2-a^2+b^2}{a}=\frac{b^2}{a};$$

$$\frac{31}{7}=\frac{28+3}{7}=4\frac{3}{7};\quad \frac{a^2+ab+c}{a}=a+b+\frac{c}{a}.$$

53. En Brøk, i hvis Tæller og Nævner der atter findes Brøker, kaldes en Brøks Brøk; ved at multi-

plicere dens Tæller og Nævner med Smaabrøkernes Generalnævner bringer man den paa simpel Brøks Form (49). For at udføre andre Regninger med blandede Tal trækker man dem i Reglen først sammen til Brøker.

Eks.

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}{a-\frac{c}{b}}=\frac{a+c}{ab-c};\quad \frac{1+\frac{a+b}{a-b}}{\frac{a+b}{a-b}-1}=\frac{a-b+a+b}{a+b-(a-b)}=\frac{a}{b};$$

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x+y-(x-y)}=\frac{x^2+y^2}{y};$$

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b}=2;$$

$$\left(x-\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)$$
$$=\frac{-xy-y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x+y}=-y.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $\frac{b-a}{x-b}-\frac{a-2b}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}.$ 6

2. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b};\quad \frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}.$ 6

3. $\frac{a}{2a-2b}+\frac{b}{2b-2a};\quad \frac{a}{2a-2b}-\frac{b}{2b-2a}$ 6

4. $\frac{2}{x}-\frac{3}{2x-1}+\frac{x-4}{2x^2-x};\quad \frac{2}{x}+\frac{3}{2x-1}-\frac{x-4}{2x^2-x}.$

5. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}.$

6. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)-\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right).$

7. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}.$

8. $\frac{3}{1-2x}-\frac{7}{1+2x}-\frac{4-20x}{4x^2-1}.$

9. $\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(b-c)(c-a)}.$

10. $\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$

11. $\frac{(a+b)^2}{x(a-b)}\cdot\frac{(a-b)^2}{x^2(a+b)}\cdot\frac{2x^2}{a^2-b^2}:\frac{2}{x}.$

12. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}:\frac{xy(x+y)}{x^2-y^2}\cdot\left(1+\frac{2y}{x+y}\cdot\frac{y}{x-y}\right).$

13. $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+ac}{(b+c)(b-a)}+\frac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}.$

14. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+2\,\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$

15. $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\left(\frac{1}{2}:\frac{y}{x}+1\right).$

16. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right):\left(x+\frac{1}{x}\right).$

17. $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{1-\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}.$ 18. $\dfrac{\frac{a+b}{c+d}+\frac{a-b}{c-d}}{\frac{a+b}{c-d}-\frac{a-b}{c+d}}.$

19. $\dfrac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c+1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}-\frac{3abc}{bc+ca-ab}.$

20. $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}.$

21. $x-1-\cfrac{x+1}{x-1+\cfrac{x+1}{x-1-\cfrac{1}{x}}}.$

22. $\frac{2ax-a+10x-5}{a-2ax-10x+5}$ forkortes.

23. $\frac{a^2-b^2-ac+bc}{ab+ac+b^2-c^2}$ forkortes.

24. $\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right):\left(1-\frac{b}{a}\right):\left(1+\frac{a}{b}\right).$

25. $\left[\frac{a+b}{a-b}\left(1-\frac{a}{b}\right)-\frac{a-b}{a+b}\left(1+\frac{b}{a}\right)+\frac{2a}{b}\right]:\frac{a-b}{ab}.$

26. $3\tfrac{1}{3}x-2\tfrac{1}{2}\left(1\tfrac{1}{3}x-1\tfrac{3}{5}\right)+\tfrac{5}{3}\left(\frac{3x}{2}-8\right).$

27. $\dfrac{a^4-2a^2b^2+b^4}{\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}.$

28. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-8x+15}.$

29. $\frac{1}{am+an-bm-bn}-\frac{1}{am-an-bm+bn}.$

30. $1+x+x^2+x^3+x^4\ldots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1+x}.$

---

54. **Polynomiers Divisjon.** Et Polynomium skrives i Almindelighed saaledes, at det er ordnet efter stigende eller faldende (aftagende) Potenser af et af de forekommende Bogstaver. Dersom man f. Eks vil ordne et Polynomium efter Bogstavet x med stigende Potenser, skriver man først de Led, der ikke indeholde x, derpaa de Led, der indeholde x (hvilke kunne sammentrækkes til eet, idet x sættes uden for en Parentes), derpaa de Led, der indeholde x^2 (hvilke ligeledes kunne sammentrækkes) o. s. v. Tager man Leddene i omvendt Orden, er Polynomiet

ordnet efter faldende Potenser. Dersom den højeste Potens af x, der forekommer, er x^n, siges Polynomiet at være af n^{te} Grad med Hensyn til x.

Et Polynomium kaldes **homogent** af n^{te} Grad med Hensyn til visse Bogstaver a, b, c ..., dersom der i hvert af Polynomiets Led findes n af disse Faktorer.

Eks. $a + bx^3 - cx^2 + 7x^3 + 5 + ax + b - x^2$ er af 3dje Grad m. H. t. x og ordnes til

$$(b + 7)\,x^3 - (c + 1)\,x^2 + ax + a + b + 5$$

eller $\quad 5 + a + b + ax - (c + 1)\,x^2 + (b + 7)\,x^3.$

$a^2 + 3ab + 2b^2$ er homogent af 2den Grad m. H. t. a og b.

$3a^3 + 5a^2b - 7ab^2 - b^3$ er homogent af 3dje Grad m. H. t. a og b.

Skal et Polynomium d divideres i et andet D, ordnes de begge efter faldende Potenser af det samme Bogstav. Tænkes den søgte Kvotient ordnet paa samme Maade, maa første Led af Kvotienten, multipliceret med første Led af Divisor, give første Led af Dividenden; omvendt findes altsaa første Led af Kvotienten, naar første Led af Divisor divideres i første Led af Dividenden. Med det fundne Led multipliceres Divisor, og Produktet D_1 trækkes fra Dividenden. Kaldes Resten D_2, har man altsaa $D = D_1 + D_2$ og derfor

$$\frac{D}{d} = \frac{D_1}{d} + \frac{D_2}{d}.$$

Det fundne Led er altsaa $\frac{D_1}{d}$, og vi have saaledes tilbage at dividere Resten D_2 med d for at finde de manglende Led af Kvotienten; D_2 er af lavere Grad end D og giver, idet man fortsætter paa samme Maade, efterhaanden Kvotientens Led. Dersom man i Løbet af Regningen kommer til en Rest D_n, der er af lavere Grad end

Divisor, gaar Divisjonen ikke op, og man maa til de fundne Led (den ufuldstændige Kvotient) føje Brøken $\frac{D_n}{d}$.

Eks.

$$\begin{array}{l}
a^2-2ab+b^2(=d)\,\big)\; a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4(=D)\,\big(\,a^2-2ab+b^2 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{-a^4 \mp 2a^3b \pm a^2b^2 \qquad\qquad (=a^2d)} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; -2a^3b+5a^2b^2-4ab^3+b^4\,(=D_2) \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{\mp 2a^3b \pm 4a^2b^2 \mp 2ab^3 \qquad (=-2abd)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a^2b^2-2ab^3+b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a^2b^2-2ab^3+b^4\,(=b^2d)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Man ser her, hvorledes Regningen udføres. d og D ere ordnede efter faldende Potenser af a; a^2 divideres i a^4 og giver det første Led (a^2) af Kvotienten. d multipliceres med a^2, og Produktet adderes til D med forandrede Fortegn (de nederste Fortegn); a^2 divideres derpaa i $-2a^3b$ og giver det næste Led ($-2ab$) af Kvotienten o. s. v. Til sidst faas Resten 0, og Kvotienten er funden at være $a^2 - 2ab + b^2$.

Som et andet Eksempel ville vi tage

$$d = ab + 1 + ac,$$
$$D = a^3c + 2ab + a^2bc + a^2b^2 + ac + a^3b + a^2 + b.$$

Ordne vi efter a, ser Regningen saaledes ud

$$\begin{array}{l}
a(b+c)+1\,\big)\; a^3(b+c)+a^2(b^2+bc+1)+a(2b+c)+b\,\big(\,a^2+ab+1 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{-a^3(b+c) \pm a^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^2(b^2+bc)+a(2b+c)+b \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-a^2(b^2+bc) \pm ab \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a(b+c)+b \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a(b+c)+1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b-1
\end{array}$$

Kvotienten er altsaa $a^2 + ab + 1 + \frac{b-1}{ab+ac+1}$.

Den her udviklede Metode er den, som anvendes ved Divisjon af hele Tal. Disse skrives nemlig i Titalsystemet som Polynomier, ordnede efter faldende Potenser af 10; man finder ved Divisjonen eet Ciffer ad Gangen; men dette bestemmes paa en noget anden Maade end ved Bogstavstørrelser, da Dividendens første Led foruden Produktet af Divisors og Kvotientens første Led tillige i Almindelighed indeholder den saakaldte Mente.

Eks. $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$;

$\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2-ab+b^2$; $\frac{a^4-b^4}{a-b} = a^3+a^2b+ab^2+b^3$;

$$\frac{a^4-b^4}{a+b} = a^3-a^2b+ab^2-b^3;$$

$$\frac{(x^2+3x)^2+2x(x+3)}{x^2+3x+2} = x^2+3x.$$

55. Dersom et Polynomium (ordnet efter x) bliver Nul, naar man for x sætter en vis Størrelse a, gaar $x-a$ op i Polynomiet.

Lad P betegne Polynomiet. Dersom $x-a$ ikke gaar op i det, kan man fortsætte Divisjonen, til man faar en Rest A, der ikke indeholder x. Er Q Kvotienten, har man da

$$\frac{P}{x-a} = Q + \frac{A}{x-a} \text{ eller } P = Q(x-a)+A,$$

idet Ligningen maa vedblive at være rigtig, naar alle Leddene multipliceres med $x-a$. Da denne Ligning gælder for alle Værdier af x, gælder den ogsaa, naar man for x sætter a; derved bliver P ifølge det givne til 0; $Q(x-a)$ bliver ogsaa 0, medens A ikke indeholder x og derfor ikke forandres. Man har altsaa $A=0$; men naar Resten er 0, gaar Divisjonen op.

Eks. $x-1$ gaar op i x^4-1, thi x^4-1 bliver 0 for $x=1$. $x-a$ gaar op i x^n-a^n, thi x^n-a^n bliver 0 for $x=a$.

Ved Udførelse af Divisjonen faar man

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2 \ldots\ldots + xa^{n-2}+a^{n-1}.$$

$x+a$ gaar op i x^n+a^n, naar n er et ulige Tal, thi x^n+a^n bliver da 0 for $x=-a$.

Divisjonen giver

$$(n \text{ ulige}) \ \frac{x^n+a^n}{x+a} = x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2\ldots - xa^{n-2}+a^{n-1}.$$

$x+a$ gaar op i x^n-a^n, naar n er et lige Tal, thi x^n-a^n bliver da 0 for $x=-a$.

Divisjonen giver

$$(n \text{ lige}) \ \frac{x^n-a^n}{x+a} = x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2\ldots + xa^{n-2}-a^{n-1}.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $(27x^3+8y^3):(3x+2y)$.
2. $(a^3-2ab^2+b^3):(a-b)$.
3. $(x^3-7x-6):(x-3)$.
4. $(x^6-2x^3+1):(x^2-2x+1)$.
5. $(a^4+2a^2b^2+9b^4):(a^2+2ab+3b^2)$.
6. $(a^4-15b^4+a^3b+19ab^3-8a^2b^2):(3ab-5b^2+a^2)$.
7. $(x^3-12x+16)(x^3-12x-16):(x^2-16)$.
8. $(a^3-bc^2-b^2c+a^2b+ac(a-b)):(a^2-bc)$.
9. $(a^2-3ab+b^2)^2:(a^2-1-3ab+b^2)$. (Rest 1.)
10. $\frac{b(x^3+a^3)+xa(x^2-a^2)+a^3(x+a)}{ax+ab+a^2+bx}$.
11. $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{(a+b)^2+(a-b)^2}$.

Potens.

56. Vi have vedtaget at skrive

$$a\,.\,a\,.\,a\,\ldots(m\text{ G.}) = a^m.$$

a^m læses „a i m^{te} Potens". a kaldes **Roden**, m **Potenseksponenten**, a^m **Potensen**. At opløfte et Tal til Potens er altsaa at sætte det saa mange Gange som Faktor, som Eksponenten angiver. Eksponenten maa derfor være et positivt, helt Tal.

Eks. $0^m = 0$; $1^m = 1$; $3^3 = 27$; $2^{10} = 1024$; $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$; $(-a)^5 = -a^5$ o. s. v.

57. En Potens med lige Eksponent er positiv; en Potens med ulige Eksponent er positiv, naar Roden er positiv, negativ, naar Roden er negativ.

Disse Sætninger ere en simpel Følge af 22.

Et lige Tal kan betegnes ved $2n$, et ulige ved $2n+1$ idet n er et vilkaarligt helt Tal; man har altsaa

$$(+a)^n = +a^n;\quad (-a)^{2n} = a^{2n};\quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

58. Divisjon af Potenser af samme Tal. Skal a^m divideres med a^p, er der tre mulige Tilfælde:

$$1.\quad m > p;\quad \frac{a^m}{a^p} = \frac{a.a.a\ldots(m\text{ G.})}{a.a.a\ldots(p\text{ G.})} = a.a.a\ldots(m-p\text{ G.}) = a^{m-p}.$$

$$2.\quad m = p;\quad \frac{a^m}{a^p} = 1.$$

$$3.\quad m < p;\quad \frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^{p-m}}.$$

Man har altsaa tre forskellige Regler at anvende, efter som $m \gtreqless p$. Dersom man anvender den første Regel i de to andre Tilfælde, faar man ikke urigtige, men meningsløse Resultater, f. Eks.

$$\frac{a^4}{a^4} = a^0;\quad \frac{a^4}{a^7} = a^{-3},$$

der ere meningsløse, da a^0 og a^{-3} intet betyde; de meningsløse Resultater vise altsaa, at man ikke har brugt den rigtige Regel. Dersom man har $\frac{a^m}{a^{m+n}}$, skal Resultatet være $\frac{1}{a^n}$, men bliver ved den første Regel a^{-n}; man kan derfor bruge den første Regel ogsaa i det sidste Tilfælde, dersom man vedtager, at a^{-n} herefter skal betyde $\frac{1}{a^n}$. a^{-n} har dog Betydning, naar n betyder et negativt Tal, men i dette Tilfælde stemmer den ny Vedtægt med den oprindelige Definition, idet

$$a^{-(-p)} = \frac{1}{a^{-p}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)} = a^p.$$

Paa samme Maade se vi, at vi ved at vedtage, at a^0 skal betyde 1, opnaa, at den første Regel ogsaa kan bruges i det andet Tilfælde.

