Opgaver

i

analytisk Geometri.

Af

Julius Petersen.

Kjøbenhavn.

Karl Schønbergs Forlag.

Louis Kleins Bogtrykkeri.

1868.

Den rette Linie.

1.

Hvor stor er Afstanden mellem Punkterne (3,4) og (—1,3)? X

2.

Hvor store ere Siderne i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere (0,1), (5,6) og (6,1)? X

3.

Find Ligningen for en ret Linie, der danner en Vinkel paa 135^0 med Abscisseaxen og afskjærer Stykket — 7 af Ordinataxen. X

4.

Hvor stor er Ordinaten til det Punkt i Linien $2x + 3y = 5$, hvis Abscisse er 2? X

5.

Hvilke Stykker afskjærer Linien $5x + 3y = 15$ af Axerne, og hvilken Vinkel danner den med Abscisseaxen? X

6.

Hvilken Ligning har en Linie, der indeholder Punktet (2,3) og gaar igjennem Begyndelsespunktet? X

7.

Find Ligningerne for de tre Sider i Trekanten i 2. X

8.

I hvilket Punkt skjærer Linierne i 4 og 5 hinanden? X

9.

Find Skjæringspunktet for Linierne $5x + y = 4$ og $10x + 2y = 3$.

10.

Find Ligningen for en ret Linie gjennem Punktet $(3, \frac{5}{2})$, og som i Forbindelse med Axerne danner en Trekant, hvis Areal er 15.

11.

Hvilke ere Sidernes Midtpunkter i Trekanten i 2?

12.

Find Ligningerne for Medianerne i samme Trekant.

13.

Find Skjæringspunktet for to af disse Medianer, og vis at dette Punkt ligger i den tredie Median.

14.

Bevis at de tre Medianer i en Trekant skjære hverandre i eet Punkt.

15.

Bevis at den Linie, som forbinder Midtpunkterne af de to Sider i en Trekant, er parallel med den tredie Side og halv saa stor.

16.

Find Ligningen for en Linie, der gaar gjennem Begyndelsespunktet og gjennem Skjæringspunktet for Linierne $2x + 3y = 2$ og $y = x + 1$.

17.

Hvor stor er Vinklen mellem Linierne $2x + 3y = 1$ og $3x - 2y = 1$?

18.

Find Ligningen for en Linie gjennem Begyndelsespunktet og lodret paa Linien $ax + by = c$.

19.

Find Ligningerne for de tre Høider i Trekanten i 2.

20.

Bevis at de tre Høider i en Trekant skjære hverandre i eet Punkt.

21.

Bevis at Diagonalerne i et Parallelogram halvere hinanden.

22.

Bring Ligningen $5x + 12y - 13 = 0$ paa Normalform; find Afstanden fra Linien til Punktet (1,2), og vis, at dette Punkt og Begyndelsespunktet ligge paa forskjellige Sider af Linien.

23.

Hvor store ere Høiderne i Trekanten i 2, og hvor stort er Trekantens Areal?

24.

Hvor stort er Arealet af en Trekant, hvis ene Vinkelspids ligger i Begyndelsespunktet, medens de to andre ere (a, b) og (a_1, b_1)?

25.

Bevis at ethvert Punkt i en Linie, der staar lodret paa Midten af en given Linie, har ligestore Afstande fra denne Linies Endepunkter.

26.

Hvor stor er den spidse Vinkel mellem Linierne $2x + 3y = 1$ og $3x + 2y = 1$?

27.

Find Ligningerne for de tre Sider i en ligesidet Trekant, hvis ene Vinkelspids ligger i Begyndelsespunktet, og hvis ene Side falder i Abscisseaxen; find Afstandene fra et vilkaarligt Punkt til disse Sider, og vis at Summen af disse Afstande er lig Trekantens Høide.

28.

I en Trekant ABC trækkes Medianen BD og en Linie $BE \not= AC$; bevis at en vilkaarlig Linie gjennem D skjærer Figurens Linier i fire harmonisk forbundne Punkter.

29.

Bevis at det ene Par modstaaende Sider i et Kvadrat afskjærer et ligesaa stort Stykke af en vilkaarlig Linie, som det andet Par af en Linie, lodret paa den første.

30.

I en ligebenet Trekant drages fra Toppunktet en Linie AD, der med Grundlinien danner en Vinkel paa 60^0 og deler den i to Stykker BD og DC; bevis at $DC + DB = DA$.

31.

Hvilken Egenskab have 3 rette Linier, hvis Ligninger ved Multiplikation med visse Faktorer og Addition give en identisk Ligning?

32.

Naar $\alpha = o$ og $\beta = o$ ere Ligningerne for to rette Linier under Normalform, hvilken Linie har da Ligningen $\alpha - \beta = o$?

33.

Bevis at de Linier, der halvere Vinklerne i en Trekant, skjære hverandre i eet Punkt.

34.

Bevis at de to Linier, der halvere en Trekants ene Vinkel og dens Nabovinkel, dele den modstaaende Side harmonisk.

35.

Fra et fast Punkt trækkes Linier til Punkterne i en given Linie; find det geometriske Sted for disse Liniers Midtpunkter.

36.

Find det geometriske Sted for de Punkter, for hvilke Kvadraterne af Afstandene til to faste Punkter have en given Differens.

37.

Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af de Stykker, som to givne Linier afskjære af et System af parallele Linier.

38.

Hvilken Kurve fremstilles ved en homogen Ligning af anden Grad mellem Koordinaterne?

39.

Hvorledes fremstilles et System af to paa hinanden lodrette Linier gjennem Begyndelsespunktet ved een Ligning?

40.

I en Trekant ligger Grundlinien fast, og Summen af de andre Sider er konstant; hvilket er det geometriske Sted for det Punkt i Høidens Forlængelse, hvis Afstand fra Grundlinien er lig en af Siderne?

41.

Et vilkaarligt Antal Trekanter have faste Grundlinier og fælles Toppunkt; find det geometriske Sted for dette Punkt, naar Summen af Trekanternes Arealer er konstant.

42.

De tre Sider i en Trekant dreie sig om faste Punkter, der ligge i en ret Linie, medens de to Vinkelspidser gjennemløbe givne rette Linier; find det geometriske Sted for den tredie Vinkelspids.

43.

Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af Rektangler, der ere indskrevne i en given Trekant.

44.

I en Trekant trækkes en vilkaarlig Linie, parallel med den ene Side, og hvor den skjærer de to andre Sider opreises

Linier, lodrette paa disse; find det geometriske Sted for de Lodrettes Skjæringspunkt.

45.

I en Trekant trækkes en vilkaarlig Linie, parallel med den ene Side, og dens Skjæringspunkter med de to andre Sider forbindes med to faste Punkter i den første; find det geometriske Sted for de to Liniers Skjæringspunkt; specielt antages de to Punkter forbundne med de modstaaende Vinkelspidser.

46.

I en Trekant ABC afsættes paa AB Stykkerne AT og BS i et givet Forhold til hinanden; gjennem T og S trækkes Linierne TE og SF lodrette paa AB, og som skjære Trekantens to andre Sider i E og F; find det geometriske Sted for Skjæringspunktet af Linierne EB og FA.

47.

I et Parallelogram trækkes to Linier PP_1, og QQ_1, parallele med Siderne; find det geometriske Sted for Skjæringspunktet af Linierne PQ og P_1Q_1.

48.

Fra et givet Punkt trækkes to vilkaarlige rette Linier, der skjære to faste rette Linier i fire Pnnkter; find det geometriske Sted for Skjæringspunktet af de Linier, der forbinde disse Punkter overkors.

49.

Et System af ligestore parallele Linier halveres alle af en fast ret Linie med givne Endepunkter. Find det geometriske Sted for Skjæringspunktet af de Linier, der forbinde disse Endepunkter med Endepunkterne af en af Parallelerne.

50.

I en Trekant ligger Grundlinien fast, og de to andre Sider skjære en fast med Grundlinien parallel Linie AB i Punkterne C og D, hvor Forholdet $AC : BD$ er konstant; find det geometriske Sted for Trekantens Toppunkt.

51.

Paa Benene af en fastliggende Vinkel A afsættes to Stykker AB og AC, hvis Sum er konstant; find det geometriske Sted for Midtpunktet af Linien BC.

52.

I Axerne gives to faste Punkter A og B og to andre A_1 og B_1 bestemmes saaledes, at $OA_1 + OB_1 = OA + OB$; find det geometriske Sted for Skjæringspunktet af Linierne AB_1 og A_1B.

53.

Hvorledes er den fælles Ligning for de Linier, der gaa gjennem Skjæringspunktet af Linierne

$$ax + by + c = 0 \text{ og } a_1 x + b_1 y + c_1 = 0?$$

54.

Hvilken Egenskab have de Linier, der have Ligningen

$$y - 3x + k(y + 2x - 1) = 0,$$

hvor de forskjellige Linier svare til de forskjellige Værdier af k?

55.

Paa Benene af en fast Vinkel A afsættes Stykkerne AB og AC, saa at

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \text{konstant};$$

bevis at Linien BC gaar gjennem et fast Punkt.

56.

Bevis at et System af Linier, der afskjære proportionale Dele paa to givne parallele Linier, skjære hverandre i eet Punkt.

57.

