# Lærebog

i den elementære

# Plangeometri,

til Brug ved Undervisning;

af

P. C. Berg.

Anden omarbeidede Udgave.

Kjøbenhavn.

Forlagt af Universitetsboghandler C. A. Reitzel.

Trykt hos Kgl. Hofbogtrykker Bianco Luno.

1851.

# Den elementære Geometri.

Første Deel:

Plangeometri.

Jeg har omarbeidet nærværende Geometri i den dobbelte Hensigt, at gjøre den simplere og tillige udførligere. Overensstemmende hermed ere de tre første Afdelinger fremstillede saaledes, at de kunne tjene til Grundlag for den geometriske Undervisning lige fra den første Begyndelse*), og de øvrige saa meget udvidede, at en Elev, der paa en tilfredsstillende Maade bliver bekjendt med deres Indhold, vil kunne fyldestgjøre Fordringerne ved de forskjellige elementære Examina.

Det første Cursus bør, mener jeg, indskrænkes til 1ste Afdeling, maaskee med Forbigaaelse af et Par Nummere (36—38). Andet Cursus maatte da være 2den og 3die Afdeling, og tredie: 4de til 8de (incl.) med Undtagelse af Nr. 136—39, 155, 158—62, 174, 76, 180—81, 189, 191—92, 197, 199, 206—7, 214, 216—225, 241—42.

Det sidste Aars Cursus vil da være den hele Bog.

Om de to første Cursus skulle fordeles paa to Aar, eller læres i eet Aar, afhænger af, om der i Skolen læses Geometri i tre eller fire Aar.

Ved Omarbeidelsen har jeg havt fortrinlig Gavn af de geometriske Lærebøger af Blanchet, Catalan og Straßnizki, ligesom jeg skylder at anerkjende med Tak Hr. Candidat Turens velvillige Raad og Hjelp med Correctur.

*) Derfor vil intet nyt Oplag af Ledetraaden udkomme.

# Indhold.

## Indledning.



## Den plane Geometri.

## Første Afdeling.

### Retliniede Figurer.

#### Foreløbige Sætninger.



#### § 1. Vinkler, lodrette Linier.

## Anden Afdeling.

### Cirkellinien.

#### Forelobige Sætninger.



#### § 1. Ret Linie i Forbindelse med Cirkellinien.



#### § 2. Cirklers Stilling mod hinanden.







#### § 3. Udmaaling af Vinkler.



#### § 4. Ind- og omskreven Firkant.

## Tredie Afdeling.

### Opgaver.



## Fjerde Afdeling.

### Ligedannethed, og hvad deraf nærmest følger.

#### Foreløbige Sætninger.







#### § 1. Ligedannede Figurer.



#### § 2. Forhold mellem Linier.

## Femte Afdeling.

### Retliniede Figurers Fladeindhold.



#### § 1. Udmaaling af retliniede Figurer.







#### § 2. Fladeindholds Sammenligning.

## Sjette Afdeling.

### Opgaver.

At dele en given ret Linie:



At construere et Qvadrat:



At construere en Rectangel lig et Qvadrat:



At construere:







At dele en Triangel i Dele:



## Syvende Afdeling.

### Regelmæssige Polygoner.

## Ottende Afdeling.

### Cirkelregning.

#### § 1. Rectification og Qvadratur.







#### § 2. Nærmelsesvis at finde Værdien af $\pi$.



## Niende Afdeling.

### Om Algebraens Anvendelse paa Geometrien.



### Construction af den qvadratiske Ligning.

## Trykfeil.

Side 3, Linie 3 f. n. godtgjøre, læs: godtgjort.
— 13, øverst 31 læs: 13.
— 31, Linie 8 f. n. liggeri, læs: ligger i.
— 53, — 11 — svarer, læs: svare.
— 151, — 7 — Line, læs: Linie.
— 186, — 2 — r —, læs: r — ϱ.

# Indledning.

**1.** Ethvert Legeme indtager i Verdensrummet et bestemt Sted, og har en vis Udstrækning, som kaldes en legemlig **Rumstørrelse,** eller simpelthen et **Legeme,** idet vi derved ikke tage Hensyn til det, som opfylder Rummet, men blot til Rummet selv.

Dette endelige Rum har Grændser, som adskille det fra det Øvrige af det uendelige Rum; hver af disse kaldes en **Flade,** Fladen er altsaa det Sted, hvor der skeer en Adskillelse imellem et Legeme og det øvrige Rum. — Man kan forestille sig Fladen uafhængig af det Legeme, den begrændser.

Naar en Flade mødes eller skjæres af en anden Flade, da kaldes deres fælles Overskjærings-Sted en **Linie.** — Man kan ogsaa forestille sig Linien uafhængig af den Flade, i hvilken den er.

Naar to Linier mødes, da kaldes deres Overskjærings-Sted et **Punkt.** En Linies Ender kaldes ogsaa Punkter.

Anm. Nogle gaae i Definitionerne ud fra Punktet, som de bestemme ved en Negation: Et Punkt er det, som ikke har Dele; Linien betragtes da som fremkommen ved Punktets Bevægelse, Fladen ved Liniens, og Legemet ved Fladens Bevægelse.

**2.** Legemet, Fladen og Linien kunne betragtes fra to forskjellige Sider: enten med Hensyn til deres forskjellige Form-som indbefattes under Benævnelsen Figur, eller med Hensyn til deres indbyrdes Storhed, som kaldes deres Udstrækning.

Udstrækningen kaldes igjen enten **legemligt Indhold** (**Volumen**), eller **Fladeindhold** (**Areal**), eller **Længde**, eftersom Udstrækningen er Storheden af et Legem, en Flade eller en Linie.

Saaledes er Liniens Længde, eller lineære Udstrækning, dens Størrelse, sammenlignet med, eller udmaalt af en Linieenhed; Fladens Indhold dens Størrelse udtrykt i Fladeenheder o. s. v.

Figurerne have meget forskjellige Navne, som ville læres i det Følgende.

**Geometrien** er den Videnskab, som undersøger Egenskaberne ved de forskjellige Slags Figurer, og bestemmer Maalet for (Størrelsen af) de tre Slags Udstrækninger (Rumstørrelser), hvis Tilværelse er viist.

I den første Deel betjener den sig især af Tegnekunsten, i den anden af den almindelige Størrelseslære.

**3.** To Figurer kunne have samme Størrelse, uden at have samme Form, de kaldes da simpelthen **ligestore**.

To Rumstørrelser kunne have samme Form, uden at have samme Storhed, de kaldes da **ligedannede**.

Endelig kunne to Figurer eller Rumstørrelser være saaledes beskafne, at de **kunne dække** hinanden, ɔ: at de, ved at lægges paa, eller i hinanden, falde ganske sammen; de ere da baade ligestore og ligedannede, og siges at være **congruente** eller lig hinanden.

Anm. Ligestor med betegnes ved $=$
Større end . . . . . . . $>$
Mindre end . . . . . . $<$
Ligedannet med . . . . . $\sim$
Congruent med . . . . . $\cong$



**4. Punktet** har hverken Figur eller Udstrækning, det kan hverken tegnes eller maales. For at betegne et Punkts Beliggenhed, benyttes et Mærke med Tegneinstrumentet, hvilket man i daglig Tale kalder et Punkt, men hvis Udstrækning maa betragtes at være aldeles lig Nul. For i Tale eller Skrift at skjelne de forskjellige Punkter fra hinanden, betegnes de ved Bogstaver, A, B . . . eller *a*, *b* . . . .

**5. Den rette Linie.** Bevæger et Punkt i Rummet (legemliggjort i Tankerne) sig mod et andet Punkt, adskilt fra det første ved et hvilketsomhelst Mellemrum, saaledes at det, for at tilbagelægge dette Mellemrum, følger den korteste af alle de Veie, som kunne føre fra den første Beliggenhed af Punktet til den anden, da kaldes den Vei, som er tilbagelagt af det bevægeligt antagne Punkt, en ret Linie.

Enhver bestemt begrændset ret Linie kan betragtes som en Deel, et Stykke af en længere Linie; saaledes er AB en Deel af *ab*; *ab* en Deel af 𝔄𝔅 o. s. v.:

C . . . ———|——|——|————|——|——|. . . . . D
𝔄 *a* A B *b* 𝔅

Denne Betragtning leder til følgende Antagelse:

Enhver bestemt endelig ret Linie AB er en Deel af en uendelig lang ret Linie CD. AC og BD kaldes Forlængning af AB.

**6.** En **brudt** Linie, eller **Polygonlinie**, er en Linie sammensat af flere paa hinanden følgende Stykker af en ret Linie, af hvilke to og to altid have samme Endepunkt.

En **krum** Linie, eller en **Curve**, er en Linie, hvoraf ingen (for Sandserne mærkelig) Deel er (strængt taget) ret.

**7.** Vi antage uden Beviis, som godtgjøre ved Erfaring, at: Gjennem to Punkter kan altid drages een, men kun een ret Linie, hvoraf følger: at to rette Linier, som have to Punkter fælles, falde sammen; og at enhver endelig ret Linie har kun een Forlængning til hver Side.

To forskjellige rette Linier kunne kun have eet Punkt fælles.

Thi havde de to Punkter fælles, faldt de sammen.

**Retningen** af en vis ret Linie AB, er den uendelige rette Linie CD, hvoraf den er en Deel.

**8.** En **Plan** er en Flade, som har den Egenskab, at en ret Linie, gjennem ethvert af dens Punkter, i sin hele Udstrækning, og i enhver Stilling kan anbringes i samme.

Saaledes erfarer man, om en legemlig Flade (et Speilglas o. s. v.) er plan, ved at undersøge, om en Lineal i enhver Stilling ligger i Fladen.

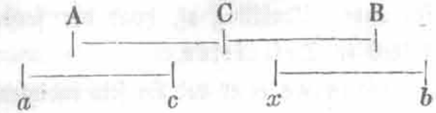
Af denne Egenskab, og af den rette Linies Natur, følger: at enhver ret Linie, som har to af sine Punkter i en Plan, ligger aldeles deri.

En Plans Beliggenhed er aldeles bestemt ved tre Punkter, naar disse ikke ligge i een ret Linie, det er: gjennem tre saadanne Punkter kan stedse lægges een Plan, og: to Planer, som have tre saadanne Punkter tilfælles, falde sammen i deres hele Udstrækning. De 3 Punkter være A, B og C. En Plan lægges gjennem de to A, B, da ligger Linien AB i denne; dreies nu Planen om AB, som om en fastliggende Axe, (som Døren om sine Hængsler, som Bladene i en Bog om Ryggen), indtil den gaaer gjennem det tredie Punkt C, da er Planens Stilling i Rummet bestemt, idet den ikke længere kan vedblive sin Bevægelse, naar C skal blive i den.

En plan Figur er en Figur, hvis Punkter alle ligge i samme Plan.



**9. Udmaaling af rette Linier.**




Hvis Stykket AC, af den rette Linie AB, er ligt *ac*, da er AB større end *ac*, og Forskjellen, Differensen mellem disse to Linier er lig med CB.

Hvis *ac* er lig AC og *xb* lig CB, da er AB Summen af *ac* og *xb*.

Rette Liniers Addition og Subtraction skeer bekvemt ved Hjelp af en Passer.

Bestaaer AB af 3 Dele: AC, CD, DB,


hver lig *ab*, *a*|————|*b*, da udtrykker Tallet 3 Forholdet mellem AB og *ab*.

Tages *ab* til Enhed, da er 3 Maalet af AB; ABs Længde siges da at være 3.

Den rette Linie, som forene to Punkter, bestemmer deres Afstand fra hinanden.

**10.** Da de plane Figurer baade ere de simpleste, og alle andre Figurers Egenskaber slutte sig til disses, bliver det naturligt, at dele Geometrien i to Dele. Den første, som blot beskjæftiger sig med de plane Figurers Egenskaber, og Udmaaling af de to Slags Udstrækninger, som disse frembyde, kaldes **plan Geometri;** den anden, som afhandler Egenskaberne ved de Figurer, der ikke kunne nedlægges i een Plan, og som udmaaler deres Udstrækning, kaldes **Stereometri** (Geometri i Rummet).

**11.** Inden vi gaae over til Udviklingen af selve Videnskaben, fremsættes først i Korthed de forskjellige Benævnelser paa de Former, under hvilke de geometriske Sandheder fremstilles, og de særegne Beviismaader, som anvendes i Geometrien, Angivelse af de Kjendemærker, hvorved et Begreb væsentlig adskiller sig fra andre, Udvikling af, hvad der forstaaes ved en Benævnelse, kaldes en *Definition*.

En *Grundsætning* er en ved sig selv indlysende Sætning.

Saadanne ere:

Det Hele er større end enhver af dets Dele, taget for sig.

Naar Størrelser betragtes blot med Hensyn til deres Størhed, men ei med Hensyn til deres Form, da kunne ligestore Størrelser sættes istedetfor hverandre.

Naar ligestore Størrelser forøges eller formindskes paa samme Maade, formedelst andre ligestore Størrelser, da blive de derved fremkomne Størrelser ligestore.

Naar to eller flere Størrelser hver for sig ere $\left\{\begin{array}{l}\text{større}\\ \text{mindre}\end{array}\right.$ end to eller flere andre, da er Summen af de første $\left\{\begin{array}{l}\text{større}\\ \text{mindre}\end{array}\right.$ end Summen af de sidste.

En *Læresætning* er en Sætning, som ikke er indlysende ved sig selv, men hvis Sandhed godtgjøres ved Hjælp af en Slutningsrække, som kaldes *Bevis*, idet man støtter sig paa i Forveien erkjendte Sandheder.

En Læresætning indeholder to Dele:

Den *Antagelse*, man har gjort med Hensyn til en vis Gjenstand (Hypothesen), og den af samme følgende *Slutning* (Thesis).

Det Omvendte af, eller *Modsætningen* til en Sætning, er en saadan, hvori Gjenstanden bliver den samme, men Slutningen gjøres til Antagelse og omvendt.

*Ikke enhver Sætnings Modsætning er sand;* men naar:

1°. i en Figur gives en Linie, som paa eengang opfylder flere Betingelser, der ikke alle ere nødvendige til dens Bestemmelse, da kan man paastaae, at enhver Linie af samme Natur, der opfylder saamange Betingelser, som ere nødvendige til at bestemme samme, er identisk med (falder sammen med, er den samme som) den første. Er der saaledes bevist, at en ret Linie, som gaaer gjennem to givne Punkter A og B, ogsaa gaaer gjennem et tredie C, da vil *omvendt* enhver ret Linie, som gaaer gjennem A og C, ogsaa gaae gjennem B, og enhver som gaaer gjennem B og C, ogsaa gaae gjennem A.



2°. Naar i en Sætning, eller i en Række af Sætninger, alle mulige Antagelser med Hensyn til en bestemt Gjenstand have været gjorte, og disse Antagelser have ledet til væsentligt indbyrdes forskjellige Slutninger, saaledes at den ene af dem udelukker alle de andre, da ere alle Modsætningerne til de beviste Sætninger sande.

En *Opgave* er et Spørgsmaal, som fordrer Bestemmelse af visse ubekjendte Dele, ved Hjælp af een eller flere givne eller bekjendte, der med hine staae i den Forbindelse, som Spørgsmaalet udsiger. At opløse en Opgave, er at bestemme disse ubekjendte Dele.

Geometriens Opgaver ere, eftersom de have Hensyn til Figur eller Udstrækning, *graphiske (afbildende)*, eller *numeriske (beregnende)*.

De graphiske bestaae i at tegne (construere) en Figur, som opfylder visse bestemte Betingelser; de *numeriske* bestaae i, at anvende, i særegne Tilfælde, de almindelige Sætninger om de forskjellige Slags Udstrækningers Udmaaling.

**12.** *Om de forskjellige Maader, paa hvilke Læresætningerne bevises.*

Den simpleste og følgerigeste Bevismaade skeer ved *Congruens*. Figurerne bringes til Dækning; man beviser, at de falde sammen i deres hele Udstrækning, og slutter deraf, at alle Dele stykkevis ere ligestore, og have samme Form.

En anden Bevismaade — men som ikke anvendes i Geometrien alene — er den saakaldte reductio ad absurdum, ved hvilken man beviser en Sætnings Sandhed, ved at gaae ud fra den Forudsætning, at Sætningen er falsk, og deraf at uddrage Slutninger, som staae i Strid med det Givne. Denne Maade anvendes især for at bevise Modsætningen til en ligefrem bevist Sætning.



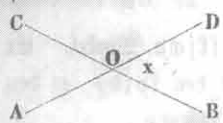
# Første Afdeling.

## Retliniede Figurer.

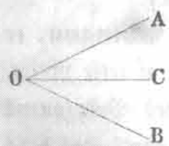
### Foreløbige Sætninger.

**13.** Den Deel af en Plan, som ligger mellem to ubegrændsede rette Linier, AO og OB, der udgaae fra samme Punkt O, kaldes en **Vinkel**. Punktet O kaldes Vinklens Top, enhver af Linierne AO, OB ... kaldes Vinklens Been. En Vinkel betegnes ved tre Bogstaver, hvoraf de to betegne hvert et Punkt i de to Been, det tredie — der altid sættes mellem hine — betegner Toppunktet, som: AOB, BOD ...

Hvor ingen Tvetydighed er at befrygte, betegnes Vinklen blot ved Toppunkts-Bogstavet. Ofte betegnes Vinklen ved et Bogstav, som sættes i Aabningen; f. Ex. Vinklen x. Tegnet for en Vinkel er $\angle$.

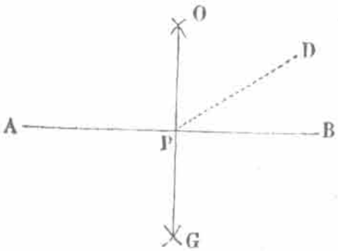



To Vinkler AOB, COD, hvoraf enhver er indfattet mellem Forlængningerne af den andens Been, kaldes **Topvinkler**.




To Vinkler, der ligge udenfor hinanden, men have Toppunkt og eet Been fælles, kaldes hosliggende Vinkler.

To hosliggende Vinkler (første Figur) COD og DOB, som, foruden at have Toppunktet O og eet Been OD tilfælles, tillige have de to øvrige Been CO og OB i een ret Linie, kaldes **Nabovinkler**.

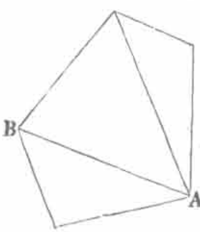



**14.** Naar en ret Linie, AB, danner med en anden, OP, to ligestore Nabovinkler, APO og OPB, da kaldes enhver af disse en **ret** *Vinkel*, og den rette Linie OP, som med den anden AB danner rette Vinkler, kaldes en **lodret Linie** (Perpendiculær). En ret Vinkel betegnes ved R, lodret ved Tegnet $\perp$.

Tænkes den lodrette Linie, OP, draget fra Punktet P i Linien AB, siges den at være *opreist* paa samme, tænkes den draget fra et Punkt O udenfor samme, siges den at være *nedfældet* paa den. Punktet P er den Lodrettes Fodpunkt.

**15.** Tænke vi os en Linie, PD, udgaaende fra et Punkt P i AB, indtagende forskjellige Stillinger mod AB, idet den dreies i Planen om det faste Punkt P, da vil den, i det den dreies fra B mod Venstre, i Reglen danne uligestore Nabovinkler med AB, og siges da at være en *skraa Linie* med Hensyn til AB. Men den maa ogsaa kunne danne ligestore Vinkler paa begge Sider med AB. Heraf indsees, at det maa være *muligt* fra et Punkt P, i en ret Linie AB, at opreise en ret Linie PO, lodret paa AB.

En Vinkel, der ikke er ret, kaldes en *skjæv* Vinkel. Er den mindre end en ret, som $\angle$ DPB, kaldes den *spids*, er den større end en ret, som $\angle$ DPA, kaldes den *stump*.



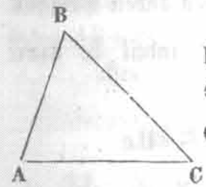

**16.** En **Mangekant, Polygon,** er en Deel af en Plan, indesluttet af rette Linier. Hver af disse rette Linier kaldes Polygonens Sider, og Siderne tilsammentagne kaldes dens **Perimeter** (Omtræk).

Der behøves i det Mindste tre rette Linier for at indslutte en Deel af en Plan,



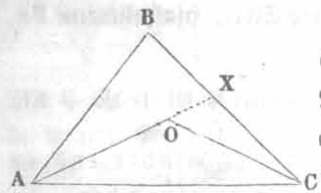
altsaa maa en Polygon i det Mindste have tre Sider. En saadan kaldes en **Trekant, Triangel.** Har den fire, fem . . Sider, kaldes den en *Firkant*, *Femkant*... En **Diagonal** i en Polygon er en ret Linie, som forener to ikke paa hinanden følgende Toppunkter. AB er en Diagonal.

En Linie er **convex**, naar den ikke kan skjæres af en ret Linie i flere end to Punkter. En Mangekant er convex, naar dens Perimeter er convex. I en saadan ere alle Vinklerne *hule*. Deres Beens Forlængning udover Toppunktet ligge udenfor Figuren, derfor kaldes en saadan Vinkel en udadgaaende. I Mangekanter, der ikke ere convexe, findes ophøiede Vinkler, hvis Beens Forlængning ud over Toppunktet derimod gaae ind i Figuren. Disse kaldes derfor ogsaa indadgaaende Vinkler.




**17.** *I enhver Triangel ABC er en hvilkensomhelst Side 1° mindre end Summen af de to andre, og 2° større end deres Differens.*

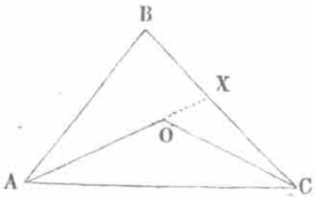
1°. Den første Sætning er indlysende af Definitionen paa en ret Linie. 2°. Antages, at f. Ex. BC $>$ AB, da skal bevises at AC $>$ BC $-$ AB. Vi have AC $+$ AB $>$ BC; subtraheer AB, da er . . . . . . . . . . . . . AC $>$ BC $-$ AB.




**18.** *Drages fra et Punkt O, indeni en Triangel, rette Linier til Endepunkterne af en Side AC, da er Summen af disse to Linier mindre end Summen af Trianglens to andre Sider; thi:*

Forlænges AO til X, da er

$$AO + OX < AB + BX \text{ og}$$
$$OC < OX + CX; \text{ addeer:}$$
$$AO + OX + OC < AB + BX + OX + CX$$

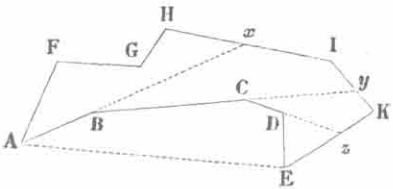



Subtraheer OX

$$AO + OC < AB + \underbrace{BX + XC}$$

eller

$$AO + OC < AB + BC.$$




**19.** Enhver convex, brudt Linie ABCDE er mindre end enhver Linie, der omgiver den, [f. Ex.: den brudte Linie AFGHIKE], og har Endepunkter fælles med den.

Er den convexe Linie omgivet af den anden, maa den convexe Polygon, naar AE drages, ligge indeni den anden Polygon.