Vi vedtage altsaa ved a^0 at forstaa 1 og ved a^{-n} at forstaa $\frac{1}{a^n}$. Vi opnaa derved, at:

To Potenser af samme Tal divideres ved, at man trækker Divisors Eksponent fra Dividendens, medens Roden lades uforandret.

En Faktor kan flyttes fra Nævneren af en Brøk til Tælleren og omvendt, naar samtidig Eksponentens Fortegn forandres.

$$\frac{a^{-n}b}{c} = \frac{1:a^n\,.\,b}{c} = \frac{b}{a^nc};\quad \frac{b}{a^{-n}c} = \frac{b}{1:a^n\,.\,c} = \frac{a^nb}{c}.$$

59. **Man multiplicerer to Potenser af samme Tal ved at addere Eksponenterne.**

$$a^m\,.\,a^p = a\,.\,a\,.\,a\ldots(m\text{ G.})\,.\,a\,.\,a\,.\,a\ldots(p\text{ G.}) = a\,.\,a\,.\,a\ldots(m+p\text{ G.}) = a^{m+p}.$$

Sætningerne i 58 og 59 gælde ogsaa, naar Potenserne have negative Eksponenter.

$$a^m \,.\, a^{-p} = a^m \,.\, \frac{1}{a^p} = \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p};$$

$$a^{-m} \,.\, a^{-p} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{m-p}} = a^{-(m+p)};$$

$$\frac{a^m}{a^{-p}} = a^m \,.\, a^p = a^{m+p}; \quad \frac{a^{-m}}{a^p} = a^{-m} \,.\, a^{-p} = a^{-(m+p)};$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-p}} = a^{-m} \,.\, a^p = a^{p-m}.$$

60. Man opløfter et Produkt til en Potens ved at opløfte hver Faktor for sig.

$$(ab)^m = (ab)\,(ab) \ldots (m\,\mathrm{G.}) = aa \ldots (m\,\mathrm{G.}) \,.\, bb \ldots (m\,\mathrm{G.}) = a^m b^m;$$

$$(ab)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m} \,.\, b^{-m}.$$

61. Man opløfter en Brøk til en Potens ved at opløfte Tæller for sig og Nævner for sig.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (m\,\mathrm{G.}) = \frac{a \,.\, a \ldots (m\,\mathrm{G.})}{b \,.\, b \ldots (m\,\mathrm{G.})} = \frac{a^m}{b^m};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{a^m}{b^m}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{a^m}\right)}{\left(\frac{1}{b^m}\right)} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$

62. En Brøk kan vendes om, naar samtidig dens Potenseksponents Fortegn forandres.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

63. Man opløfter en Potens til en ny Potens ved at multiplicere Eksponenterne.

$$(a^m)^p = a^m \,.\, a^m \ldots (p\,\mathrm{G.}) = a^{m+m\ldots(p\,\mathrm{G.})} = a^{mp};$$

$$(a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^m)^p} = \frac{1}{a^{mp}} = a^{-mp}.$$

Eks. $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2}$;

$$a^m \,.\, a^n : a^p = a^{m+n-p}; \quad a^{-5} \,.\, a^{-3} \,.\, a^8 = a^0 = 1;$$

$$(a^3b^{-2})^2 = a^6b^{-4}; \quad (-3a^2b^{-3})^2 = 9a^4b^{-6};$$

$$\left(\frac{a^2b}{ca^{-3}}\right)^2 = \left(\frac{a^5b}{c}\right)^2 = \frac{a^{10}b^2}{c^2};$$

$$\left(\frac{a^3b}{c^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{ab^2}{c}\right)^4 = \frac{a^{-6}b^{-2}}{c^{-4}} \cdot \frac{a^4b^8}{c^4} = \frac{b^6}{a^2};$$

$$\left(\frac{2a^3b}{3c}\right)^2 \cdot \left(\frac{3a}{bc^{-1}}\right)^{-2} : \left(\frac{2a^2b^{-3}}{c}\right)^3$$

$$= \frac{4a^6b^2}{9c^2} \cdot \frac{3^{-2}a^{-2}}{b^{-2}c^2} \cdot \frac{c^3}{8a^6b^{-9}} = \frac{b^{13}}{162a^2c}.$$

64. Naar en Brøk opløftes til højere og højere Potenser, bliver Resultatet større og større, dersom Brøken er uægte, men mindre og mindre, dersom Brøken er ægte.

Af $\frac{a}{b} \gtrless 1$ følger nemlig ved Multiplikation med $\left(\frac{a}{b}\right)^n$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \gtrless \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

idet større og mindre, multipliceret med lige stort, maa give større og mindre.

Eksempler til Øvelse.

1. $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$. **2.** $\frac{a^{x-1}}{a^{1-x}} a^{2-x}$. **3.** $a^{m+1} \,.\, b^{1-m} : a^{2+m} : b^{2-m}$.

4. $\frac{3a^3c^n}{7x^3b^n} \cdot \frac{49x^{n-1}b^{n+2}}{9a^{n+5}c^{n+1}} \cdot \frac{a^2x^4}{c}$.

5. $(ax^{2m} + bx^{2n}) : x^{m+n}$.

6. $(3a^2b^3 - 2a^4c^2 + ab^{-4} - (\tfrac{1}{2})^{-1}a^{-2}b^2) : 2a^3b^{-2}c^2$.

7. $(a^2x^{-4})^3 \,.\, (2a^{-1}x^3)^2 : (2ax^{-2})^2 : \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}\left(\frac{a^2}{x}\right)^{-1}\right]^{-2}$

8. $(-2a^{-1})^{-2} \,.\, (-3a^{-2})^{-1} : (-a^{-3})^2$.

9. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2 : \left(\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$.

10. $\left(\frac{1}{1+x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-7} : \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-6}$.

Ligninger af første Grad med een ubekendt.

65. De Ligninger, vi hidtil have beskæftiget os med, have været rigtige for alle Værdier af de deri forekommende Bogstaver. Saadanne Ligninger kaldes Identiteter eller Formler. Saaledes gælder f. Eks. Ligningen $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, hvilke Tal man end indsætter for a og b.

I Modsætning hertil skulle vi nu betragte Ligninger, som kun ere rigtige, naar der tillægges et af de forekommende Bogstaver en bestemt Værdi. At finde denne Værdi kaldes at løse Ligningen, og Værdien kaldes Ligningens Rod, medens det Bogstav, der betegner den, kaldes den ubekendte. Den ubekendte betegnes i Reglen med Bogstavet x, og x maa altsaa i Ligningen kun tænkes at betyde et saadant Tal, for hvilket Ligningen er identisk. Man gør Prøve ved at indsætte den fundne Værdi i Ligningen i Stedet for x; dersom man derved faar en Identitet, siges Ligningen at være tilfredsstillet af den fundne Værdi.

Saaledes vil Ligningen

$$x + 2 = 7$$

kun blive rigtig, dersom vi tillægge x Værdien 5. 5 er altsaa Ligningens Rod; ved at sætte 5 i Stedet for x faar man Identiteten $5 + 2 = 7$, saa at 5 tilfredsstiller Ligningen.

66. En rigtig Ligning maa vedblive at være rigtig, naar man udfører de samme Regninger med de Størrelser, der staa paa begge Sider af Lighedstegnet. Ligningens Løsning bestaar nu deri, at man efterhaanden udfører saadanne Regninger, indtil man af den givne Ligning har dannet en ny, der paa den ene Side af

Lighedstegnet har x, medens der paa den anden Side staar lutter bekendte Størrelser. For at opnaa dette gaar man frem paa følgende Maade:

1. Man bortskaffer Parenteserne ved at udføre de forlangte Regninger. (Undertiden ved at udføre de modsatte Regninger; af $3(x-2) = 12$ faas f. Eks. $x - 2 = 4$).

2. Man bortskaffer Brøkerne ved at multiplicere paa begge Sider af Lighedstegnet med Brøkernes Generalnævner. Ligningen siges nu at være bragt paa hel Form.

Det er undertiden lettest at anvende denne Regel før den første. Ved dens Anvendelse maa man erindre, at Brøkstregen har samme Betydning som en Parentes, saa at Fortegnene for Tællerens Led forandres, dersom Brøken har Fortegnet $-$.

3. Ligningen ordnes. Ordningen bestaar i, at man samler de Led, der indeholder x, de Led, der indeholde x^2, o. s. v. Dersom den højeste Potens af x, der nu forekommer i Ligningen, er x^n, siges Ligningen at være af n^{te} Grad. Her beskæftige vi os kun med Ligninger af første Grad. Disse ordnes ved, at man paa den ene Side af Lighedstegnet samler de Led, der indeholde x, paa den anden Side de Led, der ikke indeholde x; dette opnaas let, idet man kan flytte et Led fra den ene Side af Lighedstegnet til den anden, naar man samtidig forandrer dets Fortegn. Har man nemlig

$$a + b = c,$$

faar man ved at subtrahere b paa begge Sider

$$a = c - b.$$

4. Leddene sammentrækkes. Dersom x

staar multipliceret med Bogstavfaktorer, sættes x uden for en Parentes, og man har da i Parentesen kun bekendte Størrelser. Paa den ene Side af Lighedstegnet have vi nu x med en bekendt Koefficient (der kan være en Parentes), paa den anden Side have vi lutter bekendte Størrelser.

Dersom alle Leddene hæve hverandre, er Ligningen identisk og er altsaa rigtig for alle Værdier af x. Dersom de Led, der indeholde x, hæve hinanden, medens de andre Led ikke hæve hinanden, er Opgaven meningsløs.

5. **Man dividerer paa begge Sider af Lighedstegnet med Koefficienten til x,** og Ligningen er løst, thi vi have nu x lig med en bekendt Størrelse.

6. **Prøve gøres,** idet man i den givne Ligning for x indsætter den fundne Rod. Ved Prøven gaar man ikke frem som ved Ligningens Løsning, for ikke at være udsat for at begaa de samme Fejl.

Eks. $(x-1)-(2x-3)+3(x-2)=6;$

$$x-1-2x+3+3x-6=6;$$
$$x-2x+3x=6+1-3+6;$$

$2x=10$, $x=5$, som indsat i Ligningen giver

$$5-1-(10-3)+3\,.\,3=6 \text{ eller } 4-7+9=6.$$

$$\frac{x}{a}-\frac{x-a}{b}=\frac{b}{a};$$
$$bx-a(x-a)=b^2;\quad bx-ax+a^2=b^2;$$
$$bx-ax=b^2-a^2;\quad x(b-a)=b^2-a^2;$$
$$x=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a.\quad \frac{b+a}{a}-1=\frac{b}{a}.$$

$$3\,.\,\frac{x-1}{2}-2\,.\,\frac{2x-3}{5}=x-\frac{1}{2};$$
$$\frac{3x-3}{2}-\frac{4x-6}{5}=x-\frac{1}{2};$$
$$15x-15-8x+12=10x-5;\quad x=\tfrac{2}{3}.$$

$$\frac{2(3-4x)}{3-x}+\frac{3}{1-x}=8;$$
$$(6-8x)(1-x)+3(3-x)=8(3-x)(1-x);$$
$$6-14x+8x^2+9-3x=24-32x+8x^2;$$
$$8x^2-8x^2+32x-14x-3x=24-6-9;\quad x=\tfrac{3}{5}.$$

$$\frac{c}{a+b}\cdot\frac{x+c}{x-a}+1=\frac{b}{x-a};$$
$$c(x+c)+(a+b)(x-a)=b(a+b);$$
$$cx+c^2+ax+bx-a(a+b)=b(a+b);$$
$$x(a+b+c)=a(a+b)+b(a+b)-c^2=(a+b)^2-c^2;$$
$$x=\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}=a+b-c.$$

Eksempler til Øvelse.

1. $3x+5-(5x-2)=2(x-1)-4(\tfrac{5}{4}x-2).$

2. $5(5x-6)-4(4x-5)+3(3x-2)-2x-16=0.$

3. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{6}=1-\tfrac{2}{3}x.$ **4.** $\dfrac{x}{2}-\dfrac{5x+4}{3}=\dfrac{4x-9}{3}.$

5. $\dfrac{2x-5}{3}+x=\dfrac{3x-2}{5}+3.$ **6.** $\dfrac{2x}{a-2b}=3+\dfrac{x}{2a-b}.$

7. $\dfrac{9x+7}{2}-\left(x-\dfrac{x-2}{7}\right)=36.$

8. $\dfrac{a}{bx}-\dfrac{b}{ax}=a^2-b^2.$ **9.** $\dfrac{a-b}{x-c}=\dfrac{a+b}{x+2c}.$

10. $\frac{x}{8} - \frac{x-1}{2\frac{1}{2}} = \frac{3x-4}{15} + \frac{x}{12}.$

11. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} = \frac{7}{3}.$ **12.** $ax + b = \frac{x}{a} + \frac{1}{b}.$

13. $\frac{x}{7} - \frac{x-5}{11} + 5 = x - \left(\frac{2x}{77} + 1\right).$

14. $(x + \frac{5}{2})(x - \frac{3}{2}) - (x + 5)(x - 3) + \frac{3}{4} = 0.$

15. $(x + 1)^2 = x(6 - (1 - x)) - 2.$

16. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{c} + \frac{x-c}{a} = \frac{x-(a+b+c)}{abc}.$

17. $(a + x)(b + x) - a(a + c) = \frac{a^2c}{b} + x^2.$

18. $\frac{a+b}{x-c} = \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b}.$

19. $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-16} = \frac{2x-1}{5}.$

20. $\frac{6x+7}{15} - \frac{2x-2}{7x-6} = \frac{2x+1}{5}.$

21. $\frac{x}{6} - 8\frac{3}{5} = 2\left(\frac{3x}{5} - 1\right) - \frac{x+8}{3} + 1\frac{2}{3}.$

22. $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-8}.$

23. $\frac{2}{2x-5} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{3x-1}.$

24. $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} = \frac{ax+b}{px+q}.$

25. $\frac{a}{c} - \frac{ax}{cx-1} = \frac{c}{a} - \frac{cx}{ax-1}.$

26. $\frac{a(3-2x)}{b} + \frac{b(3x-2)}{a} - \frac{a-bx}{2(a+b)} = 2.$

27. $\frac{a^2+b^2}{b}(x-a) - \frac{a^2-b^2}{a}(x-b) = 2a(2a+b-x).$

28. $\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{3x}{a+b+c} = 0.$

29. $x^2 = 9.$ **30.** $x^2 + 2x + 1 = 16.$

67. Dersom Opgaven er given i Ord, maa man selv sætte den i Ligning. Man betegner da den søgte Størrelse ved x og udtrykker det, som er givet i Opgaven, ved de matematiske Tegn. Dersom Opgaven omtaler flere ubekendte Størrelser, kalde vi en af dem x og udlede deraf Betegnelser for de andre.