Bevis at Midtpunkterne af Diagonalerne i en fuldstændig firsidet Figur ligge i en ret Linie.

58.

Hvilken Kurve bestemmes ved Ligningen

$$x^2 - 2xytg.v - y^2 = 0?$$

59.

Hvorledes udtrykkes Arealet af en Polygon, hvis Vinkelspidsers Koordinater ere givne?

60.

Naar Ligningen for en ret Linie er

$$(ax_1 + by_1)x + (bx_1 + ay_1)y = c$$

hvor a, b og c ere givne, og (x_1, y_1) er et vist Punkt, ser man let, at Linien er fast, naar Punktet (x_1, y_1) er fast; naar derimod (x_1, y_1) bevæger sig paa en ret Linie, maa den ved Ligningen bestemte rette Linie dreie sig om et fast Punkt; hvilket er dette, naar (x_1, y_1) bevæger sig paa Linien $x_1 + y_1 = 1$?

Cirklen.

61.

Find Koordinaterne til Centrum og Radius til Cirklen

$$x^2 + y^2 - 5x - 4y = 7.$$

62.

Bring Ligningen

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$$

paa den almindelige Form for en Cirkels Ligning.

63.

Find Ligningen for Centerlinien for Cirklerne

$$x^2 + y^2 = 2y \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 = 2x.$$

64.

Find Koordinaterne til Skjæringspunkterne for

$$x^2 + y^2 = 65 \quad \text{og} \quad 3x + y = 25.$$

65.

Find Koordinaterne til Skjæringspunkterne for

$$(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2 \text{ og } 4x + 3y = 35c.$$

66.

Find Ligningen for en Cirkel, der rører begge Axerne i en Afstand a fra Begyndelsespunktet.

67.

Find Størrelsen af Tangenten fra Begyndelsespunktet til

$$x^2 + y^2 - 14x + 3y + 9 = 0.$$

68.

Find Ligningen for Fælleskorden (Radikalaxen) for Cirklerne

$$x^2 + y^2 + ax - by = 0 \text{ og } x^2 + y^2 - ax + by = 2c.$$

69.

Find Ligningen for en Cirkel, som gaar gjennem Begyndelsespunktet, hvis Radius er 4, og som har sit Centrum paa Linien $x = y$.

70.

Hvad er Ligningen for en Cirkel, der gaar gjennem Skjæringspunkterne for Cirklerne, hvis Ligninger ere $S = 0$ og $S_1 = 0$?

71.

Find Ligningen for den Cirkel, der gaar gjennem Skjæringspunkterne for Cirklerne

$x^2 + y^2 + ax + by = c$ og $x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y = c_1$

og gjennem Begyndelsespunktet.

72.

Find Ligningen for en Cirkel, der gaar gjennem Skjæringspunkterne for Cirklerne $x^2 + y^2 = 4$ og $x^2 + y^2 = 2x$, og som skjærer Cirklen $x^2 + y^2 = y + 2$ i to Punkter, som ligge i ret Linie med Begyndelsespunktet.

73.

Angiv Betingelsen for at de fire Skjæringspunkter for to Par Cirkler ligge i een Cirkelperiferi.

74.

Bevis at de tre Radikalaxer for tre Cirkler skjære hverandre i eet Punkt.

75.

Naar Koordinaterne til to Punkter (x, y) og (ξ, η) ere forbundne ved Ligningen

$$x^2 + y^2 + ax\xi + by\eta + c\xi + d\eta = e,$$

hvad bliver da det geometriske Sted for det ene Punkt, naar det andet ligger fast?

76.

Ved hvilke Ligninger bestemmes Koordinaterne til Røringspunkterne for Tangenterne fra Punktet (a, b) til Cirklen $x^2 + y^2 = r^2$, og hvad udtrykker hver af disse Ligninger taget for sig?

77.

Hvad er Ligningen for Polaren (Røringskorden) til Punktet (4,5), naar Cirklens Ligning er $x^2 + y^2 = 9$?

78.

Bevis at Polen gjennemløber en ret Linie, naar Polaren dreier sig om et fast Punkt og omvendt.

79.

Bevis at naar et Punkt ligger i et andet Punkts Polar, maa det andet Punkt ligge i det første Punkts Polar.

80.

Bevis at Kvadratet af Tangenten fra et Punkt af en Cirkel til en anden Cirkel staar i et konstant Forhold til Punktets Afstand fra Cirklernes Radikalaxe.

81.

Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra en given Linie ses under en given Vinkel.

82.

Find det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter staa i et givet Forhold.

83.

En Linie dreier sig om et fast Punkt O, medens dens andet Endepunkt A gjennemløber en ret Linie; find det geometriske Sted for et andet Punkt a i Linien, naar $OA \cdot Oa$ er konstant.

84.

I en given Cirkel afsættes fra Centrum O ud af en vilkaarlig Radius OA et Stykke OM, lig Radiens Projektion paa en fast Diameter; find det geometriske Sted for M.

85.

Find det geometriske Sted for et Punkt, hvis Afstand fra Grundlinien i en ligebenet Trekant er Mellemproportional mellem Afstandene fra Benene.

86.

En Linie af given Længde bevæger sig med sine Endepunkter paa to givne rette Linier, og i disse Punkter opreises Lodrette paa de faste Linier; find det geometriske Sted for de Lodrettes Skjæringspunkt.

87.

Find det geometriske Sted for det Punkt, for hvilket Summen af Kvadraterne af Afstandene fra to faste Punkter er konstant.

88.

Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af et System af parallele Korder.

89.

Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af et System af Korder, der alle gaa gjennem et givet Punkt.

90.

Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af de Korder, der fra et givet Punkt ses under en ret Vinkel.

91.

Fra et Punkt fældes lodrette Linier paa de Korder, der fra Puntet ses under rette Vinkler. Find det geometriske Sted for de Lodrettes Fodpunkter.

92.

Gjennem et fast Punkt i en Diameter trækkes Korder, hvis Endepunkter forbindes med Diametrens ene Endepunkt; bevis at Forbindelseslinierne, af en given Linie, lodret paa Diametren, afskjære Stykker, hvis Produkt er konstant.

93.

Fra to Punkter A og B fældes de Lodrette AP og BQ, fra hvert Punkt paa det andet Punkts Polar med Hensyn til en given Cirkel med Centrum O; bevis at $OA : AP = OB : BQ$.

94.

Find det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra Tangenterne til to givne Cirkler staa i et givet Forhold.

95.

Find Koordinaterne til Lighedspunkterne for Cirklerne $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ og $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1{}^2$

96.

Fra et vilkaarligt Punkt A trækkes en Linie, der skjærer en Cirkel i B og B_1 og Punktets Polar i A_1; bevis at de fire Punkter A, B, A_1, B_1 ligge harmonisk.

97.

Find Ligningen for en Cirkel gjennem Punkterne (1,2), (1,3) og (2,5).

98.

Find Polen til Linien $ax + by + c = o$ med Hensyn til Cirklen $x^2 + y^2 = r^2$.

99.

Fra et Punkt i en Cirkelperiferi fældes Lodrette paa to faste Tangenter og paa Røringskorden; bevis at den sidste Lodrette er Mellemproportional mellem de to første.

100.

Bevis at de tre ydre Lighedspunkter for tre Cirkler ligge i een ret Linie.

101.

Gjennem to faste Punkter tegnes en vilkaarlig Cirkel; bevis at Radikalaxen for denne og en fast Cirkel gaar gjennem et fast Punkt.

102.

I en Cirkel trækkes en Korde, der skjæres af en anden Cirkel, koncentrisk med den første; bevis at de Stykker af Korden, der falde mellem de to Cirkler, ere ligestore.

103.

Bevis at naar Polens Afstand fra Centrum er konstant, er Polarens det ogsaa.

104.

Find Ligningen for en Cirkel, indskreven i Trekanten, hvis Vinkelspidser ere (0,65), (— 10, — 15) og ($\frac{26}{3}$ — $\frac{13}{3}$).

105.

En Linie AO dreier sig om det faste Endepunkt O, medens det andet Endepunkt gjennemløber en given Cirkelperiferi; i Linien bestemmes et Punkt a ved at $Oa \,.\, OA =$

m^2, hvor m er konstant. Bevis at a gjennemløber en Cirkel, og find det ydre Lighedspunkt for denne og den givne.

106.

Søg det geometriske Sted for Centrerne af de Cirkler, der skjære to givne Cirkler i diametralt modsatte Punkter.

107.

Gjennem Midtpunktet O af en Korde trækkes to andre Korder AB og CD; bevis at Linierne AC og BD skjære den givne Korde i samme Afstand fra O.

108.

Bevis at i enhver Trekant ligger Centrum for den omskrevne Cirkel, Medianernes Skjæringspunkt og Høidernes Skjæringspunkt i een ret Linie.

109.

Find Ligningen for den Cirkel, hvis Centrum ligger midt i den Linie, der forbinder Høidernes Skjæringspunkt med Centrum for den omskrevne Cirkel, og hvis Radius er det halve af denne Cirkels Radius, og find Skjæringspunkterne for den fundne Cirkel og Trekantens Sider.

110.

Bevis at den i 109 fundne Cirkel rører enhver af de Cirkler, der røre Trekantens tre Sider.

Keglesnitslinierne.