Forlænges AB, BC ... i samme Retning, indtil de skjære den ydre Linie, haves:

$$AB + Bx < AF + FG + GH + Hx$$
$$BC + Cy < Bx + xI + Iy$$
$$CD + Dz < Cy + yK + Kz$$
$$DE < Dz + zE;$$

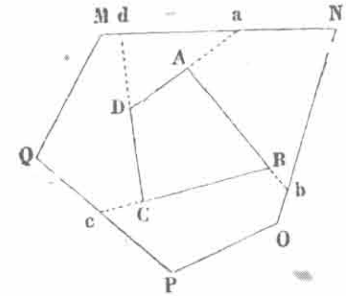
adderes og bortsubtraheres, paa begge Sider, Hjælpelinierne $Bx$, $Cy$, $Dz$, haves:

$$AB + BC + CD + DE < AF + FG + GH + HI + IK + KE.$$

**20.** En lukket convex Linie er mindre end en hvilkensomhelst Linie, der overalt omgiver den.

Er Linien Polygonlinien ABCD, og alle dens Sider forlænges i samme Retning (som Figuren viser), indtil de skjære den omsluttende Polygonlinie, da haves






$$DA + Aa < Dd + da$$
$$AB + Bb < Aa + aN + Nb$$
$$BC + Cc < Bb + bO + OP + Pc$$
$$CD + Dd < Cc + cQ + QM + Md.$$

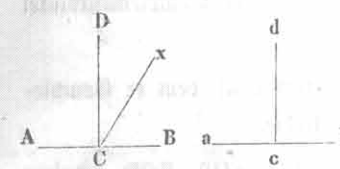
Adderes disse Uligheder, borttages fra begge Sider de ligestore Størrelser Aa, Bb, Cc, Dd (ɔ: alle Hjelpelinierne), da haves

$$DA+AB+BC+CD<da+aN+Nb+bO+OP+Pc+cQ+QM+Md,$$

eller $ABCD<MNOPQ$.

## § 1. Vinkler, lodrette Linier.

**21.** Alle rette Vinkler ere indbyrdes ligestore.

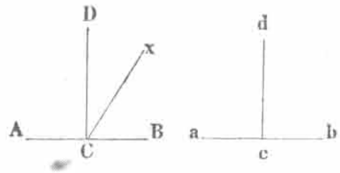



Ere DC og dc lodrette paa AB og ab, da er den rette Vinkel ACD lig den rette Vinkel acd.

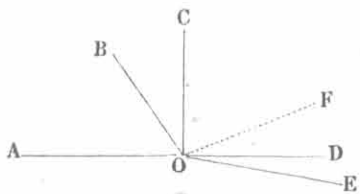
Bringes den høire Figur over paa den venstre, saaat c falder paa C og et Punkt a, i ac, paa et Punkt A, i AC, da falde de to rette Linier ac og AC sammen. cd vil falde i Retning af CD, thi faldt cd i en hvilkensomhelst anden Retning Cx, da havde man paa engang $ACD = DCB$, og (da ACx var congruent med acd), $ACx = xCB$. Men ACD er mindre end ACx, altsaa maatte DCB være mindre end xCB, hvilket er umuligt.

**22.** Fra et Punkt C, i en ret Linie AB kan kun opreises een lodret Linie, paa samme, til samme Side.

Kunde, foruden CD, endnu opreises en anden lodret Linie Cx, da var $\angle ACD = \angle ACx$, idet hver = en ret Vinkel, hvilket er umuligt.




— **23.** To Vinkler AOB, BOC, hvis Sum er lig een ret Vinkel, kaldes *Complementvinkler*.




To Vinkler AOB, BOD, hvis Sum er lig to rette Vinkler, kaldes *Supplementvinkler*.

Da en Vinkel ikke kan have flere end een Complementvinkel og een Supplementvinkel, saa følger at:

To Vinkler ere ligestore, naar enhver af dem er Complement- eller Supplementvinkel til en tredie.

— **24.** To *Nabovinkler*, (Nr. 13) AOB, BOD, udgjøre tilsammen to rette Vinkler, eller ere *Supplementvinkler*; thi:

Opreises i O den lodrette Linie OC, da er

$$\begin{aligned} AOB &= AOC - BOC = R - BOC \\ BOD &= COD + BOC = R + BOC, \end{aligned}$$

adderes, da $AOB + BOD = 2\ R$.

*Heraf følger:*

1°. *At Summen af alle paa hinanden følgende Vinkler* AOB, BOC, COF, FOD, *som ligge paa den ene Side af en ret Linie* AD, *og have samme Punkt* O, *i denne rette Linie, til Toppunkt, er lig 2 Rette.*



2°. At Summen af de 4 Vinkler, som dannes af to hinanden skjærende rette Linier, er lig 4 Rette.

3°. At Summen af alle de paa hinanden følgende Vinkler, som ligge rundt om et Punkt, er lig 4 Rette.

— **25.** *Omvendt: Naar 2 hosliggende Vinkler,* AOB, BOD, *ere Supplementvinkler, da ere de Nabovinkler* ɔ: da ligge deres yderste Been i een ret Linie;

thi antages, at OD ikke er Forlængningen af den rette Linie AO, men at OE er dens Forlængning, da haves

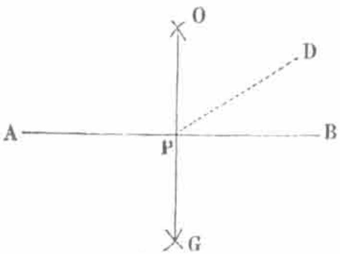
$$\begin{aligned} &\text{efter Nr. 24:} & AOB + BOE &= 2\ R; \\ &\text{men givet} & AOB + BOD &= 2\ R; \\ &\text{altsaa} & AOB + BOE &= AOB + BOD, \\ &\text{eller} & BOE &= BOD, \end{aligned}$$

hvilket er urimeligt.

— **26.** *Topvinklerne* AOC, DOB *ere ligestore*; thi,

$$\begin{aligned} &\text{efter Nr. 24 er} & AOC + COD &= 2\ R \\ & & COD + DOB &= 2\ R, \\ &\text{altsaa} & AOC + COD &= COD + DOB, \\ &\text{eller} & AOC &= DOB. \end{aligned}$$

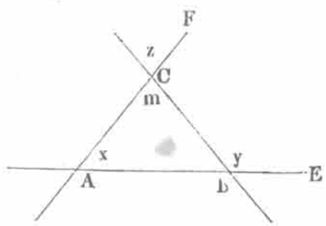

— **27.** Omvendt: Naar de ikke paa hinanden følgende Vinkler, som dannes af fire fra eet Punkt udgaaende rette Linier, ere ligestore to og to, da udgjøre disse fire rette Linier kun to.



**28.** (Udvidelse af 22). Af 27 og 26 følger: 1°. at fra et Punkt, P, i en ret Linie, AB, kan kun opreises een lodret OG paa samme. 2°. Er OG lodret paa AB, da er omvendt AB lodret paa OG.

**29.** I enhver Triangel ABC er enhver af Vinklerne, x f. Ex. mindre end enhver af de udvendige modsatte y, (idet man ved en en udvendig Vinkel forstaaer en saadan, som dannes af en Side og den tilstødendes Forlængning).

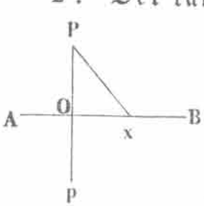
Forlænges Trianglens Sider i det Uendelige, sees at



$\triangle ACB < \angle m$, men $m = z$, altsaa $\triangle ACB < \angle z$; adderes paa begge Sider den Deel af Planen FCBE, haves

$$\text{det er}\quad \underbrace{\triangle ACB + FCBE}_{\angle x} < \underbrace{\angle z + FCBE,}_{\angle y}$$

**30.** Fra et Punkt P, udenfor en ret Linie AB:
1°. Kan altid nedfældes en lodret PO paa AB.
2°. Der kan kun nedfældes een.



1°. Dreies den øverste Deel af Figuren om AB, saaat P indtager Stillingen p, og forenes P og p med en ret Linie, da er $\angle$ POA congruent med AOp, idet PO og Op dække hinanden; fremdeles ere POA og AOp Nabovinkler, da POp er en ret Linie, altsaa er hver af dem



lig en ret Vinkel, det er: AB er lodret paa Pp; eller: Pp, eller PO lodret paa AB.

2°. Enhver fra P til AB dragen ret Linie Px, forskjellig fra PO, kan ikke være lodret; thi Vinklen PxB er, som udvendig Vinkel, større end POB, der er en ret Vinkel.

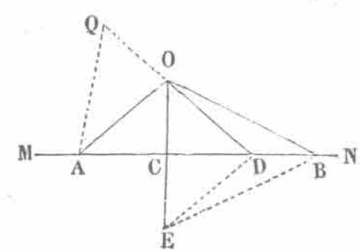
**31.** Afstanden Ox fra den Lodrettes Fodpunkt kaldes Pxs **Projection** paa AB.

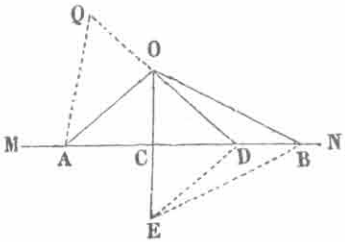
**32.** Danne to rette Linier ligestore Vinkler med en tredie, (der ikke gaaer gjennem det Punkt hvor de støde sammen) siges de at have samme Helding mod denne; danne de uligestore Vinkler med samme, har **den** størst Helding, som danner den mindste Vinkel.

**33.** Den korteste Afstand fra et Punkt O, til en ret Linie MN, er den lodrette Linie OC fra Punktet, paa samme.

Da den rette Linie er den korteste Afstand mellem to givne Punkter, kan her kun være Tale om rette Linier fra O til forskjellige Punkter af MN, og det er tilstrækkeligt at bevise, at OC er kortere end enhver skraa Linie OD. Dreies Figuren OCD om AB, indtil den indtager Stillingen CDE, da er $\angle$ DCE en ret Vinkel, fordi OCD er en ret Vinkel, altsaa er OCE en ret Linie, og ODE en Triangel, hvori

$$OC + CE < OD + DE$$
$$ɔ:\ 2\,OC < 2\,OD$$
$$\text{eller}\quad OC < OD.$$






Den lodrette Linie er derfor *Maalet* for et Punkts sande Afstand fra en Linie.

**34.** *Drages fra et Punkt O, udenfor en ret Linie AB, en lodret Linie OC og forskjellige skraae Linier, da: 1° ere to skraae Linier OA, OD, som have samme Afstand fra Fodpunktet af den Lodrette* (nemlig AC = CD), *ligestore; tillige have de samme Heldning mod MN.*

*2° er den størst, som har størst Afstand fra samme,* (nemlig OB > OD eller OA, naar CB > CD eller CA); tillige er dens Heldning større.

1° Dreies Figuren MCO omkring OC, da vil MC, som er lodret paa OC, falde i Retningen CN, og, da AC er lig CD, vil A falde paa D, altsaa vil den skraae Linie OA dække OD, det er: OA = OD; tillige er $\angle$ ODC = $\angle$ OAC.

2° foldes Figuren sammen langs med MN, efterat CE er afsat = OC, da falde O og E sammen, OBE er en Triangel, D er et indvendigt Punkt i samme, hvoraf følger

$$OB + BE > OD + DE,$$
$$ɔ\!: 2\ OB > 2\ OD, \text{ eller}$$
$$OB > OD.$$

Fremdeles er den udvendige Vinkel ODC større end den indvendige OBD.

Heraf følger: at fra eet Punkt kan ikke drages tre ligelange Linier til en ret Linie; thi kunde dette skee, da maatte



paa samme Side af den lodrette Linie ligge to ligestore skraae Linier, hvilket er umuligt.

*Omvendt:* 1° to ligestore skraae Linier have ligestor Afstand fra Fodpunktet af den lodrette Linie.

2° af to uligestore skraae Linier har den største størst Afstand fra den Lodrettes Fodpunkt.

**35.** 1°. *Ethvert Punkt O, i en lodret Linie OC, opreist i Midtpunktet af en bestemt ret Linie AD, er i samme Afstand fra dens to Endepunkter A og D;* men

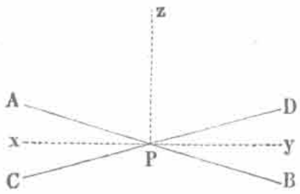
2°. *Ethvert Punkt Q, udenfor samme, er i uligestor Afstand fra A og D.*

1°. Da AC er = CD, saa er OA = OD (Nr. 34).

2°. Drages QA og QD, og fra O, den sidstes Skjærepunkt med den Lodrette, Linien OA, da haves

$$AQ < QO + AO, \text{ men}$$
$$AO = OD, \text{ altsaa}$$
$$AQ < QO + OD, \text{ eller}$$
$$AQ < QD.$$

En Linie, som indeholder alle de Punkter, der opfylde en og samme Betingelse, eller have samme Egenskab, kaldes det *geometriske Sted.* Da ethvert Punkt, som har samme Afstand fra begge Endepunkter af en ret Linie, maa ligge i en lodret Linie, opreist i dens Midtpunkt; og ethvert Punkt, som ikke har samme Afstand fra disse Endepunkter, maa ligge udenfor den lodrette Linie, saa indsees, at: *naar to Punkter O og E, hvert for sig, have samme Afstand fra to andre A og D, at da den rette Linie gjennem de to første er lodret paa Midten af den rette Linie gjennem de to sidste;* eller at: det geometriske Sted for Punkter, der hvert for sig have ligestor Afstand fra en ret Linies Endepunkter, er en lodret Linie opreist paa Midten af denne Linie.




— **36.** Naar to rette Linier AB, CD, skjære hinanden, da 1° ere Halveringslinierne, Pz og Py, af to Nabovinkler APD, DPB, lodrette paa hinanden, og

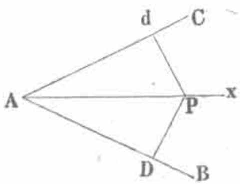
2°. Halveringslinierne Py, Px, af to Topvinkler APC og DPB, ligge ud i een ret Linie.

1°. Da APB er en ret Linie, saa er

$$\underbrace{APz + zPD}_{} + \underbrace{DPy + yPB}_{} = 2\ R,$$

eller $2\ zPD + 2\ DPy = 2\ R$,
eller $zPD + DPy = 1\ R$,
eller $zPy = 1\ R$, det er: zP lodret paa Py.

2°. I 1° bevistes, at $zPy = 1\ R$; paa samme Maade bevises, at $xPz = 1\ R$, altsaa $xPz + zPy = 2\ R$, det er: xPy er en ret Linie.



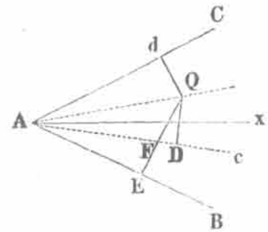

— **37.** 1°. Ethvert Punkt P, i Halveringslinien Ax af en Vinkel CAB, har ligestor Afstand fra begge Vinklens Been.

2°. Ethvert Punkt Q, beliggende i Vinklen, men ikke i Halveringslinien, har uligestor Afstand fra Benene.

1°. Nedfældes, fra P, de Lodrette PD og Pd paa Benene, da skal bevises: PD = Pd.

Dreies CAx om Ax, da vil Siden AC falde paa AB, fordi $\angle$ CAx = xAB. P vil blive uforandret paa samme Sted; men da fra eet Punkt kun kan nedfældes een Lodret paa en ret Linie, maa Pd, der er lodret paa AC, falde i Retning af PD. Altsaa falder d paa D, det er: Pd = PD.



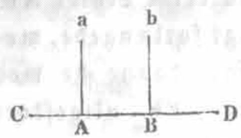



2°. Dreies CAQ om AQ, indtil AC indtager Stillingen Ac, da er, som før, de lodrette Linier Qd og QD, paa AC og Ac, ligestore. Fældes nu fra Q en Lodret QE paa AB, og skjærer den Ac i F, da er QE > QF, QF > QD, altsaa QE > Qd.

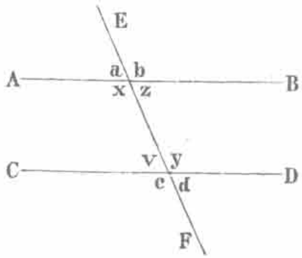
— **38.** Det geometriske Sted for alle de Punkter, der have ligestor Afstand fra en Vinkels Been eller disses Forlængninger, er Vinklens Halveringslinie og en Lodret opreist paa denne Halveringslinie, gjennem Vinklens Toppunkt. (Erindre Nr. 36).

## § 2. Om parallele Linier.

**39.** Paralleler ere rette Linier, som, beliggende i samme Plan, ikke støde sammen, hvorlangt de end forlænges. At der virkelig gives Paralleler, eller Linier, som opfylde de angivne Betingelser, godtgjøres saaledes:




Fra to forskjellige Punkter A, B, i samme rette Linie CD, opreises i samme Plan to lodrette Linier Aa, Bb. Disse ville aldrig, hvorlangt de end forlænges, støde sammen; thi isaafald vilde fra Sammenstødspunktet være nedfældet to Lodrette paa samme rette Linie, hvilket er umuligt (Nr. 30); Aa, Bb ere altsaa parallele Linier.




**40.** Naar to hvilkesomhelst rette Linier AB, CD, parallele eller sammenløbende, overskjæres af en tredie, Tværlinien EF, da fremkomme omkring Overskjæringspunkterne otte Vinkler, som, betragtede to og to, eller særskilte, faae følgende Navne.

Betragtede *to og to* kaldes:

b og y, z og d, a og v, x og c, *eensliggende Vinkler*. De ligge to og to paa samme Side af Tværlinien, men den ene indenfor den ene Parallel, den anden udenfor den anden.

x og y, z og v *indvendige Vexelvinkler*;

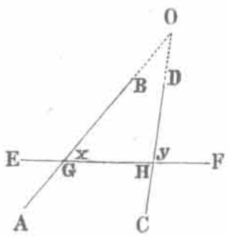
b og c, a og d *udvendige Vexelvinkler*. Hver ligger paa sin Side af Tværlinien.

Betragtede *særskilte* kaldes:

x, z, v og y *indvendige*, og

a, b, c og d *udvendige* Vinkler. Hvert Par af *disse ligger paa samme* Side af Tværlinien.

Da to parallele Linier, efter deres Definition, nødvendigen ligge i een Plan, maae de bestemme denne Plan; den kaldes derfor Parallelernes Plan.

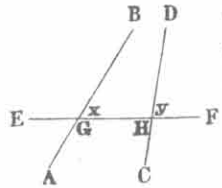



**41.** *Naar to rette Linier AB, CD, tilstrækkeligt forlængede, møde hinanden, saa danne de med samme Tværlinie EF uligestore eensliggende Vinkler.*

Thi i Trianglen GOH er den udvendige Vinkel y større end x. (Nr. 29).



**42.** Omvendt. *Naar to rette Linier AB, CD, med samme Tværlinie EF danne uligestore eensliggende Vinkler, maae de, tilstrækkeligt forlængede, løbe sammen.*




Antages Vinklen x at være mindre end y, da vilde, hvis de to Linier AB, CD, behørigt forlængede, ikke stødte sammen, den mindre Vinkel x være lig Summen af den større Vinkel y og den ubegrændsede Deel af Plan BGHD, hvilket er urimeligt at antage.

**43.** *To parallele Linier danne med samme Tværlinie ligestore eensliggende Vinkler.* Thi vare Vinklerne uligestore, løb Linierne sammen (42).

**44.** Omvendt. *To rette Linier ere parallele, naar de med samme Tværlinie danne ligestore eensliggende Vinkler.* Thi hvis Linierne stødte sammen, vare de eensliggende Vinkler uligestore (41).

**45.** Af (43) udledes, at *to parallele Linier danne med samme Tværlinie:*

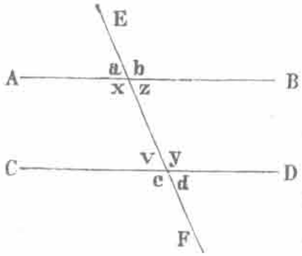
1°. *ligestore indvendige Vexelvinkler*, f. Ex. x og y; thi, da Linierne ere parallele, er $y = b$ (Nr. 43); fremdeles er $b = x$, altsaa $y = x$.

2°. *ligestore udvendige Vexelvinkler*, f. Ex. b og c; thi $b = y$ og $y = c$, altsaa $b = c$.

3°. *to indvendige Vinkler, hvis Sum* $= 2\ R$, f. Ex. z og y; thi $b + z = 2\ R$, men $b = y$, altsaa $y + z = 2\ R$.

4°. *to udvendige Vinkler, hvis Sum* $= 2\ R$, f. Ex. b og d; thi $d + y = 2\ R$, men $y = b$, altsaa $d + b = 2\ R$.

**46.** Af (44) udledes, at *to rette Linier ere parallele, naar de med samme Tværlinie danne:*




1°. Ligestore indvendige Vexelvinkler f. Ex. x og y; thi b = x og x = y, altsaa b = y, altsaa Linierne parallele.

2°. Ligestore udvendige Vexelvinkler: f. Ex. b og c; thi c = y og c = b, altsaa b = y.

3°. To indvendige Vinkler, hvis Sum = 2 R, f. Ex. z og y; thi b + z = 2 R, z + y = 2 R, altsaa b + z = z + y eller b = y.

4°. To udvendige Vinkler, hvis Sum = 2 R, f. Ex. b og d; thi y + d = 2 R og b + d = 2 R, altsaa y + d = b + d, eller y = b.

**47.** Af 41 udledes let, at: naar to ikke-parallele Linier overskjæres af en tredie, at da: de indvendige Vexelvinkler ere uligestore, ligesaa de udvendige Vexelvinkler, og at:

Summen af to indvendige, eller af to udvendige Vinkler, er større, eller mindre, end to rette Vinkler.

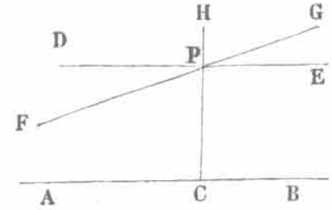
Af 42 udledes omvendt, at: naar to rette Linier med en tredie danne uligestore indvendige Vexelvinkler, eller uligestore udvendige Vexelvinkler, at da de to første Linier, tilstrækkeligt forlængede, maae støde sammen, hvilket ogsaa maa være Tilfældet, naar Summen af to indvendige, eller af to udvendige Vinkler er større, eller mindre end to rette Vinkler.

Anm. Som særegent Tilfælde udhæves:

Naar af to rette Linier den ene er lodret, men den anden staaer skraa paa samme tredie, da maae de løbe sammen. Thi vare de parallele, dannede de med den tredie Linie ligestore eensliggende Vinkler (45).

**48.** Gjennem et givet Punkt P kan man altid drage en ret Linie parallel med en given AB, men kun een. Thi:



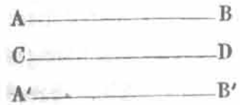



1°. Fra Punktet P kan man altid baade nedfælde en lodret Linie PC paa AB, og, i den saaledes bestemte Plan, opreise paa CP, i P, en lodret Linie DE; denne er da parallel med AB.

2°. Er DE parallel med AB, og gjennem P drages en hvilkensomhelst anden ret Linie FG, da haves, naar Tværlinien HC drages, Vinklen HPE ligestor med PCB, altsaa HPG uligestor med PCB, altsaa maa FG skjære AB.

Heraf følger:

1°. To rette Linier AB og CD, hver for sig parallel med en tredie A'B", og begge beliggende i samme Plan, som denne, ere indbyrdes parallele.



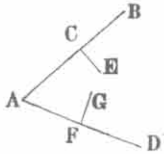

Thi: Løb AB og CD sammen, da var gjennem eet Punkt, deres Skjæringspunkt, draget to Linier parallele med A'B', hvilket er umuligt.

2°. Drages en Linie, forskjellig fra AB, gjennem et hvilketsomhelst Punkt i AB, da vil den kunne skjære alle Parallelerne CD, A'B', altsaa: naar en ret Linie skjærer en anden, da skjærer den ogsaa enhver anden med denne parallel ret Linie.

3°. Naar to rette Linier ere parallele, da er enhver ret Linie, som er lodret paa den ene af dem, ogsaa lodret paa den anden. Thi hvis ikke, da løbe de sammen. (47).

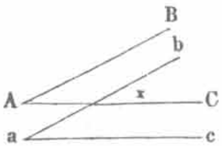
4°. Opreises lodrette Linier paa forskjellige parallele Linier, da ere de lodrette selv parallele.

5°. Naar to rette Linier AB, AD skjære hinanden, da maae de paa hver af disse opreiste lodrette Linier, CE og FG, ogsaa skjære hinanden; thi var CE parallel med FG, da maatte de paa disse lodrette Linier: AB, AD ogsaa være parallele.