Eks. 1500 Kr. skulle deles mellem A., B. og C., saa at A. faar dobbelt saa meget som B. og B. 100 Kr. mere end C.; hvor meget faar hver?

Kalde vi det Antal Kroner, som C. faar, for x, faar B. $x + 100$ og A. $2(x + 100)$; da disse Summer tilsammen udgøre den hele Sum, der skal deles, har man $x + (x + 100) + 2(x + 100) = 1500$; $x = 300$.

C. faar altsaa 300 K., B. 400 Kr., og A. 800 Kr.

En Mand brugte en Tredjedel af sine Penge, fik derpaa 50 Kr., brugte derpaa en Fjerdedel af sine Penge, fik saa 70 Kr. og havde da 120 Kr.; hvor meget havde han i Begyndelsen?

Han havde x Kr., brugte $\frac{1}{3}x$ og havde nu $x - \frac{1}{3}x$ eller $\frac{2}{3}x$, fik derpaa 50 Kr. og havde nu $\frac{2}{3}x + 50$; heraf brugte han Fjerdedelen og havde altsaa tilbage de tre Fjerdedele eller $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x + 50)$. Ligningen bliver altsaa

$\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x + 50) + 70 = 120$; $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x + 50) = 50$;
$\frac{2}{3}x + 50 = \frac{4}{3}.50$; $\frac{2}{3}x = \frac{4}{3}.50 - 50 = \frac{1}{3}.50$; $x = 25$.

A. kan tømme et Anker Vin i 30 Dage, B. kan tømme det i 20 Dage; hvor lang Tid behøve de til at tømme det, naar de drikke sammen?

Ved denne og lignende Opgaver føres alt hen til samme Tid, f. Eks. 1 Dag. Tages Ankerets Indhold til Enhed, kan A. i 1 Dag tømme $\frac{1}{30}$, B. i 1 Dag $\frac{1}{20}$, medens de i Forening tømme Ankeret i x Dage og derfor i 1 Dag $\frac{1}{x}$; man maa altsaa have

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{20}=\frac{1}{x};\ x=12.$$

Naar dække Minut- og Timeviser hinanden paa et Ur første Gang efter Kl. 12?

Maale vi Vejen i Minutter, er Timeviseren gaaet x; Minutviseren gaar 12 Gange saa hurtig og er altsaa gaaet $12x$; for at naa Timeviseren, maa den imidlertid gaa en hel Omgang og desuden Stykket x; altsaa er

$$12x = 60 + x;\ x = 5\tfrac{5}{11}.$$

Svaret er altsaa: $5\frac{5}{11}$ Minut efter Kl. 1.

To Rør føre Vand til et Kar og kunne fylde det i 3 Timer; det ene Rør kan fylde Karret i 2 Timer; i hvor lang Tid kan det andet fylde Karret?

Vi faa ved at gaa frem som i Opgaven ovenfor

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3};\ x=-6.$$

At Røret fylder Karret i — 1 Time betyder, at det virker saaledes, at det i en Time tilintetgør den Virkning, som udøves ved, at det fører Vand til i en Time; den negative Enhed betegner derfor, at Røret leder Vandet fra Karret; Svaret er altsaa, at det andet Rør vilde kunne fylde Karret i 6 Timer, men at det fører Vandet bort fra Karret. Havde vi straks forudsat, at Vandet løb ud af det andet Rør, og spurgt om, i hvor mange Timer det kunde tømme Karret, var Ligningen bleven

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{3},\ \text{hvoraf } x=6.$$

Opgaver til Øvelse.

1. Hvis jeg giver dig en Fjerdedel af mine Æbler og 10 til, har du lige saa mange, som hvis jeg giver dig en Femtedel af dem og 15 til; hvor mange Æbler har jeg?

2. Hvad er det for et Tal, som, multipliceret med $1\frac{1}{2}$ og adderet til $1\frac{1}{2}$, giver samme Resultat?

3. En Mand traf en Flok Gæs paa sin Mark og sagde: Er I der, I Tyve? Gasen svarede: Vi ere ikke 20; men dersom vi vare lige saa mange til og halv saa mange til og desuden en hel Gaas og en halv Gaas og en Gase, saa vare vi 20. Hvor mange var der?

4. A. tabte $\frac{1}{8}$ og B. $\frac{1}{9}$ af sine Penge; de tabte derved tilsammen 8 Kr., medens de oprindelig tilsammen havde 68 Kr.; hvor meget havde hver?

5. Dersom jeg vilde give A. Halvdelen, B. Tredjedelen og C. Femtedelen af mine Penge, vilde jeg komme til at mangle 7 Kr.; hvor mange har jeg?

6. En Kone solgte Halvdelen af sine Æg og $\frac{1}{2}$ Æg til, af de tiloversblevne solgte hun atter Halvdelen og $\frac{1}{2}$ Æg og saaledes videre, i det hele 5 Gange; hun havde nu solgt alle sine Æg; hvor mange havde hun fra Begyndelsen?

7. To Arbejdere skulle grave en Grøft paa 665 Fod; den ene graver daglig 45 Fod, den anden 50 Fod; hvor mange Dage bruge de?

8. A. forfølger B., der har 3 Dages Forspring; B. rejser daglig $10\frac{1}{2}$ Mil, A. daglig 15 Mil; om hvor mange Dage indhentes B. af A.?

9. Dersom en Bog var 378 Sider større, vilde den netop have saa meget over 1000 Sider, som den nu har under 1000 Sider; hvor mange Sider har den?

10. En Brøks Nævner er 4 større end Tælleren; lægger man 11 til Tælleren og trækker man 1 fra Nævneren, faar man den omvendte Brøk; find Brøken.

11. En Officer stillede sine Soldater i lige saa mange Rækker, som der var Mand i hver Række, og fik 31 Mand tilovers; han vilde nu sætte en Mand til paa hver Led, men kom derved til at mangle 44 Mand; hvor mange havde han?

12. En Tjener skulde i aarlig Løn have 120 Kr. og en Frakke; for 5 Maaneder fik han 36 Kr. og Frakken; hvor højt vurderes denne?

13. Naar danne de to Visere paa et Ur første Gang efter Middag en ret Vinkel, og naar danne de en lige Vinkel?

14. Kong Hieros Guldkrone vejede 20 ℔, men var forfalsket med Sølv; Archimedes fandt, at den, ved at vejes i Vand, tabte $\frac{5}{4}$ ℔ af sin Vægt; hvor meget Sølv indeholdt den, naar Sølv ved at vejes i Vand taber $\frac{1}{10}$, Guld $\frac{1}{20}$ af sin Vægt?

15. To Rør kunne fylde et Kar, det ene i 5, det andet i 6 Timer; et tredje kan tømme det i 3 Timer; hvor længe varer det, før Karret fyldes, naar alle tre Rør ere aabne?

16. Et Ur har Sekundviser paa samme Akse som de andre Visere; naar staar Sekundviseren første Gang efter Middag midt imellem de to andre?

17. Et 6cifret Tal har Cifret 1 længst til venstre; flyttes dette Ciffer bagest, bliver Tallet 3 Gange større; find Tallet.

Ligninger af første Grad med flere ubekendte.

68. **Substitutionsmetoden.** Dersom man har flere Ligninger med flere ubekendte (x, y, z, . . .), kan man af den ene Ligning finde den ene ubekendte, idet man foreløbig regner med de andre, som om de vare bekendte Størrelser; indsætter man den fundne Værdi i de andre Ligninger, har man nu en Ligning færre og en ubekendt færre; fortsætter man paa samme Maade, maa man, for at kunne løse Opgaven, til sidst komme til een Ligning med een ubekendt.

Man maa derfor oprindelig have lige saa mange Ligninger, som der er ubekendte.

Man kan altsaa bortskaffe en Størrelse af flere givne Ligninger, men benytter dertil den ene Ligning, saa at man efter Bortskaffelsen har een Ligning færre; skulle to Størrelser bortkastes, faar man to Ligninger færre o. s. v. At bortskaffe en Størrelse kaldes at *eliminere* den.

Den her angivne Metode, hvor vi eliminere ved at indsætte fra den ene Ligning i de andre, kaldes *Substitutionsmetoden*. Vi forudsætte her, at Ligningerne med Hensyn til de ubekendte, der skulle elimineres, ere af første Grad.

Eks. $x + y - z = 6$; $4x = 3y$; $3x + y - 2z = 11$.

Da z mangler i den anden Ligning, eliminere vi z af den første og tredje Ligning; af den første faas

$$z = x + y - 6,$$

der indsat i den tredje giver

$$3x + y - 2(x + y - 6) = 11 \text{ eller } x - y = -1.$$

Vi have nu de to Ligninger med to ubekendte

$$4x = 3y;\ x - y = -1.$$

Af den sidste faas $y = x + 1$, der, indsat i den første, giver

$$4x = 3(x+1);\; x = 3.$$

Den fundne Værdi for x indsættes nu i en af de Ligninger, der kun indeholde x og y; man faar da

$$4 \cdot 3 = 3y;\; y = 4,$$

hvorpaa de to fundne Værdier indsættes i en af de Ligninger, der indeholde z, og give

$$3 + 4 - z = 6;\; z = 1.$$

Vi have nu fundet

$$x = 3;\; y = 4;\; z = 1$$

og finde ved Prøven, at disse Værdier tilfredsstille de givne Ligninger.

Eksempler til Øvelse.

1. $x^2 - y^2 = 24;\; x - y = 4.$

2. $4x^2 - 9y^2 = 91;\; 2x + 3y = 13.$

3. $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3};\; x + 2y + 3z = 7.$

4. $x + y + z = 6;\; 2x + 3y - z = 5;\; 3x - y + 2z = 7.$

5. $x(a+b) - y(a-b) = 4ab;$
$x(a-b) = y(a+b).$

6. Find den Brøk, hvis Værdi bliver $\frac{1}{3}$, naar man lægger 1 til Tælleren, men $\frac{1}{4}$, naar man lægger 1 til Nævneren.

---

69. **De lige store Koefficienters Metode eller Additions- og Subtraktionsmetoden.** To Ligninger af første Grad med to ubekendte kunne, naar Parenteser, Brøker o. s. v. ere bortskaffede som ved Ligninger med een ubekendt, skrives under Formen

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ mx + ny &= p \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

hvor a, b, c, m, n og p ere bekendte Størrelser.

Man multiplicerer nu de to Ligninger med saadanne Størrelser, at den ene ubekendte faar samme Koefficient i begge Ligninger. Denne ubekendte elimineres da ved, at de ny Ligninger adderes eller subtraheres (efter som Fortegnene ere forskellige eller ens).

For at eliminere y af Ligningerne (1) multiplicere vi den første med n, den anden med b og faa

$$\left.\begin{aligned} nax + nby &= nc \\ bmx + bny &= bp \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$(na - bm)\,x = nc - bp;$$

$$x = \frac{nc - bp}{na - mb}. \qquad (3)$$

For at finde y kan man indsætte den fundne Værdi af x i en af de givne Ligninger, der da kun har den ene ubekendte y. Man kunde ogsaa eliminere x af de givne Ligninger ved at multiplicere dem henholdsvis med m og a og subtrahere. Dersom Koefficienterne, som her, ere Bogstaver, findes imidlertid y lettest ved en simpel Ombytning af Bogstaver i Værdien for x. De to givne Ligninger blive nemlig uforandrede, naar man i dem samtidig ombytter x med y, a med b, m med n. Naar disse Ombytninger ere tilladte i de givne Ligninger, maa de ogsaa være tilladte i alle deraf dannede Ligninger, altsaa ogsaa i Ligningen (3); derved faas imidlertid

$$y = \frac{mc - ap}{mb - an}.$$

70. For at Opgaven skal kunne løses, maa de to givne Ligninger være saadanne, at den ene ikke i Virkeligheden er den samme som den anden, idet den f. Eks. er dannet af denne ved Multiplikation af alle Leddene med samme Tal. Saaledes kunne x og y ikke findes af de to Ligninger $3x + 5y = 7$ og $6x + 10y = 14$, da den anden af disse er den samme som den første, idet den er dannet af den ved Multiplikation med 2. Dersom Ligningerne ikke ere virkelig forskellige, viser det sig ved, at de blive ganske ens, naar man skaffer den ene ubekendte samme Koefficient i begge Ligninger, idet da ogsaa de andre Led blive ens; Subtraktionen giver da $0 = 0$, og omvendt viser dette Resultat, at man mangler en Ligning. De to Ligninger ovenfor blive saaledes begge

$$6x + 10y = 14.$$

71. Dersom de Led, der indeholde de ubekendte, falde bort ved Subtraktionen, medens de andre Led ikke falde bort, ere de givne Ligninger meningsløse. Har man saaledes $2x + 3y = 7$, $4x + 6y = 20$,
faar man

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 20, \\ 4x + 6y &= 14, \\ \hline \end{aligned}$$

hvoraf $$0 = 6,$$

der viser, at der ikke gives Værdier af x og y, der tilfredsstille de givne Ligninger. Det er ogsaa indlysende, at den samme Størrelse $4x + 6y$ ikke paa een Gang kan være baade 14 og 20.

72. Flere Ligninger med flere ubekendte løses, dersom hvert Led kun indeholder den ene ubekendte, multipliceret med en bekendt Størrelse (lineære Ligninger), paa lignende Maade. Har man f. Eks. 4 Ligninger

med de ubekendte x, y, z, v, elimineres den ene ubekendte (bedst den med de mindste Koefficienter) tre Gange, f. Eks. af den første og anden, af den første og tredje og af den første og fjerde Ligning. Man maa blot herved sørge for at **benytte alle de givne Ligninger**. Dersom man f. Eks. tager den første og anden, den anden og tredje og derpaa den første og tredje, faar man vel dannet 3 Ligninger, men af disse vil den ene kunne dannes af de to andre, saa at vi kun have to virkelig forskellige Ligninger.

Vi have nu af de 4 Ligninger med 4 ubekendte dannet 3 Ligninger med 3 ubekendte; af disse dannes paa samme Maade 2 Ligninger med 2 ubekendte og deraf 1 Ligning med 1 ubekendt. Denne kan nu findes, og dens Værdi indsættes i en af de Ligninger, der kun have 2 ubekendte; af denne kan da den anden ubekendte findes, o. s. v.