111.

Paa Benene af en ret Vinkel glider en Linie af konstant Længde $a + b$; find det geometriske Sted for det Punkt, der deler Linien i Stykkerne a og b; i hvilket specielt Tilfælde bliver denne Kurve en Cirkel?

112.

To ligedannede, koncentriske Ellipser, hvis Axer falde ud af hinanden, skjæres af en vilkaarlig ret Linie; bevis at de to Stykker af denne, der afskjæres mellem Ellipserne, ere ligestore.

113.

Bevis at der mellem en Hyperbel og dens Asymptoter afskjæres ligestore Stykker af en vilkaarlig ret Linie; specielt antages den rette Linie at være Tangent til Hyperblen.

114.

I en Ellipse trækkes to paa hinanden lodrette Halvdiametre; bevis at den Korde, der forbinder deres Endepunkter har konstant Afstand fra Centrum.

115.

Gjennem Toppunktet af et Keglesnit trækkes to paa hinanden lodrette Korder; bevis at den Korde, der forbinder disses Endepunkter, gaar gjennem et fast Punkt.

116.

Find det geometriske Sted for Midtpunkterne af de Korder i en Ellipse, der gaa gjennem et fast Punkt.

117.

Et Parallelogram har sin ene Vinkelspids paa en Hyperbel, medens de to Sider falde paa Asymptoterne; bevis at dets Areal er konstant.

118.

I en Trekant ligger Grundlinien fast, og Produktet af Tangenserne til Vinklerne ved denne er konstant; find det geometriske Sted for Toppunktet.

119.

Find det geometriske Sted for Medianernes Skjæringspunkt i de Trekanter, hvis Vinkelspidser ere Endepunkterne af den store Axe og et Punkt af Periferien af en Ellipse.

120.

Hvor stor er den positive Ordinat til det Punkt i Ellipsen $x^2 + 2y^2 = 9$, hvis Abscisse er 1, og hvad er Ligningen for Tangenten til dette Punkt?

121.

Til et Punkt i en Ellipse trækkes en Tangent, og fra Centrum fældes en Lodret paa denne; vis at det geometriske Sted for Skjæringspunktet af denne Linie og Ordinaten til Punktet er en Ellipse; hvilket er det søgte geometriske Sted, naar denne Ellipse behandles paa samme Maade?

122.

Givet en Ellipse og en ret Linie, der dreier sig om et fast Punkt; find det geometriske Sted for denne Linies Pol.

123.

Bevis at Sætningen i 79 gjælder for ethvert Keglesnit.

124.

En Ellipse og en Hyperbel have de samme Axer; til et Punkt af Hyperblen trækkes en Tangent, og til dennes Skjæringspunkter med Ellipsen trækkes Tangenter til denne; find Stedet for disse Tangenters Skjæringspunkt.

125.

Bevis at Arealet af den Trekant, som begrændses af Asymptoterne og en Tangent til en Hyperbel, er konstant.

126.

Fra Fodpunktet af en Ordinat i en Hyperbel trækkes en Tangent til den Cirkel, hvis Diameter er Hyperblens første Axe. Find Forholdet mellem Ordinaten og Tangenten.

127.

Find det geometriske Sted for Skjæringspunkterne af de Tangenter til en Parabel, for hvilke a) Produktet af Sinusserne, b) Produktet af Tangenserne, c) Summen eller d) Differensen af Cotangenserne af de Vinkler, de danne med Axen, er konstant.

128.

Ved en Ellipse søges det geometriske Sted for Skjæringspunktet af Tangenter, lodrette paa hinanden.

129.

Et Punkt bevæger sig paa en given Ordinat til et Keglesnit; bevis at Perpendikulæren fra Punktet paa dets Polar skjærer Axen i et fast Punkt.

130.

En Tangent til en Ellipse skjærer Cirklen med Ellipsens store Axe til Diameter i to Punkter, og i disse opreises Lodrette paa Tangenten; bevis at disse Lodrette skjære Axen i faste Punkter.

131.

Bevis at en vilkaarlig Linie skjærer et Par konjugerede Diametre og Asymptoterne til en Hyperbel i fire harmonisk forbundne Punkter.

132.

Bevis at ved en Ellipse er Summen af Kvadraterne af et Par konjugerede Halvdiametre konstant.

133.

Ved Ellipsen $2x^2 + y^2 = 9$ søges Længderne af Tangent, Normal, Subtangent og Subnormal til det Punkt, hvis Abscisse er 2.

134.

Til et Punkt af en Ellipse trækkes en Normal; søg Produktet af dennes Længde og Afstanden fra Centrum til det samme Punkts Tangent.

135.

I en Ellipse trækkes et Par konjugerede Halvdiametre og Korden mellem deres Endepunkter; bevis at Arealet af den derved dannede Trekant er konstant.

136.

Hvilket er det geometriske Sted for Centrum af en Cirkel, der afskjærer givne Korder af to givne rette Linier?

137.

Til en Parabel trækkes tre Tangenter, den ene til Toppunktet; bevis at Arealet af den Trekant, som de begrændse, er det Halve af Arealet af den Trekant, som man faar ved at forbinde Røringspunkterne.

138.

Ved en Parabel søges det geometriske Sted for de Punkter, hvorfra man kan trække to paa hinanden lodrette Normaler til Parablen.

139.

Ved en Ellipse eller Hyperbel skjæres to faste parallele Tangenter af en bevægelig Tangent; bevis at Produktet af de to Stykker, som den afskjærer af de faste Tangenter, er konstant og lig med Kvadratet af den med dem parallele Halvdiameter.

140.

Gjennem et Brændpunkt i et Keglesnit trækkes en vilkaarlig Korde og til dennes Endepunkter Tangenter; find Stedet for disses Skjæringspunkt.

141.

Paa en vilkaarlig Tangent til en Parabel nedfældes en Lodret fra Brændpunktet; find det geometriske Sted for den Lodrettes Fodpunkt.

142.

Hvilket er det geometriske Sted for Fodpunkterne af de Lodrette fra et Brændpunkt paa Tangenterne til en Ellipse?

143.

Find Produktet af de Stykker, som afskjæres paa en fast Tangent af to vilkaarlige konjugerede Diametre, og vis at Produktet er lig Kvadratet af den med Tangenten parallele Halvdiameter.

144.

Fra et Punkt i en Ellipses lille Axe trækkes en Linie til Brændpunktet og en Normal til Kurven; find Forholdet mellem de to Liniers Længder.

145.

Gjennem et vilkaarligt Punkt af et Keglesnit trækkes to paa hinanden lodrette Korder; bevis at den Korde, der forbinder disses Endepunkter, skjærer Normalen i et fast Punkt.

146.

Bevis at Produktet af Brændpunkternes Afstande fra en vilkaarlig Tangent er lig Kvadratet af den halve lille Axe.

147.

En Ellipse og en Hyperbel have de samme Brændpunkter; bevis at de skjære hinanden under rette Vinkler.

148.

Fra Centrum i en Ellipse trækkes en Linie til en Tangent; Linien er parallel med en af Brændstraalerne til Røringspunktet, hvor lang er den?

149.

Bevis at den Linie, der forbinder Brændpunktet med Polen til en vilkaarlig Linie gjennem Brændpunktet, er lodret paa denne.

150.

Fra Centrum i en Ellipse fældes en Lodret paa Polaren til et Punkt, og fra Punktet trækkes til den store Axe en Linie, der ligeledes er lodret paa Polaren; bevis at Produktet af de to Lodrette er lig Kvadratet paa den lille Axe.

151.

Gjennem Brændpunktet i et Keglesnit trækkes en vilkaarlig Korde; bevis at den harmoniske Mellemproportional mellem dennes to Stykker er konstant og lig den halve Parameter.

152.

Bevis at Produktet af Stykkerne af en Korde gjennem Brændpunktet staar i konstant Forhold til den hele Korde.

153.

Udtryk Længden af en Korde gjennem Brændpunktet ved Hjælp af Hovedaxen og den med Korden parallele Diameter.

154.

Gjennem Brændpunktet trækkes to Korder, parallele med to konjugerede Diametre; bevis at deres Sum er konstant.

155.

Gjennem Brændpunktet trækkes to paa hinanden lodrette Korder; bevis at Summen af deres reciproke Værdier er konstant.

156.

Til et vilkaarligt Punkt i en Hyperbel trækkes de to Brændstraaler, og i den af dem og Axen dannede Trekant indskrives en Cirkel; bestem det geometriske Sted for dennes Centrum.

157.

Bevis at Brændpunktets Afstand fra et Punkt i en Hyperbel er lig det Stykke, som Ledelinien afskjærer af en Linie, der er draget gjennem Punktet, parallel med Asymptoten.

158.

Fra et vilkaarligt Punkt M trækkes Linier gjennem et Keglesnits Brændpunkter; disse Linier skjære Kurven i Punkterne A, B, C og D; bevis at

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}$$

159.

Til en Parabel trækkes tre Tangenter, den ene til Toppunktet; bevis at Høiderne i den af dem dannede Trekant skjære hverandre i Ledelinien. X

160.

Bevis at den samme Trekants omskrevne Cirkel gaar gjennem Brændpunktet. X

161.