**49.** *To Vinkler ere ligestore, eller Supplementvinkler, naar deres Been indbyrdes ere parallele.*

Der er tre Tilfælde:

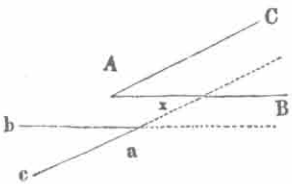



1°. De tilsvarende parallele Been gaae i samme Retning. Et Been f. Ex. AC vil (behørigt forlænget, om det er nødvendigt) skjære ab, og man har

$\angle A = x$, $\angle x = a$, som eensliggende Vinkler,

ɔ: $\angle A = \angle a$.

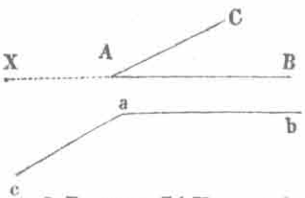
Altsaa: To Vinkler med parallele Been ere ligestore, naar de indbyrdes parallele Been gaae i samme Retning.




2°. De tilsvarende parallele Been gaae i modsat Retning. Forlænges ca til den skjærer AB, haves $\angle A = \angle x$, som indvendige Vexelvinkler, $\angle x = \angle a$ ($\angle$ bac), som eensliggende Vinkler,

ɔ: $\angle A = \angle a$.

Altsaa: To Vinkler med parallele Been ere ligestore, naar ingen af de indbyrdes parallele Been gaae i samme Retning.




3°. De to parallele Been AB, ab, gaae i samme Retning, de to andre AC, ac, i modsat Retning. Forlænges et hvilketsomhelst af de 4 Been, f. Ex. AB, haves $\angle CAB + CAX = 2R$, men $CAX = cab$, (2°), altsaa $\angle CAB + cab = 2R$.



Altsaa: To Vinkler med parallele Been ere Supplementvinkler, naar to af de parallele Been gaae i samme, de to andre i modsat Retning.

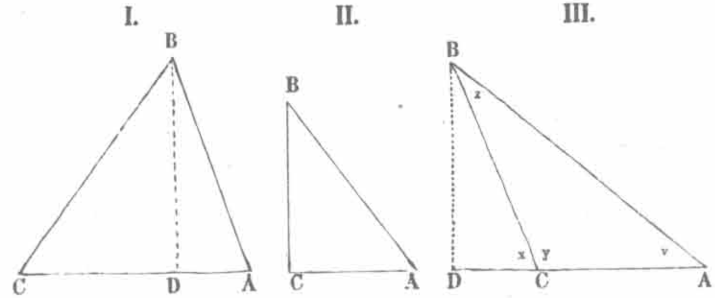
## § 3. Om Trekanter.

**50.** *Forklaringer.* En *Trekant* (Triangel) er den Deel af en Plan, som begrændses af tre rette Linier, der skjære hverandre, to og to, i tre Punkter. Disse Linier kaldes Trianglens *Sider*.

Muligheden af en Triangel, som har til Sider tre givne Linier, afhænger af een Betingelse:

Den største af de tre Linier maa være mindre end Summen af de to andre.

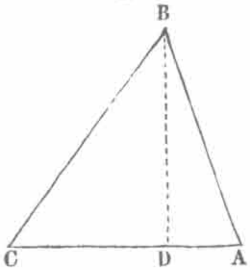
Tages Hensyn til Vinklerne, da kaldes en Triangel *spidsvinklet* (Fig. I.), *ret-* eller *stumpvinklet* (Fig. II. og III.), eftersom den største af dens tre Vinkler er spids, ret eller stump.



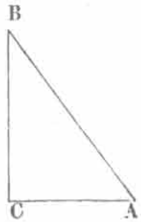

I den retvinklede Triangel kaldes den ovenfor den rette Vinkel, C, beliggende Side, AB, *Hypotenusen*; de to Sider, som ere den rette Vinkels Been, kaldes *Catheter*.

Tages Hensyn til Siderne, da kaldes en Triangel *ligebenet*, naar to af dens Sider ere ligestore; *ligesidet*, naar alle tre Sider ere ligestore.

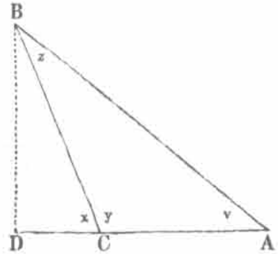
I.




II.




III.




**51.** I enhver Triangel kaldes Afstanden, BD, fra en hvilkensomhelst Vinkels Top, B, til den modstaaende Side, AC, Trianglens *Høide*; AC kaldes da *Grundlinie*.

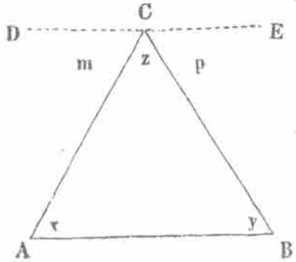
Enhver Side i Trianglen kan antages til Grundlinie. De Vinkler, som ligge ved samme, kaldes Vinkler ved Grundlinien, den overforliggende Vinkel kaldes Vinklen ved Toppunktet. I en ligebenet Triangel tages i Reglen den ikke-ligestore Side til Grundlinie.

En Triangels Høide er det Samme som: Længden af den lodrette Linie fra Toppunktet paa Grundlinien. Den kan falde indeni Trianglen (Fig. I), eller falde sammen med en Side af samme, (Fig. II) eller udenfor samme (Fig. III).

## I. Almindelige Egenskaber.

### Læresætninger.

**52.** *Summen af alle tre Vinkler i en hvilkensomhelst Triangel, ABC, er lig to Rette.*




Drages gjennem Toppunktet C en ret Linie parallel med Grundlinien AB, da haves

$\angle x = \angle m$; $\angle y = \angle p$ (Nr. 45).

Men $\angle m + z + p = 2\,R$ (Nr. 24).



Indsættes de ligestore Vinkler, da er $\angle x + z + y = 2\,R$.

*Heraf følger:*

1°. En Triangel kan ikke have flere end een ret eller stump Vinkel.

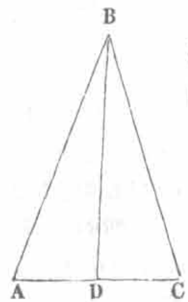
2°. Enhver Vinkel i en Triangel er Supplementvinkel til Summen af de to andre.

3°. I en retvinklet Triangel ere de spidse Vinkler Complementvinkler.

4°. Ere en Triangels to Vinkler stykkeviis ligestore med en anden Triangels to Vinkler, da er den tredie ogsaa ligestor i dem begge.

5°. (See Fig. III. forrige Side). Den udvendige Vinkel, x, paa den forlængede Side af en Triangel, ABC, er lig Summen af begge de indvendige modsatte, $z + v$; thi $x + y = 2\,R$ (Nr. 24) $= y + z + v$, altsaa $x = z + v$.

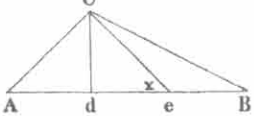
6°. Trianglens Høide falder indeni samme, naar begge Vinklerne ved Grundlinien ere spidse, som i Trianglen ABC (Fig. I.); falder sammen med en Side, naar een af disse Vinkler er ret, som i Fig. II.; falder udenfor samme, naar den er stump, som i Fig. III.




**53. a.** *Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Triangel, ABC, ere ligestore.*

Da AB = CB, saa haves, naar man drager en ret Linie fra B til Midten D af AC, Linien BD lodret paa AC (35); altsaa have de ligestore skraae Linier AB, CB ligestor Heldning mod AC, det er $\angle$ BAD = BCD (34).

**53. b.** Er i en Triangel, ACB, en Side, CB, større end en anden, AC, da ligger den største Vinkel (A) over for den største Side.




Thi nedfældes fra C en lodret Linie Cd, da er, fordi CB $>$ CA ogsaa dB $>$ dA; man kan altsaa afsætte de $=$ dA, hvorved haves, naar Ce drages, Ce $=$ AC, som giver $\angle$ A $= \angle$ x, men x $>$ B, altsaa A $>$ B. (Følger ogsaa ligefrem af 34 2°.).

I enhver ligesidet Triangel ere alle 3 Vinkler ligestore.

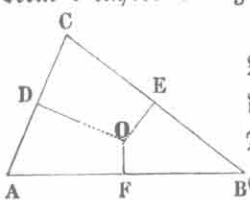
**54. a.** (Fig. 53. a.) Omvendt. Er i en Triangel, ABC, Vinklerne ved Grundlinien, AC, ligestore ($\angle$ BAC $=$ ACB), da er Trianglen ligebenet (AB $=$ BC); thi er AB ikke $=$ BC, da er $\angle$ BAC uligestor med ACB (Nr. 53 b.), men dette strider mod Antagelsen.

**54, b.** (Fig. 53, b.) Omvendt. Er i en Triangel, ACB, en Vinkel, A, større end en anden, B, da ligger den større Side (CB) overfor den større Vinkel (A).

Er Siden BC ikke større end AC, da maa BC enten være $=$ AC, eller BC mindre end AC.

BC kan ikke være lig AC, thi da var Vinklen A $=$ B. BC kan heller ikke være mindre end AC, thi da var Vinklen A mindre end B. Men der er givet, at A er større end B.

**55.** De lodrette Linier, som opreises paa Midten af Siderne i enhver Triangel, støde sammen i eet Punkt.




Opreises lodrette Linier i D og E, Midtpunkterne af AC og CB, da skjære de hinanden i et Punkt O, (Nr. 48, 5°.) Drages fra O en ret Linie til Midten, F, af den tredie Side AB, da er OF lodret paa AB. Thi, da O ligger i en Lodret paa Midten af AC, saa er Afstanden fra O til A lig Afstanden fra O til C. Af

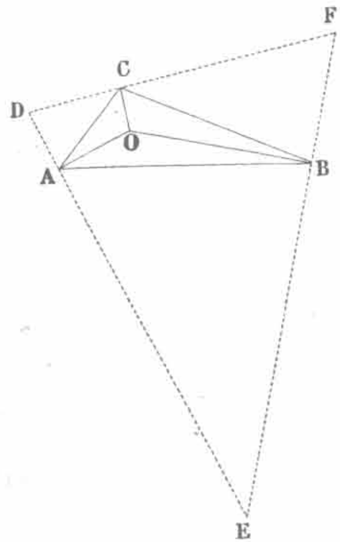


samme Grund er Afstanden fra O til C lig Afstanden fra O til B; altsaa ligger O ligelangt borte fra A og B. F ligger fremdeles ligelangt borte fra A og B, altsaa er OF lodret paa AB.

Heraf følger, at naar en Triangel er givet, at man da altid i dens Plan kan finde et Punkt, der har ligestor Afstand fra alle tre Vinkelspidser, men kun eet Punkt.

Anm. Eftersom Trianglen ABC er spidsvinklet, retvinklet eller stumpvinklet, falder de Lodrettes Sammenstødspunkt enten i Trianglen, i Hypotenusen eller udenfor Trianglen.

**56.** De Linier, som i en hvilkensomhelst Triangel halvere de indvendige eller udvendige (dannede af en Side og en andens Forlængning) Vinkler, støde, to og to, sammen i fire Punkter.




De Linier, som halvere $\angle$ A og B, støde sammen i et indvendigt Punkt O. Drages fra O en ret Linie til det tredie Toppunkt C, da vil OC halvere Vinklen C, thi da O ligger i As Halveringslinie, er O i ligestor Afstand fra AC og AB, og da O ligger i Bs Halveringslinie, er det i ligestor Afstand fra CB og AB. Altsaa er O i ligestor Afstand fra AC og CB, det er: O liggeri Halveringslinien af Vinklen C.

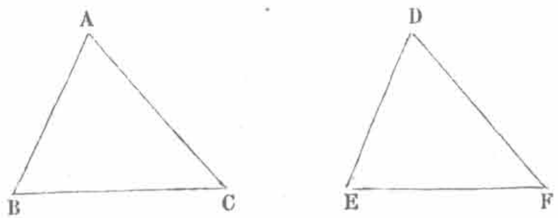
Drages gjennem A en Linie DE, lodret paa AO, da halverer DE den Vinkel, som dannes af AC og Forlængningen af AB (36). Ligeledes ville lodrette Linier, gjennem C og B, paa OC og OB, halvere de to andre udvendige Vinkler, ved C og B. Som ovenfor bevises nu let, at de tre Punkter D, E, F, hvori de, to og to, støde sammen, ligge i Halveringslinierne af Vinklerne B, C og A.

Ved enhver Triangel kan altid findes et indvendigt Punkt, ligelangt fra alle tre Sider, men kun eet.

## II. Trianglers Congruens.

Der skal udfindes de Betingelser, under hvilke man er berettiget til at ansee to Triangler for congruente, uden at man behøver at overbevise sig om, at alle Stykker: Vinkler, Sider, af den ene congruere med de tilsvarende Stykker af den anden.

**57.** To Triangler ABC og DEF ere congruente, naar de to Sider ere stykkeviis ligestore i begge, AB = DE, AC = DF, saavelsom den af disse indesluttede Vinkel, A = D.




Lægges AB paa den ligestore Side DE, og Trianglen ABC paa Planen DEF saaledes, at de ligestore Vinkler A og D dække hinanden, da vil Siden AC falde paa DF, og Punktet C paa F, idet AC = DF. Derved faaer den rette Linie BC Endepunkter fælles med EF, falder altsaa sammen med den, og Trianglerne dække hinanden ganske.

En Triangel er altsaa bestemt ved to Sider og den indesluttede Vinkel, det er: alle de Triangler, som construeres af de samme to Linier, og samme indesluttede Vinkel, ere congruente.

Anm. Sider, som i congruente Triangler ligge overfor ligestore Vinkler, kaldes ensliggende; og omvendt.



**58.** To Triangler ere congruente, naar de have een Side ligestor, AC = DF, og de hosliggende Vinkler ligestore, $\angle$ A = $\angle$ D, $\angle$ C = $\angle$ F.

AC lægges paa den ligestore Side DF, saaledes at Endepunkterne falde sammen, og Trianglen ABC paa Planen DEF, saaledes, at de ligestore Vinkler svare til hinanden. Da nu $\angle$ A = $\angle$ D, saa vil AB falde i Retning af DE, og da $\angle$ C = F, saa vil CB falde i Retning af FE. Da Punktet B saaledes paa engang skal ligge i DE og EF, saa maa det ligge i deres Skjæringspunkt E, som er det eneste de have tilfælles; altsaa dække Trianglerne hinanden. En Triangel er bestemt ved een Side og to hosliggende Vinkler.

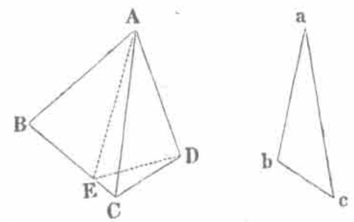
Anm. Man kan ogsaa sige, at:

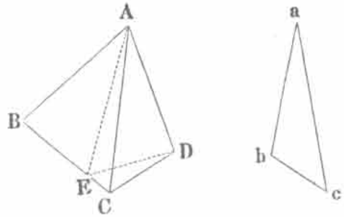
1°. To Triangler ere congruente, naar de have een ligestor Side, saavelsom den modstaaende Vinkel og een af de hosliggende; thi under denne Forudsætning maa den anden hosliggende Vinkel være ligestor i begge (Nr. 52).

2°. To retvinklede Triangler ere congruente, naar Hypotenusen og en spids Vinkel er ligestor i begge.

**59.** Naar to Triangler ABC, abc have en uligestor Vinkel (BAC > a) indesluttet af to stykkeviis ligestore Sider (AB = ab, AC = ac), da er den Side, som ligger overfor den større Vinkel, større end den, der ligger overfor den mindre (BC > bc).

Trianglen abc vendes om, og lægges ved Siden af ABC, saaledes at en ligestor Side falder sammen (ac paa AC), og






Trianglerne iøvrigt ligge udenfor hinanden, idet abc indtager Stillingen ADC. Da Vinkel CAD (= bac) er mindre end BAC, saa vil, naar $\angle$ BAD halveres, Halveringslinien AE falde i den større Vinkel. Drages nu ED, saa er Triangel BAE congruent med AED, idet $\angle$ BAE = EAD, BA = AD, AE = AE. Heraf: ED = BE; men

$$CD < ED + EC, \text{ altsaa}$$
$$CD < BE + EC, \text{ det er}$$
$$CD < BC, \text{ eller } bc < BC.$$

**60.** Modsætning til 57 og 59. *Have to Triangler ABC, abc to Sider ligestore, AB = ab, AC = ac, men den tredie Side uligestor (BC > bc), da er den Vinkel, der ligger overfor den større Side, størst (A > a).*

Thi var A mindre end a, da var BC mindre end bc (59); var A lig a, da var BC = bc (57), hvilket strider mod det, der var givet.

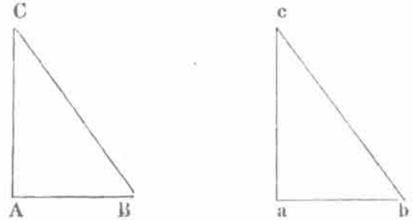
**61.** *To Triangler ABC, abc ere congruente, naar alle tre Sider stykkevis ere ligestore*, (Fig. Nr. 57): AB = ab, AC = ac, BC = bc. Congruensen var indlysende, naar $\angle$ A var lig a, thi da havde Trianglerne to stykkevis ligestore Sider, indesluttende en ligestor Vinkel. Men A maa være lig a, thi hvis ikke, da var BC heller ikke lig bc, (59); men efter Antagelsen er BC = bc.

Anm. I congruente Triangler ligge ligestore Vinkler overfor ligestore Sider.



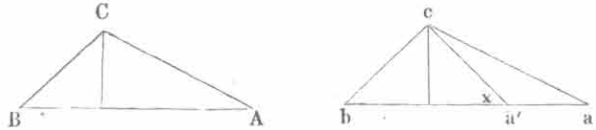
**62.** To retvinklede Triangler ere congruente naar Hypotenusen BC, bc og en Cathete AC, ac er ligestor i begge.

Sætningen er beviist naar der er beviist, at ab = AB.




Føres Trianglen abc over paa ABC saaledes, at ac dækker AC, da vil, formedelst de ligestore rette Vinkler, ab falde i Retning af AB; derved blive de ligestore Sider CB, cb, ligestore skraae Linier med Hensyn til den lodrette AC, maae altsaa vige ligemeget ud fra dens Fodpunkt, det er: ab er lig AB.

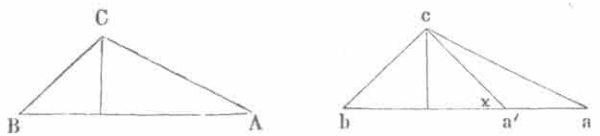
Denne Sætning kan almindeliggjøres i de to følgende:




1°. *To Triangler ABC, abc ere congruente, naar de have en ligestor Vinkel (B = b), en den hosliggende Side ligestor (BC = bc), og en modstaaende Side ligestor (AC = ac); samt den modstaaende større end den hosliggende.*

Lægges BC paa bc, da falder BA langs med ba. Endte BA ikke i a, og faldt A f. Ex. i a', da var Triangel cba' congruent med CBA, altsaa ca' = CA og følgelig ca' = ca; umuligt. Ligesaalidt kan A falde i et Punkt af ba udenfor a; A maa altsaa falde paa a.

2°. *To Triangler ABC, abc ere congruente, naar de have en ligestor Vinkel (B = b), en den hoslig-*




gende Side ligestor ($BC = bc$), den modstaaende Side ligestor ($CA = ca$), og den anden overforliggende Vinkel ($A$, $a$) i begge enten er spids, eller stump, (eller ret); (her antaget spids); thi faldt $A$ i $a'$, da var $ca' = CA$, altsaa $ca' = ca$ og Vinklen $ca'a = caa'$; men $caa'$ er spids, altsaa $ca'a$ spids og $cab$ stump, hvorved $CAB$ stump, hvilket strider mod Antagelsen

## § 4. Om Firkanter.

**63.** En **Firkant** er en Polygon med fire Sider, eller den Deel af en Plan, som er begrændset af fire rette Linier. Her er kun Talen om de Firkanter, i hvilke alle Vinkler ere udadgaaende.

Modsatte Sider kaldes de, som ikke have noget Endepunkt tilfælles; modsatte Vinkler kaldes de, som ikke have noget Been tilfælles.

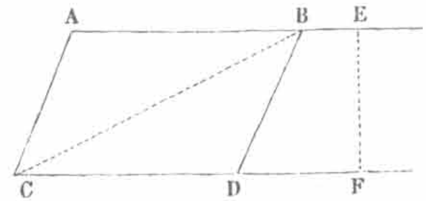
I enhver Firkant kan drages to *Diagonaler*, ɔ: Linier, som forbinde Toppunkterne af to Vinkler, der ikke ligge ved samme Side.

— *Summen af alle Vinkler i enhver Firkant er lig 4 Rette;*

thi en Diagonal deler den i to Triangler, og Summen af Polygonens Vinkler er den samme som Summen af disse to Trianglers Vinkler.

**64.** Et **Parallelogram** er en *Firkant, hvis to og to modstaaende Sider ere parallele.*






En hvilkensomhelst Side kan antages til Grundlinie f. Ex. $CD$, og da kaldes en paa denne og den modstaaende Parallele $AB$, lodret Linie $EF$, Høide.

Et Parallelogram er bestemt ved een Vinkel og to hosliggende Sider, hvoraf følger: at to Parallelogrammer ere congruente, naar de have en Vinkel tilfælles og de indesluttende Sider stykkevis ligestore.

**65.** *I ethvert Parallelogram ABCD ere de modstaaende Vinkler ligestore; og omvendt.*

Af Parallelernes Natur følger, (Nr. 45, 3°.), at i ethvert Parallelogram ere to ved samme Side beliggende Vinkler Supplementvinkler, altsaa

$$A + B = 2\,R \text{ og } B + D = 2\,R,$$
$$\text{hvoraf } A = D;\text{ ligesaa } C = B.$$

*Omvendt: Ere i en Firkant de modstaaende Vinkler ligestore, da er Figuren et Parallelogram;*

thi da $A = D$, $C = B$, og

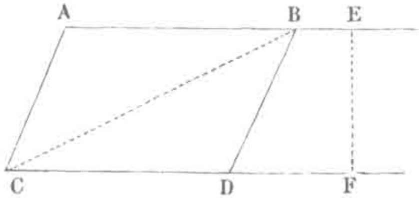
$$A + D + C + B = 4\,R,\text{ saa er}$$
$$2\,A + 2\,C = 4\,R,\text{ eller } A + C = 2\,R,\text{ altsaa}$$
$$AB \text{ parallel med } CD;$$

ligeledes $C + D = 2\,R$, naar, istedetfor $A$, indsættes $D$, altsaa

$$AC \text{ parallel med } BD.$$

**66.** *I ethvert Parallelogram ABCD ere to og to modstaaende Sider ligestore.*

Drages Diagonalen $CB$, da fremkomme to Triangler $CAB$ og $CDB$, hvori




Siden CB = CB

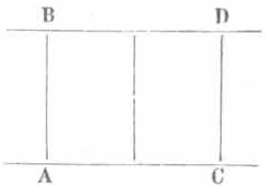
$$\left.\begin{array}{l}\angle\, ACB = \angle\, CBD \\ \angle\, ABC = \angle\, BCD\end{array}\right\}\ (\text{Nr. } 45,\ 1^\circ.)$$

altsaa Trianglerne congruente (Nr. 58)

og AB = CD, AC = BD.

Denne Sætning kan ogsaa udtrykkes saaledes:

Paralleler mellem Paralleler ere ligestore, hvoraf atter følger:




at to Paralleler have overalt samme Afstand fra hinanden. Thi opreises i A og C to lodrette Linier AB, CD, da maale disse Afstanden; de ere fremdeles parallele (39), altsaa ligestore.

Anm. Enhver Diagonal halverer et Parallelogram.

**67.** Ere to og to modstaaende Sider i en Firkant ligestore, da er den et Parallelogram. (øverste Fig.)

Drages Diagonalen CB, da fremkomme to Triangler, som have tre Sider stykkevis ligestore, altsaa ere de congruente, hvoraf følger

$\angle\, ACB = \angle\, CBD$,

altsaa AC parallel med BD;

ligeledes $\angle\, BCD = \angle\, ABC$,

altsaa AB parallel med CD.