Eks. 1.
$$5x + 3y - 2z + v = 9 \quad (1)$$
$$3x - 4y + 5z - v = 6 \quad (2)$$
$$4x + 7y - z - 2v = 7 \quad (3)$$
$$6x + 3y - 5z + 2v = 5 \quad (4)$$

Af (1) og (2) faas $8x - y + 3z = 15$ (5)
- (3) og (4) - $10x + 10y - 6z = 12$ (6)
- (1) og (3) - $14x + 13y - 5z = 25$ (7)

- (5) og (6) faas efter
Divisjon af (6) med 2 $13x + 4y = 21$ (8)
Af (5) og (7) faas $41x + 17y = 75$ (9)

- (8) og (9) faas $57x = 57$; $x = 1$.
- (8) faas nu $y = 2$, af (5) derpaa $z = 3$ og endelig af (1) $v = 4$.

Eks. 2.
$$x + y + z = 1 \qquad (1)$$
$$ax + by + cz = d \qquad (2)$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \qquad (3)$$

(1) og (2) $\quad (c - a)\,x + (c - b)\,y = c - d \qquad (4)$

(2) og (3) $\quad a\,(c - a)\,x + b\,(c - b)\,y = d\,(c - d) \qquad (5)$

$$b\,(c - a)\,x - a\,(c - a)\,x = b\,(c - d) - d\,(c - d),$$
$$(b - a)\,(c - a)\,x = (b - d)\,(c - d),$$
$$x = \frac{(b - d)\,(c - d)}{(b - a)\,(c - a)}. \qquad (6)$$

De givne Ligninger forandres ikke, naar man ombytter x med y og a med b eller x med z og a med c; altsaa kunne de samme Ombytninger foretages i (6), hvorved man faar
$$y = \frac{(a - d)\,(c - d)}{(a - b)\,(c - b)}; \quad z = \frac{(b - d)\,(a - d)}{(b - c)\,(a - c)}.$$

73. Ogsaa ved flere Ligninger med flere ubekendte er det muligt, at man kommer til Resultatet $0 = 0$, uagtet man har benyttet alle de givne Ligninger; man slutter da som før, at der i Virkeligheden mangler en Ligning, idet den ene af de givne kan dannes af de andre. De givne Ligninger kunne ogsaa være i Strid med hinanden, og dette vil da vise sig ved, at Løsningen fører til et absurd Resultat (f. Eks. $0 = 7$).

74. Ofte kan det være fordelagtigt at betragte andre Størrelser end x, y ... som de ubekendte, idet det derved kan lykkes at løse Ligninger, der egentlig ere af højere Grad, ved samme Metode som Ligninger af første Grad. Er f. Eks.
$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1, \quad \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}, \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = \frac{5}{2},$$
betragtes først $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ og $\frac{1}{z}$ som de ubekendte, og man regner som ovenfor; man finder

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{x} = 1; \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2}.$$
Altsaa er $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Eksempler til Øvelse.

1. $x + y = a$; $x + z = b$; $y + z = c$.

2. $x + ay = b$; $ax - by = c$.

3. $\frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{4}(x - y) = 59$; $5x - 33y = 0$.

4. $\frac{1}{3x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{9}$; $\frac{1}{5x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}$.

5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{c}$; $\frac{y}{a} + \frac{x}{b} = 1 - \frac{y}{c}$.

6. $2x + 4y + 5z = 49$; $3x + 5y + 6z = 64$;
$4x + 3y + 4z = 55$.

7. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 12$; $\frac{y}{2} + \frac{z}{3} - \frac{x}{6} = 8$; $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 10$.

8. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12}$; $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24}$;
$-\frac{4}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = \frac{1}{2}$.

9. $x - y + z = 0$; $abx - acy + bcz = 1$;
$(a + b)\,x - (a + c)\,y + (b + c)\,z = 0$.

10. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$; $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$.

11. $2\,(x - y) = 3z - 2$; $x - 3z = 3y - 1$;
$2x + 3z = 4\,(1 - y)$.

12. $(a - b)\,x + (a + b)\,y = 2a^2 + 2b^2$;
$(a^2 - b^2)\,(x + y) = 2a^3 + ab\,(x - y)$.

13. $6x - \frac{2y - x}{23 - x} = 20 - \frac{59 - 12x}{2}$;
$3y + \frac{y - 3}{x - 18} = 30 - \frac{73 - 9y}{3}$.

14. $\frac{2x+z-4}{12}+\frac{3y-6z+1}{13}=\frac{x-2}{4}$; $\frac{x}{9}-y+3z=2$;

$\frac{3x-2y+5}{5}-\frac{4x-5y+7z}{7}=\frac{2}{7}+\frac{y-3z+2}{2}$.

15. $9x-2z+u=41$; $7y-5z-t=12$;

$4y-3x+2u=5$; $3y-4u+3t=7$; $7z-5u=11$.

16. Hvilken Brøk faar Værdien $\frac{3}{5}$, naar man adderer 1 til dens Tæller, men $\frac{1}{2}$, naar man adderer 1 til dens Nævner?

17. Et 2-cifret Tal er 4 Gange større end sin Tværsum (Ciffersum); bytter man Cifrene om, bliver Tallet 27 større; find Tallet.

18. Et 2-cifret Tal giver, divideret i et 4-cifret Tal, Kvotienten 204 og Resten 1. Danner man et 6-cifret Tal af de to ved at stille dem sammen, bliver dette dobbelt saa stort, naar man stiller det 4-cifrede, som naar man stiller det 2-cifrede forrest. Find Tallene.

19. Et Tal a med 1 Ciffer og et Tal b med 5 Cifre have Summen 15390; stiller man a foran b, faar man et Tal, der er 4 Gange større end det, som man faar ved at stille b foran a. Find Tallene.

20. A. og B. kunne, naar de arbejde sammen, fuldføre en Mur i 12 Dage, B. og C. i 20 Dage, A. og C. i 16 Dage. Hvor mange Dage bruger hver, naar han arbejder alene, og hvor mange Dage bruge de, naar de arbejde alle tre i Forening?

21. Fire Tal have tre og tre henholdsvis Summerne 130, 135, 147 og 152. Find Tallene.

22. A., B., C., D. og E. spille Kort og have tilsammen 114 Kr.; A vinder Halvdelen af B.s, Tredjedelen af C.s, Fjerdedelen af D.s og Sjettedelen af E.s Penge; i det næste Spil vinder B. Femtedelen af A.s og Tredjedelen af D.s Penge. B. har nu lige saa meget som D. og E. tilsammen; C. har 1 Kr. flere end E. og 2 Kr. flere end D., medens A. har 5 Kr. færre end B. og C. tilsammen. Hvor meget havde hver, da Spillet begyndte?

23. En Vogn kører 180 Fod, Forhjulet har derved gjort 6 Omdrejninger flere end Baghjulet; dersom Forhjulets Omkreds havde været en Fjerdedel og Baghjulets en Femtedel større, var Forskellen bleven 4 Omdrejninger; hvor store ere Omkredsene?

24. Man søger et 3-cifret Tal med Tværsummen 18, og hvori 11 gaar op; læses Cifrene i omvendt Orden, bliver Tallet $4\frac{1}{2}$ Gang større.

25. A., B. og C. multiplicere to Tal, a og b; A. glemmer ved Regningen et Sted Menten 1; B. glemmer 2 paa den følgende Plads (til venstre) og C. 3 paa den følgende Plads; de gøre derpaa Prøve ved at dividere Produktet med a; A. faar derved Kvotienten 542 og Resten 75, B. Kvotienten 540 og Resten 55, C. Kvotienten 507 og Resten 60. Find Tallene.

26. Tre Stykker Sølv veje tilsammen 320 Kvint; af det første er $\frac{9}{10}$, af det andet $\frac{3}{4}$, af det tredje $\frac{7}{10}$ rent Sølv; ved at sammensmelte det første Stykke med det andet eller med det tredje faar man et Stykke, hvoraf $\frac{4}{5}$ er rent Sølv; hvor meget vejer hvert Stykke?

27. I et 3-cifret Tal er det mellemste Ciffer Middeltallet mellem (den halve Sum af) de to yderste; Tallet er 48 Gange sin Tværsum og bliver mellem 100 og 200 mindre, dersom man læser Cifrene i omvendt Orden. Find Tallet.

28. Et Spil Kort oplægges i a Bunker, hvorved der bliver b Kort tilovers; hver Bunke er dannet ved, at man tæller til 12 (c), idet man for det nederste Kort tæller dets Antal Øjne og for hvert af de andre lægger 1 til. (Kommer et Billedkort nederst i en Bunke, kan man tillægge det et Antal Øjne efter Behag). Hvor mange Øjne have Bunkernes nederste Kort tilsammen?

Proportioner.

75. Vi have set, at Divisor og Dividend kunne være benævnte, men at de da maa være ensartede; man kan spørge om, hvor mange Gange 6 ℔ indeholdes i 24 ℔; men det er meningsløst at spørge om, hvor mange Gange 6 ℔ indeholdes i 24 Fod.

En Brøk, hvis Tæller og Nævner ere ensartede Størrelser, kaldes et **Forhold**; (dog bruges dette Ord ogsaa i Stedet for Ordene Brøk eller Kvotient). Tælleren kaldes **Forleddet**, Nævneren **Efterleddet**. Et Forhold kan udtrykkes ved et ubenævnt Tal; saaledes udtrykkes Forholdet mellem 24 ℔ og 6 ℔ ved Tallet 4, Forholdet mellem 6 Fod og 5 Fod ved $\frac{6}{5}$. Det er altsaa ligegyldigt, om man i Forholdet mellem ensbenævnte Størrelser læser Benævnelsen med eller ej.

En Ligning, der udtrykker, at to Forhold ere lige store, kaldes en **Proportion**; saaledes ere

$$\frac{24 \text{ ℔}}{6 \text{ ℔}} = \frac{16 \text{ Fod}}{4 \text{ Fod}}; \quad \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Proportioner. I Proportionen

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ eller } a : b = c : d \qquad (1)$$

(læses: a forholder sig til b som c til d)

kaldes a, b, c og d henholdsvis første, andet, tredje og fjerde Led. a og d kaldes **Yderleddene**, b og c **Mellemleddene**.

duktet

76. **Produktet af Yderleddene er lig Produktet af Mellemleddene.**

Thi bortskaffes Brøkerne af (1) ved Multiplikation med bd, faar man

$$ad = bc. \qquad (2)$$

Omvendt kan Proportionen atter udledes af denne Ligning ved Divisjon med bd. **Man prøver derfor en Proportions Rigtighed ved at undersøge, om Yderleddenes Produkt er lig Mellemleddenes Produkt.**

Sætte vi Produktet af Yderleddene lig Produktet af Mellemleddene, kunne Leddene kun forstaas som ubenævnte Tal; man skriver dog ogsaa ofte i dette Tilfælde de benævnte Tal, da dette ikke kan misforstaas.

77. **I en Proportion kan man ombytte Yderleddene indbyrdes, Mellemleddene indbyrdes og begge Yderleddene med begge Mellemleddene**, thi disse Ombytninger forandre ikke Ligningen (2), der tjener til Prøve.

Følgende Proportioner ere altsaa rigtige, dersom een af dem er rigtig:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c};$$

thi den samme Ligning $ad = bc$ tjener til Prøve for dem alle.

13

Her er dog at mærke, at Benævnelserne maa tænkes udeladte, da Ombytningerne ellers kunne føre til meningsløse Udtryk. Man skriver dog undertiden de meningsløse Udtryk, da dette ikke kan foraarsage Misforstaaelser; skriver man altsaa 16 ℔ : 12 Fod = 4 ℔ : 3 Fod, mener man hermed egentlig 16 ℔ : 4 ℔ = 12 Fod : 3 Fod.

78. Man kan finde det ene Led af en Proportion, naar man kender de tre andre.

Af $ad = bc$ findes $a = bc:d$; $b = ad:c$ o. s. v.

x kaldes fjerde Proportional til a, b og c, dersom $a:b = c:x$; man har da $x = bc:a$.

x kaldes Mellemproportional mellem a og b, dersom $a:x = x:b$; b kaldes her tredje Proportional til a og x; b findes let, dersom man kender a og x, men vi kunne endnu ikke finde x, naar a og b ere bekendte, da Ligningen $x^2 = ab$ er af anden Grad.

79. En Proportion kan naturligvis behandles som andre Ligninger, ligesom Forhold kunne behandles som andre Brøker; man kan derved af en Proportion udlede ny; saaledes dannes f. Eks. følgende Proportioner af den første:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};\ \frac{ma}{b} = \frac{mc}{d};\ \frac{a}{mb} = \frac{c}{md};\ \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m};$$

$$\frac{ma}{mb} = \frac{pc}{pd} \text{ o. s. v.}$$

80. Forleddene eller Efterleddene i begge Forhold kunne erstattes ved Summen eller Differensen af For- og Efterled.

Af (1) dannes saaledes de ny Proportioner

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};\ \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d};\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ o. s. v.}$$

Den sædvanlige Prøve viser, at disse Proportioner ere rigtige, naar (1) er det.

Sammen med denne Regel kunne de tidligere Regler anvendes; man danner derved f. Eks. følgende Proportioner af (1)

$$\frac{a+3b}{a} = \frac{c+3d}{c};\ \frac{ma-nb}{ma+nb} = \frac{mc-nd}{mc+nd};$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^3} = \frac{c^3+d^3}{c^3} \text{ o. s. v.}$$

81. Har man flere lige store Forhold, og adderer man Forleddene for sig, Efterleddene for sig, faar man et nyt Forhold, der er lig de givne Forhold.

Af
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$
faar man
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f},$$
thi
$$e(b+d+f) = f(a+c+e),$$
da
$$eb = af;\ ed = cf;\ ef = ef.$$

Ved først at forandre Leddene af de givne Forhold kan man nu f. Eks. af de samme tre lige store Forhold udlede 2 22

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a-c+e}{b-d+f} = \frac{3a+mc-ne}{3b+md-nf};$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{e^2}{f^2} = \frac{3a^2+4c^2-5e^2}{3b^2+4d^2-5f^2} \text{ o. s. v.}$$

Dersom man derimod lægger Tæller til Tæller og Nævner til Nævner i to ulige store Brøker med positive Tællere og Nævnere, faar man en Brøk, der i Størrelse ligger mellem de to givne og er nærmest ved den af dem, der har den største Nævner.