En Korde trækkes gjennem et Keglesnits ene Brændpunkt; bevis at den Linie, der forbinder Skjæringspunktet af Tangenterne til dens Endepunkter med Skjæringspunktet af de tilsvarende Normaler, gaar gjennem det andet Brændpunkt.

162.

Bevis at den Linie, der forbinder et af et Keglesnits Brændpunkter med to vilkaarlige Tangenters Skjæringspunkt, halverer Vinklen mellem Linierne fra Brændpunktet til Røringspunkterne.

163.

Bevis at den Linie, der halverer Vinklen mellem to Tangenter, ogsaa halverer Vinklen mellem de Linier, der forbinde Tangenternes Skjæringspunkt med Brændpunkterne.

164.

En Cirkel tegnes, som rører en Ellipses store Axe i det ene Brændpunkt, og som gaar gjennem det ene Endepunkt af den lille Axe. Hvor stor er Cirklens Diameter, naar Ellipsens Halvaxer ere a og b?

165.

Til et vilkaarligt Punkt i en Ellipse trækkes de to Brændstraaler, og i den af dem og Axen dannede Trekant indskrives en Cirkel med Radius r, medens den omskrevne Cirkel har Radius R, og f og f_1 ere de to Brændstraaler. Bestem Forholdet $Rr : ff_1$.

166.

Fra Endepunkterne af en Korde gjennem en Ellipses ene Brændpunkt trækkes Linier til Ledeliniens Skjæringspunkt med Axen; bevis at Axen halverer Vinklen mellem disse Linier.

167.

Fra Endepunkterne af en Diameter i en Ellipse drages Linier til et vilkaarligt Punkt i Kurven; bevis at de to Punkter, hvori disse Linier skjære den conjugerede Diameter, ere harmonisk forbundne med dennes Endepunkter.

168.

Gjennem to vilkaarlige Punkter P og P_1 drages to parallele Linier, der skjære et givet Keglesnit henholdsvis i Punkterne R, Q og R_1, Q_1. Bevis at Forholdet

$$\frac{PR \cdot PQ}{P_1R_1 \cdot P_1Q_1}$$

er uafhængigt af Parallelernes Retning.

169.

Bevis at i ethvert Keglesnit er Brændstraalen til et Punkt lig det Stykke, som afskjæres paa Punktets Ordinat mellem Axen og den Tangent, der rører Kurven i Endepunktet af Ordinaten gjennem Brændpunktet.

170.

Paa Korderne gjennem en Ellipses ene Brændpunkt afsættes ud fra dette Punkt den harmoniske Mellemproportional mellem Kordens to Stykker; hvilken Kurve bestemmes derved?

171.

Afstanden fra en Ellipses Centrum til en Tangent multipliceres med den med Tangenten parallele Halvdiameter; find Produktet.

172.

Find Ligningen for en ligesidet Hyperbel, naar Asymptoterne tages til Koordinataxer.

173.

Bevis at naar en Trekants Vinkelspidser falde paa en ligesidet Hyperbel, falder Høidernes Skjæringspunkt ogsaa i Kurven.

174.

Naar Længderne af to paa hinanden lodrette Tangenter til en Parabel ere b og c, hvor stor er da Parametren?

175.

Forskjellige Parabler have samme Toppunkt og Axe; fra et fast Punkt i denne trækkes Normaler til dem; find det geometriske Sted for Normalernes Endepunkter.

176.

En Tangent til en Ellipse danner Vinklen φ med den store Axe; find Produktet af denne Axes Endepunkters Afstande fra Tangenten.

177.

Til et Punkt i et Keglesnit trækkes Normalen og en Brændstraale; bevis at Normalens Projektion paa Brændstraalen er lig den halve Parameter.

178.

Bevis at Normal og Brændstraale staa i samme Relation som Ordinat og Abscisse, naar Toppunktet er Begyndelsespunkt, Axen Abscisseaxe.

179.

Find Forholdet mellem de Stykker af Normalen til en Ellipse, der afskjæres henholdsvis af den store og af den lille Axe.

180.

Fra Brændpunkterne i en Ellipse fældes Lodrette paa en Tangent, og hvert af Fodpunkterne forbindes med det andet Brændpunkt; bevis at Forbindelseslinierne skjære hinanden paa Normalen til Røringspunktet, og find det geometriske Sted for Skjæringspunktet.

181.

Naar to faste Punkter paa en Hyperbel forbindes med et vilkaarligt Punkt paa Kurven, vil Længden af det Stykke, som Forbindelseslinierne afskjære af en af Asymptoterne, være konstant.

182.

Hvor stort er det Stykke, som Polarerne til to Punkter med Hensyn til en Parabel afskjære paa dennes Axe?

183.

Bevis at Forholdet mellem de Stykker, som to hvilkesomhelst Tangenter til en Parabel afskjære paa to faste Tangenter, er konstant.

184.

I en Ellipse trækkes to vilkaarlige Halvdiametre OA og OB; Tangenten til A skjærer OB i b, Tangenten til B skjærer OA i a; bevis at $\triangle OAb = \triangle OBa$.

185.

Naar en Linie, parallel med Axen i en Parabel, skjærer to Tangenter og Røringskorden, saa er Stykket fra Kurven til den sidste Linie Mellemproportional mellem Stykkerne fra Kurven til Tangenterne.

186.

Fra et vilkaarligt Punkt i en Hyperbel trækkes Linier, parallele med Asymptoterne; disse Linier skjære en vilkaarlig Halvdiameter OA i Punkterne B og C; bevis at OA er Mellemproportional mellem OB og OC.

187.

Bevis at det Stykke, som to faste Tangenter til en Parabel afskjære paa en vilkaarlig Tangent, ses fra Brændpunktet under en konstant Vinkel.

188.

Fra Toppunktet af en Ellipse trækkes en Linie til et vilkaarligt Punkt i Kurven; find det geometriske Sted for Skjæringspuntet af en med denne parallel Linie gjennem Centrum og Tangenten til Punktet.

189.

Bevis at den Trekant, som dannes af to Halvdiametre i en Ellipse og Korden mellem deres Endepunkter er ligestor med den, der fremkommer, naar man ombytter Diametrene med deres konjugerede.

190.

Bevis at enhver Korde i en Hyperbel halverer det Stykke af en af Asymptoterne, der afskjæres mellem Tangenterne til Kordens Endepunkter.

191.

Indenfor Periferien af en given Cirkel gives et fast Punkt. Find det geometriske Sted for Brændpunkterne i de Ellipser, der gaa gjennem dette Punkt og til Hovedaxer have Diametre i Cirklen.

192.

Find det geometriske Sted for Skjæringspunktet af en Linie gjennem et Brændpunkt lodret paa en Korde og Kordens Diameter.

193.

Bevis at en Halvdiameter i en Ellipse eller Hyperbel er Mellemproportional mellem de Linier, der forbinde Brændpunkterne med Endepunktet af den konjugerede Diameter.

194.

Find det geometriske Sted for Toppunktet af en Parabel, der har fast Brændpunkt og gaar gjennem et fast Punkt.

195.

To kongruente Ellipser ligge med Axerne i hinandens Forlængelse og have det ene Toppunkt fælles; at finde det geometriske Sted for Brændpunkterne, naar den ene Ellipse ruller op ad den anden.

196.

I en Ellipses Plan at bestemme en saadan Cirkel, at Længden af en Tangent, trukket fra et vilkaarligt Punkt af Ellipsen til Cirklen, er en rational, hel Funktion af første Grad af Punktets Koordinater; bevis at Summen af Tangenterne fra et Punkt i Ellipsen til to saadanne Cirkler, der ligge helt inde i Ellipsen, er konstant. M. el. M. 1888 S. 16

197.

M og M_1 ere to Punkter i en Parabel, A Skjæringspunktet for Tangenterne til disse Punkter og F Brændpunktet; bevis at $AM^2 : MF = AM_1{}^2 : M_1F$.

198.

Man konstruerer et Parallelogram, hvis ene Diagonal er Korde i en Hyperbel, medens Siderne ere parallele med Asymptoterne; bevis at den anden Diagonal gaar gjennem Centrum.

199.

Bevis at Vinkler, hvis Toppunkter ere diametralt modsatte Punkter af en ligesidet Hyperbel, og hvis Ben gaa gjennem de samme to Punkter af Hyperblen, ere ligestore.

200.

Bevis at de Trekanter, hvis ene Vinkelspids er Brændpunktet i en Ellipse, medens de andre ere de Punkter, hvori to faste Tangenter skjæres af Cirkler, rørende Ellipsen og med Centrum i den lille Axe, ere ligedannede.

Konstruktionsopgaver vedrørende Keglesnitslinierne.

201.

At konstruere en Parabel af to Punkter og Ledelinien.

202.

At konstruere en Parabel af to Punkter og Brændpunktet.

203.

At konstruere en Parabel af to Tangenter og Brændpunktet.

204.

At konstruere en Parabel af to Tangenter og Ledelinien.

205.

At konstruere en Parabel af en Tangent, et Punkt og Brændpunktet.

206.

At konstruere en Parabel af en Tangent, et Punkt og Ledelinien.

207.

At finde Skjæringspunkterne for en ret Linie og en Parabel.

208.

At konstruere en Parabel af en Tangent, dens Røringspunkt og Brændpunktet.

209.