Figuren er altsaa et Parallelogram.

**68.** Ere to modstaaende Sider, AB, CD, i en Firkant, ABCD, ligestore og parallele, da er Firkanten et Parallelogram.



Drages Diagonalen CB, da ere Trianglerne congruente,

thi: $\angle\, ABC = \angle\, BCD$

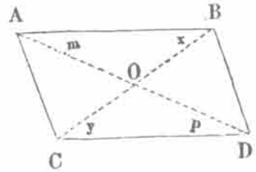
AB = CD

CB = CB; altsaa

$\angle\, ACB = \angle\, CBD$,

hvoraf AC parallel med BD, og altsaa o. s. v.

**69.** Diagonalerne i et Parallelogram, ABCD, halvere hinanden.




Diagonalernes Overskjæringspunkt være O.

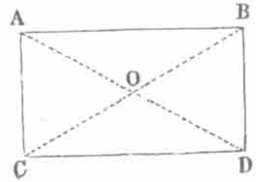
Da AB $\neq$ CD, saa er $\angle x = \angle y$ og $\angle m = \angle p$; fremdeles er AB = CD (Nr. 66), altsaa $\triangle$ AOB $\cong$ COD, hvoraf AO = OD og OB = OC.

Anm. I. I ethvert Parallelogram, som ikke er retvinklet, ere Diagonalerne uligestore, idet den større ligger overfor den stumpe, den mindre overfor den spidse Vinkel, (efter Nr. 59).

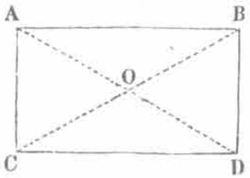
II. Punktet O kaldes Parallelogrammets Centrum, og halverer enhver Linie, som gaaer derigjennem, og ender i Parallelogrammets Perimeter.

Omvendt. Hvis i en Firkant Diagonalerne halvere hinanden, er Firkanten et Parallelogram.

**70.** En **Rectangel** er et Parallelogram, hvori Vinklerne ere rette; den har altsaa alle de samme Egenskaber som




Parallelogrammet (men ikke omvendt). Tages en vis Side CD til Grundlinie, da er den hosliggende AC Høiden; altsaa ere to Rectangler congruente, naar de have ligestor Grundlinie og Høide.



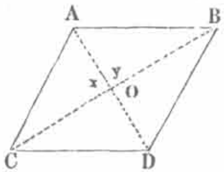

**71.** *Diagonalerne i en Rectangel ABCD ere ligestore.*

Trianglerne CAB og DBA ere nemlig congruente, idet:

$$\angle A = R = \angle B;\ AC = BD \text{ og } AB = AB,$$
$$\text{altsaa } AD = CB.$$

Anm. En *Rectangels Diagonaler skjære* altsaa *hinanden i fire ligestore Dele.*

**72.** En **Rhombus** er et Parallelogram, hvis Sider alle ere ligestore; den har altsaa alle de samme Egenskaber som Parallelogrammet, (men ikke omvendt). To Rhomber ere congruente, naar de have en Side og en Vinkel ligestore.




**73.** *Diagonalerne i en Rhombus, ABCD, staae lodrette paa hinanden;*

thi Trianglerne AOC og AOB ere congruente, idet

AC = AB, CO = OB, (en Diagonal halveret af en anden), og AO = AO, altsaa $\angle x = \angle y$, men $x + y = 2R$, altsaa $\angle x = R = y$, det er: AO lodret paa CB.

**74.** Et *Qvadrat* er et Parallelogram, hvis Sider alle ere ligestore, og hvis Vinkler ere rette.

Efter Definitionen har Qvadratet, foruden Parallelogrammets Egenskaber i Almindelighed, ogsaa Rectanglens og Rhombens. *Altsaa:*

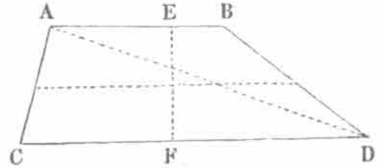
dets Diagonaler ere ligestore,
de halvere hinanden, og
staae lodrette paa hinanden,

To Qvadrater ere congruente, naar de have en Side ligestor.

**75.** *Trapezet* er en Firkant, ABCD, hvori to Sider, AB og CD, ere parallele, de to andre ikke. *De parallele*



*Sider kaldes Grundlinier, og en paa begge lodret Linie, EF, Høide.*




Enhver Diagonal, AD, deler Trapezet i to Triangler, af hvilke hver har til Grundlinie een af Trapezets Grundlinier, og samme Høide som dette.

## § 5. Om Mangekanter eller Polygoner.

**76.** *Polygoner* (Nr. 16), kaldes *convexe*, naar ingen ret Linie, forskjellig fra deres Sider, kan have flere end to Punkter tilfælles med deres Begrændsning (*Perimeter*). I modsat Tilfælde kaldes Polygonerne *concave*. *I convexe Polygoner ere alle Diagonaler beliggende i Figuren, medens i concave een i det mindste maa ligge udenfor.*

Heraf følger at:

*To convexe Polygoner congruere, naar de have Spidser tilfælles*; thi i modsat Fald maatte en Side i den ene være en Diagonal med Hensyn til den anden, hvilket strider mod det ovenfor Fremsatte.

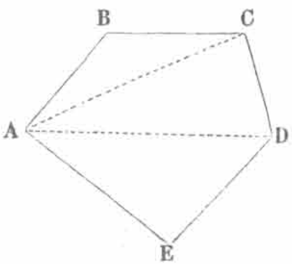
**77.** *En Polygon af et hvilketsomhelst Antal Sider kan altid deles i Triangler.*

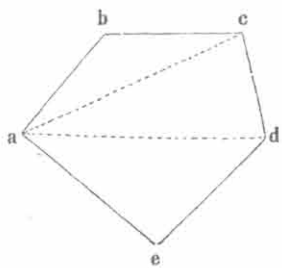
Denne Deling kan skee paa flere Maader:

I. Man kan, fra een af Spidserne A, drage Diagonaler til alle de andre (med Undtagelse af de to nærmest hosliggende). Derved deles Polygonen i saamange Triangler, mindre end to, som Polygonen har Sider; thi antages A som Toppunktet for alle Trianglerne, da er enhver Side i Polygonen, med Undtagelse af de to, som indeslutte Vinklen A, Grundlinie for en Triangel.

II. Man kan ogsaa drage Delingslinier fra et Punkt, beliggende i en af Siderne og mellem Endepunkterne af samme, til alle de øvrige Spidser. *Derved deles Polygonen i saamange Triangler mindre end een, som den har Sider.*

II. Endelig kan denne Deling ogsaa skee ved, fra et Punkt indeni Polygonen, at drage rette Linier til alle Spidserne, hvorved den deles i ligesaamange Triangler, som den har Sider.



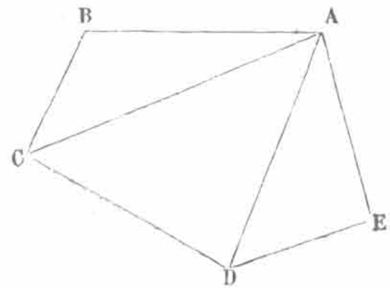

**78.** *To Polygoner* **ABCDE** *og* **abcde** *ere congruente, naar de ere sammensatte af samme Antal stykkevis congruente, og i samme Orden beliggende Triangler.*

Thi bringes Trianglerne til Dækning, da maae Polygonerne ogsaa dække hinanden.

*Omvendt: To congruente Polygoner kunne stedse deles i samme Antal congruente Triangler.*

Thi bringes Polygonerne til Dækning, da vil det være umuligt at dele den ene, uden paa samme Tid og Maade at dele den anden.






— **79.** *Summen af alle indvendige Vinkler i en Polygon er saamange Gange to Rette, som der er Enere i Sidernes Antal, formindsket med to.*

Thi drages fra en Spids, A, Diagonaler til alle de andre, da vil Polygonen derved deles i saamange Triangler, mindre end to, som den har Sider; da nu Polygonens Vinklers Sum er lig Summen af disse Trianglers Vinkler, og hver Triangels Vinkelsum er lig 2 Rette, saa følger deraf, at Summen af Polygonens Vinkler er lig saamange Gange 2 Rette, som der er Sider, mindre end to.

For altsaa at udtrykke Summen af en Polygons indvendige Vinkler i *rette Vinkler*, maa man fordoble Sidernes Antal og drage 4 fra dette Resultat. Vinklernes Sum i en *Polygon af n Sider er altsaa* $(n-2)\,2\,R = (2n-4)\,R$.

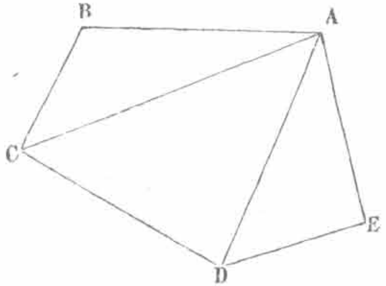
Dette sidste Resultat udledes ogsaa let ved at dele Polygonen i Triangler, hvis fælles Top ligger indeni Polygonen. Ligedan kan det ogsaa udledes ved den i 77, II, angivne Delingsmaade.

*Er Polygonen ligevinklet, da erholdes Værdien af en Vinkel ved at dividere det ovenfor fundne Udtryk med Vinklernes (eller Sidernes) Antal.*

Saaledes er i en ligevinklet Firkant hver Vinkel $= 1\,R$

i Femkanten $= \frac{6}{5}\,R$,

i Sexkanten $= \frac{4}{3}\,R$ o. s. v.

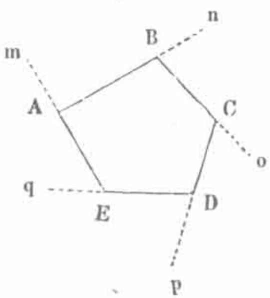



I Almindelighed: har Polygonen n Sider, altsaa n ligestore Polygonvinkler, da er den almindelige Formel for hver Vinkel: $\frac{2n-4}{n} R = (2 - \frac{4}{n}) R$, hvilket Udtryk viser

1°. at Vinklens Størrelse voxer med Sidernes Antal, thi det formindskende Led $\frac{4}{n}$ bliver mindre, som n bliver større,

og 2°. at Vinklen altid er mindre end 2 Rette.

**80.** I enhver Polygon er Summen af de udvendige Vinkler, som fremkomme ved Sidernes Forlængning paa samme Maade, = 4 R.



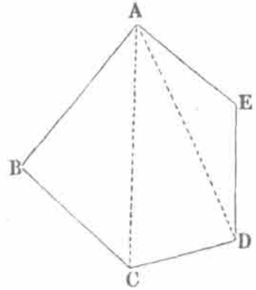

Thi $\angle$ EAB + BAm = 2 R
$\angle$ ABC + CBn = 2 R
$\angle$ BCD + DCo = 2 R
— — — — —

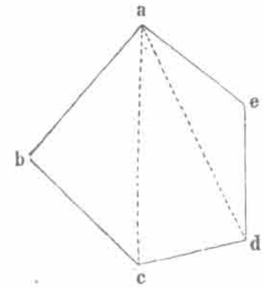
altsaa: Summen af alle de indvendige og udvendige Vinkler er lig saamange Gange to Rette, som Polygonen har Sider, ɔ: er = 2n R; denne Sum er altsaa 4 R større end Summen af de indvendige Vinkler (Nr. 79), eller:

de udvendige Vinklers Sum er = 2n R — (2n — 4) R = 2n R — (2n R — 4 R) = 2n R — 2n R + 4 R = 4 R.

Anm. Hvordan Siderne end forlænges, er Summen af Polygonvinklernes Nabovinkler stedse = 4 R.






**81.** To Polygoner af n Sider ere congruente, naar de have tilfælles (n — 1) paa hverandre følgende Sider, saavelsom de (n — 2) Vinkler, der indbefattes af disse Sider.

Ere alle de ensbetegnede Stykker givne ligestore, med Undtagelse af AB, ab, og $\angle$ A, a, og $\angle$ B, b, og man lægger cd paa CD, da falder de langs med DE og e i E o. s. v.

**82.** To Polygoner af n Sider ere congruente, naar de have (n — 2) paa hverandre følgende Sider stykkevis ligestore, saavelsom de Vinkler, de danne indbyrdes, og med de to manglende Sider. Bevises ved Congruens.

**83.** I Almindelighed: Forat en Polygon af n Sider skal være bestemt, maa man kjende (2n — 3) af dens 2n forskjellige Elementer, og disse valgte paa en passende Maade, hvorved dog maa bemærkes, at Vinklerne ikke kunne tælles for mere end (n — 2) Stykker (Nr. 79).

Ved at dele Polygonen i Triangler, ved Diagonaler dragne fra en Spids, kommer man til samme Resultat; thi man maa da bestemme (n — 2) Triangler, af hvilke den første, for at være bestemt, fordrer 3 givne Stykker, og enhver af de andre 2, idet den foregaaende giver eet Stykke, hvilket udgjør

[3 + 2 (n — 3)] eller (2 n — 3) givne Stykker.

# Anden Afdeling.

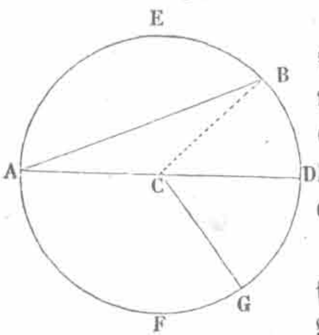
## Cirkellinien.

---

### Foreløbige Sætninger.

**84.** Foruden den rette Linie behandler den elementære Geometri den simpleste krumme Linie (Curve): **Cirkellinien** eller Cirkelperiferien, en i sig selv tilbageløbende plan Linie AEBDFA, hvis Punkter alle ere i ligestor Afstand fra et indvendigt Punkt C, som kaldes Cirkelliniens Midtpunkt (Centrum).

En **Cirkel** er den Deel af en Plan, som indesluttes af Cirkellinien; en ret Linie fra Centrum til Periferien, CA, CB, CD, kaldes en **Radius**; efter Definitionen ere alle Radier i samme Cirkel ligestore.




En Cirkellinie betegnes ved tre Punkter af samme f. Ex. ADF; eller ved en Radius, f. Ex. Cirkellinien CA; eller ved Midtpunktet: Cirkellinien om C. Paa samme Maade Cirklen.

To Cirkellinier, beskrevne om forskjellige Midtpunkter, med samme Radius, ere congruente. Lægges den anden nemlig saaledes paa den første, at deres Midtpunkter falde sammen, da maae, formedelst de ligestore Radier, Cirkellinierne falde sammen i deres hele Udstrækning.



En hvilkensomhelst Deel af en Cirkellinie, f. Ex. AEB, kaldes en **Cirkelbue,** eller simpelthen en **Bue.** Naar to Buer kunne stilles saaledes, at de have Centrum og Endepunkter tilfælles, da høre de til ligestore Cirkellinier, og ere enten ligestore, eller udgjøre tilsammen en heel Cirkellinie.

Den Deel af en ret Linie, som indbefattes mellem to Punkter af en Cirkellinie, kaldes en **Chorde,** f. Ex. AB. Den siges at svare til den Bue, hvis Endepunkter den forener. Enhver Chorde AB svarer altsaa til to Buer AEB og AFDB, som tilsammen udgjøre en heel Cirkellinie. Deraf følger, at:

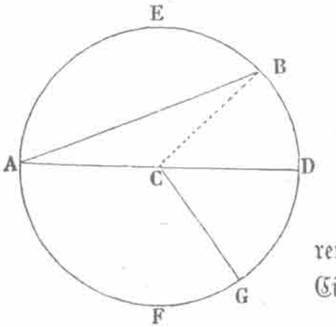
Buen bestemmer Chorden; men ikke omvendt, da til samme Chorde svare to forskjellige Buer.

**85.** En Chorde gjennem Centrum kaldes en **Diameter,** saaledes AD. Alle Diametre i samme Cirkel ere ligestore, idet hver er lig med to Radier.

Enhver Diameter deler Cirklen og dens Omkreds i to ligestore Dele (og omvendt); thi foldes Figuren sammen efter Linien AD, indtil den ene Deel kommer til at ligge paa den anden, da maa den aldeles dække samme; kunde nemlig een af de to Dele ligge udenfor den anden, da vilde alle Dele af Omkredsen ikke være i samme Afstand fra Centrum, hvilket Definitionen paa Cirklen fordrer.

Diametren er den største Chorde i Cirklen:

Er AB en hvilkensomhelst Chorde, som ikke gaaer gjennem Centrum, og fra dens ene Endepunkt A drages Diametren AD, da haves:




$$AB < AC + CB.$$
Men $CB = CD$
altsaa $AB < AC + CD$,
eller $AB < AD$.

Anm. Diametren er den største rette Linie, der kan indskrives i en Cirkel.

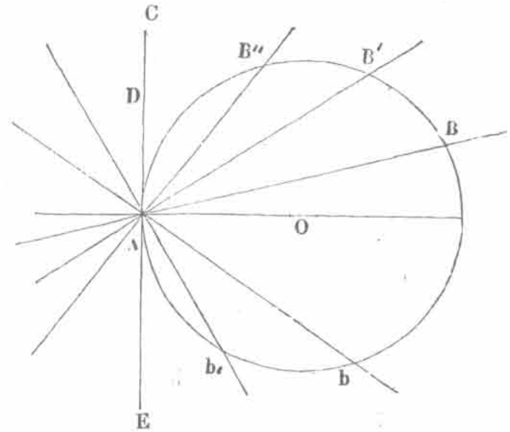
**86.** Et **Cirkelafsnit** (Cirkelsegment), AEB er den Deel af en Cirkel, som er indesluttet af en Bue AEB, og dens Chorde AB. Et **Cirkeludsnit** (Cirkelsector), CDG, er den Deel af en Cirkel, som er indesluttet af en Bue DG og de Radier CD, CG, som drages til Buens Endepunkter.

En Cirkellinie, eller Bue beskrives med en Passer. Vil man paa en Plan, om et givet Punkt C som Centrum, med en given Radius, CA, beskrive en Cirkellinie, da gjøres Passeraabningen, det er: den retliniede Afstand mellem dens to Spidser, lig med CA, derpaa sættes den ene Spids i C; den anden vil, ved Passerens Omdreining, beskrive den forlangte Cirkellinie.

## § 1. Den rette Linie i Forbindelse med Cirkellinien.

**87.** En ubestemt forlænget Chorde kaldes en **Secant** (Skjærelinie). Er AB en Secant, som skjærer Cirklen i A og B, og dreies den om Punktet A i Cirklens Plan saaledes, at det andet Skjærepunkt efterhaanden falder i B,′ B″ ..., da vil dette andet Punkt, idet det bestandigt nærmer sig det første, tilsidst falde sammen dermed, og den rette Linie vil indtage Stillingen AC; efterat have opnaaet denne, ville Skjærings-





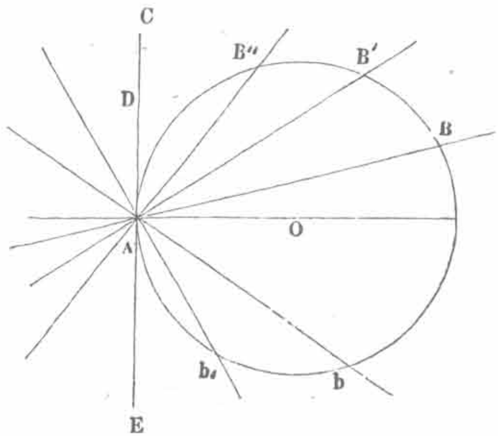

punkterne, hvis Bevægelsen fortsættes, falde paa den anden Side af A i b, b′ ... Man siger derfor, at en **Tangent** (Berørelinie) til en Cirkel er en Secant, hvis to Skjæringspunkter med Cirkellinien ere forenede i eet. Den har altsaa den Egenskab, at den er en ret Linie, som kun har eet Punkt tilfælles med Cirkellinien. Det fælles Punkt kaldes Berøringspunktet.

**88.** En ret Linie og en Cirkellinie kunne ikke have flere end to Punkter tilfælles; thi:

Radierne, dragne til de fælles Punkter, maae være ligestore, men fra eet Punkt kan ikke drages flere end to ligestore rette Linier til een ret Linie, (Nr. 34, Følge); altsaa skjærer en Secant til en Cirkel Periferien i to Punkter, og ikke i flere.

Mærk: En ret Linie og en Cirkel kunne kun have tre forskjellige Stillinger mod hinanden; den rette Linie kan: enten ligge udenfor Cirklen, eller berøre den, eller skjære den.

**89.** 1°. En ret Linie, CE, opreist lodret paa Enden, A, af en Radius OA, er en Tangent til Cirkellinien ɔ: har kun Punktet A fælles med Cirkellinien;




*2°. Enhver ret Linie AB'', der staaer skraa paa Radius i dens Endepunkt A, er en Secant.*

1° Ethvert andet Punkt, D, i EC har en større Afstand fra O, end Radius OA, idet den rette Linie fra O til D bliver en skraa Linie, medens OA er lodret, med Hensyn til CE; D ligger altsaa udenfor Cirklen, og A er det eneste Punkt, som EC har fælles med Cirkellinien.

2°. Drages fra O en Lodret paa AB'', da er denne Lodrette kortere end den med Hensyn til AB'' skraae Linie OA; den Lodrettes Fodpunkt maa altsaa ligge indenfor Cirkellinien, det er: AB'' er en Secant.

*Omvendt. 1°. En Tangent, CE, til et hvilketsomhelst Punkt, A, i Periferien, er lodret paa Enden af den til dette Punkt dragne Radius OA;* thi da Tangenten ikke har noget andet Punkt fælles med Cirkellinien end Berøringspunktet A, maae alle dens øvrige Punkter have en Afstand fra Centrum, der er større end Radius, altsaa er Radius den korteste Linie, som kan drages fra Centrum til Tangenten; Radius er altsaa lodret paa denne Tangent (Nr. 33).



*2°. En lodret Linie, nedfældet fra Centrum paa Tangenten, gaaer gjennem Berøringspunktet;*

thi gik den til et andet Punkt i Tangenten, f. Ex. D, da var OD, som lodret Linie, mindre end OA; hvilket er urigtigt.

3°. En Lodret paa Tangenten gjennem Berøringspunktet gaaer gjennem Centrum, thi hvis ikke, da kunde fra Centrum drages en anden ret Linie til Berøringspunktet, som da var lodret paa Tangenten; man fik da to Linier lodret paa samme tredie i samme Punkt — umuligt.

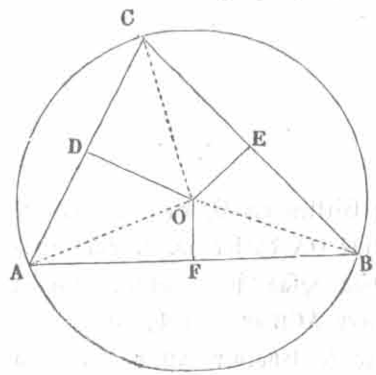
Anm. To Tangenter, dragne til Endepunkterne af samme Diameter, ere parallele.

**90.** En ret Linie er Secant, Tangent til, eller ligger udenfor Cirklen, eftersom dens Afstand fra Centrum er mindre end, lig eller større end Radius.

En retliniet Figur kaldes *indskreven* i en Cirkel, naar alle dens Sider ere Chorder i Cirklen; den kaldes *omskreven* om Cirklen, naar alle dens Sider ere Tangenter til Cirklen.

**91.** *Om enhver Triangel kan beskrives en Cirkellinie, men kun een.*

Lodrette Linier, opreiste paa Midten af Siderne, møde hinanden i eet Punkt O, der ligger i samme Afstand fra A, B og C. (Nr. 55).

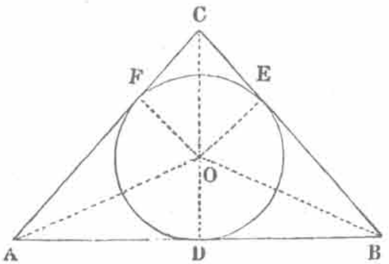



En Cirkellinie, beskreven fra O som Centrum, med Radius OA, maa altsaa gaae gjennem de tre Spidser.