Dersom nemlig

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},\ \text{saa er ogsaa } ad > bc.$$

Af
$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ad-bc}{b(b+d)},\quad \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{d(b+d)}$$
følger, da de to Differenser ere positive,

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

For Resten er der ingen anden Forskel paa de to Differenser, end at den ene har Faktoren b i Nævneren, hvor den anden har d; er $b > d$, bliver derfor den første Differens mindst, er $b < d$, bliver den sidste mindst.

82. **Ligefrem proportionale Størrelser.** I Praksis forekommer det ofte, at to Slags Størrelser ere saaledes afhængige af hinanden, at den ene bliver m Gange større, naar den anden bliver m Gange større. Som Eksempler kunne vi nævne Varemængder og deres Pris, et Arbejdes Størrelse og den Tid, der medgaar til at udføre det, o. s. v. Køber jeg tre Gange saa mange Varer, maa jeg betale tre Gange saa meget for dem; bliver et Arbejde dobbelt saa stort, tager dets Udførelse dobbelt saa lang Tid, o. s. v. To Størrelser af den ene Slags og de to tilsvarende af den anden Slags danne derfor en Proportion; koste 4 ℔ 3 Kr., maa 12 ℔ koste 9 Kr., og man har

12 ℔ : 4 ℔ = 9 Kr. : 3 Kr.

Man kan altsaa af 4 saadanne Størrelser finde den ene, naar de tre ere opgivne.

Dersom man f. Eks. ved, at a ℔ koste b Kr., kan man finde, hvad c ℔ koste, ved Proportionen

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}, \text{ hvoraf } x = \frac{cb}{a}.$$

Saaledes som Stykket opstilles i praktisk Regning (Reguladetri), ere Mellemleddene ombyttede; man skriver

a ℔ — b Kr. — c ℔.

Man ser af Ligningen ovenfor, at Resultatet findes, naar Mellemleddet (b) multipliceres med Bagleddet (c) og Produktet divideres med Forleddet (a).

At to foranderlige (variable) Størrelser y og x ere proportionale, kan udtrykkes ved Ligningen

$$y = kx,$$

hvor k ikke forandrer sig (er konstant). k er den Værdi af y, som svarer til $x = 1$, thi Ligningen tilfredsstilles

af disse Værdier. Er f. Eks. x Antallet af ℔ af en vis Vare og y Antallet af Kroner, som x ℔ koste, bliver k Kr. Prisen for 1 ℔, og Ligningen tjener til at finde y, naar x er givet, og omvendt. Dersom y_1 og y_2 svare henholdsvis til x_1 og x_2, har man

$$y_1 = kx_1;\ y_2 = kx_2, \text{ altsaa } y_1 : y_2 = x_1 : x_2,$$

der viser, at Størrelserne y og x ere proportionale, naar de tilfredsstille Ligningen $y = kx$.

83. **Omvendt proportionale Størrelser** kaldes to Slags Størrelser, der ere saaledes afhængige af hinanden, at den ene bliver m Gange større, naar den anden bliver m Gange mindre. Som Eksempel kan nævnes den Tid, som et Arbejdes Udførelse tager, og Antallet af Arbejdere; dobbelt saa mange Arbejdere kunne udføre Arbejdet i den halve Tid; dersom a Arbejdere kunne udføre et Arbejde i b Dage, og c Arbejdere kunne udføre det i x Dage, har man

$$a : c = x : b.$$

I Regning (omvendt Reguladetri) opskrives Stykket i Almindelighed, som om Størrelserne vare ligefrem proportionale, og derpaa ombyttes For- og Bagled; man skriver saaledes

$$\begin{array}{ccccc} (a) \text{ Arb.} & — & b \text{ D.} & — & (c) \text{ Arb.,} \\ c & & & & a \end{array}$$

altsaa $x = ab : c$, som ogsaa Proportionen ovenfor giver.

At to Størrelser y og x ere omvendt proportionale kan udtrykkes ved Ligningen

$$y = \frac{k}{x} \text{ eller } yx = k,$$

hvor k som ovenfor er den Værdi af y, der svarer til $x = 1$. Man faar nemlig, naar y_1 og y_2 svare til x_1 og x_2,

$$y_1 = \frac{k}{x_1},\; y_2 = \frac{k}{x_2},\; \text{altsaa}\; \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1},$$

der viser, at y og x ere omvendt proportionale.

84. **Sammensatte Forhold.** En Størrelse kan samtidig være ligefrem eller omvendt proportional med flere andre. Skal der bygges en Mur af en vis Længde, Højde og Tykkelse af et vist Antal Arbejdere, vil den dertil nødvendige Tid være ligefrem proportional med Længden, med Højden og med Tykkelsen, men omvendt proportional med Arbejdernes Antal. Lad os antage, at man bruger d Dage for en vis Længde, Højde og Tykkelse og med et vist Antal Arbejdere; dersom nu Længden bliver m Gange større, Højden n Gange større, Tykkelsen p Gange større, bliver Dagenes Antal mnp Gange større, altsaa $mnpd$. Bliver nu Arbejdernes Antal q Gange større, maa Tiden blive q Gange mindre, og man faar for det søgte Antal Dage

$$x = \frac{mnpd}{q}.$$

I Almindelighed udtrykkes ved Ligningen

$$y = k\,\frac{x_1\, x_2 \ldots}{z_1\, z_2 \ldots},$$

at y er ligefrem proportional med Størrelserne x og omvendt proportional med Størrelserne z. Naar Ligningen skal vedblive at være tilfredsstillet, maa y nemlig blive lige saa mange Gange større, som en af Størrelserne x bliver større (medens de andre Størrelser x og z ere uforandrede), og lige saa mange Gange mindre, som en af Størrelserne z bliver større. k er den Værdi af y, som svarer til $x_1 = x_2 \ldots = z_1 = z_2 \ldots = 1$.

Eks. 12 Arbejdere kunne bygge en Mur, 50 Fod lang, 10 Fod høj og 2 Sten tyk i 12 Dage; hvor mange

Dage bruge 8 Arbejdere til en Mur, der er 75 Fod lang, 12 Fod høj og 3 Sten tyk?

$$m = \frac{75}{50};\; n = \frac{12}{10};\; p = \frac{3}{2};\; q = \frac{8}{12};\; d = 12,$$

$$\text{altsaa} \qquad x = \frac{75\,.\,12\,.\,3\,.\,12}{50\,.\,10\,.\,2\,.\,8}\,.\,12\ \text{D.} = 48\tfrac{3}{5}\ \text{D.}$$

85. **Selskabsregning.** Dersom en Størrelse A skal deles i f. Eks. tre Dele, der staa i samme indbyrdes Forhold som tre givne Tal a, b og c, har man, naar de søgte Dele betegnes ved x, y og z,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{A}{a+b+c}.$$

Betegne vi det bekendte Forhold $\frac{A}{a+b+c}$ ved f, have vi nu $x = af$; $y = bf$; $z = cf$.

Eks. A., B. og C. indskyde henholdsvis 500, 700 og 1300 Kr. i en Forretning; Opgørelsen viser, at man har 3750 Kr. til Deling; hvor meget faar hver? Man har

$$\frac{x}{500} = \frac{y}{700} = \frac{z}{1300} = \frac{3750}{2500} = \frac{3}{2};$$

$$x = 750;\; y = 1050;\; z = 1950.$$

Største fælles Maal og mindste fælles Mangefold.

86. Et Tal D, i hvilket et Tal d gaar op, kaldes et Multiplum (Mangefold, Dividend) af d, medens d kaldes Maal (Faktor, Divisor) for D. De forskellige Multipla af d ere altsaa .... — d, 0, d, $2d$, $3d$ ....

Eks. 0, 6, 12, 18, 24 .... ere Multipla af 6; 6 er Maal for 18, 48, 72 o. s. v.

Dersom Tallet D ikke er et Multiplum af d, kan det skrives som et Multiplum af d plus en *Rest*; betegnes denne ved r, har man altsaa

$$D = dq + r \text{ eller } D - dq = r.$$

q kaldes *den ufuldstændige Kvotient* eller, hvor det ikke kan misforstaas, blot Kvotienten. Kvotienten kan altid vælges saaledes, at Resten er mindre en Divisor; man kan dog ogsaa tage en anden Kvotient og derved faa Rester, der ere større end Divisor eller negative; saaledes har man f. Eks.

$$27 = 3 . 7 + 6 = 2 . 7 + 13 = 4 . 7 - 1.$$

Forskellen mellem to forskellige Rester er naturligvis et Multiplum af Divisor. Naar vi i det følgende sige, at en Rest har en vis Størrelse, vil det derfor kun sige, at *vi kunne faa denne Rest ved at vælge en passende Kvotient*. Mellem Resterne findes altid selve Dividenden, nemlig for Kvotienten Nul.

87. *Resten af en flerleddet Størrelse med en given Divisor faas, naar man for hvert af Leddene sætter dets Rest.*

Af $\quad D = dq + r; \quad D_1 = dq_1 + r_1$

følger nemlig

$$D \pm D_1 = d(q \pm q_1) + r \pm r_1,$$

der viser, at $D \pm D_1$ giver Resten $r \pm r_1$, naar man tager $q \pm q_1$ til Kvotient.

Eks. Ved Divisjon med 19 giver $23 + 37 - 3 + 96$ Resten $4 - 1 - 3 + 1$ eller 1.

88. *Resten af et Produkt faas, naar man for Faktorerne sætter deres Rester.*

Ved Multiplikation af de to Ligninger ovenfor faas nemlig:

$$DD_1 = d^2qq_1 + dqr_1 + dq_1r + rr_1$$
$$= d(dqq_1 + qr_1 + q_1r) + rr_1,$$

saa at Resten bliver rr_1, naar Størrelsen i Parentesen tages til Kvotient.

Eks. Ved Divisjon med 19 giver $23 . 37 . 3 . 96$ Resten $4 . (-1) . 3 . 1 = -12$ eller 7.

89. *Resten af en Potens faas, naar man for Roden sætter Rodens Rest.*

Denne Sætning følger af den forrige.

Eks. Ved Divisjon med 7 giver $22^3 . 51^2 + 38^2 . 11$ Resten $1^3 . 2^2 + 3^2 . 4 = 40$ eller 5.

90. Af de her beviste Sætninger følger, at *et Tal gaar op i en flerleddet Størrelse, dersom det gaar op i alle Leddene, og at det gaar op i et Produkt, naar det gaar op i en af Faktorerne.*

91. *Primtal* kaldes et Tal, der kun er deleligt med 1 og sig selv; de første Primtal ere

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 ...

Man kender ingen Lov, hvorefter man, uden at prøve sig frem, kan finde Rækken af Primtal; man ser imidlertid let, at Rækken er ubegrænset, thi dersom der kun gaves et bestemt Antal Primtal, $p_1, p_2, \ldots p_n$, vilde $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ ikke være deleligt med noget Primtal og altsaa være et nyt Primtal, større end p_n.

Polynomier, der ikke kunne opløses i Faktorer af lavere Grader, kaldes *irreduktible*.

92. **Tals Delelighed med visse lave Tal.** Ethvert Tal kan skrives

$$t = a + 10 . b + 10^2 . c + 10^3 . d + \ldots,$$

idet a, b, c, d ere Tallets Cifre, læste fra højre.

Er Divisor 2, 5 eller 10, bliver Resten af 10 lig Nul; indsætte vi nu overalt Nul for 10, se vi, at Resten af t er a; *altsaa give 2, 5 og 10 samme Rest med et Tal som med Tallets Enere.*

De Tal, som gaa op i 100, men ikke i 10, give Resten 0 ved Divisjon i 10^2, 10^3, $10^4 \ldots$; t har derfor samme Rest med disse Divisorer som $a + 10b$. Dette kan udvides til Tal, der gaa op i 1000, o. s. v.

3 og 9 give med Dividenden 10 Resten 1; indsættes 1 for 10, faa vi da Resten af t

$$a + b + c + d \ldots,$$

eller der kaldes Tallets Tværsum. Altsaa giver et Tal samme Rest med 3 og 9 som Tallets Tværsum.

11 giver ved Divisjon i 10 Resten -1; indsættes denne for 10, faar man

$$a + b(-1) + c(-1)^2 + d(-1)^3 + \ldots$$
$$= a - b + c - d + \ldots$$

Et Tal giver altsaa samme Rest med 11 som det Tal, man faar ved at tage Summen af hverandet Ciffer minus Summen af de øvrige.

Da vi har taget [illegible] og hvis [illegible] skal Resten være et Multiplum af Divisor [illegible] skal gaa op i Resten. Og omvendt hvis Division gaar op i Resten gaar den op i Tallet

93. Lad os ved Divisjon af d i D finde

$$D = dq + r \text{ eller } D - dq = r.$$

Dersom et Tal gaar op i D og d, gaar det ogsaa op i r; ved i den anden Ligning at sætte 0 for D og d ser man nemlig, at r giver Resten 0. Paa samme Maade ser man ved Betragtning af den første Ligning, at:

Et Tal, der gaar op i d og r, gaar ogsaa op i D.

94. Dersom D og d multipliceres eller divideres med samme Tal m, bliver (q uforandret) r multipliceret eller divideret med m.

Af $$D = dq + r$$
følger nemlig $$mD = md \cdot q + mr,$$
der viser, at man, naar Dividenden er mD, Divisor md, kan tage Kvotienten q og da til Rest faar mr; sætter man $\frac{1}{m}$ for m, faas den anden Del af Sætningen.

95. Hvad vi have sagt, gælder ogsaa om Polynomier, idet vi ved, at et Polynomium d gaar op i et andet D, forstaa, at D kan dannes af d ved Multiplikation med et helt Polynomium q.

Eks. x giver ved Divisjon med $x - a$ Resten a, x^n giver da Resten a^n og $x^n - a^n$ Resten Nul. De analoge Sætninger (Pag. 47) bevises paa samme Maade.

Er Dividenden $A + Bx + Cx^2 + \ldots$, bliver Resten $A + Ba + Ca^2 + \ldots$, og Divisjonen gaar op, hvis denne Størrelse er Nul. Vi have saaledes et nyt Bevis for Sætningen 55.

96. Det største fælles Maal (Faktor, Divisor) for flere Tal (Polynomier) er det største Tal (det Polynomium af højeste Grad), som gaar op i dem alle.

Dersom vi skulle finde det største fælles Maal for d og D, dividere vi d i D; gaar Divisjonen ikke op, faar man en Rest r. Det største fælles Maal for D og d er ogsaa største fælles Maal for d og r. Ethvert fælles Maal for D og d gaar nemlig op i r (93) og er altsaa fælles Maal for d og r. Ethvert fælles Maal for d og r gaar op i D (93) og er altsaa fælles Maal for D og d. Det ene Par Størrelser, D og d, og det andet Par, d og r, have altsaa alle de samme Størrelser til fælles Maal, følgelig have de ogsaa det samme største fælles Maal.