At konstruere en Parabel af fire Tangenter.

210.

I en Parabel at indskrive en Cirkel med given Radius.

211.

At trække en fælles Tangent til to Parabler, hvis Axer ere parallele.

212.

At finde Skjæringspunkterne for to Parabler med fælles Brændpunkt.

213.

At trække en fælles Tangent til en Parabel og en Cirkel, hvis Centrum ligger i Parablens Axe.

214.

At konstruere en Parabel af en Tangent, dens Rørings-punkt og Toppunktet.

215.

I en given Parabel at trække en Korde, lig og parallel med en given Linie.

216.

At konstruere en Ellipse af den store Axes Endepunkter og et Punkt.

217.

At konstruere en Ellipse af den store Axes Endepunkter og en Tangent.

218.

At konstruere en Keglesnitslinie af et Brændpunkt og tre Tangenter.

219.

At trække de fælles Tangenter til to Ellipser, der have et fælles Brændpunkt.

220.

At bestemme Skjæringspunkterne for en ret Linie og en Ellipse eller Hyperbel.

221.

At bestemme saa mange Punkter, som man ønsker, af en Hyperbel, naar man kjender Asymptoterne og et Punkt.

222.

At konstruere en Keglesnitslinie af to Tangenter, et Punkt og et Brændpunkt.

223.

At konstruere en Keglesnitslinie af et Brændpunkt og tre Punkter.

224.

At bestemme Skjæringspunkterne for to Ellipser, der have et Brændpunkt fælles.

225.

Givet tre Parabler med fælles Brændpunkt; konstruer en Ellipse med samme Brændpunkt og som rører de tre Parabler.

226.

Til et givet Keglesnit at trække Tangenter, parallele med en given Linie, og bestemme Røningspunkterne.

227.

At konstruere en Hyperbel af Asymptoterne og en Tangent.

228.

At konstruere en Hyperbel af en Asymptote og tre Punkter.

229.

I en Ellipse er givet Endepunkterne af den store Axe og af en vilkaarlig Diameter; at bestemme Endepunkterne af den konjugerede Diameter.

230.

Fra et givet Punkt i en Ellipses lille Axe at trække Normaler til Kurven.

231.

At konstruere en Keglesnitslinie af et Brændpunkt, en Tangent og to Punkter.

Løsninger og veiledende Bemærkninger.

1. $\sqrt{17}$.

2. $5\sqrt{2}$, 6 og $\sqrt{26}$.

3. $y + x + 7 = 0$.

4. $\frac{1}{3}$.

5. 3; 5; $tg.v = -\frac{5}{3}$.

6. $3x = 2y$.

7. $y = 1$; $y = x + 1$; $y + 5x = 31$.

8. $(\frac{10}{3}, -\frac{5}{9})$.

9. Linierne ere parallele.

10. $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$.

11. $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$; $(3, 1)$; $(\frac{11}{2}, \frac{7}{2})$.

12. $5x = 11(y - 1)$; $5(x - 3) = 2(y - 1)$; $5(x - 6) + 7(y - 1) = 0$.

13. Skjæringspunktet er $(\frac{11}{3}, \frac{8}{3})$.

16. $4x + y = 0$; Ligningen erholdes lettest, ved at multiplicere den anden Ligning med 2 og trække den fra den første.

17. Ret.

18. $bx = ay$.

19. $x = 5$; $x = 5(y - 1)$; $x + y = 7$.

21. Lægges Begyndelsespunktet i den ene Vinkelspids og Abscisseaxen paa den ene Side, kunne de 4 Vinkelspidser

udtrykkes ved (o, o); (a, b); (c, o); $(a + c, b)$; det fælles Midtpunkt for Diagonalerne er da $\left(\frac{a + c}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

22. $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 1 = 0$; Afstanden til Punktet er da $\frac{5}{13} \cdot 1 + \frac{12}{13} \cdot 2 - 1 = \frac{16}{13}$, medens Afstanden til Begyndelsespunktet er -1.

23. 5; $\frac{15}{13}\sqrt{26}$; $3\sqrt{2}$; 15.

24. $\frac{1}{2}(ab_1 - a_1 b)$.

26. $tg.\, v = \frac{5}{12}$.

27. Naar Afstandene fra enhver af Siderne regnes positive til den Side, hvor Trekanten ligger, blive de, naar Punktets Koordinater ere x og y

$$y, \quad \frac{-y + x\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad \frac{-y - x\sqrt{3} + a\sqrt{3}}{2}.$$

28. Tag D til Begyndelsespunkt og AC til Abscisseaxe; Vinkelspidserne kunne da udtrykkes ved $(-a, o)$, (a_1, b_1) (a, o); den vilkaarlige Linie gjennem D faar Ligningen $y = \alpha x$. Abscisserne til Skjæringspunkterne blive da

$$\frac{-b_1 a}{b_1 - \alpha(a_1 + a)};\ 0;\ \frac{{}_1 a}{b_1 - \alpha(a_1 - a)} \text{ og } \frac{b_1}{\alpha};$$ betegnes de ved x_1, x_2, x_3 og x_4, eftervises at $\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} = -\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}$. Naar man skal eftervise, at fire Punkter ligge harmonisk, er det ofte lettere at eftervise, at det gjælder om de fire Punkter, hvis Abscisser ere de reciproke Værdier; den ovenstaaende Ligning kan nemlig skrives om til

$$\frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_4}} = -\frac{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}}.$$

29. Denne Sætning giver en elegant Løsning af den bekjendte Opgave: At konstruere et Kvadrat, naar man kjender et Punkt i hver af Siderne.

30. Tag Grundlinie og Høide til Axer, og lad q være Ordinaten til A, m Abscissen til C; man faar da
$DC = q \cot 60^0 + m$; $DB = q \cot 60^0 - m$; $DA = q \operatorname{cosec} 60^0$.

31. De skjære hverandre i eet Punkt.

32. Den Linie, der halverer Vinklen mellem de to Linier; dersom sidste Led i α og β have ens Fortegn, er det den Vinkel, hvori Begyndelsespunktet ligger.

33. Benyt 32 og 31.

34. Ligningerne for Siderne tages under Formen
$x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0$; $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 + p_1 = 0$;
de fire Punkters Abscisser blive da

$$-\frac{p}{\cos \alpha};\ -\frac{p - p_1}{\cos \alpha - \cos \alpha_1};\ -\frac{p_1}{\cos \alpha_1};\ -\frac{p + p_1}{\cos \alpha + \cos \alpha_1}.$$

35. En ret Linie, parallel med den givne.

36. En ret Linie, lodret paa de givne Punkters Forbindelseslinie.

37. En ret Linie gjennem de to givne Liniers Skjæringspunkt.

38. Et System af to rette Linier gjennem Begyndelsespunktet.

39. $(y - \alpha x)\ (y + \frac{1}{\alpha} x) = 0$ eller $y^2 + axy - x^2 = 0$.

40. Tages den faste Side til Abscisseaxe og dens ene Endepunkt til Begyndelsespunkt, har man, idet den faste Sides Længde er a, den givne Sum k, og Siderne y og β

$$y + \beta = k;\ y^2 - x^2 = \beta^2 - (a - x)^2.$$

Elimination af β giver den søgte Ligning

$$2ky - 2ax = k^2 - a^2.$$

42. Er Ligningen for en af de faste rette Linier $x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k + p_k = 0$, dens Længde a_k, Summen af Arealerne A, bliver den søgte Ligning

$$\Sigma a_k\,(x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k + p_k) = 2A,$$

som er Ligningen for en ret Linie.

43. En ret Linie gjennem Midtpunkterne af Høide og Grundlinie.

44. En ret Linie gjennem Trekantens Toppunkt og gjennem Centrum for den omskrevne Cirkel.

45. Det geometriske Sted er en ret Linie, som i det specielle Tilfælde falder sammen med Trekantens ene Median.

46. Tages A til Begyndelsespunkt, AB til Abscisseaxe, og sættes $tgA = \alpha$; $tgB = -\beta$; $SB = m\,.\,AT$, bliver Ligningen

$$(m - 1)\,y + (\alpha - m\beta)\,x = \alpha c.$$

47. Parallelogrammets Diagonal.

48. En ret Linie gjennem de givne Liniers Skjæringspunkt.

49. En ret Linie gjennem Midtpunktet af den faste rette Linie, og som med den danner en Vinkel, hvis $tg.$ er $\frac{l \sin \alpha}{l \cos \alpha \pm a}$, hvor l og a ere de halve Længder af Parallelerne og den faste Linie, og α Vinklen mellem dem.

50. Lad Grundlinien c være Abscisseaxe, dens ene Endepunkt Begyndelsespunkt, A og B have Koordinaterne (a, h) og (b, h) og $DB = m\,.\,AC$; Ligningen er da

$$(m + 1)\,hx = y\,(ma + b - c) + ch.$$

51. En ret Linie, der af begge Vinklens Ben afskjære Stykker, lig den halve givne Sum.

52. Sættes $OA = p$, $OA_1 = p_1$, $OB = q$, $OB_1 = q_1$, blive Ligningerne

$$\frac{y}{q} + \frac{x}{p_1} = 1;\ \frac{y}{q_1} + \frac{x}{p} = 1;\ p_1 + q_1 = p + q,$$

hvoraf $\frac{qx}{q - y} - p + \frac{py}{p - x} - q = 0$

eller $(qx + py - pq)\left(\frac{1}{q - y} + \frac{1}{p - x}\right) = 0.$

Foruden den egentlige Løsning $x + y = p + q$ faa vi altsaa som Biløsning selve Linien, der afskjærer Stykkerne p og q af Axerne: dette hidrører fra, at de to Linier, hvis Skjæring vi søge, falde sammen i denne Stilling, og altsaa kunne siges at faa ethvert Punkt i denne Linie fælles.