Fremdeles kan fra eet Centrum, og med een Radius, kun beskrives een Cirkellinie.

Cirklens Centrum ligger i Trianglen, eller udenfor samme, eller i en af dens Sider, eftersom Trianglen er spidsvinklet, stumpvinklet eller retvinklet.

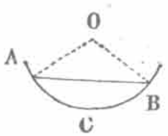
**92.** *I enhver Triangel ABC kan indskrives en Cirkel, men kun een.*

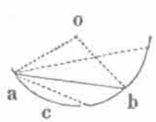



De Linier AO, CO, BO, som halvere de indvendige Vinkler A, C, B, møde hverandre i *eet* Punkt O, der har samme Afstand fra de tre Sider, (Nr. 56). Altsaa ere de Lodrette OD, OE, OF paa Siderne ligestore (Nr. 37).

Beskrives derfor fra O som Centrum, og med en af de lodrette Linier fra O paa en Side, som Radius, en Cirkellinie, da vil denne ligge i Trianglen, berøre Trianglen i de tre Punkter F, E, D, og have de tre Sider til Tangenter. Cirklen vil altsaa være indskreven i Trianglen.

**93.** *I ligestore Cirkler, eller samme Cirkel svare til ligestore Buer,* acb *og* ACB, *ligestore Chorder,* ab *og* AB.



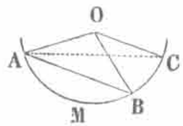

1°. Er Cirklen om o lig Cirklen om O, og denne lægges saaledes over paa hiin, at Radius OA dækker oa, da ville Cirklerne overalt falde sammen, altsaa ogsaa Periferierne; men da A falder sammen med a, og Buen ACB er = acb, vil Punktet B falde sammen med b, og de to Chorder AB og ab, som



have Endepunkterne tilfælles, ville aldeles falde sammen, og altsaa være ligestore.

2°. Ligge begge Buer ACB, acb i samme Periferi, da kan man tænke sig en anden Periferi ligestor med den givne, og paa denne afsætte en Bue lig en hvilkensomhelst af de to givne ACB, acb. Dennes Chorde vil være lig Chorden AB og lig Chorden ab (efter 1°), altsaa AB = ab.

**94.** *I samme eller ligestore Cirkler svarer til en større Bue (mindre end den halve Periferi) en større Chorde.*



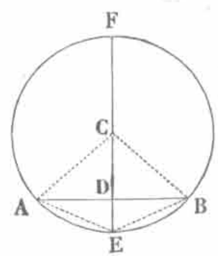

Efter 93 er det tilladt at antage, at begge Buer ligge i samme Periferi, og at Buerne udgaae fra samme Punkt til samme Side, saa den mindre ligger paa den større. De Buer være AMB og AMBC. Drages Radierne OA, OB og OC, da have de to Triangler AOB og AOC en uligestor Vinkel, indesluttet af ligestore Sider, altsaa er AC større end AB (Nr. 59).

*Omvendt* af 93 og 94.

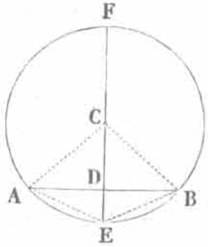
*I samme eller ligestore Cirkler 1° svarer til ligestore Chorder ligestore Buer.*

*2° til den større Chorde svarer en større Bue* (forudsat: Buerne mindre end den halve Periferi).

**95.** *En Diameter FE, der staaer lodret paa en Chorde AB, halverer Chorden og begge de tilsvarende Buer AEB og AFB.*




Drages Radierne CA, CB og Chorderne AE, EB, da er Triangel ADC congruent med DCB, idet de, foruden den rette Vinkel, have



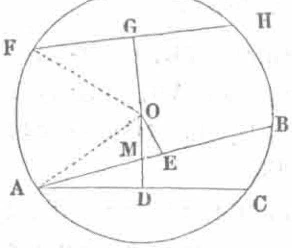

DC fælles og $AC = BC$; altsaa er $AD = DB$. Fremdeles ere Trianglerne ADE og DEB congruente, da de, foruden den rette Vinkel, have DE fælles og $AD = DB$; altsaa Chorde $AE$ = Chorde $EB$, altsaa Bue $AE$ = Bue $EB$. Da nu tillige $EAF = EBF$ (Nr. 85), saa haves ved Subtraction $AF = FB$.

Anm. Da EF 1° gaaer gjennem Centrum C, 2° Midtpunktet af Chorden, D, 3° staaer lodret paa Chorden og 4° og 5° gaaer gjennem Midten af Buerne AEB og AFB, saa følger, at enhver ret Linie, som tilfredsstiller to af disse Betingelser, ogsaa tilfredsstiller de øvrige. Af de enkelte Tilfælde, som ere indbefattede heri, ville vi anføre følgende:

1°. En lodret Linie gjennem en Chordes Midtpunkt gaaer igjennem den tilsvarende Bues Midtpunkt, og igjennem Centrum.

2°. En Linie dragen fra Centrum til Midten af en Bue er lodret paa den til Buen svarende Chorde.

**96.** 1°. I samme Cirkel, eller i ligestore Cirkler, ere Chorder, AC, FH, som have ligestor Afstand fra Centrum, ligestore.




Drages de Lodrette OD, OG, da udmaale de Chordernes Afstand fra Centrum; de ere altsaa ligestore ifølge det Givne. De halvere fremdeles Chorderne (Nr. 95). Drages Radierne OF og OA, haves to congruente Triangler OAD og OFG, idet Vinkel ADO lig OGF som rette Vinkler; hvoraf $AD = FG$, eller $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} FH$, eller $AC = FH$.



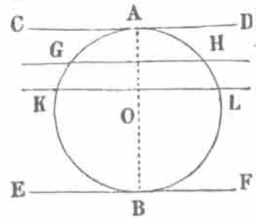
2°. Omvendt: Ere Chorderne ligestore, da er deres Afstand fra Centrum ligestor; thi af $AC = FH$ følger $AD = FG$; fremdeles er $OA = OF$, og $\angle D = \angle G$, som rette Vinkler, altsaa $\triangle AOD \cong FOG$, hvoraf $OD = OG$.

3°. Af to Chorder, AB, AC, som have uligestor Afstand fra Centrum, er den, der er nærmest samme, den største.

Nedfældes de Lodrette OD og OE, haves $AM > AD$ og $AE > AM$, hvoraf $AE > AD$, eller $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} AC$, eller $AB > AC$. Da enhver anden Chorde FH, der har samme Afstand fra Centrum som AC, er lig AC, haves ogsaa $AB > FH$.

4°. Omvendt: Af to uligestore Chorder AB, FH, ligger den største, AB, Centrum nærmest; thi havde AB samme Afstand som FH, da vare de ligestore (efter 1°.), og havde AB en større Afstand, da var AB mindre FH.

**97.** To Paralleler indeslutte ligestore Buer af Cirkelperiferien.

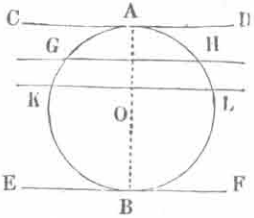



Der er tre Tilfælde:

1°. Ere Parallelerne to Secanter GH, KL, da vil en Diameter, dragen lodret paa samme, halvere saavel Buen KAL, som GAH (Nr. 95),

eller: Buen $KA$ = Buen $AL$
og Buen $GA$ = Buen $AH$,
altsaa Buen $KG$ = Buen $HL$.

2°. Er den ene en Tangent CD [eller EF], og den anden en Secant KL, da vil en ret Linie fra O til Berøringspunktet A [eller B], staae lodret paa CD [eller EF] (Nr. 89, Omvendt, 1°.), altsaa ogsaa paa KL, der er parallel dermed,



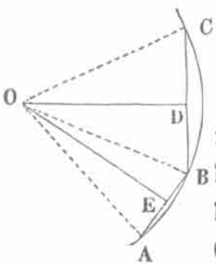

altsaa Buen KA = Buen AL.
Da nu fremdeles Buen BKA = Buen ALB,
saa er ogsaa Buen KB = Buen LB.

3°. Ere Parallelerne to Tangenter CD og EF, da vil en ret Linie gjennem Berøringspunkterne A, B være en Diameter, (thi den Lodrette i A gaaer gjennem Centrum O og vil, forlænget, staae lodret paa EBF, altsaa træffe den i dens Berøringspunkt B [89, Omv. 2°.]); man har da Buen AKB = Buen ALB = $\frac{1}{2}$ Periferi.

Omvendt: Indesluttes i en Cirkel ligestore Buer af to rette Linier, da ere disse Linier parallele.

## § 2. Cirklers forskjellige Stillinger mod hinanden.

**98.** To forskjellige Cirkellinier kunne ikke have flere end to Punkter tilfælles.




Antage vi, at tre Punkter A, B, C paa samme Tid kunne høre til to Cirkellinier, forene vi disse Punkter ved de to rette Linier CB og AB, og opreise lodrette Linier i deres Midtpunkter D, E; da maa enhver af disse Lodrette indeholde Centrum til enhver Cirkellinie gjennem de tre Punkter, (95, 1°), altsaa maae disse Lodrette nødvendigen skjære hinanden; men de have kun eet Skjærepunkt.

De to antagne Cirkellinier maae altsaa have samme Centrum O, og samme Radius OA = OB = OC, det er: kun udgjøre een Cirkellinie.



Heraf følger:

At gjennem tre givne Punkter ikke kan føres flere end een Cirkellinie.

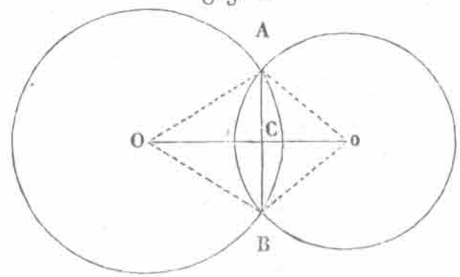
To Cirkler, beliggende i samme Plan, kunne kun have fem forskjellige Stillinger mod hinanden. De kunne:

1°. ligge udenfor hinanden,
2°. berøre hinanden udvendigt,
3°. skjære hinanden,
4°. berøre hinanden indvendigt,
5°. den ene ligge indeni den anden.

Have de i den sidste Stilling samme Midtpunkt, kaldes de concentriske, og den Deel af Planen, som ligger mellem Cirkellinierne, kaldes en Cirkelring.

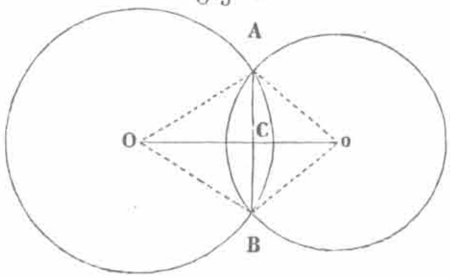
Den rette Linie mellem to Cirklers Midtpunkter kaldes Midtpunkts- eller Centri-Linien.

Fig. I.




**99.** Naar to Cirkellinier have eet Punkt, A, fælles udenfor Centrilinien, Oo, da have de endnu et Punkt fælles, ɔ: da skjære de hinanden; thi nedfældes fra A en lodret Linie, AC, paa Centrilinien, forlænges den, og afsættes CB = AC, da paastaaes, at B er et andet fælles Punkt for de to Cirkellinier (B siges at være symetrisk til A med Hensyn til Oo). Drages nemlig OA og OB, haves

Fig. I.

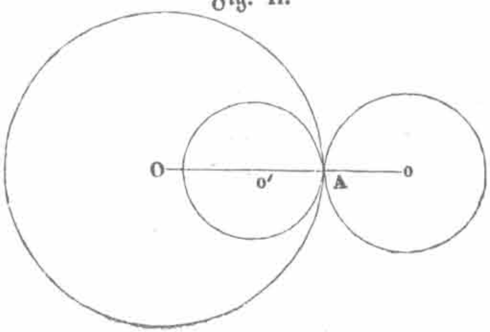



$\triangle ACO \cong BCO$, thi $AC = CB$, $OC = OC$ og $\angle ACO = \angle BCO$ som rette Vinkler. Heraf følger: $OB = OA$, men $OA$ er Radius i Cirklen om O, altsaa ogsaa OB, ɔ: Cirkellinien om O gaaer gjennem B. Drages fremdeles oA og oB, da ere Trianglerne ACo og BCo congruente, idet $AC = CB$, $oC = oC$ og $\angle ACo = BCo$, altsaa $oB = oA$, hvoraf følger, at Cirkellinien om o ogsaa gaaer gjennem B.

**100.** Naar to Cirkellinier skjære hinanden, da er Centrilinien lodret paa Midten, C, af deres fælles Chorde AB. Da O og o, hver for sig, ligge ligelangt fra A og B, saa er en ret Linie gjennem O og o lodret paa Midten af en ret Linie gjennem A og B (Nr. 35).

**101.** 1°. Naar to Cirkellinier berøre hinanden, da gaaer Centrilinien gjennem Berøringspunktet;

Fig. II.





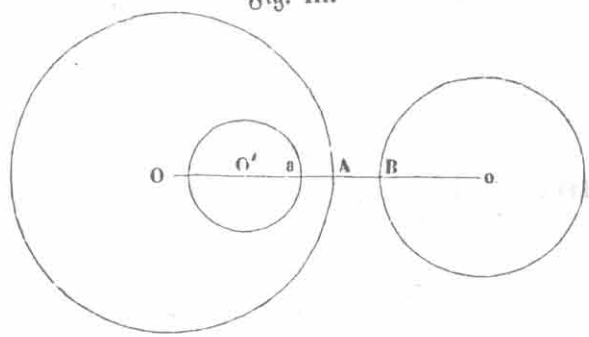

thi hvis ikke, da havde Cirkellinierne et fælles Punkt udenfor Centrilinien ɔ: skare hinanden.

2°. Naar to Cirkellinier have et fælles Punkt A i Centrilinien, da berøre de hinanden; thi skare de hinanden, da havde de to Punkter fælles udenfor Centrilinien (Nr. 100); de fik altsaa tre Punkter fælles, hvilket er umuligt, (Nr. 98).

**102.** Naar to Cirkellinier i samme Plan

1°. ligge udenfor hinanden, da er Afstanden mellem Midtpunkterne større end Radiernes Sum.

Fig. III.




Figuren viser tydeligt, at $OA + Bo < Oo$.

2°. Berøre de hinanden udvendigt (Fig. II), da er Afstanden mellem Midtpunkterne lig Radiernes Sum; thi da Berøringspunktet A ligger i Centrilinien, sees tydeligt af Figuren, at $Oo = OA + Ao$.

3°. Skjære de hinanden (Fig. I.), da er Afstanden mellem Midtpunkterne mindre end Radiernes Sum, men større end deres Differens; thi drages Oo og AO og Ao, da haves i Trianglen OAo, efter Nr. 17,

$$Oo < OA + oA, \text{ og } Oo > OA - oA.$$

4°. Berøre de hinanden indvendigt (Fig. II.), da er Afstanden mellem Midtpunkterne lig Radiernes

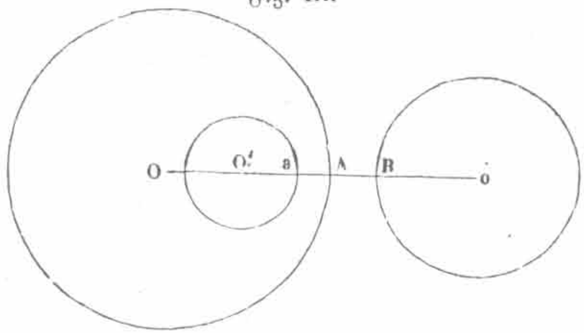
Differens; thi da Berøringspunktet A ligger i Centrilinien, sees af Figuren, at $Oo' = OA - o'A$.

5°. Ligger den ene indenfor den anden, haves

$$OO' = OA - O'a - aA, \text{ altsaa}$$

$$OO' < OA - O'a.$$

Fig. III.




**103.** Heraf udledes ligefrem følgende Modsætninger:

For at to Cirkellinier skulle kunne skjære hinanden, maa Afstanden mellem deres Midtpunkter være: baade mindre end Summen og større end Differensen af deres Radier.

For at to Cirkellinier kunne berøre hinanden, maa Afstanden mellem deres Midtpunkter være: enten lig Summen eller lig Differensen af deres Radier.

For at to Cirkellinier ikke skulle have noget Punkt fælles, maa Afstanden mellem deres Midtpunkter være: enten større end Summen eller mindre end Differensen af deres Radier.

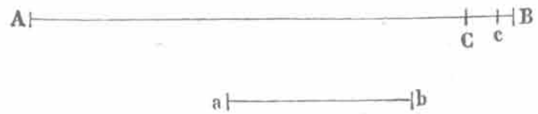
## § 3. Udmaaling af Vinkler.

### Foreløbige Forklaringer.

**104.** Naar man sammenligner to Størrelser af samme Slags, (som vi, for at have noget Bestemt at holde os til, ville antage at være to rette Linier AB, ab), i den Hensigt at finde Forholdet mellem dem, da lader dette Forhold sig let an-



give, hvis den ene Linie ab er indeholdt et bestemt Antal Gange, f. Ex. 3 Gange, i den anden, AB; thi da er Forholdet $\frac{AB}{ab} = 3$, eller: naar ab er Enhed, da er $AB = 3$. Er ab ikke nøiagtig indeholdt i AB, men der gives en tredie Linie l, som netop er indeholdt f. Ex. 7 Gange i AB og 2 Gange i ab, da er Forholdet $\frac{AB}{ab} = \frac{7}{2}$, eller: naar ab er Enhed, da er $AB = \frac{7}{2}$. Hvis der derimod ikke kan findes nogen Linie, som nøie er indeholdt i (er et fælles Maal for) baade AB og ab: hvorledes bestemmes da Forholdet mellem AB og ab?




Tænk ab delt i M (3) ligestore Dele, og afsæt en af disse paa AB saa ofte som muligt. Antag at den er indeholdt N (7) Gange i AB og efterlader Resten $CB = R$. Tages intet Hensyn til CB, da er AC commensurabel med ab, og man har $\frac{AC}{ab} = \frac{N}{M}$ $(\frac{7}{3})$. Tænk igjen ab delt i ligestore Dele, hvoraf hver er mindre end $R$; lad Antallet af disse Dele være m (8), og lad os afsætte en af dem saa ofte paa AB, som muligt. Den være indeholdt deri n (19) Gange, med Resten $cB = r$, (hvor $r < R$). Tages intet Hensyn til cB, haves Ac commensurabel med ab og $\frac{Ac}{ab} = \frac{n}{m}$ $(= \frac{19}{8})$.

Vedbliver man paa denne Maade, da ville Resterne $R$, $r$, $r_1$, $r_2$ . . . stadigt aftage, og skjøndt ingen af dem er Nul, kan man dog faae dem til at blive mindre end enhver angivelig Størrelse; thi hver af Resterne, $R$, $r$ . . . er mindre end hver af de Dele, hvori ab deles, og ab kan deles i saa smaa ligestore Dele, som man vil.

Vi have da en Række af Linier AC, Ac, $Ac_1$, $Ac_2$ . . . . . som, naar ab sættes = 1, udtrykkes ved Tallene

$$\frac{N}{M}, \quad \frac{n}{m}, \quad \frac{n_1}{m_1}, \quad \frac{n_2}{m_2} \; . \; . \; . \; .$$

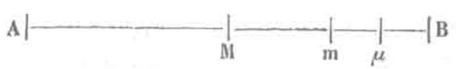
og da disse Linier have AB til Grændse*), saa have ogsaa de Tal, der fremstille dem, en vis Grændse, som er et incommensurabelt Tal. Denne Grændse er det, som kaldes: det incommensurable Forhold mellem AB og ab.

Det er altsaa ikke vanskeligt at danne sig et Begreb om et saadant Forhold, men da man ikke nøiagtigen kan angive dets Værdi, kan man ikke bevise Ligestorheden af to incommensurable Forhold uden formedelst Ligestorheden af de Værdier, der nærme sig disse saa meget man vil. Heraf følgende Sætning: Ere A og B to Størrelser af et og samme Slags og indbyrdes incommensurable; a og b to andre Størrelser, men af samme Slags indbyrdes, og ogsaa incommensurable, da er Forholdet $\frac{A}{B}$ ligt Forholdet $\frac{a}{b}$, **naar** man, efterat have delt B og b i samme Antal, m, ligestore Dele (hvor m er vilkaarlig), finder at A og a indeholde hver for sig ligestort Antal af disse Dele, efterladende en Rest.

**105.** Efter disse foreløbige Forklaringer gaae vi nu over til Læren om Udmaaling af Vinkler.

At udmaale en Størrelse A, er at finde Forholdet mellem A og en anden Størrelse B af samme Slags, antaget til Enhed. Kan man ikke sammenligne disse to Størrelser selv, da søger man at henføre Sammenligningen til to andre Størrelser a, b, der ere saaledes valgte, at naar Forholdet mellem dem er bekjendt, man deraf kan slutte sig til Forholdet mellem A og B.

*) Grændse er en bestemt Størrelse, hvortil en foranderlig Størrelse kan nærme sig saa meget man vil, uden nogensinde at blive lig den



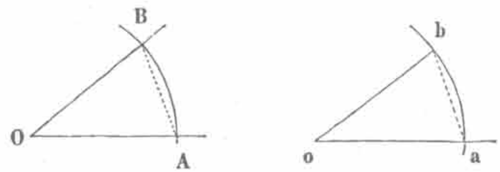

Er M f. Ex. Midten af AB, m af MB, μ af mB, o. s. v., da have AM, Am, Aμ . . . til Grændse AB.



Er Forholdet mellem A og B ligt Forholdet mellem a og b, da vil, naar b tages til Enhed, det Tal, der udtrykker Udmaalingen af a, være det samme som det, der udtrykker Udmaalingen af A, hvis man umiddelbart havde kunnet sammenligne A og B. Denne Fremgangsmaade skal her anvendes paa at tilveiebringe Sammenligning af to Vinkler, ikke umiddelbart, men ved at sammenligne to Buer, beskrevne med samme Radius om Vinklernes Toppunkt til Centra.

Vinkler, hvis Toppunkter ligge i en Cirkels Centrum, kaldes Centrivinkler.

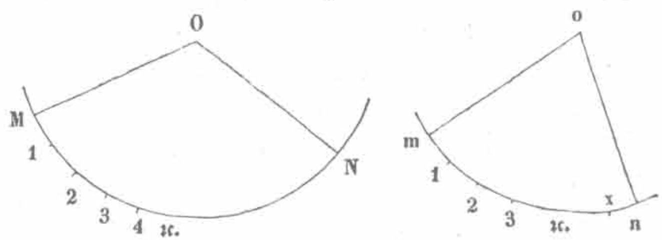
**106.** I ligestore Cirkler eller samme Cirkel svare til ligestore Buer AB, ab, ligestore Centrivinkler AOB, aob.

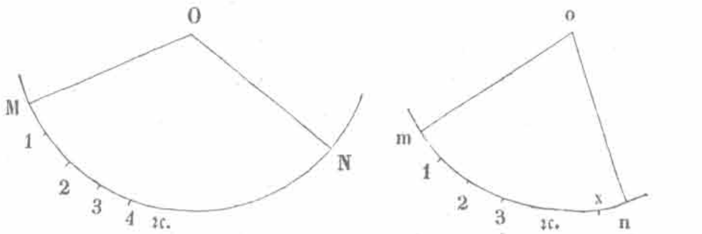



thi 1°. Drages Chorderne AB, ab, da ere disse ligestore (93), altsaa Trianglerne AOB, aob congruente, som havende 3 stykkevis ligestore Sider, altsaa Vinkel AOB = aob.

2°. Ligge Buerne i samme Periferi, da bringes Sætningen hen paa 1°, ligesom i Nr. 93, 2°.

**107.** I ligestore Cirkler eller samme Cirkel forholde Centrivinklerne, MON og mon, sig som de tilsvarende Buer, MN og mn.