I Stedet for at søge største fælles Maal for D og d kunne vi nu søge for d og r. Vi dividere derfor r i d; gaar Divisjonen op, er r st. f. M. for d og r, altsaa ogsaa for D og d; gaar Divisjonen ikke op, faa vi en Rest r_1 ($< d$) og kunne nu søge for r og r_1 o. s. v. Da Resterne paa denne Maade blive mindre og mindre, maa vi tilsidst finde en Rest, som gaar op i den forrige Divisor; denne Rest er da det søgte største fælles Maal.

Dersom det største fælles Maal for to Tal er 1, siges Tallene at være primiske med hinanden eller indbyrdes Primtal (f. Eks. 15 og 16, 12 og 25 o. s. v.)

Et Primtal er primisk med ethvert Tal, i hvilket det ikke gaar op.

Regningen kan lettes ved Anvendelse af følgende Regler:

1. Dersom man i Løbet af Regningen træffer en Divisor og dens Rest, hvis st. f. M. man kender, kan man standse Regningen, da dette st. f. M. ogsaa er st. f. M. for d og D.

2. En fælles Faktor kan borttages af en Divisor og dens Rest, men det fundne st. f. M. maa da multipliceres med denne Faktor (se 97).

3. En Faktor, der findes i Divisor og er primisk med Dividenden, kan bortdivideres af Divisor, da den ikke kan høre til de fælles Faktorer (se 99).

4. Man kan af samme Grund multiplicere Dividenden med en Faktor, der er primisk med Divisor (se 99).

De to sidste Regler anvendes især ved Polynomier for at undgaa Brøk i Kvotienten. Den Faktor i Divisor, der vilde foraarsage Brøk, bortdivideres om muligt; kan den ikke bortdivideres af Divisor, multipliceres Dividenden med den.

Ved Polynomier standser Regningen, naar man kommer til en Rest, der ikke indeholder det Bogstav, man har ordnet efter.

Regningen opskrives i Almindelighed saaledes:

$$\begin{array}{l} d\,)\,D\,(q \\ \quad r\,)\,d\,(q_1 \\ \qquad r_1\,)\,r\,(q_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad\quad r_n\,)\,r_{n-1}\,(q_{n+1} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Eks. St. f. M. for 75 og 115:

$$\begin{array}{l} 75\,)\,115\,(\,1 \\ \quad\;\; 75 \\ \quad 40\,)\,75\,(\,1 \\ \qquad\; 40 \\ \qquad 35\,)\,40\,(\,1 \\ \qquad\quad\; 35 \\ \qquad\quad 5\,)\,35\,(\,7 \\ \qquad\qquad\; 0 \end{array}$$

St. f. M. er 5.

St. f. M. for $a^2 - b^2$ og $a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{array}{l} a^2 - b^2\,)\,a^2 + 2ab + b^2\,(\,1 \\ \qquad\qquad\; a^2 \qquad\quad - b^2 \\ \qquad\qquad\quad 2ab + 2b^2\,)\,a^2 - b^2\,(a - b \\ \qquad\qquad\qquad\quad a + b \qquad a^2 - b^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

St. f. M. er $a + b$.

St. f. M. for $3x^2 + x - 4$ og $x^4 - 1$:

$$\begin{array}{l} 3x^2 + x - 4\,)\,x^4 - 1 \\ \qquad\qquad\; 3x^4 - 3\,(x^2 \\ \qquad\quad \underline{\;3x^4 \pm x^3 \mp 4x^2\;} \\ \qquad\quad -x^3 + 4x^2 - 3 \\ \qquad\quad -3x^3 + 12x^2 - 9\,(-x \\ \qquad\quad \underline{\mp 3x^3 \mp x^2 \pm 4x} \\ \qquad\quad 13x^2 - 4x - 9 \\ \qquad\quad 39x^2 - 12x - 27\,(\,13 \\ \qquad\quad \underline{\;39x^2 \pm 13x \mp 52\;} \\ \qquad\qquad -25x + 25\,)\,3x^2 + x - 4\,(\,3x + 4 \\ \qquad\qquad\qquad x - 1 \quad \underline{3x^2 \mp 3x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x - 4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 4x - 4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$x - 1$ er st. f. M.

Opt. 97. Dersom to Tal blive m Gange større eller mindre, bliver deres st. f. M. ogsaa m Gange større eller mindre.

Resten ved den første Divisjon bliver nemlig multipliceret eller divideret med m (94); det samme gælder om alle de følgende Rester og altsaa ogsaa om det største fælles Maal.

Heraf følger, at dersom to Tal divideres med deres største fælles Maal, ere de udkomne Kvotienter indbyrdes primiske; er st. f. M. nemlig m, bliver det ved Divisjonen m Gange mindre, altsaa 1. Naar man forkorter en Brøk med st. f. M. for Tæller og Nævner, vil derfor den udkomne Brøk ikke kunne forkortes mere.

Opt. 98. Dersom et Tal gaar op i to andre, gaar det ogsaa op i deres st. f. M.

Et Tal, der gaar op i D og d, gaar nemlig ogsaa op i r og ligeledes i de følgende Rester, altsaa ogsaa i det st. f. M.

Man finder derfor st. f. M. for tre Tal ved først at søge for de to og derpaa for det fundne og det tredje. Dette udvides til flere Tal.

Opt. 99. Dersom et Tal t gaar op i ab og er primisk med a, gaar det op i b.

t og a have 1 til st. f. M.; tb og ab have altsaa (97) b til st. f. M. t gaar op i tb og i ab og altsaa (98) ogsaa i deres st. f. M., det vil sige i b.

Dersom et Primtal gaar op i et Produkt ab, gaar det op i a eller i b. Hvis det nemlig ikke gaar op i a, er det primisk med a og gaar da op i b.

Heraf følger, at et Primtal, der gaar op i et Produkt af flere Faktorer, maa gaa op i mindst

een af Faktorerne, og at et Primtal, der gaar op i en Potens, maa gaa op i Roden. Endvidere følger, at dersom en uforkortelig Brøk $\frac{a}{b}$ er lig en Brøk $\frac{c}{d}$, maa a og b gaa op henholdsvis i c og d, thi da $ad = bc$, maa b, som primisk med a, gaa op i d (da b gaar op i bc, altsaa ogsaa i ad); man kan altsaa sætte $d = mb$, hvor m er et helt Tal; heraf følger da $c = ma$, og have samme Kvotient

100. Dersom to Tal ere indbyrdes Primtal, ere Potenser af disse Tal ogsaa indbyrdes Primtal.

Dersom nemlig a^m ikke er primisk med b^n, maa der være et Primtal p, der gaar op i dem begge; p maa da ogsaa gaa op i a og b, men dette strider mod det givne.

En Potens af en uforkortelig Brøk er derfor atter en uforkortelig Brøk.

101. Dersom to indbyrdes primiske Tal a og b gaa op i et Tal A, gaar deres Produkt ogsaa op i Tallet.

Da a gaar op i A, kan man sætte (Q hel)

$$A = aQ;$$

da b gaar op i A og altsaa ogsaa i aQ og er primisk med a, gaar b op i Q, saa at man kan sætte

$$Q = bQ_1,$$

altsaa

$$A = abQ_1,$$

der viser, at ab gaar op i A.

er største f. M. for d og c hvorfor $\frac{c}{d}$ ogsaa er uforkortelig, er m = 1, man faar da a = c, b = d. Eller to uforkortelige Brøker ere kun lige store, hvis Tæller er lig Tæller og Nævner lig Nævner.

Heraf følger, at 6 gaar op i et Tal, dersom 2 og 3 gaar op, at 15 gaar op, dersom 3 og 5 gaa op, 99, dersom 9 og 11 gaa op, o. s. v.

102. At opløse et Tal i Primfaktorer vil sige, at skrive det som et Produkt af lutter Primtal. Et Tal kan ikke opløses i to forskellige Systemer af Primfaktorer.

Dersom man nemlig havde

$$m = a^{\alpha}b^{\beta}\ldots = a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\ldots,$$

hvor a, b, ... ere Primtal, fik man ved at dividere paa begge Sider med a^{α} $(\alpha < \alpha_1)$

$$b^{\beta} \ldots = a^{\alpha_1 - \alpha} b^{\beta_1} \ldots,$$

hvor a gaar op paa højre Side af Lighedstegnet, men ikke paa venstre Side; da dette er umuligt, maa de samme Primtal i de samme Potenser findes begge Steder.

103. For at opløse et Tal i Primfaktorer dividerer man det først, saa ofte som muligt, med 2, derpaa med 3 og saaledes videre med alle Primtallene.

Dersom man har prøvet saa længe, til den fundne Kvotient er mindre end den brugte Divisor, uden at noget Primtal er gaaet op, er det undersøgte Tal selv et Primtal. Dersom der nemlig var en større Divisor, der gik op, maatte den tilsvarende Kvotient ogsaa gaa op, men dette er umuligt, da man har prøvet med alle Primtal, der ere mindre end eller lig denne Kvotient.

Regningen opskrives saaledes:

2	51900
2	25950
3	12975
5	4325
5	865
	173

173 er ikke delelig med 5, 7, 11, 13 eller 17, og da det sidste Tal giver Kvotienten 10, som er mindre end 17, er 173 et Primtal. Man har altsaa

$$51900 = 2^2 . 3 . 5^2 . 173.$$

104. Dersom man søger st. f. M. for Størrelser (Tal eller Polynomier), der ere opløste eller let kunne opløses i Primfaktorer (irreduktible Faktorer), behøver man blot at *udtage de fælles Faktorer i de laveste Potenser,*

hvori de forekomme. Produktet af disse Faktorer er det søgte st. f. M.; thi dette kan ikke indeholde andre Faktorer end dem, der findes i alle Størrelserne.

Eks. 1 Et vist Tal er deleligt baade med 30967 og med 36503; der spørges, om det ogsaa er deleligt med de to Tals Produkt.

Eks. 2. $a^5 - a$, hvor a er et helt Tal, er delelig med 30. Man har nemlig $a^5 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a-1)a(a+1)(a^2+1)$. $a - 1$, a og $a + 1$ ere tre paa hinanden følgende Tal i Talrækken; af disse er mindst eet deleligt med 2 og eet med 3; altsaa gaar 6 op i $a^5 - a$. Dersom Tallet 5 ikke gaar op i $a - 1$, giver det ved Divisjon deri til Rest 1, 2, 3 eller 4; i det første Tilfælde giver a Resten 2, $a^2 + 1$ Resten $2^2 + 1 = 5$; i det andet Tilfælde giver a Resten 3, $a^2 + 1$ Resten $3^2 + 1 = 10$; i det tredje og fjerde Tilfælde gaar 5 op i henholdsvis $a + 1$ og a. 5 og 6 og følgelig 30 gaa derfor op i $a^5 - a$

Eks. 3. St. f. M. for $2^3 . 5^2 . 7$, $2^2 . 5 . 11$ og $2^4 . 5^3 . 13$ er $2^2 . 5$.

105. **Mindste fælles Multiplum** *for flere Størrelser er det mindste Tal (det Polynomium af laveste Grad), i hvilket de alle gaa op.* Det maa indeholde alle de givne Størrelsers Primfaktorer (irreduktible Faktorer); man finder det derfor, naar Størrelserne ere opløste i Faktorer, *ved at danne Produktet af alle de forekommende Primfaktorer med de højeste Eksponenter, de findes med.*

Eks. 1. M. f. Mp. for Tallene ovenfor er $2^4.5^3.7.11.13$.

Eks. 2. M. f. Mp. for $(a+b)^3(a-b)$, $3a^3(a+b)(a-b)$ og $6a(a+b)^2$ er $6a^3(a+b)^3(a-b)$.

106. Produktet af to Tal er lig Produktet af deres st. f. M. og deres m. f. Mp.

Opløses nemlig Tallene i Faktorer, udtager man af disse, naar man danner m. f. M., netop de Faktorer, som man ikke tager med, naar man danner st. f. M. I Produktet af st. f. M. og m. f. Mp. findes derfor netop de samme Faktorer som i Tallenes Produkt.

107. Man kan finde m. f. Mp. for to Størrelser ved at dividere deres Produkt med deres st. f. M. (106). Denne Metode anvendes, naar Størrelserne ikke ere opløste i og ikke let kunne opløses i Faktorer.

Eks. $3x^2 - x - 2$ og $x^3 - 1$; st. f. M. er $x - 1$, m. f. Mp. er $(3x^2 - x - 2)(x^3 - 1) : (x - 1) = (3x + 2)(x^3 - 1)$.

Har man flere Størrelser, søges først m. f. Mp. for de to, derpaa for det udkomne og den tredje, o. s. v. Oftest kan man med Fordel benytte den først fundne fælles Faktor til at opløse Størrelserne i Faktorer.

Eks. $x^2 - 3x + 2$; $x^2 - 5x + 4$; $x^2 - 6x + 8$.

De to første Størrelser have $x - 1$ til st. f. M. Derved opløses de i

$$(x - 1)(x - 2) \text{ og } (x - 1)(x - 4);$$

med de her forekommende Faktorer divideres den tredje Størrelse, der derved skrives $(x - 2)(x - 4)$; det søgte m. f. Mp. er da

$$(x - 1)(x - 2)(x - 4).$$

Eksempler til Øvelse.

Forkort Brøkerne

1. $\frac{756}{988}$; **2.** $\frac{13284}{41148}$; **3.** $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$; **4.** $\frac{5x^2 + 7x - 6}{2x^3 - 5x + 6}$;

5. $\frac{3x^3 - x - 2}{2x^3 - x^2 - 1}$; **6.** $\frac{3x^5 - 10x^3 + 15x + 8}{x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6}$;

7. $\frac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$; **8.** $\frac{2x^3 + (2a - 9)x^2 - (9a + 6)x + 27}{2x^3 - 13x + 18}$;

9. $\frac{a^3x^3 - a^2bx^2y + ab^2xy^2 - b^3y^3}{2a^2bx^2y - ab^2xy^2 - b^3x^3}$.

10. St. f. M. for $x^4 - 10x^2 + 9$, $x^4 + 10x^3 + 20x^2 - 10x - 21$ og $x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 4x + 21$.

11. Opløs i Primfaktorer Tallene 1024, 588, 103, 1872, 713 og 1001.

12. $\frac{1}{6x^2 - x - 1} - \frac{1}{2x^2 + 3x - 2}$.

13. $\frac{1}{x^2 - 4a^2} + \frac{1}{(x + 2a)^3} + \frac{1}{(x - 2a)^3}$.