53. $ax + by + c + k(a_1x + b_1y + c_1) = 0,$
hvor de forskjellige Stillinger af Linien svare til de forskjellige Værdier af k.

54. De gaa gjennem Skjæringspunktet af Linierne

$$y = 3x \text{ og } y + 2x = 1.$$

55. Sættes den givne Sum lig $\frac{1}{k}$, og tegner man en Rhombe med Siden k, hvis to Sider falde paa Vinklens Ben, bliver dens modstaaende Vinkelspids det faste Punkt. Løsningen bliver simplest, naar man anvender skjævvinklede Koordinater.

58. Et System af to paa hinanden lodrette Linier gjennem Begyndelsespunktet.

59. Fældes Vinkelspidsernes Ordinater, faar man to Systemer af Trapezer med Vinkelspidserne henholdsvis paa den øverste og nederste Del af Polygonen: Summen af de første minus Summen af de sidste giver Polygonens Areal.

60. Skjæringspunktet for Linierne $x = y$ og $ay + bx = c$.

Cirklen.

61. $(\frac{5}{3}, 2)$; $\frac{\sqrt{69}}{2}$

62. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

63. $x + y = 1.$

64. $(7,4)$ og $(8,1)$.

65. Linien rører Cirklen i Punktet $(5c, 5c)$.

66. $x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$

67. 3.

68. $ax - by = c$; faas ved at subtrahere den ene Ligning fra den anden.

69. $x^2 + y^2 = \pm 4\sqrt{2}\,(x + y)$.

70. $S + kS_1 = 0$, hvor de forskjellige Cirkler svare til de forskjellige Værdier af k.

71. $(c_1 - c)(x^2 + y^2) + (ac_1 - a_1c)x$
$+ (bc_1 - b_1c)y = 0.$

72. Multipliceres den anden Ligning med k og adderes til den første, erholdes den fælles Ligning for Cirklerne gjennem de to Cirklers Skjæringspunkter

$$(1 + k)(x^2 + y^2) - 2kx - 4 = 0.$$

Multipliceres den tredie Ligning med $(1 + k)$ og subtraheres fra denne, faas Ligningen for Fælleskorden

$$(1 + k)(y + 2) = 2kx + 4.$$

Da denne Linie skal gaa gjennem Begyndelsespunktet, maa man have $k = 1$, hvorved den søgte Ligning bliver

$$x^2 + y^2 = x + 2.$$

73. Lad Ligningerne for de fire Cirkler være

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0;$$
$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

Ligningen for en Cirkel gjennem Skjæringspunkterne af de to første er

$$(1+k)(x^2+y^2)+(a+ka_1)x$$
$$+(b+kb_1)y+c+kc_1=0,$$

og for en Cirkel gjennem Skjæringspunkterne for de to sidste $(1+k_1)(x^2+y^2)+(a_2+k_1a_3)x$

$$+(b_2+k_1b_3)y+c_2+k_1c_3=0.$$

Disse Cirkler falde sammen, naar

$$\frac{a+ka_1}{1+k}=\frac{a_2+k_1a_3}{1+k_1};\ \frac{b+kb_1}{1+k}=\frac{b_2+k_1b_3}{1+k_1};$$
$$\frac{c+kc_1}{1+k}=\frac{c_2+k_1c_3}{1+k_1}.$$

Elimineres k og k_1 mellem disse Ligninger, erholdes den søgte Betingelsesligning.

74. Ere Ligningerne for de tre Cirkler

$$S=0;\ S_1=0;\ S_2=0,$$

blive Ligningerne for Radikalaxerne

$$S-S_1=0;\ S_1-S_2=0;\ S_2-S=0.$$

Da Addition af disse Ligninger giver en Identitet, skjære Linierne hverandre i eet Punkt. (jvfr. 31).

75. Naar (x, y) er fast, gjennemløber (ξ, η) en ret Linie, og naar (ξ, η) er fast, gjennemløber (x, y) en Cirkel.

76. $ax_1+by_1=r^2$ og $x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$. Ligningerne udtrykke at Røringspunkterne ere Skjæringspunkter for Cirklen og den rette Linie $ax_1+by_1=r^2$; denne rette Linie er altsaa Linien gjennem Røringspunkterne eller Polaren for (a, b).

77. $4x+5y=9$.

78. Naar Polaren for Punktet (x, y) indeholder Punktet (a, b), gjælder Ligningen $ax+by=r^2$, der udtrykker, at det geometriske Sted for (x, y) er en ret Linie.

79. Naar Punkterne ere (a, b) og (a_1, b_1), bliver Betingelsesligningen i begge Tilfælde $aa_1+bb_1=r^2$.

80. Lad Ligningen for den første Cirkel være

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

og for den anden

$$x_1{}^2+y_1{}^2+a_1x_1+b_1y_1+c_1=0.$$

Radikalaxens Ligning er da

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1-(x^2+y^2+ax$$
$$+by+c)=0.$$

Afstanden fra (x, y) til denne er

$$\frac{x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2}},$$

hvor Tælleren er lig Tangentens Kvadrat.

81. En Cirkel gjennem Liniens Endepunkter, og hvis Radius er $\frac{a}{2\sin v}$, hvor a er den givne Linie, og v den givne Vinkel.

82. En Cirkel, som deler Afstanden mellem de to Punkter harmonisk i det givne Forhold.

83. En Cirkel gjennem det givne Punkt med Centrum i en Linie fra det givne Punkt lodret paa den givne Linie og med Diametren $\frac{a^2}{p}$, hvor a^2 er det givne Produkt, og p Perpendikulæren.

84. To Cirkler, hvis Diametre ere de to faste Radier.

85. En Cirkel, der rører begge Trekantens Ben i de Punkter, hvor de skjære Grundlinien.

86. En Cirkel med Centrum i Vinkelspidsen og hvis Radius er $l : \sin v$, hvor l er den konstante Længde og v den givne Vinkel.

87. En Cirkel med Centrum i de givne Punkters Midtpunkt, og hvis Radius er $\frac{1}{2}\sqrt{2s^2-a^2}$, hvor a er Afstanden mellem de givne Punkter, og s^2 den givne Sum.

88. Diametren lodret paa den givne Retning. Ved denne og mange lignende Opgaver, hvor man skal benytte begge Rødderne i en anden Grads Ligning, undgaar man at løse denne, ved at benytte de bekjendte Relationer mellem Rødderne og Koefficienterne.

89. En Cirkel, hvis Diameter er den Linie, der forbinder det givne Punkt med Centrum. Se Bemærkningen til den foregaaende Opgave.

90. Tages Centrum til Begyndelsespunkt, og er det givne Punkt (x_1, y_1), har man, da Medianen i en retvinklet Trekant er lig den halve Hypotenuse,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = k^2 \text{ og } x^2 + y^2 + k^2 = r^2,$$

hvor k er den halve Korde. Ved Elimination af k^2 faas den søgte Liguing

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + x^2 + y^2 = r^2.$$

91. Perpendikulæren er Mellemproportional mellem Hypotenusens Stykker, eller dens Kvadrat lig Potensen af Punktet (x, y) med Hensyn til den givne Cirkel (Potensen regnet positiv) altsaa

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2 - x^2 - y^2,$$

saa at Stedet er det samme som i forrige Opgave.

92. Tages Diametren til Abscisseaxe, dens Endepunkt til Begyndelsespunkt, bliver Cirklens Ligning

$$x^2 + y^2 = 2rx,$$

og Ligningen for Linien gjennem det givne Punkt (a, o)

$$y = \alpha(x - a) \text{ eller } \alpha a = \alpha x - y.$$

Multipliceres denne Ligning med den første, faas

$$\alpha a(x^2 + y^2) = 2rx(\alpha x - y).$$

Denne Ligning er homogen af anden Grad, og svarer derfor til et System af to rette Linier gjennem Begyndelsespunktet; da Ligningen er dannet af Ligningerne for Korden og Cirklen, maa den derved bestemte Kurve

gaa gjennem disses Skjæringspunkter, saa at man netop har Systemet af de to Forbindelseslinier udtrykt ved denne Ligning. Skjæringspunkterne med den lodrette Linie $x = 2r$ faa Ordinaterne bestemte ved

$$y^2 + \frac{4r^2y}{\alpha a} + 4r^2 - \frac{8r^3}{a} = 0,$$

hvor Produktet af Rødderne $4r^2 - \frac{8r^3}{a}$ er det søgte konstante Produkt.

94. Naar Forholdet mellem Tangenterne er k, bliver Forholdet mellem Punktets Potenser med Hensyn til de to Cirkler k^2. Ere Ligningerne for de to Cirkler $S = 0$ og $S_1 = 0$, bliver altsaa den søgte Ligning $S_1 = k^2 S$, som er Ligningen for en Cirkel gjennem de givne Cirklers Skjæringspunkter.