1°. Ere Buerne **commensurable**, det er: gives der en Bue f. Ex. M1, som er indeholdt nøie et vist Antal Gange, f. Ex. p Gange, i Buen MN, og q Gange i mn, og denne Bue kaldes b, da haves Buen MN = p.b, og Buen mn = q.b,

altsaa $\frac{MN}{mn} = \frac{p\,.\,b}{q\,.\,b} = \frac{p}{q}$ . . . . . . . . (1)

Deles nu Buen MN i p ligestore Dele M1, 12, 23, 34 ꝛc., da vil Buen mn indeholde q af disse ligestore Dele. Drages fra Delingspunkterne de rette Linier O1, O2, O3, O4 ꝛc. og o1, o2, o3, o4 ꝛc., da vil Vinklen MON være deelt i p ligestore Vinkler, og Vinklen mon i q, indbyrdes og med disse ligestore Vinkler; kaldes een af disse ligestore Vinkler v, da haves

$$MON = p\,.\,v, \quad mon = q\,.\,v,$$

altsaa $\frac{MON}{mon} = \frac{p\,.\,v}{q\,.\,v} = \frac{p}{q}$;

men Proportionen (I) gav $\frac{MN}{mn} = \frac{p}{q}$;

altsaa $\frac{MON}{mon} = \frac{MN}{mn}$.

2°. Ere Buerne **incommensurable**, det er: gives der ingen Bue, som nøie er indeholdt i begge de givne Buer, da deles Buen MN i et hvilketsomhelst Antal, p, ligestore Dele, og fra Delingspunkterne drages rette Linier til O, hvorved Vinklen MON er delt i p ligestore Vinkler. Føres nu en af de Dele, hvori MN er delt, over paa mn saa ofte som muligt, og antages, at den er indeholdt deri q Gange med en Rest xn, da indsees, at naar Delingspunkterne forenes ved rette Linier med o, at Vinklen mon vil indeholde q af de Vinkler, hvori MON er delt,



samt Resten xon. Vi see altsaa, at naar Buen MN og Vinklen MON deles i p ligestore Dele, at da Buen mn og Vinklen mon hver indeholde samme Antal af disse Dele med en Rest; vi kunne altsaa slutte, at Forholdet $\frac{MN}{mn}$ er ligt Forholdet $\frac{MON}{mon}$. Tages, som hidtil, den rette Vinkel til Enhed for Vinkler, og en Fjerdedeel af Periferien, en **Qvadrant**, til Enhed for Buerne, da indsees, at naar en hvilkensomhelst Vinkel MON er given, og man beskriver en Cirkellinie, som har sit Centrum i Vinklens Top O, da kan **Buen MN, mellem dens Been, tjene den som Maal.**

Thi: hvis man i Proportionen $\frac{MON}{mon} = \frac{MN}{mn}$ tager mon og mn som Enhed for Vinkler og Buer, da vil $\frac{MON}{mon}$, der er Maalet for Vinklen MON, være ligt det rene Tal, der udtrykker Maalet for Buen MN.

**108.** For at lette Udmaaling af Vinkler har man delt Qvadranten i 90 ligestore Dele, hvoraf hver kaldes en **Grad**. Naar man altsaa siger, at en Vinkel f. Ex. er 30 Grader, da maa det forstaaes saaledes, at denne Vinkel indeslutter mellem sine Been $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$ af Qvadranten. Graden deles i 60 ligestore Dele, som kaldes Minuter; Minuten i 60 ligestore Dele, som kaldes Secunder.

Periferien er delt i 360 Grader.

Den rette Vinkel er = 90 Grader.

I den franske Maalbestemmelse deler man den rette Vinkel i 100 Grader, Graden i 100 Minuter o. s. fr. Hele Periferien er da delt i 400 Grader.

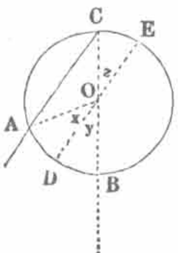
Det er let at gaae fra den ene Inddeling til den anden, da Forholdet er 360 : 400, eller 9 : 10.

Graden betegnes ved (°), Minuten ved (′), Secunden ved (″); saaledes skrives Een og fyrgetyve Grader, Tretten Minuter, Otte og tyve Secunder: $41^\circ\ 13'\ 28''$.

**109.** En Vinkel, hvis Toppunkt ikke ligger i Cirklens Midtpunkt, kan have tre forskjellige Beliggenheder med Hensyn til Cirklen: Toppunktet kan ligge i Periferien, eller mellem Centrum og Periferi, eller udenfor Cirklen.

En Vinkel, hvis Toppunkt ligger i Periferien, og hvis Been ere Chorder, kaldes en **Periferivinkel.**

**110.** En Periferivinkel er halv saa stor som Centrivinklen, der svarer til samme Bue, eller (da Centrivinklen udmaales ved den hele Bue, hvorpaa den staaer) en Periferivinkel udmaales ved det Halve af den Bue, hvorpaa den staaer.

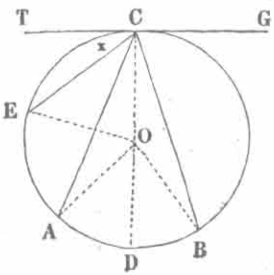



Her er tre Tilfælde at betragte:

1°. Periferivinklens (ACBs) ene Been, CB, er en Diameter.

Drages en Diameter DE, parallel med det andet Vinkelbeen AC, haves $\angle C = \angle y = \angle z$, (45);

altsaa $\frown DB = \frown CE$, men
$\frown CE = \frown AD$ (Nr. 97);
altsaa $\frown DB = \frown AD$,
eller $\angle y = \angle x$,
altsaa $\angle y = \frac{1}{2} \angle (x + y) = \frac{1}{2} \angle AOB$,
eller $\angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \frown AB$.




2°. Hvert Been af Vinklen, ACB, ligger paa sin Side af Centrum.

Drages Diametren COD, haves efter 1°:



$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \frown AD$
$\angle DCB = \frac{1}{2} \angle DOB = \frac{1}{2} \frown DB$. Addeer, da
$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \frown AB$.

3°. Begge Been af Vinklen, ECA, ligge paa samme Side af Centrum. Drages Diametren COD, haves efter 1°:

$\angle ECD = \frac{1}{2} \angle EOD = \frac{1}{2} \frown ED$
$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = \frac{1}{2} \frown AD$. Subtraheer, da
$\angle ECA = \frac{1}{2} \angle EOA = \frac{1}{2} \frown EA$.

**111.** Den Vinkel, som dannes af en Chorde og en Tangent TG, har til Maal Halvdelen af den Bue, som Chorden afskjærer.

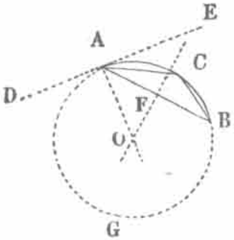
1°. Er Chorden en Diameter, saaat Vinklen er TCD, da er Sætningen umiddelbart indlysende, idet en ret Vinkel udmaales ved det Halve af den halve Periferi. Man har altsaa $\angle TCD = \frac{1}{2} \frown CED$.

2°. Er Chorden en hvilkensomhelst, CE, Vinklen altsaa x, eller ogsaa ECG, da haves

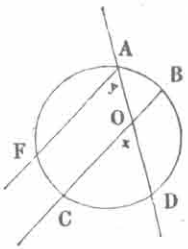
I. $\angle TCD = \frac{1}{2} \frown CED$ (efter 1°.)
$\angle ECD = \frac{1}{2} \frown ED$ (efter Nr. 110). Subtraheer, da
$\angle x = \frac{1}{2} \frown CE$.

II. $\angle DCG = \frac{1}{2} \frown DBC$
$\angle ECD = \frac{1}{2} \frown ED$. Addeer, da
$\angle ECG = \frac{1}{2} \frown EABC$.

Anm. Enhver af de i de to foregaaende Nrr. afhandlede Vinkler er spids, ret eller stump, eftersom den tilsvarende Bue er mindre end, lig, eller større end den halve Periferi.



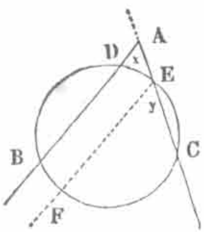
**112.** En Periferivinkel, ACB, siges at være indskreven i den Bue, ACB, der fremkommer ved fra den hele Periferi at drage Buen, som Vinklens Been afskjære; eller ogsaa at være indskreven i det til Buen ACB svarende Segment ACB. En Periferivinkel kaldes derfor ogsaa en indskreven Vinkel.



**113.** Enhver Vinkel x, som dannes af to hinanden skjærende Chorder AD, CB, udmaales ved den halve Sum af de Buer (AB, CD), som Chorderne afskjære.

Drages, gjennem A, en Linie, AF, parallel med BC, haves

$$\angle x = \angle y, \text{ men}$$
$$\angle y = \tfrac{1}{2} \frown FCD = \tfrac{1}{2} \frown FC + \tfrac{1}{2} \frown CD,$$
$$\text{men} \frown FC = \frown AB \text{ (Nr. 97)},$$
$$\text{altsaa } \angle x = \tfrac{1}{2} \frown AB + \tfrac{1}{2} \frown CD.$$

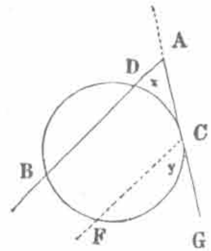


**114.** Enhver Vinkel x, dannet 1° af to Secanter, eller 2° af en Secant og en Tangent, eller 3° af to Tangenter (og havende sit Toppunkt udenfor Cirklen), har til Maal den halve Differens af Buerne, der ligge mellem dens Been.

1°. Drages, gjennem E, en Chorde, EF, parallel med AB, haves

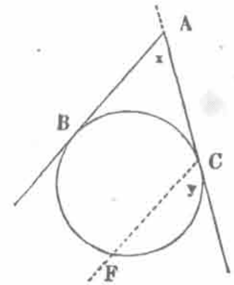
$$\angle x = \angle y, \text{ men}$$
$$\angle y = \tfrac{1}{2} \frown FC = \tfrac{1}{2} \frown BFC - \tfrac{1}{2} \frown BF,$$
$$\text{men} \frown BF = \frown DE, \text{ (Nr. 97)},$$
$$\text{altsaa } \angle x = \tfrac{1}{2} \frown BFC - \tfrac{1}{2} \frown DE.$$





2°. Drages, gjennem C, en Chorde, CF, parallel med AB, haves

$$\angle x = \angle y, \text{ men}$$
$$\angle y = \tfrac{1}{2} \frown FC = \tfrac{1}{2} \frown BFC - \tfrac{1}{2} \frown BF,$$
$$\text{men} \frown BF = \frown DC,$$
$$\text{altsaa } \angle x = \tfrac{1}{2} \frown BFC - \tfrac{1}{2} \frown DC.$$



3°. Drages, gjennem C, en Chorde, CF, parallel med AB, haves

$$\angle x = \angle y, \text{ men}$$
$$\angle y = \tfrac{1}{2} \frown FC = \tfrac{1}{2} \frown BFC - \tfrac{1}{2} \frown BF,$$
$$\text{men} \frown BF = \frown BC,$$
$$\text{altsaa } \angle x = \tfrac{1}{2} \frown BFC - \tfrac{1}{2} \frown BC.$$

Anm. En Vinkel x, som dannes af to Tangenter, er Supplementvinkel til Centrivinklen, hvis Been ende i Berøringspunkterne B og C, hvoraf følger, at $x = 180° - \frown BC$.

Den i et Segment indskrevne Vinkel er spids eller stump eller ret, eftersom Segmentet er

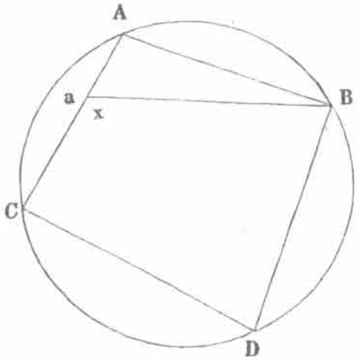
større, eller mindre end, eller lig en Halv-Cirkel.

Alle Vinkler indskrevne i samme Segment ere ligestore.

Man siger, at en Bue eller et Segment rummer en given Vinkel ACB, (Fig. Nr. 112), naar enhver Vinkel, som i samme kan indskrives, er lig den givne Vinkel.

## § 3. Ind- og omskrevne Firkanter.

— **115.** I enhver indskreven Firkant, ABCD, er Summen af de modstaaende Vinkler, tagne to og to, f. Ex. $\angle A$ og $\angle D$, lig 2 Rette. (See øverste Fig. næste Side).

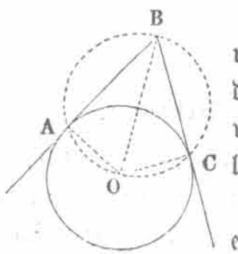



$$
\begin{aligned}
\text{Man har } \angle A &= \tfrac{1}{2} \frown CDB, \\
\angle D &= \tfrac{1}{2} \frown CAB; \text{ addeer:} \\
\angle A + \angle D &= \tfrac{1}{2} \frown (CDB + CAB) \\
&= \tfrac{1}{2} \text{ Periferi} = 2 \text{ R}.
\end{aligned}
$$

**116.** Omvendt. En Cirkel kan omskrives om en Firkant, naar Summen af to modstaaende Vinkler i samme er lig 2 Rette, f. Ex. $\angle A + D = 2$ R.

Gjennem de tre Punkter C, D og B kan (efter Nr. 91) altid føres en Cirkellinie. Gik denne nu ikke gjennem det fjerde, A, da maatte den enten gaae inden- eller udenfor A. Antages, at den gik gjennem a, da haves, naar aB drages

$\angle x + D = 2$ R (Nr. 115), men
$\angle A + D = 2$ R (givet), altsaa
$\angle x = \angle A$, hvilket er umuligt efter Nr. 29.




**117.** Fra et givet Punkt B, udenfor en Cirkel O, 1°. kan altid drages to Tangenter til Periferien, og 2°. disse Tangenter ere ligestore.

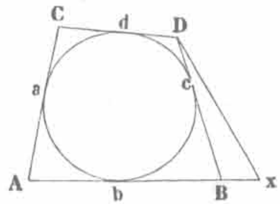
1°. Om OB som Diameter beskrives en Cirkel; fra O drages Radier til Cirk-



lernes Skjærepunkter A, C; de rette Linier BA, BC opfylde Betingelsen, thi

$\angle BAO = $ R (Nr. 111, Anm.) og $\angle OCB = $ R.

2°. De to retvinklede Triangler ABO, OBC, ere congruente, da OB = OB og OA = OC, altsaa AB = BC.




**118.** I enhver omskreven Firkant, ABCD, er Summen af to modstaaende Sider, AB + CD, lig Summen af de to andre AC + BD.

$$
\text{Man har} \left.\begin{array}{l} Ab = Aa \\ Bb = Bc \\ Cd = aC \\ Dd = Dc \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{(Nr. 117).} \\ \text{Addeer} \end{array}
$$

$$Ab + Bb + Cd + Dd = Aa + aC + Bc + Dc,$$
$$\text{eller } AB + CD = AC + BD.$$

Omvendt. Er i en Firkant, AxCD, Summen af to modstaaende Sider Ax + CD lig Summen af de to andre AC + Dx, da kan man indskrive en Cirkel i Firkanten.

Det er muligt at beskrive en Cirkel, som berører Ax, AC og CD (Nr. 93); der skal altsaa kun bevises, at den samme berører den fjerde Side Dx. Er dette ikke Tilfældet, da haves, naar Tangent DB drages, AB + CD = AC + DB. Subtraheres denne Lighed fra den givne Ax + CD = AC + Dx, haves Ax − AB = Dx − DB, eller Bx = Dx − DB, eller Bx + DB = Dx, umuligt, (Nr. 17).

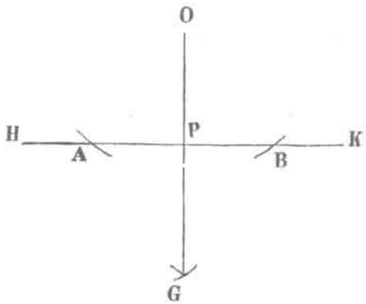
# Tredie Afdeling.

## Opgaver.

**119.** Gjennem et givet Punkt at drage en ret Linie lodret paa en given ret Linie.

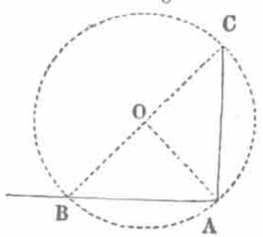
Der er fire Tilfælde:

1°. Naar Punktet P ligger i den rette Linie HK.




Fra P som Centrum og med vilkaarlig, men ligestor Radius slaaes to Buer, som skjære HK i A og B. Fra A og B som Centra, med en Radius, der er større end AP, slaaes to Buer, der skjære hinanden i et Punkt O. OP drages og er den forlangte Lodrette. Thi da O og P hver for sig er i samme Afstand fra A, som fra B, saa er en ret Linie gjennem O og P lodret paa en ret Linie gjennem A og B.

2°. Naar Punktet A ligger i en af den rette Linie ABs Endepunkter, og denne ikke kan forlænges ud over dette.



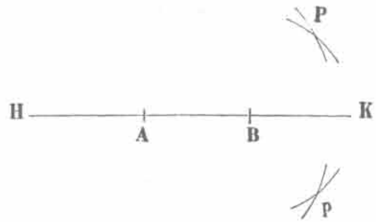

Fra et hvilketsomhelst Punkt O udenfor AB, her til Venstre for A, som Midtpunkt og med Radius OA beskrives en Cirkellinie, som skjærer AB i B. BO drages og forlænges indtil den skjærer Cirkellinien i C. Drages



CA da er denne den forlangte, idet ∠ BAC er en ret Vinkel, som indskreven i en Halvcirkel.

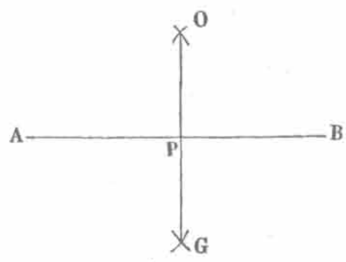
Samme Construction er bekvem, naar Punktet ligger nærved et af Endepunkterne.

3°. (Fig. 1°). Naar Punktet O ligger udenfor den rette Linie HK. Fra O som Centrum, med tilstrækkelig stor Radius, slaaes en Bue, som skjærer HK i A og B. Fra A og B som Centra, med ligestor Radius (større end Halvdelen af AB), slaaes Buer, som skjære hinanden i G. OG drages og er den forlangte Lodrette. Thi da O og G hver for sig ligge ligelangt fra A og B, saa er o. s. v. (see 1°.)




4°. Naar Punktet, P, ligger udenfor HK, men henimod et af dens Endepunkter, og Linien ikke kan forlænges udover dette.

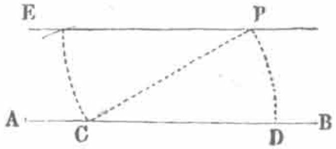
Paa HK vælges to vilkaarlige Punkter A, B. Fra disse som Centra, med AP og BP som Radier, slaaes Buer, der skjære hinanden i [P og] p. Pp vil være den forlangte Lodrette.




**120.** At halvere en given ret Linie AB. Fra Endepunkterne A og B som Centra, med samme Radius [(større end Halvdelen af AB), slaaes Buer, der skjære hinanden i to Punkter (99) O og G. OG drages, og AB er halveret i P.

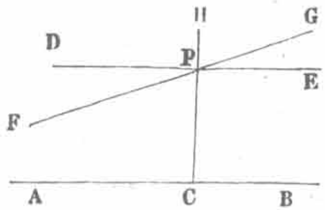
Thi naar to Punkter O og G, hvert for sig ere ligelangt borte fra to andre A og B, da er en ret Linie gjennem O og G lodret paa Midten af AB. Gjentages denne Construction, kan en ret Linie deles i 4, 8, 16, . . $2^n$ ligestore Dele.

**121.** Gjennem et givet Punkt P, udenfor en ret Linie AB, at drage en Linie parallel med samme.




Fra P drages en ret Linie til et hvilketsomhelst Punkt, C, i AB. Fra C som Centrum, med Radius PC, beskrives en Bue, som skjærer AB i D; fra P som Centrum beskrives, med samme Radius, en Bue CE. Fra C som Centrum, og med en Radius lig Chorden DP, beskrives en lille Cirkelbue, som skjærer CE i E. Den rette Linie gjennem E og P er den forlangte, thi da Buen PD = Buen CE, saa er Vinkel PCD = EPC, altsaa (Nr. 46, 1°.) EP parallel med AB.

Opgaven kan ogsaa opløses saaledes:



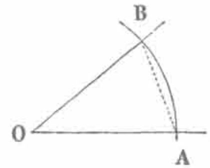

Fra det givne Punkt P nedfældes en lodret Linie paa AB; paa denne lodrette Linie, PC, opreises i P en anden Lodret DE, som da er den forlangte.

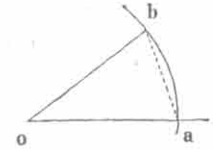
Heraf følger: en anden Maade at opreise en lodret Linie paa Enden af en ret Linie, som ikke kan forlænges:

Gjennem et hvilketsomhelst Punkt i samme opreises en lodret Linie, og gjennem Endepunktet drages en Linie parallel med denne.

**122.** Gjennem et givet Punkt o at drage en ret Linie, som med en given ret Linie danner en given Vinkel BOA.

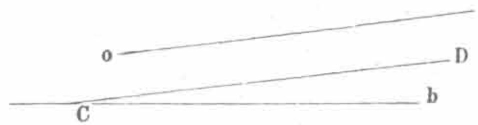




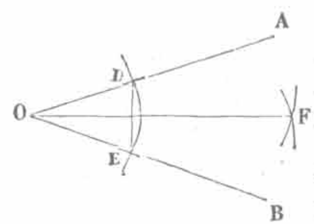

1ste Tilfælde. Punktet o ligger i den givne rette Linie oa. Fra O som Centrum med en vilkaarlig Radius OB beskrives en Bue, som skjærer den givne Vinkels Been i B og A. Fra o som Centrum, med samme Radius, beskrives en Bue ab. Fra a som Centrum, med en Radius lig Afstanden AB, beskrives en Bue, som skjærer ab i b. bo er den forlangte rette Linie, idet Triangel boa er congruent med BOA, som havende tre stykkevis ligestore Sider med den.

2det Tilfælde. Punktet o ligger udenfor den rette Linie ab.

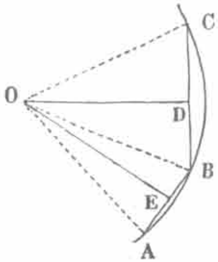



Gjennem et hvilketsomhelst Punkt C i ab drages en ret Linie CD, som med ab danner den givne Vinkel BOA. En Linie gjennem o, parallel med CD, vil være den forlangte.

Anm. Opgaven tillader to Opløsninger, naar den givne Vinkel ikke er en ret Vinkel.




**123.** At halvere en given Vinkel AOB. Fra O som Midtpunkt, og med vilkaarlig Radius OD, slaaes en Bue, som skjærer Vinkelbenene i D og E. Fra D og E som Midtpunkter, og med vilkaarlig, men samme Radius, slaaes to Buer, som skjære hinanden i F. En ret Linie mellem O og F halverer Vinklen. Thi tænkes rette Linier dragne fra F til D og E, haves △ ODF congruent med OEF, idet OF = OF, OD = OE og DF = EF; heraf følger ∠ DOF = ∠ EOF.



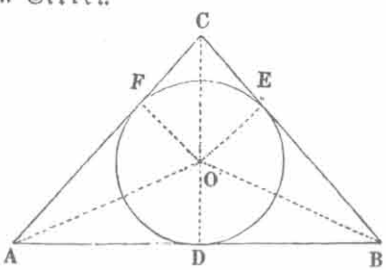

**124.** Gjennem tre givne Punkter, A, B, C, som ikke ligge i en ret Linie, at beskrive en Cirkellinie.

Punkterne A og B, B og C forbindes ved rette Linier; paa deres Midtpunkter D og E opreises lodrette Linier. Disses Skjæringspunkt, O, er Centrum, og OA (= OB = OC) er Radius til den søgte Cirkel.

Anm. I. Samme Construction leder til at finde Centrum til en given Cirkellinie, eller Bue ABC, idet tre vilkaarlige Punkter af samme forbindes med rette Linier o. s. v.