14. $\frac{1}{x^3 - x} - \frac{1}{x^3 - 1} - \frac{1}{x^3 + 1}$.

15. $\frac{1}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} - \frac{1}{x^3 - 10x^2 + 31x - 30}$
$+ \frac{3}{x^3 - 11x^2 + 38x - 40}$.

16. Hvilken Rest giver Tallet 1111111111 ved Divisjon med 99? Divisjonen maa ikke udføres.

17. Et Tal trækkes fra et andet, der skrives med de samme Cifre i modsat Orden; af Differensen udslettes et Ciffer; de tiloversblevne Cifre have Summen 41 (a); hvilket Ciffer er slettet?

18. Bevis, at Tallene a, $2a$, $3a$, $\ldots (p - 1)a$ give lutter forskellige Rester ved Divisjon med Primtallet p, der ikke gaar op i a.

19. Bevis, at dersom Primtallet p ikke gaar op i a, gaar det op i $1.2.3 \ldots (p - 1)a^{p-1} - 1.2.3 \ldots (p - 1)$.

20. Bevis, at dersom Primtallet p ikke gaar op i a, gaar det op i $a^{p-1} - 1$. (Fermats Sætning).

Decimalbrøk.

108. En Brøk, hvis Nævner er en Potens af 10, kaldes en **Decimalbrøk**. Man skriver den ved at skrive Tælleren og af denne ved et Komma afskære saa mange Cifre fra højre (Decimaler), som Nævneren har Nuller. Har Tælleren ikke Cifre nok, kan man sætte Nuller foran den, da disse ingen Betydning have.

Eks. $\frac{153}{100} = 1{,}53$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$; $\frac{115}{10} = 11{,}5$;

$0{,}1 = \frac{1}{10}$; $0{,}0031 = \frac{31}{10000}$; $0{,}371 = \frac{371}{1000}$.

109. Et Nul, der føjes efter en Decimalbrøk, forandrer ikke dens Værdi, da baade Tæller og Nævner derved multipliceres med 10. Saaledes er

$$0{,}7 = 0{,}70 = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0{,}700 = \frac{700}{1000} = \frac{7}{10}.$$

110. Det Ciffer, der staar foran Kommaet, angiver Tallets Enere; de andre Cifre faa for hver Plads, man rykker til højre, en 10 Gange lavere, for hver Plads, man rykker til venstre, en 10 Gange højere Værdi.

Man har nemlig f. Eks.

$$27{,}35 = \frac{2735}{100} = \frac{2000 + 700 + 30 + 5}{100}$$
$$= 20 + 7 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100},$$

og paa lignende Maade ses Sætningen at gælde for enhver Decimalbrøk. Paa Pladsen efter Kommaet staa altsaa Tiendedele, paa den næste Plads Hundrededele, o. s. v. Decimalbrøkerne danne derfor en naturlig Udvidelse af Tal, skrevne i Titalsystemet. Man kommer til dem ved at ophæve den Vedtægt, at Enerne staa paa den sidste

Plads, og erstatte den ved den, at Enerne staa paa den sidste Plads foran Kommaet. De andre Cifres Værdi bestemmes da efter den samme Regel, som gælder for Titalsystemet.

111. **Addition og Subtraktion** af Decimalbrøker udføres ved, at man sætter Kommaerne under hinanden, regner som med hele Tal og sætter Komma i Resultatet under de andre Kommaer.

De tomme Decimalpladser kunne udfyldes med Nuller; ved et helt Tal kan Komma sættes efter det sidste Ciffer.

Idet Kommaerne komme under hinanden, komme nemlig de ensbenævnte Enheder under hinanden; da nu 10 Enheder paa en hvilken som helst Plads udgøre een Enhed af den nærmest højere Art, maa Regningen blive som ved hele Tal (Mente, laane).

Eks. $13{,}07 + 5{,}376 = 18{,}446$; $17{,}1 - 8{,}437 = 8{,}663$; $1 - 0{,}51 = 0{,}49$; $12 + 0{,}0041 - 6{,}00003 + 0{,}1 - 5{,}92 + 1{,}7 = 1{,}88407$.

112. **Multiplikation.** Man multiplicerer to Decimalbrøker ved at multiplicere dem som hele Tal uden Hensyn til Kommaet og derpaa i Produktet afskære saa mange Decimaler, som Faktorerne have tilsammen.

Idet Kommaerne bortkastes, ere de Tal, der nu staa, Tællerne. Ere disse a og b, og har den ene Faktor m, den anden p Decimaler, ere de to Decimalbrøker

$$\frac{a}{10^m} \text{ og } \frac{b}{10^p} \text{ med Produktet } \frac{ab}{10^{m+p}}.$$

Produktet har altsaa $m+p$ Decimaler, og dets Tæller er dannet ved Multiplikation af de givne Tællere.

Er den ene Faktor et helt Tal, faar Produktet saa mange Decimaler, som den anden Faktor har.

Eks. $0,7 . 0,003$; man har $7 . 3 = 21$; afskæres heri 4 Decimaler, har man $0,0021$. $1,2 . 0,6 = 0,72$;

$$5 . 0,04 = 0,2;\ 0,1^3 = 0,001;$$

$$0,2^3 . 5 . 0,04 . 0,03^2 . 0,1 . 0,2 . 11 = 0,0000003168.$$

Særlig mærkes, at *man multiplicerer en Decimalbrøk med 10^n ved at flytte Kommaet n Pladser til højre*; derved blive nemlig alle Enhederne 10^n Gange større.

a e 113. **Divisjon.** Man dividerer en Decimalbrøk med et helt Tal, som om Dividenden var et helt Tal, idet man blot erindrer at sætte Komma i Kvotienten, naar man er kommen til Kommaet i Dividenden (før man trækker Tiendedelene ned). Metodens Rigtighed indses som ved hele Tal. Skal man f. Eks. dividere 7 i $0,0133$, faar man først 0 Enere, 0 Tiendedele, 0 Hundrededele; til Resten 1 Hundrededel trækkes nu 3 Tusendedele ned, hvorpaa man har 13 Tusendedele; i Kvotienten faar man nu 1 Tusendedel o. s. v.; man faar saaledes

$$0,0133 : 7 = 0,0019.$$

Dersom Divisjonen ikke gaar op, kan man føje Nuller til Dividenden og fortsætte Divisjonen, saa længe man vil; Resultatet kan da ikke udtrykkes nøjagtig ved Decimalbrøk, men man kan fortsætte Divisjonen saa længe, til Fejlen er mindre end enhver nok saa lille, given Størrelse.

Man dividerer med 10^n ved at flytte Kommaet n Pladser til venstre.

Eks. $0,025 : 5 = 0,005$; $1,25 : 25 = 0,05$;

$$0,012342 : 17 = 0,000726;\ 0,5 : 100 = 0,005.$$

114. *Dersom en Decimalbrøk skal divideres med en anden Decimalbrøk*, er der to Tilfælde

mulige. Ønskes Resultatet *i Form af en almindelig Brøk*, flytter man Kommaet saa mange Pladser til højre i Divisor og Dividend, som der er Decimaler i den, der har flest; dette er tilladt, fordi man derved multiplicerer Divisor og Dividend med samme Potens af 10. Da Divisor og Dividend nu begge ere hele Tal, kan Kvotienten skrives som en almindelig Brøk og om muligt forkortes.

Eks. $\frac{0,5}{1,25} = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$; $\frac{1,02}{3,4} = \frac{102}{340} = \frac{3}{10}$.

Dersom man ønsker Kvotienten som Decimalbrøk, flyttes Kommaet saa mange Pladser til højre i Divisor og Dividend, som Divisor har Decimaler; Divisor er da et helt Tal, og man benytter Reglen ovenfor (113). ae

Eks. $\frac{0,516}{1,2} = \frac{5,16}{12} = 0,43$; $\frac{0,4}{0,25} = 1,6$;

$$\frac{0,2^2 - 0,16^2}{0,36} = 0,04.$$

115. **Brøkers Forvandling til Decimalbrøker.** Er en Brøks Nævner ikke en Potens af 10, kan Tælleren skrives som en Decimalbrøk, idet man tilføjer et Komma og Nuller; udføres nu Divisjonen med Nævneren, som ovenfor lært, faas Brøken udtrykt som Decimalbrøk. Dersom Divisjonen gaar op, siges Brøken at være forvandlet til en *sluttet* Decimalbrøk; dersom Divisjonen ikke gaar op, faar man en uendelig Decimalbrøk. En uendelig Decimalbrøk kaldes *periodisk*, dersom de samme Cifre stadig komme igen i samme Orden; de Cifre, der stadig gentages, danne da en Periode. Dersom Perioden begynder straks efter Kommaet, kaldes Brøken *rent periodisk*; kommer der først nogle Cifre, der ikke høre til Perioden, kaldes Brøken *blandet periodisk*. a e

116. De uendelige Decimalbrøker, der dannes ved Forvandling af almindelige Brøker, ere altid periodiske.

Dersom Nævneren er n, kan man nemlig ved Divisjonen, da den ikke gaar op, ikke faa andre Rester end $1, 2, 3, \ldots n-1$. Saa snart man faar en Rest, som man har haft tidligere (efter at man har begyndt at trække Nuller ned), kan man standse Divisjonen; thi man trækker nu som forrige Gang, man havde Resten, et Nul ned; man maa altsaa faa samme Ciffer i Kvotienten, derpaa atter samme Rest som forrige Gang, o. s. v. Da man, naar Divisor er n, kan faa højst $n-1$ forskellige Rester, maa Perioden faa højst $n-1$ Cifre. I de følgende Eksempler er der sat en Streg over Perioden.

Eks. $\frac{3}{5} = 0{,}6$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $\frac{3}{16} = 0{,}1875$;

$$\frac{1}{2} = 0{,}5;\quad \frac{1}{200} = 0{,}005;\quad \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}33\ldots;$$

$$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}66\ldots;\quad \frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}428\ldots;\quad \frac{2}{11} = 0{,}\overline{18}18\ldots$$

117. **Decimalbrøkers Forvandling til alm. Brøker.** En sluttet Decimalbrøk skrives som alm. Brøk og forkortes. En uendelig Decimalbrøk, der ikke er periodisk, kan kun forvandles med Tilnærmelse, idet man medtager saa mange Cifre, som man behøver efter den Nøjagtighed, man ønsker, og behandler Brøken som en sluttet Decimalbrøk.

En ren periodisk Decimalbrøk er lig en Brøk, hvis Tæller er Perioden, og hvis Nævner skrives med saa mange Cifre 9, som der er Cifre i Perioden.

Har man f. Eks.

$$x = 0{,}\overline{371}371\ldots,$$

faar man ved Multiplikation med 10^3

$$1000x = 371{,}371\ldots$$

og derpaa ved Subtraktion

$$999x = 371;\quad x = \frac{371}{999}.$$

Var Decimalbrøken

$$x = 0,\ \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

fik man ved Multiplikation med 10^n

$$10^n x = a_1 a_2 \ldots a_n,\ \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \ldots$$

og ved Subtraktion

$$(10^n - 1)\,x = a_1 a_2 \ldots a_n;$$

$$x = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n - 1},$$

hvor Tælleren netop er Perioden, medens Nævneren skrives med Cifret 9 n Gange.

Tælleren er naturligvis ikke at forstaa som et Produkt, men som et Tal, skrevet i Titalsystemet med Cifrene $a_1, a_2, \ldots a_n$.

En blandet periodisk Decimalbrøk gøres rent periodisk ved Multiplikation med en Potens af 10, forvandles nu efter Reglen ovenfor og divideres derpaa med den benyttede Potens af 10.

$$x = 0{,}31\overline{425}425\ldots;\quad 100x = 31{,}\overline{425}\ldots = 31\frac{425}{999};$$

$$x = \frac{31 \cdot 999 + 425}{99900} = \frac{31425 - 31}{99900}.$$

$$x = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_p \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} a_1 a_2 \ldots a_n \ldots;$$

$$10^p x = b_1 b_2 \ldots b_p,\ \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} a_1 a_2 \ldots$$

$$= b_1 b_2 \ldots b_p + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n - 1};$$

$$x = \frac{b_1 b_2 \ldots b_p (10^n - 1) + a_1 a_2 \ldots a_n}{10^p (10^n - 1)}$$
$$= \frac{b_1 b_2 \ldots b_p a_1 a_2 \ldots a_n - b_1 b_2 \ldots b_p}{10^p (10_n - 1)}.$$

118. Vi kunne nu se, hvilke Brøker der føre til de tre forskellige Slags Decimalbrøker, idet disse ved at forvandles og forkortes maa føre tilbage til de almindelige Brøker, af hvilke de ere dannede.

De sluttede Decimalbrøker faa ved Forvandlingen Nævnere (10^n), der kun indeholde Primfaktorerne 2 og 5, og altsaa vil Forkortning kun kunne føre til Brøker, hvis Nævnere alene indeholde disse Primfaktorer. Omvendt vil en Brøk, hvis Nævner kun indeholder Primfaktorerne 2 og 5, forvandles til en sluttet Decimalbrøk, naar Nævner og Tæller multipliceres med en passende Potens af 2 eller 5.

Eks. $\frac{7}{2^3 . 5} = \frac{7 . 5^2}{2^3 . 5^3} = \frac{175}{10^3} = 0{,}175;$

$$\frac{3}{25} = \frac{3}{5^2} = \frac{3 . 2^2}{10^2} = 0{,}12.$$

De blandet periodiske Decimalbrøker forvandles til Brøker, hvis Nævnere ere $10^p(10^n - 1)$, hvor 10^p kun indeholder Primfaktorerne 2 og 5, $10^n - 1$ kun andre Primfaktorer. $10^n - 1$ kan ikke forkortes helt bort, thi Decimalbrøken var da sluttet; 10^p kan heller ikke forkortes helt bort, da Tælleren i x kun kan ende paa Nul, dersom $a_n = b_p$, men hvis dette var Tilfældet, maatte Perioden begynde med b_p og ikke med a_1. De blandet periodiske Decimalbrøker føre derfor til Brøker, hvis Nævnere indeholde mindst een af Faktorerne 2 og 5 og desuden andre Faktorer.

De rent periodiske Decimalbrøker føre ved

Forvandlingen til Brøker, hvis Nævnere $(10^n - 1)$ ikke indeholde Primfaktorerne 2 og 5. Omvendt maa alle saadanne Brøker give rent periodiske Decimalbrøker, thi dersom de gav blandet periodiske, maatte 2 eller 5 findes i Nævneren, som vi viste det ovenfor. Heraf ses tillige, at den forrige Sætning kan vendes om, thi Brøker, i hvis Nævnere findes 2 eller 5 og andre Faktorer, kunne hverken give sluttede eller rent periodiske Decimalbrøker.