95. $x_1 = \frac{a_1 r - a r_1}{r - r_1}$; $y_1 = \frac{b_1 r - b r_1}{r - r_1}$; $x_2 = \frac{a_1 r + a r_1}{r + r_1}$;

$$y_2 = \frac{b_1 r + b r_1}{r + r_1}.$$

Disse Værdier vise, at Lighedspunkterne dele Centerlinien harmonisk i Radiernes Forhold.

96. Lad Cirklen være $x^2 + y^2 = r^2$, Polaren for det faste Punkt (o, b) er $by = r^2$; dens Skjæring med Linien $y = \alpha x + b$ har Abscissen $\xi = -\frac{b^2 - r^2}{\alpha b}$; Betingelsen for at Punkterne ligge harmonisk kan skrives $\frac{2}{\xi} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, hvor Abscisserne til Skjæringspunkterne med Cirklen x_1 og x_2 bestemmes ved Ligningen $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2\alpha b}{b^2 - r^2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots = 0$, hvoraf $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2\alpha b}{b^2 - r^2}$.

97. $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0.$

98. $\left(-\frac{ar^2}{c}, -\frac{br^2}{c}\right)$.

99. Er Cirklens Ligning $x^2 + y^2 = r^2$, Polarens $y = b$, altsaa Tangenternes $x\sqrt{r^2 - b^2} + yb = r^2$ og $-x\sqrt{r^2 - b^2} + yb = r^2$, blive Afstandene fra (x, y) til disse $\frac{yb - r^2 + x\sqrt{r^2 - b^2}}{r}$ og $\frac{yb - r^2 - x\sqrt{r^2 - b^2}}{r}$, medens Afstanden til Polaren er $y - b$.

100. Se 95.

101. Lad Ligningerne for to af Cirklerne gjennem de faste Punkter være $S = 0$ og $S_1 = 0$; Ligningen for en hvilkensomhelst anden af disse Cirkler er da $S + KS_1 = 0$. Radikalaxen for denne og den faste Cirkel ($S_2 = 0$) er. idet Koefficienterne til x^2 og y^2 i S og S_1, ere 1,

$$S + KS_1 - (1 + K)\,S_2 = 0 \text{ eller}$$
$$S - S_2 + K\,(S_1 - S_2) = 0,$$

som gaaer gjennem Skjæringspunktet for de to Linier $S - S_2 = 0$ og $S_1 - S_2 = 0$.

102. Betegnes Abscisserne til de fire Skjæringspunkter ved x_1, x_2, x_3 og x_4, skal man bevise at $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$ eller at $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Dette følger af at Koefficienterne til x i de to anden Grads Ligninger, der bestemme Skjæringspunkternes Abscisser, blive lige store.

104. $x^2 + y^2 = 65$.

105. Punktet O.

106. Lad den søgte Cirkel have Centrum (x, y), Radius R, de givne Centrerne (x_1, y_1), (x_2, y_2) og Radierne r_1 og r_2; man har da, idet (x, y) bestemmes ved to Linier, lodrette paa Diametre i de faste Cirkler,

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + r_1^2;$$
$$R^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + r_2^2.$$

Elimineres R^2, faar man det søgte Sted, som er en ret Linie, lodret paa Centerlinien.

107. Tages den givne Korde til Abscisseaxe og O til Begyndelsespunkt, bliver Ligningen for Cirklen

$$x^2 + y^2 + ay + b = 0,$$

medens Ligningen for de to Korder gjennem O er

$$x^2 + cxy + dy^2 = 0.$$

Multipliceres den sidste Ligning med k og adderes til den første, faar man

$$x^2\,(1 + k) + y^2\,(1 + kd) + ck\,xy + ay + b = 0,$$

der er en fælles Ligning for de Kurver af 2den Grad, der gaa gjennem de fire Skjæringspunkter, og som for en speciel Værdi af k, der ikke behøver at søges, svarer til de to søgte rette Linier. Skjæringen med Abscisseaxen bestemmes ved Ligningen

$$x^2\,(1 + k) + b = 0,$$

der viser, at de to søgte Skjæringspunkter faa Abscisser, der ere ligestore med modsatte Tegn.

108. Tag den ene Side til Abscisseaxe og dens Midtpunkt til Begyndelsespunkt.

109. Skjæringspunkterne søges kun for den Side, der er taget til Abscisseaxe, og findes at være Sidens Midtpunkt og Høidefodpunktet. Cirklen, der er bekjendt under Navn af Nipunktscirklen, halverer tillige de Stykker af Høiderne, der ende i Trekantens Vinkelspidser.

110. Søg Afstanden mellem Centrerne; Cirklen rører tillige alle Røringscirklerne for de Trekanter, der dannes hver af en Side og Høiderne paa de to andre.

Keglesnitslinierne.

111. En Ellipse med Halvaxerne a og b, altsaa en Cirkel naar $a = b$. Ligningen erholdes lettest ved at kvadrere og addere de to Ligninger $\frac{x}{a} = \cos v$; $\frac{y}{b} = \sin v$.

112. Ligningerne ere $ax^2 + by^2 = c$, og $ax^2 + by^2 = d$; indsættes $y = \alpha x + q$, bliver Koefficienten til x ens i de to Ligninger, saa at Rødderne have samme Sum; heraf følger Sætningen.

113. Bevises som 112, idet begge Asymptoter indbefattes i een Ligning.

114. Danner den ene Halvdiameter med Abscisseaxen Vinklen v, den anden altsaa $90^0 + v$, har man med alm. Betegnelser: $x_1 = d_1 \cos v$; $y_1 = d_1 \sin v$; $x_2 = - d_2 \sin v$; $y = d_2 \cos v$; indsæt disse Værdier i Ellipsens Ligning, divider henholdsvis med $d_1{}^2$ og $d_2{}^2$ og adder.

115. Keglesnittets Ligning er $y^2 = px + qx^2$, medens Systemet af de to Korder har Ligningen $y^2 = \alpha xy + x^2$; gjennem de to Kurvers Skjæringspunkter gaaer $p + qx = \alpha y + x$, der skjærer $y = o$ i et fast Punkt.

116. En Ellipse.

117. Arealet bliver $\frac{1}{2}\, ab$.

118. En Ellipse eller Hyperbel med Grundlinien til Hovedaxe.

119. En Ellipse, som faas ved at multiplicere (se Forf. Methoder og Theorier til Løsning af geometriske Konstruktionsopgaver) den givne Ellipse med $\frac{1}{3}$ med Hensyn til Centrum.

120. $y_1 = 2$; $x + 4y = 9$.

121. Den oprindelige Ellipse.

122. Lad Ellipsens Ligning være $\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1$, det faste

Punkt (m, n); Polarens Ligning er, idet (x, y) er Polen og X, Y dens løbende Koordinater,

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1.$$

Da denne skal indeholde (m, n), har man

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1,$$

der viser, at det søgte geometriske Sted er en ret Linie.

124. $\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1$ og $\frac{x_2{}^2}{a^2} - \frac{y_2{}^2}{b^2} = 1$ ere de to Kurver, (x, y) det beskrivende Punkt; Polaren for dette med Hensyn til Ellipsen er

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1.$$

Denne Ligning skal være identisk med Ligningen for Tangenten til Hyperblen

$$\frac{Xx_2}{a^2} - \frac{Yy_2}{b^2} = 1,$$

hvoraf følger $x_2 = x$; $y_2 = - y$, som indsat i Hyperblens Ligning giver

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

saa at Hyperblen selv er det søgte geometriske Sted.

125. Arealet bliver for enhver Stilling af Tangenten ab.

126. $\frac{a}{b}$.

127. a) En Cirkel. b) En ret Linie. c) En ret Linie. d) En Parabel.

128. En Cirkel, hvis Centrum falder i Ellipsens, og hvis Radius er $\sqrt{a^2 + b^2}$.

132. Ere Diameternes Endepunkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), har man

$\frac{y_1\, y_2}{x_1\, x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ eller $y_1{}^2\, y_2{}^2 = \frac{b^4}{a^4}\, x_1{}^2\, x_2{}^2$; indsættes heri Udtrykkene for $y_1{}^2$ og $y_2{}^2$, faar man $x_1{}^2 + x_2{}^2 = a^2$, hvoraf atter $y_1{}^2 + y_2{}^2 = b^2$. Addition af disse to Ligninger giver det søgte Resultat.

133. $T = \frac{\sqrt{17}}{4}$; $N = \sqrt{17}$; $S_t = \frac{1}{4}$; $S_n = -4$.

134. b^2.

135. Arealet A er (se 24) $^1/_2\ (x_1 y_2 - y_1 x_2)$ altsaa $A^2 = {}^1/_4\ (x_1{}^2 y_2{}^2 + y_1{}^2 x_2{}^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2)$, men af $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -\frac{b^2}{a^2}$ faas $a^2 y_1 y_2 + b^2 x_1 x_2 = 0$. Kvadreres denne Ligning, og bortskaffes ved Hjælp af Resultatet $x_1 x_2 y_1 y_2$ af Udtrykket for A^2, faar man let, ved at benytte Ellipsens Ligning, $A = \frac{1}{2} ab$.