Anm. II. Samme Construction giver Centrum til en om en Triangel beskreven Cirkel.

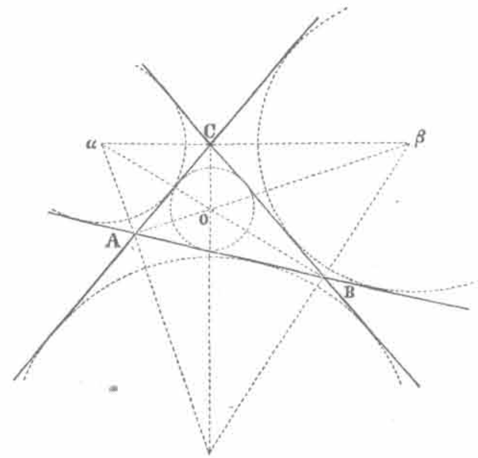
**125.** I en hvilkensomhelst Triangel, ABC, at indskrive en Cirkel.




Halveres to hvilkesomhelst af Trianglens Vinkler, f. Ex. A og B, da vil Halveringsliniernes (AO, OB) Skjæringspunkt, O, være Centrum, og lodrette Linier, nedfældede fra O paa Trianglsiderne, nemlig OD, OE, OF, være Radier til den søgte Cirkel. (Nr. 92).

Anm. Halveres de Vinkler, som dannes udvendigt ved Sidernes Forlængning, haves Centra til de tre Cirkler, hvis Periferier berøre respective en Side og de to andres Forlængninger, hvilke Cirkler kaldes udvendige Berøringscirkler.






**126.** Omendskjøndt en Triangel bestaaer af 6 Stykker, nemlig 3 Sider og 3 Vinkler, er det dog ikke nødvendigt at vide forud, at disse 6 Stykker i en Triangel ere stykkevis ligestore med de 6 Stykker i en anden Triangel, for deraf at kunne slutte sig til deres Congruens. Vi have nemlig seet, at to Triangler ere congruente, naar:

1°. Alle tre Sider ere stykkevis ligestore i begge.

2°. To Sider og den indesluttede Vinkel ere stykkevis ligestore i begge.

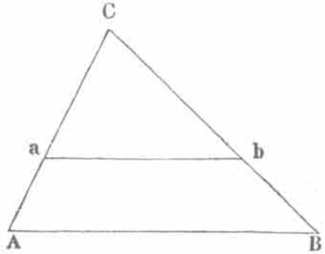
3°. En Side og de to hosliggende Vinkler ere stykkevis ligestore i begge, hvilken sidste Sætning almindeligere kan udtrykkes saaledes:

En Side og to Vinkler, da de to Vinklers Ligestorhed medfører den tredies.

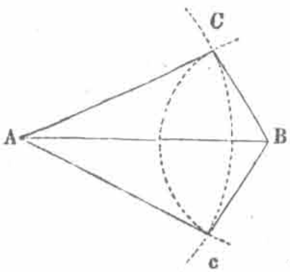
4°. og i visse Tilfælde, naar to Sider og en af de overforliggende Vinkler ere givne stykkevis ligestore.

Vi skulle nu vise, hvorledes en Triangel i Almindelighed lader sig construere, naar 3 Stykker ere givne, blandt hvilke altid maa findes en Side.

At dette sidste er nødvendigt, eller at tre Vinkler ikke bestemme en Triangel, vil være øiensynligt, naar man i en hvilkensomhelst Triangel, ABC, drager en Linie ab, parallel med en Side AB. Den fremkomne Triangel vil være ligevinklet med ABC, da $\angle A = \angle a$, og $\angle B = \angle b$, men naturligvis ingenlunde congruent med samme.




**127.** At construere en Triangel, naar dens tre Sider ere givne.

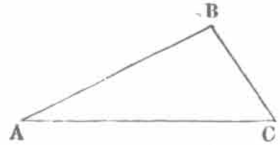



Paa en ret Linie afsættes en Længde AB, lig en af de givne Sider. Fra A som Centrum, med Radius AC, lig Længden af den anden Side, slaaes en Cirkelbue; fra B som Centrum og med Radius BC, lig den tredie Side, slaaes en Bue, som skjærer den forrige i C, (hvis Trianglen er mulig). Drages rette Linier fra C til A og B, haves den forlangte Triangel.

Anm. Skal Opgaven være mulig at udføre, eller skulle Cirkelbuerne, beskrevne fra A og B som Midtpunkter, kunne skjære hinanden, da maa AB være mindre end Summen af de to andre Sider, men større end deres Differens, (Nr. 103). Er dette Tilfældet, da ville Buerne skjære hinanden i 2 Punkter C og c, og to Triangler ABC, ABc, som dog kun ere forskjellige i Stilling, ville tilfredsstille Opgaven.

— **128.** At construere en Triangel, naar to af dens Sider og den af disse indesluttede Vinkel ere givne.

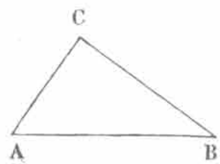





Man afsætter en ret Linie AB, lig en af de givne Sider; paa denne afsættes i A en Vinkel BAC, lig den givne. Paa det andet Vinkelbeen afsættes AC, lig den anden givne Side. Mellem C og B drages en ret Linie. Trianglen ABC vil være den forlangte, og Opgaven vil altid være mulig.

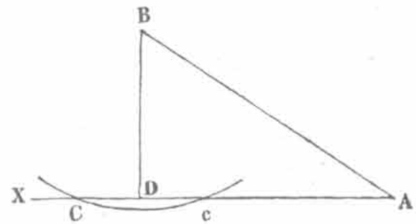
— **129.** At construere en Triangel, naar to af dens Vinkler og een Side ere givne.

De to Vinkler kunne enten begge være hosliggende, eller den ene ligge overfor den givne Side. Men da den tredie Vinkel altid kan findes, naar de to andre ere givne, behøve vi kun at give Constructionen for det første Tilfælde, da det andet altid kan henføres til dette. Constructionen er: Man afsætter en ret Linie AB, lig den givne Side; i dens to Endepunkter afsættes de to givne Vinkler. Er C Skjæringspunktet af disse to Vinklers Been, da er ABC den forlangte Triangel. Sidste Tilfælde construeres iøvrigt umiddelbart efter Nr. 122.

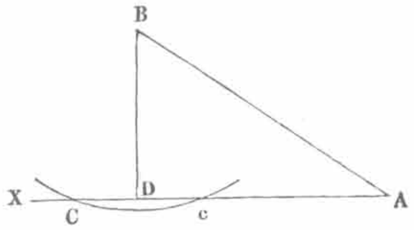



Anm. Det er af det Foregaaende (Nr. 52) indlysende, at Summen af de to givne Vinkler maa være mindre end to rette Vinkler, og da er Opgaven altid mulig.

— **130.** At construere en Triangel, naar der er givet en Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side.




Drag en vilkaarlig ret Linie AX; afsæt paa samme, i A, en Vinkel lig den givne; afsæt dens andet Been, AB, lig den givne Side, som skal være hosliggende; beskriv fra




B som Centrum, og med en Radius lig den anden givne Side, en Cirkelbue, som (i Almindelighed) vil skjære AX i 2 Punkter, C og c. Drages rette Linier fra B til C og c, da vil saavel Trianglen ABC, som ABc tilfredsstille Opgaven, hvis, (som Tilfældet er paa den valgte Figur), begge Skjæringspunkterne (C, c) falde paa samme Side af A.

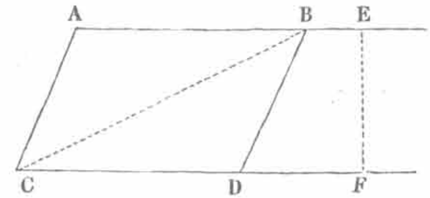
Anm. I. Er den givne Vinkel **spids**, da vil der være to Opløsninger (som i Fig.), *naar* BC er større end en lodret Linie BD, nedfældet fra B paa AX, og BC *tillige* er mindre end BA. Er BC mindre end BD, da er Opgaven øiensynligt umulig; er BC lig BD, da berører Buen Linien AX i D, og der bliver kun een Triangel ABD. Er BC = BA, da gaaer Cirkelbuen gjennem A; der er kun een Opløsning, og Trianglen er *ligebenet*. Er BC større end BA, da vil det ene Skjæringspunkt falde paa høire Side af A, og der bliver kun een Triangel, nemlig den, hvis Spidser ligge i A, B og i Skjæringspunktet til Venstre for A.

Anm. II. Er Vinklen A en **ret** Vinkel, da er Opgaven: at construere en retvinklet Triangel, hvis Hypotenuse og ene Cathete ere givne. Den er naturligt kun mulig, naar Hypotenusen er given større end Catheten, og der bliver kun een Opløsning.

Anm. III. Er Vinklen A en **stump** Vinkel, da maa den overforliggende Side ogsaa være given større end den hosliggende, og der vil kun fremkomme een Opløsning.



**131, a.** *At construere et Parallelogram, naar en Vinkel og de to hosliggende Sider ere givne.*




Afsæt en Vinkel, ACD, lig den givne, og Linierne CA og CD ligestore med de Sider, som skulle indeslutte Vinklen. Beskriv fra A som Centrum, med Radius CD, en Bue, og fra D som Centrum, med Radius AC, en Bue, som skjærer den forrige i B. Drag AB og DB, da er den fremkomne Figur et Parallelogram.

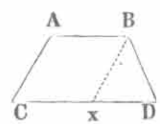
Figuren vil blive en Rectangel, naar den givne Vinkel er ret; en Rhombus, naar de to givne Sider ere ligestore; et Qvadrat, naar begge disse Betingelser finde Sted.

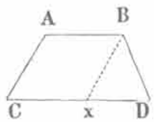
Opgaven kan almindeligt fremstilles saaledes:

At construere et Parallelogram, naar tre af dets Elementer ere givne, nemlig: Sider, Diagonaler, Parallelogrammets Vinkler, Diagonalvinklerne, Vinklen som Diagonalen danner med en Side . . . .

**131, b.** *At construere en convex Firkant, naar de fire Sider ere givne, samt den af to af dem indesluttede Vinkel.* Skeer let ved Anvendelse af 128 og 127.

**132.** *At construere et Trapez, hvis fire Sider ere givne.* Sættes AB = a, AC = b, CD = c og BD = d, og drages, gjennem B, en Linie Bx parallel med AC, da haves en Triangel BDx, hvis tre Sider, BD = d, Bx = b og xD = c — a, ere givne. Denne Triangel construeres. Fuldføres Parallelogrammet, hvis to Sider ere xC og xB, haves Trapezet.



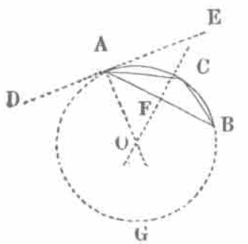



Er $c > a$, og $d > b$, da er det nødvendigt, at $c - a < b + d$, og $d < c - a + b$, det er: $c - a < d + b$, og $c - a > d - b$.

**133.** At construere en Polygon, congruent med en given Polygon.

Den givne opløses i Triangler, og disse construeres efter Nr. 127, 128 eller 129. Ogsaa kan man bestemme Spidserne ved Hjelp af Diagonaler, dragne fra Endepunkterne af en Side i den givne, til alle dens øvrige Vinkelspidser.

**134.** Om en given ret Linie, AB, at beskrive et Segment, indeholdende en given Vinkel C.




Antages $\angle$ ACB at være den givne Vinkel, da har den til Maal Halvdelen af Buen AGB (Nr. 110). Drages, gjennem Punktet A, Tangenten DE, da vil den ene Vinkel BAD, som den danner med AB, have til Maal ½ Bue AGB (Nr. 111), altsaa være = $\angle$ ACB. Heraf udledes følgende

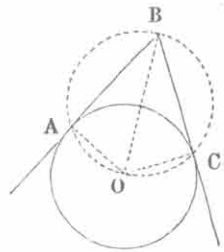
Construction. Gjennem Punktet A drages en ret Linie DAE, som med AB danner en Vinkel DAB, lig den givne. Paa DA, i A, opreises en Lodret AO. Paa Midten af AB opreises en Lodret FO. Fra deres Skjæringspunkt, O, beskrives en Bue, som med AB bestemmer Segmentet ACB, der indeholder den givne Vinkel.

Er den givne Vinkel ret, da er det søgte Segment en Halvcirkel, og Constructionen bestaaer da blot i, om AB som Diameter at beskrive en Halvcirkel.

**135.** Gjennem et givet Punkt at drage en Tangent til en given Cirkel.



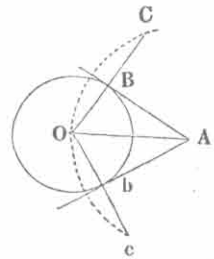
1°. Ligger Punktet i Periferien, da drages en Radius til dette Punkt, og paa denne, i Punktet, opreises en Lodret, der er den forlangte Tangent.




2°. Ligger Punktet, B, udenfor Cirkelen, da drages en ret Linie fra B til Centrum O. Om OB som Diameter beskrives en Cirkellinie. Til Cirkelliniernes Skjærepunkter, A, C, drages de rette Linier BA, BC, som opfylde Betingelsen; thi

$\angle$ BAO = R, og OCB = R, (Nr. 111, Anm.)

En anden Maade:




Er AB den forlangte Tangent, og OB Radius til Berøringspunktet, da ere OB og AB lodrette paa hinanden (Nr. 89). Tages, paa Forlængningen af OB, BC = OB, og drages AC, da er AO = AC. Punktet C ligger altsaa i Periferien af en Cirkel, beskreven fra A med Radius AO, og Berøringspunktet B er Midten af den Chorde, som svarer til Buen OC; thi Chorden OC = 2.OB. Heraf fremgaaer følgende

Construction: Fra A som Centrum, og med Radius AO, beskrives en tilstrækkelig stor Cirkelbue; fra O som Centrum, og med en Radius = den givne Cirkels Diameter, (= 2.O B), beskrives en Bue, som skjærer den anden i C (*c*). Den rette Linie OC, som skjærer Periferien i B (*b*), drages; AB (A*b*) drages, og er den forlangte Tangent.

**136.** At drage en fælles Tangent til to givne Cirkler, OA, oB.

Er AB en fælles Tangent til de givne Cirkler, da vil den være lodret paa Radierne OA, oB.

Fig. I.

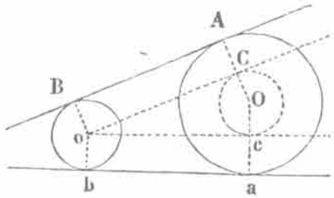
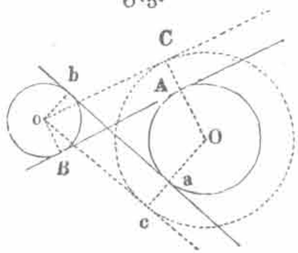



Fig.




Beskrives fra Centret O, og med en Radius OC, lig Differensen (Fig. I.) eller Summen (Fig. II.), af de givne Radier, en Cirkellinie OC, og drages fra o en Linie parallel med AB, da vil denne Parallel tangere Cirklen OC.

Heraf udledes følgende

Construction. Fra den største Cirkels Centrum O, og med en Radius, lig de givne Radiers Differens, eller Sum, beskrives en Cirkellinie OC. Fra den mindre Cirkels Centrum o drages Tangenterne oC, oc til Cirklen OC (eller blot Berøringspunkterne C, c bestemmes). Radierne OC, Oc drages og forlænges, indtil de møde Cirkellinien OA i A, a. I den mindre Cirkel drages Radierne oB, ob parallele med OC, Oc. De rette Linier AB, ab ville være de forlangte Tangenter.

Mærk: Ligge Cirkellinierne udenfor hinanden, da er der fire Opløsninger. Berøre de hinanden udvendigt, da er der tre Opløsninger, idet to Tangenter falde sammen til een gjennem Berøringspunktet. Skjære de hinanden, da er der to Opløsninger. Berøre de hinanden indvendigt, da er der kun een Opløsning. Ligger den ene indenfor den anden, da er Opløsningen umulig.

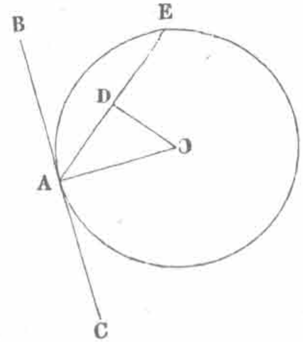
Ere Cirklerne ligestore, da erholdes de to Tangenter ved at opreise lodrette Diametre paa Linien mellem Midtpunkterne, og drage rette Linier gjennem deres Endepunkter.



**137.** Gjennem to givne Punkter at beskrive en Cirkellinie, som har sit Midtpunkt i en given ret Linie.

Midtpunktet er det Punkt, hvori den givne rette Linie skjæres af en lodret Linie, opreist paa Midten af den rette Linie, som forener de to givne Punkter. Er den givne Linie lodret paa denne, da er Opgaven umulig, uden for det Tilfælde, at den givne Linie staaer lodret paa Midten af samme — i hvilket Tilfælde der gives uendeligt mange Opløsninger. Der er ellers kun een Opløsning.

**138.** At beskrive en Cirkellinie, som i et givet Punkt, A, berører en given ret Linie, BC, og gaaer igjennem et andet givet Punkt, E, udenfor den rette Linie.

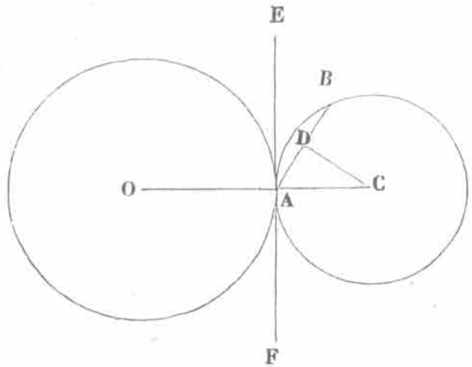



Da den søgte Cirkels Midtpunkt maa befinde sig baade i den lodrette Linie, som i A opreises paa BC, og i den Lodrette, opreist paa Midten af AE, saa bliver

Constructionen: I Punktet A opreises paa BC den Lodrette AO (Nr. 89); paa Midten af AE opreises den Lodrette DO (Nr. 95).

Disse to lodrette Liniers Skjæringspunkt er den søgte Cirkels Midtpunkt, og OA er dens Radius. Der er kun een Opløsning.

**139.** At beskrive en Cirkellinie, som i et givet Punkt, A, berører en given Cirkellinie, OA, og som gaaer igjennem et andet Punkt, B, udenfor eller indenfor samme.




Da den søgte Cirkels Midtpunkt maa befinde sig baade i den lodrette Linie paa Midten af AB, og i den Centrilinie, der maa være Forlængning af Radius OA, saa bliver

Constructionen: Paa Midten af AB opreises den lodrette Linie DC; Radius OA drages, og forlænges indtil den skjærer hin; Skjærepunktet C er Midtpunktet, og CA Radius til den søgte Cirkel.

Undersøgelse af de forskjellige Tilfælde (Discussion). Drages gjennem A en lodret Linie, EF, paa Radius OA, da: hvis den givne Cirkels Midtpunkt O, og det givne Punkt B ligge hvert paa sin Side af EF, ville Cirkellinierne berøre hinanden udvendigt;

ligge de paa samme Side, berøre de hinanden indvendigt;

ligger B i EF, da er Opgaven umulig.

**140.** At finde Talforholdet mellem Længden af to givne rette Linier, AB, CD.

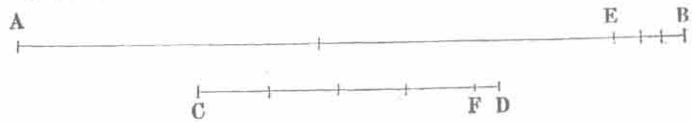
Forat dette Forhold nøiagtigt skal kunne udtrykkes ved to Tal, maa man kunne finde en tredie ret Linie, der er inde-



holdt et nøiagtigt Antal Gange i enhver af de givne, eller er et fælles Maal for dem. Men gives der eet fælles Maal, da gives der ogsaa mange andre, nemlig enhver Linie, som nøiagtig er indeholdt i dette fælles Maal. Blandt alle disse maa man søge det største, da Forholdet mellem de givne Linier derved bliver udtrykt i de mindst mulige Tal.

Denne Undersøgelse svarer aldeles til at finde to Tals største fælles Deler; den mindre Linie overføres paa den større saa ofte som muligt, derpaa Resten paa den mindre o. s. v.

Overføres saaledes den mindre, CD, paa AB, og antages, at den, fra A til E, er indeholdt to Gange, og giver Resten EB, da er




$$AB = 2CD + EB.$$

Overføres dernæst EB paa CD, og er EB indeholdt, fra C til F, fire Gange, givende Resten FD, da haves

$$CD = 4EB + FD.$$

Er EB endelig $= 3FD$, da er

$$CD = 4EB + FD = 4.3FD + FD = 13FD$$
$$AB = 2CD + EB = 2.13FD + 3FD = 29FD,$$

altsaa kan Forholdet mellem AB og CD udtrykkes ved $\frac{29}{13}$, eller

$$\frac{AB}{CD} = \frac{29}{13}.$$

Det er indlysende, at denne Fremgangsmaade lader sig anvende paa to Størrelser af hvilkensomhelst, men samme Natur, forudsat at disse Størrelser kunne sammenlignes ved at føres over paa hinanden; saaledes er den brugt Nr. 107 for to Buer.

Angaaende denne Fremgangsmaade bemærkes, at

enten kommer man ved Fortsættelsen af denne til en Rest, som er indeholdt et nøiagtigt Antal Gange i den foregaaende, som ovenfor, og da siges Linierne at være commensurable ɔ: deres Forhold kan angives rationale Tal;

eller det er umuligt, hvorlænge end Fremgangsmaaden fortsættes, at finde en Rest, som er indeholdt et nøiagtigt Antal Gange i den forrige. Linierne, som i dette Tilfælde ikke have noget fælles Maal, siges da at være incommensurable. Da deres Forhold altsaa ikke strængt kan udtrykkes ved noget helt Tal, eller nogen Brok, saa maa man, for at faae et Begreb om dette Forhold, holde sig til en Nærmelse, som man maa see at faae saa nøiagtig, som den foreliggende Opgave fordrer. Man betragter derfor en af de fremkomne Rester som ingen, og altsaa den tilsvarende Qvotient som fuldstændig, og det søgte Forhold vil være desto nøiagtigere fundet, jo længere Fremgangsmaaden fortsættes. Det sande Forhold vil være den Grændse, til hvilken de, ved de bestandigt fortsatte Nærmelser fremkomne Tal, mere og mere ville nærme sig.

**141.** At finde største fælles Deler for to givne Vinkler.

Med disse Vinklers Toppunkter som Centra, og med samme Radius, beskrives Buer, der begrændses af Vinkelbenene. Ved en Fremgangsmaade, lig den i forrige Nr., findes Buernes største fælles Maal M. Den Vinkel, som svarer til M, vil være de to givne Vinklers største fælles Deler.



# Fjerde Afdeling.

## Ligedannethed, og hvad deraf nærmest følger.

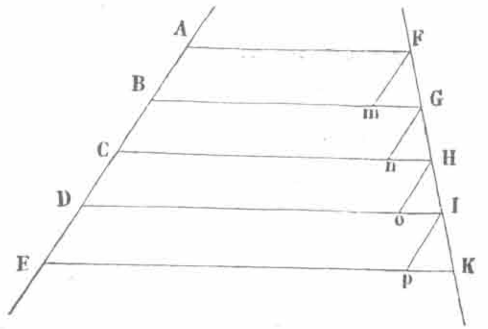
### Foreløbige Sætninger.

**142.** Er Forholdet mellem to Linier, A og B, ligestort med Forholdet mellem to andre, C og D, da danne de en Proportion, eller da haves $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Men her maa man erindre sig, at Størrelserne A, B o. s. v. maae være udtrykte i, eller tænkte udtrykte i Tal, idet en af disse Linier, eller en femte Linie er fælles Maal for dem alle, og antagen til Eenhed, saaledes at A, B . . . hver fremstille et vist Antal Eenheder, helt eller bruddent, commensurabelt eller incommensurabelt. Da Proportionen mellem Linierne A, B . . . altsaa bliver en Proportion mellem Tal, kan man paa den anvende Algebraens Læresætninger om Proportioner.