Eksempler til Øvelse.

1. $0{,}3 . 4{,}1 - 0{,}49 : 0{,}07 + 5 : 0{,}25 - 3 . 2{,}141 - 7{,}807.$

2. $\frac{2}{5}, \frac{7}{16}, \frac{19}{2}, \frac{25}{8}, \frac{4}{7}, \frac{9}{11}, \frac{37}{99}, \frac{1}{999}, \frac{5}{6}, \frac{10}{13}, \frac{5}{18}, \frac{37}{40}$ forvandles til Decimalbrøker.

3. $0{,}75$; $4{,}312$; $0{,}136$; $0{,}\overline{12}12..$; $0{,}0025$; $0{,}1\overline{6}6..$; $0{,}\overline{6}6..$; $3{,}4\overline{25}25..$; $1{,}\overline{142857}142..$; $0{,}13\overline{006}006..$ forvandles til almindelige Brøker.

4. $\frac{0{,}5^3 - 0{,}04^3}{0{,}46}$; $\frac{1{,}2^3 + 0{,}13^3}{1{,}33} - 1{,}07^2 + 0{,}39 . 1{,}2.$

5. $\frac{17{,}1^2 + 0{,}2 . 5 : 1{,}25}{0{,}011} - \frac{0{,}3^2 - 1{,}4^2}{1{,}7}$ beregnes med 3 Decimaler.

6. $\frac{1{,}2^4 - 0{,}803^4}{1{,}44 + 0{,}803^2} - 2{,}003 . 0{,}397.$

7. Søg x af $0{,}14(x - 0{,}6) = 2{,}4(x - 1{,}1) + 0{,}07.$

8. $\frac{x - 0{,}12}{1{,}11} - \frac{2x - 1{,}34}{1{,}12} = \frac{x + 2{,}47}{3{,}7} - 1.$

Uendelig og Ubestemt.

119. **Uendelig stor og uendelig lille.** Vi have i det foregaaende lært at udføre de forskellige Regninger med alle Tal, saaledes at vi, naar de opgivne Størrelser ere Tal, altid komme til et Resultat, der er et helt Tal eller en Brøk. Der er dog een Undtagelse, som vi nu ville betragte nærmere. Man kan nemlig ikke dividere 0 i et Tal a (som ikke er Nul), da der ikke gives noget Tal, som multipliceret med 0 giver a. Tænke vi os imidlertid, at vi i Stedet for med 0 dividere med et meget lille Tal, kan Divisjonen udføres, og vi faa en meget stor Kvotient; jo mere Divisor nærmer sig til Nul, desto større bliver Kvotienten, og vi kunne altid gøre Divisor saa lille, at Kvotienten bliver større end ethvert opgivet Tal, hvor stort det end er. I Ligningen

$$\frac{a}{b} = c$$

vil c altsaa vokse ud over enhver given Grænse, naar vi holde a uforandret, men lade b nærme sig mere og mere til 0. Man udtrykker dette ved at skrive

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

hvor Tegnet ∞ læses «uendelig». ∞ betegner altsaa ikke en bestemt Størrelse, men derimod en, som tænkes voksende uden Grænse, medens 0 da betegner en Størrelse, der tænkes aftagende mod Nul uden Grænse, en saakaldet «uendelig lille» Størrelse. Tegnet 0 faar altsaa egentlig to Betydninger, nemlig som hidtil «Intet» og den uendelig lille Størrelse. Det absolute Nul spiller imidlertid ingen Rolle, saa at vi for Fremtiden tænke os 0 som den uendelig lille Størrelse; de tidligere udviklede Formler forandres ikke derved, men faa kun en lidt for-

andret Betydning. Naar vi saaledes skrive $a + 0 = a$, betyder dette nu: naar vi i en Sum af to Addender lade den ene aftage uden Grænse, vil Summen kunne bringes til, saa nær som man vil, at være lig den anden Addend. I $0 . a = 0$ staar der egentlig: Naar den ene Faktor i et Produkt aftager uden Grænse, aftager Produktet selv uden Grænse, ligesom $\frac{a}{0} = \infty$ betyder, at Kvotienten vokser uden Grænse, naar Divisor aftager uden Grænse, og ligesom $\frac{a}{\infty} = 0$ betyder, at Kvotienten aftager uden Grænse, naar Divisor vokser uden Grænse, eller, hvad der er det samme, at man altid kan gøre Divisor saa stor, at Kvotienten bliver mindre end en hvilken som helst, nok saa lille, given Størrelse.

120. Vi opnaa ved Indførelsen af Tegnet ∞, at vi i det Tilfælde, hvor en Opgave er umulig, faa noget mere at vide om den. Saaledes fik vi af de to Ligninger i 69

$$ax + by = c; \quad mx + ny = p$$

$$(na - mb)\,x = nc - bp; \quad x = \frac{nc - bp}{na - mb},$$

hvor vi dog, idet vi dividere med Parentesen, maatte forudsætte, at $na - mb$ ikke var Nul. Nu behøve vi ikke at gøre denne Forudsætning, thi vi faa nu i dette Tilfælde $x = \infty$ og lære deraf, at Opgaven er umulig, men tillige, at dersom vi forandre de givne Størrelser meget lidt, saa at $na - mb$ bliver lidt forskellig fra 0, vil x faa en meget stor Værdi, og at man altid kan gøre Forandringen saa lille, at x bliver større end en hvilken som helst given Størrelse. Alt dette vil man ikke gentage hver Gang ved lignende Opgaver, og derfor udtrykker man det kort ved at sige, at x er uendelig.

121. **Ubestemt.** Vi forudsatte hidtil, at Dividenden ikke var 0. Vi have altsaa tilbage at undersøge Udtrykket $\frac{0}{0}$, der betegner den Værdi, som en Brøk nærmer sig mere og mere til (dens Grænseværdi), naar Tælleren og Nævneren begge aftage uden Grænse. Man indser imidlertid let, at man ikke her nærmer sig til nogen bestemt Størrelse, da vi efter Behag kunne lade Tælleren eller Nævneren aftage stærkest. Vi sige derfor, at $\frac{0}{0}$ er «ubestemt»; dette stemmer med, at Prøven viser Rigtigheden af Ligningen
$$\frac{0}{0} = a,$$
hvilken Værdi vi end tillægge a.

Den Værdi, vi fik for x af de to Ligninger ovenfor, passer nu for alle Tilfælde, idet den, naar Brøkens Tæller og Nævner begge blive Nul, viser, at x er ubestemt; dette stemmer med, hvad vi viste tidligere (70), nemlig at vi i dette Tilfælde ikke kunne bestemme de ubekendte, da vi kun have een Ligning.

122. **Den sande Værdi af en ubestemt Størrelse.** Ligningen
$$\frac{0}{0} = \text{ubestemt}$$
er altsaa et kort Udtryk for den Sætning: Dersom en Brøks Tæller og Nævner aftage uden Grænse, kan Brøkens Værdi derved nærme sig mere og mere til et hvilket som helst Tal. Man ser, at vi her forudsætte, at vi kunne lade Tælleren og Nævneren nærme sig til Nul, saaledes som vi selv ville; Sætningen gælder derfor ikke, dersom den ene af Størrelserne skal nærme sig til Nul paa en bestemt Maade, naar den anden nærmer sig til Nul. Dersom vi f. Eks. i Brøken
$$\frac{3a}{a}$$
lade Nævneren a nærme sig til Nul, vil Tælleren af sig selv samtidig nærme sig til Nul. Hvor lille vi end gøre

a, vil Brøkens Værdi stadig være 3, saa at den ikke er ubestemt, naar a er Nul. Vi slutte heraf følgende:

Dersom en Brøks Tæller og Nævner nærme sig til Nul (ere uendelig smaa), er Brøken ubestemt, dersom Tælleren og Nævneren ere uafhængige af hinanden; men den har en bestemt Værdi, dersom Tælleren og Nævneren maa rette sig efter hinanden. Denne Værdi kaldes den sande Værdi af den tilsyneladende ubestemte Størrelse.

123. Dersom to Størrelser ere lige store for alle Værdier af et af de forekommende Bogstaver, undtagen for en Værdi, der gør den ene Størrelse ubestemt, men giver den anden en bestemt Værdi, da er denne den ubestemte Størrelses sande Værdi.

Lad os f. Eks. betragte de to Brøker
$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} \text{ og } \frac{x+2}{x+3}.$$
Da den anden Brøk dannes af den første ved Forkortning, ere de to Brøker lige store for alle Værdier af x. Herfra maa dog undtages Værdien $x = 1$, der gør den første Brøk ubestemt, men giver den anden Værdien $\frac{3}{4}$. Denne er da den sande Værdi af den første Brøk for $x = 1$.

Vi skulle nemlig, efter hvad vi have lært, for at finde den sande Værdi tænke os x nærmende sig mere og mere til 1 (nemlig $x - 1$ til 0); da nu de to Brøker ere lige store, hvor lille en Værdi vi end indsætte for $x-1$, kunne vi lige saa godt tænke os x nærmende sig til 1 i den anden Brøk; derved nærmer denne sig til $\frac{3}{4}$, som altsaa er den søgte sande Værdi.

Da vi nu vide (55), at dersom en Brøks Tæller bliver Nul for en Værdi af x, f. Eks. for $x = a$, vil

$x - a$ være Faktor i Tælleren, og da det samme gælder om Nævneren, se vi, at en Brøk kun kan blive ubestemt for en vis Værdi af et af Bogstaverne, dersom den kan forkortes; man finder altsaa en Brøks sande Værdi ved først at forkorte den og derpaa indsætte den givne Værdi. Er det for $x = a$, at Brøken bliver ubestemt, vil den kunne forkortes med $x - a$; bliver den derefter endnu ubestemt for $x = a$, kan den atter forkortes med $x - a$, o. s. v.

I de følgende Eksempler antage vi, at de Størrelser, der betegnes ved forskellige Bogstaver, kunne forandre sig uden at rette sig efter hinanden.

Eks. 1. Hvad er $\frac{y - b}{x - a}$ for $y = b$ og $x = a$?

2. Hvad er $\frac{x^2 - a^2}{(x - a)^2}$ for $x = a$?

3. Hvad er $\frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1}$ for $x = 1$?

4. Hvad er $\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ for $h = 0$?

5. En Kureer rejser ud fra en By A. og rejser a Mil om Dagen; en anden Kureer rejser samtidig samme Vej fra en By B., der ligger n Mil foran A., og rejser b Mil om Dagen. Efter hvor mange Dage støde de sammen? Hvilke forskellige Tilfælde kunne indtræffe?

Efter x Dage har den første Kureer rejst ax, den anden bx Mil; støde de nu sammen, maa den første have rejst n Mil flere end den sidste; altsaa er $ax = n + bx$; $x = \frac{n}{a - b}$.

For $a > b$ er Svaret positivt; de støde sammen om saa mange Dage. For $a < b$ er Svaret negativt; de ere allerede stødte sammen, før de naaede Byerne, for saa mange Dage siden; de støde altsaa aldrig sammen, dersom de begynde Rejsen ved Byerne; men dersom de blot passere Byerne samtidig paa deres Rejse, har den forreste for saa og saa mange Dage siden indhentet den bageste.

Dersom $a = b$, er $x = \infty$; altsaa naa de aldrig hinanden, men vilde gøre det om en meget lang Tid eller vilde have gjort det for en meget lang Tid siden, dersom den ene forandrede sin Hastighed lidt. Er tillige $n = 0$, bliver Svaret ubestemt; de rejse da sammen hele Tiden.

124. Vi kunne nu ogsaa regne med det indførte Begreb ∞. Saaledes faar man:

$$a \cdot \infty = \infty, \quad a + \infty = \infty,$$

der udtrykke, at et Produkt (en Sum) vokser uden Grænse, naar den ene Faktor (Addend) vokser uden Grænse;

$$0 \cdot \infty = \text{ubestemt},$$

der udtrykker, at et Produkt ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænse, naar den ene Faktor aftager og den anden vokser uden Grænse;

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{ubestemt},$$

der udtrykker, at en Brøk ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænse, naar dens Tæller og Nævner vokse uden Grænse;

$$\infty - \infty = \text{ubestemt},$$

der udtrykker, at en Differens ikke nærmer sig til nogen bestemt Grænse, naar Subtrahend og Minuend vokse uden Grænse.

Nogle mindre væsentlige Former, nemlig 0^0, 1^∞ og ∞^0, der ogsaa ere ubestemte, ville vi foreløbig forbigaa.

$$a^\infty = \infty \ (a > 1) \text{ og } a^\infty = 0 \ (a < 1)$$

udtrykke, at en Potens af et Tal større end 1 vokser, af et Tal mindre end 1 aftager uden Grænse, naar Eksponenten vokser uden Grænse.

Man finder nemlig ved fortsat Multiplikation med $1+\alpha$ (α positiv) og Bortkastelse paa højre Side af alle Led, der ere af højere end første Grad, $1+\alpha = 1+\alpha$; $(1+\alpha)^2 > 1+2\alpha$; $(1+\alpha)^3 > 1+3\alpha$; ... $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha$, men $1+n\alpha$ bliver større end et vilkaarlig valgt Tal m, naar $n > (m-1):\alpha$. Herved er Sætningens første Del bevist, og den anden udledes heraf ved Divisjon i 1.

125. Ved de Størrelser, der ovenfor ere anførte som ubestemte, er det forudsat, at de to Størrelser, der vokse eller aftage uden Grænse, ere uafhængige af hinanden; ere de afhængige af hinanden, ville de ubestemte Udtryk have en sand Værdi, der bestemmes, idet Udtrykket først bringes paa Formen $\frac{0}{0}$. Saaledes kan man i Stedet for $a \,.\, b$ ($a = 0$; $b = \infty$) skrive $a : \frac{1}{b}$ ($a = 0$, $\frac{1}{b} = 0$).

Skal man i en Brøk, hvor Tæller og Nævner ere Polynomier, ordnede efter x, sætte $x = \infty$, divideres først Tæller og Nævner med den højeste Potens af x, der forekommer.

126. Bestemmelsen af en ubestemt Størrelses sande Værdi bliver mere vanskelig, naar man kommer til de ny Former af Størrelsen, som man, efterhaanden som man skrider frem i de matematiske Videnskaber, er nødt til at indføre.

Da disse sande Værdier spille en meget vigtig Rolle ved mange Opgaver, udvikler man Metoder til deres Bestemmelse i en séregen Gren af den rene Matematik, som kaldes Differentialregning.