136. En ligesidet Hyperbel, hvis Asymptoter halvere Vinklerne mellem de givne Linier; Ligningen faaer den simpleste Form, naar disse Halveringslinier tages til Koordinataxer.

138. Skjæringspunktet for Normalerne til (x_1, y_1) og (x_2, y_2) bestemmes ved

$$x = \frac{p}{2} + \frac{(y_1 + y_2)^2 - y_1 y_2}{p};\ y = -\frac{2y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{p^2},$$

medens $4\,y_1\,y_2 = p^2$ er Betingelsen for at de ere lodrette paa hinanden; Elimineres $y_1 y_2$ og $y_1 + y_2$, faar man den søgte Ligning

$$y^2 = \frac{p}{\cancel{4}\ 2}(x - \tfrac{3}{4}\,p),$$

som er en Parabel, hvis Toppunkt har Abscissen $\frac{3}{4}\,p$.

140. Ledelinien.

141. Man faar med de sædvanlige Betegnelser

$$x\ (y^2 + (x - \tfrac{p}{4})^2) = 0,$$

der deler sig i $x = 0$ og $y^2 + (x - \frac{p}{4})^2 = 0$. Den sidste Ligning tilfredsstilles kun af Koordinaterne til Brændpunktet; at man faar dette Punkt som hørende med til det geometriske Sted kommer af, at der gaar

en imaginær Tangent gjennem Brændpunktet, som altsaa selv bliver Fodpunkt for den Lodrette.

142. Den Cirkel, hvis Diameter er Ellipsens store Axe. Brændpunktet faas ogsaa her med som isoleret Punkt.

144. e.

145. Sætningen bevises lettest som 115, der er et specielt Tilfælde af den; man vælger da Tangenten og Normalen til det givne Punkt til Axer, hvorved Ligningen let ses at faa Formen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy = 0.$$

Denne Kurve skjæres nemlig af $y = 0$ i to sammenfaldende Punkter og gaar gjennem Begyndelsespunktet.

147. Ligningerne for Ellipsen og Hyperblen ere henholdsvis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ og } \frac{x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{b_1{}^2} = 1$$

og Betingelsen for at de i Skjæringspunktet (x, y) staa lodret paa hinanden

$$\frac{x^2}{a^2 a_1{}^2} = \frac{y^2}{b^2 b_1{}^2},$$

men denne Ligning erholder man netop, naar man subtraherer Kurvernes Ligninger og anvender Ligningen $a^2 - b^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2$, der udtrykker, at de ere confocale. $ba = b_1 a_1$

148. Den halve store Axe.

150. Er Punktet (m, n), blive de to Lodrette

$$\frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^4 m^2 + a^4 n^2}} \text{ og } \frac{\sqrt{b^4 m^2 + a^4 n^2}}{a^2}.$$

151. For at indføre Kordens Stykker i Regningen, sætte vi

$$x = r \cos v + ae;\ y = r \sin v,$$

hvorved vi til Bestemmelse af r faa Ligningen:

$$r^2 \left(\frac{\cos^2 v}{a^2} \pm \frac{\sin^2 v}{b^2}\right) \pm \frac{2re\cos v}{a} + e^2 - 1 = 0.$$

Betegnes Rødderne i denne Ligning ved r_1 og r_2, udtrykkes den søgte harmoniske Mellemproportional ved $\frac{2\,r_1\,r_2}{r_1 - r_2}$, idet r_1 og r_2 faa modsatte Tegn. Tælleren i denne Brøk haves strax, og Nævneren faas let, naar Ligningen løses.

152. Opgaven er i det Væsentlige den samme som 151.

153. Kordens Længde er $\frac{2d^2}{a}$, hvor d er Halvdiametren.

154. Se 153 og 132.

155. Se 153 og 114.

156. Siderne i Trekanten ere $ex + a$, $ex - a$ og $2ae$; den indskrevne Cirkel deler som bekjendt Siderne i Stykker, der med de sædvanlige Betegnelser udtrykkes ved $s - a$, $s - b$ og $s - c$. Siden $2ae$ deles altsaa ved Røringspunktet i Stykkerne $ae + a$ og $ae - a$, hvilket viser at det søgte geometriske Sted er de to Tangenter til Hyperblens Toppunkter.

158. Sættes $x = r\cos v + x_1$ $y = r\sin v + y_1$, hvor (x_1, y_1) er Punktet M, har man ved Ellipsen til Bestemmelse af MA og MB en Ligning af Formen $Ar^2 + 2Br + C = 0$. Betegnes Rødderne ved r_1, r_2 eller r_3, r_4, eftersom Linien gaar gjennem det ene eller det andet Brændpunkt, gjælder det om at bevise, at

$\frac{r_1 - r_2}{r_1\,r_2} = \frac{r_3 - r_4}{r_3\,r_4}$ eller at $B^2 - AC$ er ens for de to Linier, men dette Udtryk reduceres, idet $A = \frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b^2}$; $B = \frac{x_1 \cos v}{a^2} + \frac{y_1 \sin v}{b^2}$; $C = \frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} - 1$;

$$tg.\,v = \frac{y_1}{x_1 \mp ae},\ \text{til}\ \frac{1}{a^2}.$$

159. Denne og den følgende Sætning gjælder ogsaa for tre vilkaarlige Tangenter.

161. Da Korden gaar gjennem Brændpunktet, ligger Tangenternes Skjæringspunkt paa Ledelinien og faar Koordinaterne $\frac{a}{e}$ og β. Kordens Ligning er da $\frac{x}{ae} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$, og dens Endepunkters Koordinater (x_1, y_1) og (x_2, y_2) bestemmes ved to anden Grads Ligninger, der give

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 e^2 (b^2 - \beta^2)}{b^2 + e^2 \beta^2};\quad y_1 y_2 = \frac{-\,b^6}{a^2 (b^2 + e^2 \beta^2)}.$$

Søges Normalernes Skjæringspunkt (ξ, η), udtrykt i Almindelighed ved Tangenternes, faar man

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^3 e}\, x_1 x_2 = \frac{ae^3 (b^2 - \beta^2)}{b^2 + e^2 \beta^2}$$

$$\eta = \frac{b^2 - a^2}{b^4}\, y_1 y_2 \beta = \frac{b^2 e^2 \beta}{b^2 + e^2 \beta^2}.$$

Linien gjennem de to Skjæringspunkter faar da Ligningen

$$e\beta\,(x + ae) = a\,(1 + e^2)\,y,$$

som tilfredsstilles af $x = -\,ae$; $y = 0$.

I Regningerne er kun taget Hensyn til Ellipsen.

162. Er (ξ, η) Tangenternes Skjæringspunkt, faas for Røringspunkterne

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} = \frac{\xi \pm \frac{a}{b}\,\eta \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1}}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}}$$

$$\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} = \frac{\eta \mp \frac{b}{a}\,\xi \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1}}{\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2}}$$

Afstandene fra (ξ, η) til Brændstraalerne til Røringspunkterne udtrykkes ved

$$\frac{\eta x_1 - \xi y_1 + ae\,(\eta - y_1)}{a + ex_1}\ \text{og}\ \frac{\eta x_2 - \xi y_2 + ae\,(\eta - y_2)}{a + ex_2},$$

som ved Indsættelse af de fundne Værdier giver den samme numeriske Værdi af begge Afstandene

$$b\sqrt{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1}.$$

Man faar et simpelt geometrisk Bevis for Sætningen, ved at forlænge begge Brændstraalerne, til de blive lig den store Axe, forbinde Endepunkterne med Tangenternes Skjæringspunkt, og bevise at de derved dannede to Trekanter ere kongruente.

163. Fældes fra Brændpunkterne Lodrette paa Tangenterne, fremkomme to ligedannede Firkanter (146).

164. $\frac{a^2}{b}$.

165. $\frac{e}{2\,(e+1)}$.

170. En Cirkel med Centrum i Brændpunktet.

171. ab.

172. $xy = \frac{a^2}{2}$.

174. $\frac{4\,b^2c^2}{(b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$.

175. En Ellipse.

176. $b^2 \cos^2 \varphi$.

179. Konstant og kun afhængigt af Eccentriciteten.

180. En Ellipse med Axerne $a\,(1+e^2)$ og $a\,(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$.

182. Differensen mellem Punkternes Abscisser.

184. Bevis at $AB \neq ab$.

188. Tangenten til Ellipsens andet Toppunkt.

189. Rigtigheden af denne Sætning indses umiddelbart, naar man erindrer, at Ellipsen kan betragtes som Projection af en Cirkel, og at et Par konjugerede Diametre i Ellipsen da ere Projectioner af to paa hinanden lodrette Diametre i Cirklen, samt at ved Projectionen forandres

alle Arealer og alle parallele Linier i konstant Forhold. Den samme Bemærkning gjælder om en Mængde andre af de her fremsatte Sætninger (f. Ex. 112, 116, 123, 135, 139, 143, 167, 168, 184).

191. En Ellipse, hvis ene Brændpunkt er det givne Punkt, og hvis store Axe er Diametren gjennem dette Punkt.

192. Ledelinien.

194. En Kurve af 4de Grad.

195. Cirkler, hvis Radier ere den store Axe, og hvis Centrer falde i den faste Ellipses Brændpunkter.