A og B kunne være af eet Slags, f. Ex. Linier, og C og D af et andet Slags, f. Ex. Flader; de maae da altid betragtes som Tal, A og B udtrykte i Linieenheder, C og D i Fladeenheder.

**143.** Skjæres to hvilkesomhelst rette Linier AE, og FK, af et hvilketsomhelst Antal Paralleler, AF, BG, CH..., dragne gjennem Punkterne A, B, C..., som alle ligge lige langt borte fra hinanden, da ville Delene af den anden, FG, GH, HI... ogsaa være indbyrdes ligestore.




Drages Fm, Gn, Ho ... parallele med AE, da dannes Trianglerne FmG, GnH, HoI ..., hvori Fm = Gn = Ho... thi Fm = AB, som Paralleler mellem samme Paralleler; fremdeles AB = BC, givet, og BC = Gn, som Paralleler mellem samme Paralleler, altsaa Fm = Gn, o. s. v. Vinklerne mFG, nGH, oHI ... ere ligestore, som ensliggende ved Tværlinien FK; ligeledes ere Vinklerne FmG, GnH, HoI ... ligestore, fordi deres Been ere parallele og gaae i samme Retning. Disse Triangler ere altsaa congruente, som havende een Side og de to hosliggende Vinkler ligestore; heraf følger, at FG, GH, HI ... ere ligestore.

Altsaa er AB indeholdt ligesaa ofte i (er ligesaa stor Part af) AE, som FG i (af) FK, eller:

$$\frac{AB}{FG} = \frac{AE}{FK}, \text{ hvoraf følger}$$

$$\frac{2\,AB}{2\,FG} = \frac{AE}{FK}$$

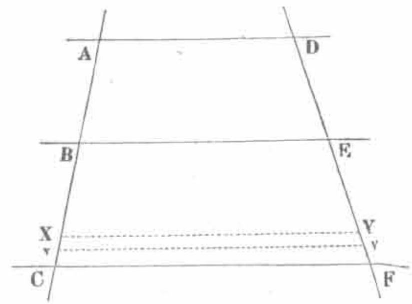
$$\frac{3\,AB}{3\,FG} = \frac{AE}{FK}, \text{ det er:}$$



et hvilketsomhelst Antal Dele af AE forholder sig til et ligestort Antal Dele af FK, som den hele Linie AE til den hele FK.

**144.** Tre parallele Linier skjære stedse to hvilkesomhelst rette Linier, AC, DF, i proportionale Dele, saa at man har

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$




Der kan indtræffe to Tilfælde:

1°. At AB er commensurabel med BC, ɔ: at Qvotienten $\frac{AB}{BC}$ nøie kan angives, eller Forholdet mellem AB og BC kan udtrykkes nøie ved to rationale Tal. Antages, at man har

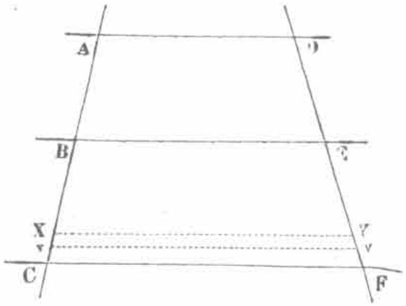
$$\frac{AB}{BC} = \frac{13}{16} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

eller, at disse Liniers fælles Maal er indeholdt 13 Gange i AB og 16 Gange i BC, og man gjennem de derved fremkomne Delingspunkter tænker sig Linier dragne parallele med AD, da vil DE derved blive delt i 13, og EF i 16 indbyrdes ligestore Dele (Nr. 143), altsaa

$$\frac{DE}{EF} = \frac{13}{16}.$$

Da denne Qvotient er lig (I), haves

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$




2°. Er AB *incommensurabel* med BC, haves ogsaa $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Deel AB i et vist Antal ligestore Dele, og afsæt en af disse Dele paa BC, gaaende ud fra B. Lad X være Endepunktet af den sidste Deel, da haves, naar XY drages parallel med AD, efter 1°:

$$\frac{AB}{BX} = \frac{DE}{EY}.$$

Deles AB atter i ligestore Dele, af hvilke hver er mindre end XC, og en af disse ligestore Dele afsættes fra B nedad BC, da vil det sidste Delingspunkt falde mellem X og C f. Ex. i x, og man har

$$\frac{AB}{Bx} = \frac{DE}{Ey}.$$

Vedblives saaledes, komme vi, som i Nr. 104 og 107, til Slutningen:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

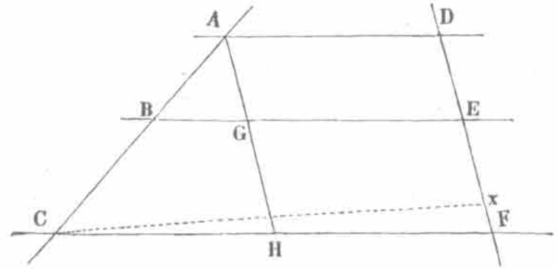
Heraf følger: $\frac{AB+BC}{BC} = \frac{DE+EF}{EF}$ ɔ: $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$, og

$$\frac{AB+BC}{AB} = \frac{DE+EF}{DE} \text{ ɔ: } \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}.$$

*Omvendt. Har man Proportionen* $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, *og to af de tre rette Linier, f. Ex. AD og BE, ere parallele, da er den tredie parallel med dem.*

Thi hvis ikke, da kan gjennem C drages en Linie, Cx, parallel med dem, hvorved haves $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{Ex}$, som, forbunden med





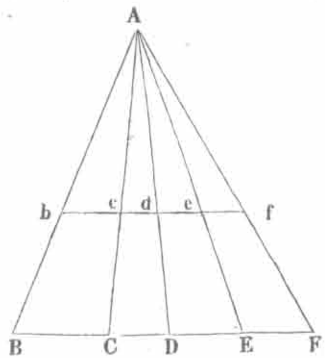

Proportionen $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, giver $\frac{DE}{EF} = \frac{DE}{Ex}$, hvoraf EF = Ex; *urimeligt*.

Anm. Disse to Sætninger ere gjeldende, hvor end Sammenstødningspunktet af Linierne AC og DF falder, enten indeni eller udenfor de to Belter, eller om det falder i en af Parallelerne. Drages saaledes AH parallel med DF, da er AG = DE, GH = EF, altsaa

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH};\quad \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AG};\quad \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{GH}.$$

*Drages altsaa i en Triangel en Linie parallel med en Side, da deler den de to andre i proportionale Dele, og omvendt.*

**145.** *Hvilketsomhelst Antal rette Linier*, AB, AC, AD..., *udgaaende fra samme Punkt*, A, *skjæres i proportionale Dele af Parallelerne* bf, BF;




Thi tages kun Hensyn til AB og AC, haves $\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac}$; tages Hensyn til AC og AD, haves $\frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad}$. Ligeledes $\frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae}$.

Forbindes disse Proportioner, som have samme Quotient, da faaes

$$\frac{AB}{Ab} = \frac{AC}{Ac} = \frac{AD}{Ad} = \frac{AE}{Ae} = \ldots$$

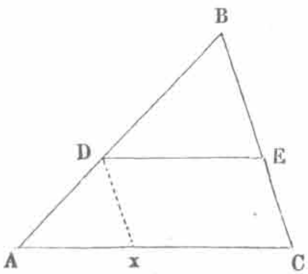
Ligeledes bevises let, at: $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \ldots$

## § 1. Ligedannede Figurer.

**146.** *Ved ligedannede* Figurer forstaaer man to Figurer, af hvilke den ene er i det Mindre det, som den anden er i det Større. For to Triangler udtrykkes denne Egenskab ved følgende Definition:

*To Triangler ere ligedannede, naar deres Vinkler ere stykkevis ligestore, og deres ensliggende Sider* (ɔ: de Sider, som ligge overfor de ligestore Vinkler) *ere proportionale.*

*To Polygoner siges ligeledes at være ligedannede, naar deres ensliggende Vinkler ere ligestore, og deres ensliggende Sider (beliggende paa samme Maade) ere proportionale.*




**147.** *Drages i en Triangel, ABC, en Linie, DE, parallel med en Side, AC, da er den derved afskaarne Triangel, DBE, ligedannet med den hele.*

Thi: 1°. $\angle B = \angle B$; $\angle D = \angle A$; $\angle E = \angle C$, og 2°. $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}$ (Nr. 144); fremdeles, drages Dx parallel med BC, haves

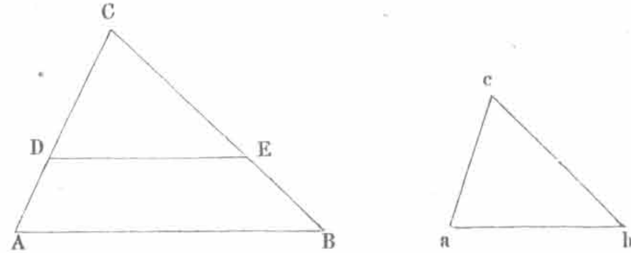
$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{xC}$, eller $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$, da $DE = xC$, altsaa

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}.$$

**148.** *Ere i to Triangler, ABC, abc, alle Vinkler stykkevis ligestore, da ere Trianglerne ligedannede.*

Afsættes en Side af den mindre, f. Ex. ab, paa den tilsvarende, AB, saaledes at $BD = ab$, og drages Parallelen DE, da er BDE ligedannet med ABC (Nr. 147); men DBE er con-






gruent med abc, thi $BD = ba$, $\angle B = \angle b$, $\angle BDE = \angle A = \angle a$;
altsaa er abc ligedannet med ABC. De ensliggende Sider ere altsaa proportionale.

Da den tredie Vinkel i to Triangler maa være ligestor, naar to ere givne ligestore, følger, at to Triangler ere ligedannede, naar to Vinkler i samme stykkevis ere ligestore.

Anm. I. To retvinklede Triangler ere ligedannede, naar de have en spids Vinkel ligestor.

Anm. II. To ligebenede Triangler ere ligedannede, naar Vinklerne ved Grundlinien, *eller* Vinklen ved Toppunktet ere ligestore.

**149.** *Ere i to Triangler ABC, abc de ensliggende Sider proportionale* ɔ: $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$, *da ere Trianglerne ligedannede.*

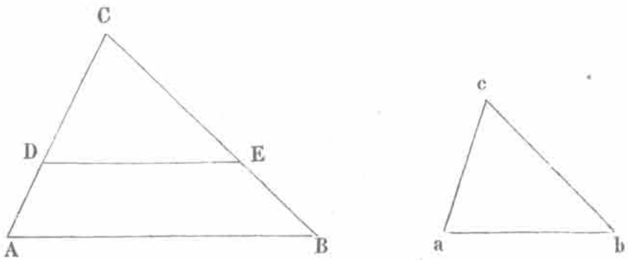
Udføres samme Construction som før, da er BDE ligedannet med ABC, men BDE er congruent med abc; thi der er givet

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac};$$

og formedelst Parallelen DE haves

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE};$$

da nu $AB = AB$, $ab = BD$, $BC = BC$, saa er $bc = BE$, og da $AC = AC$, saa er $ac = DE$, altsaa alle tre Sider ligestore, følgelig Trianglerne abc og BDE congruente, og abc ligedannet med ABC.




De ensliggende Vinkler ere derfor ligeſtore.

**150.** Er i to Triangler ABC, abc een Vinkel ligeſtor ($\angle B = \angle b$), og de to indeſluttende Sider proportionale ($\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$), da ere Trianglerne ligedannede.

Udføres ſamme Conſtruction ſom før, da er BDE ligedannet med ABC. Naar der altſaa beviſes, at abc er congruent med DBE, da er Sætningen beviiſt.

Der er givet

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc};$$

Parallelen DE giver

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}.$$

Da nu AB = AB, ab = BD, BC = BC, ſaa er bc = BE; da fremdeles $\angle B = \angle b$, ſaa er BDE congruent med abc, altſaa abc ligedannet med ABC.

**151.** 1°. To Triangler ABC, abc ere ligedannede, naar de have en ligeſtor Vinkel, B = b, og den hosliggende og modſtaaende Side proportionale, $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, ſamt den modſtaaende Side ſtørre end den hosliggende.

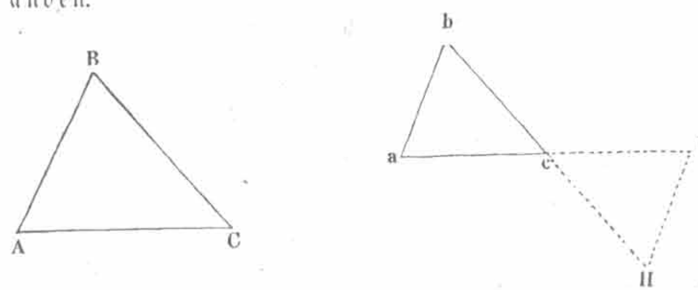
Samme Conſtruction giver $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$. Der er givet $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, altſaa $\frac{BD}{ab} = \frac{DE}{ac}$, men BD = ab, altſaa ac = DE. Følgelig er, efter Nr. 62, 1°, abc congruent med BDE, men BDE er ligedannet med ABC, altſaa ogſaa abc.



2°. To Triangler, ABC, abc, ere ligedannede, naar i dem to Sider ere proportionale, $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, og, af de overforliggende Vinkler, de to ere ligeſtore, B = b, og de to andre, C, c, ere af ſamme Slags.

Samme Conſtruction giver $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$;
Der var givet $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$; altſaa $\frac{BD}{ab} = \frac{DE}{ac}$.
Da nu BD = ab, ſaa er DE = ac; fremdeles er $\angle B = b$, og C = c, men C = E, altſaa $\angle E = c$, og E og c af ſamme Slags i begge, da C og c ere af ſamme Slags. Heraf følger, at Triangel DBE er congruent med abc, (Nr. 62, 2°), men DBE er ligedannet med ABC, altſaa ogſaa abc.

**152.** 1°. To Triangler ere ligedannede, naar Siderne i den ene ere parallele med Siderne i den anden.



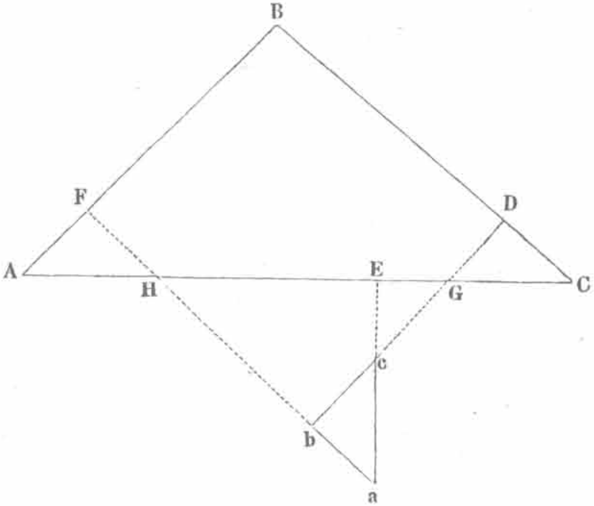

Er AB parallel med ab, BC med bc og AC med ac, da ere de med ſamme Bogſtaver benævnte Vinkler ligeſtore (Nr. 49), altſaa Trianglerne ABC og abc ligedannede.

Ere de to Triangler, hvis Sider ere parallele, ABC og cIH, da forlænges Ic og HC, dernæſt drages ba parallel med AB, hvorved $\angle I = \angle a$, $\angle H = \angle b$, ſom indvendige Vexelvinkler.

Trianglen cIH er altſaa ensvinklet med abc, men abc ensvinklet med ABC, altſaa cIH ligedannet med ABC.

De parallele Sider ere altſaa ensliggende.

2°. To Triangler, ABC, abc, ere ligedannede, naar Siderne i den ene ere lodrette paa Siderne i den anden.




Forlænges Siderne i Trianglen abc til de møde de Sider af ABC, paa hvilke de ere lodrette, da haves

$\angle EcG + EGc = R$, og

$\angle DGC + DCG = R$,

som beliggende i de retvinklede Triangler EcG og GDC;

men $\angle DGC = EGc$, altsaa

$\angle DCG = \angle EcG = bca$.

Ligeledes $\angle EHa + HaE = R$ og

$\angle AHF + FAH = R$, men

$\angle AHF = EHa$, altsaa

$\angle FAH = HaE$,

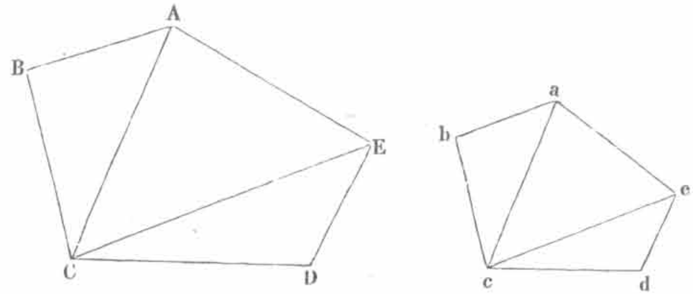
og $\triangle ABC$ ligedannet med abc.

De paa hinanden lodrette Sider ere altsaa ensliggende.

Anm. Have to ligedannede Triangler en ensliggende Side ligestor, ere de congruente.



**153.** To Polygoner, ABCDE, abcde, sammensatte af samme Antal i samme Følge beliggende, ligedannede Triangler, ABC og abc, ACE og ace . . ., have de ensliggende Vinkler ligestore, de ensliggende Sider proportionale, og ere altsaa ligedannede.




Da $\triangle ACB$ er ligedannet med acb, saa er $\angle B = \angle b$ og $\angle BAC = \angle bac$. Af samme Grund give $\triangle ACE$ og ace, $\angle CAE = cae$, $\angle CEA = cea$. Altsaa $\angle BAE = bae$. Paa samme Maade bevises, at $\angle AED = \angle aed$; fremdeles er $\angle D = \angle d$. Med Hensyn til de to sidste Vinkler, DCB og dcb, da ere de ligestore som sammensatte af Vinklerne BCA, ACE, ECD og bca, ace, ecd, af hvilke de med samme Bogstaver betegnede ere ligestore, som ensliggende Vinkler i ligedannede Triangler.

Trianglernes Ligedannethed giver fremdeles Proportionerne

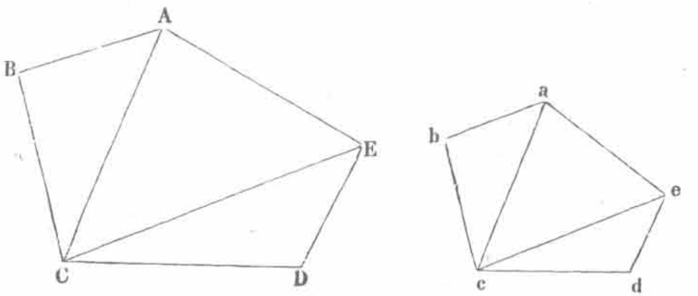
$$\frac{BC}{bc} = \frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}.$$
$$\frac{AC}{ac} = \frac{AE}{ae} = \frac{CE}{ce}$$
$$\frac{CE}{ce} = \frac{ED}{ed} = \frac{CD}{cd}.$$

Da det første Forhold i de to sidste, dannet af de hosliggende Trianglers fælles Sider, er det samme som det sidste i den foregaaende, saa ere alle disse Forhold indbyrdes ligestore, og tages de af disse, som blot indeholde Polygonsider, haves

$$\frac{BC}{bc} = \frac{AB}{ab} = \frac{AE}{ae} = \frac{ED}{ed} = \frac{CD}{cd},$$

ɔ: de ensliggende Sider ere proportionale.

**154.** Ere to Polygoner, ABCDE, abcde, ligedannede, da ere de sammensatte af samme Antal ligedannede, ensliggende Triangler.




Da alle ensliggende Vinkler ere givne ligestore, og de ensliggende Sider proportionale, haves umiddelbart $\angle B = \angle b$, og $\frac{BC}{bc} = \frac{AB}{ab}$, altsaa Trianglerne ABC og abc ligedannede.

Deraf følger, at $\angle BAC = \angle bac$. Subtraheres disse fra de ligestore Vinkler BAE, bae, da haves $\angle CAE = cae$. Endvidere give de ligedannede Triangler ABC og abc

$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, og Polygonerne

$\frac{AB}{ab} = \frac{AE}{ae}$, altsaa

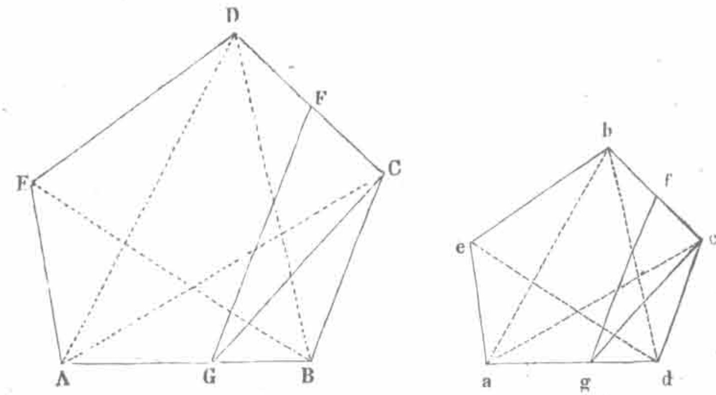
$\frac{AC}{ac} = \frac{AE}{ae}$, hvoraf følger,

at Trianglerne CAE og cae ere ligedannede. Paa samme Maade bevises alle de øvrige Trianglers Ligedannethed.

Anm. Alle Diagonaler ere her dragne fra samme Vinkelspids; men Polygonerne kunne ogsaa deles i Triangler paa andre Maader, og Sætningerne ligefuldt gjelde.

Saaledes kan man forbinde alle Polygonvinklernes Vinkelspidser med begge Endepunkterne af



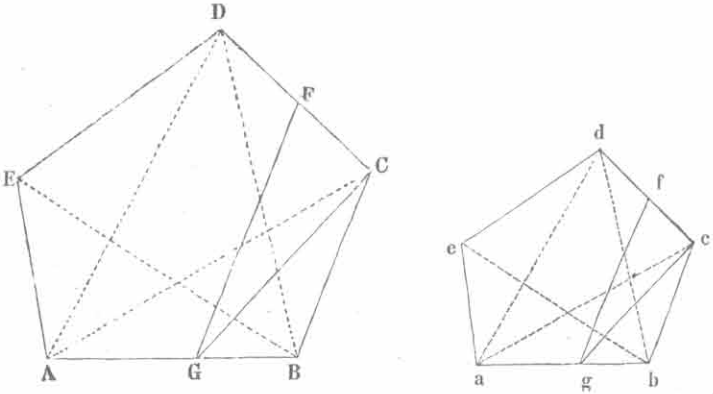



en Side, ved at drage Diagonaler fra C, D, E til A og B.

Det er her klart, at C, D og Es Beliggenhed er bestemt med Hensyn til AB, naar Trianglerne ABC, ABD, ABE ere givne, og at en Polygon er bestemt, naar man kjender et Antal Triangler, der er to mindre end Polygonens Sider. Betegnes altsaa dette Antal ved n, da afhænger Figurens Bestemmelse af $2(n-2)$ Linier (Sider og Diagonaler), udgaaende fra Vinkelspidserne ved Grundlinien AB, og af AB selv; hvilket i Alt udgjør $2n-3$ givne Dele.

Naar Trianglerne ABC og abc, ABD og abd, ABE og abe ere ligedannede, ere Polygonerne det ogsaa, og omvendt: ere Polygonerne ligedannede, da ere de ensliggende Triangler det ogsaa. Beviset skeer ved at føre Sætningerne tilbage til 153 og 154.

**155.** Drages i to ligedannede Polygoner, ABCDE, abcde, to rette Linier, GF og gf, som have samme Beliggenhed i begge, ɔ: som udgaae fra ensliggende Punkter, G og g, bestemte ved $\frac{BG}{bg} = \frac{AB}{ab}$, og som 1° enten med Siderne danne de ligestore Vinkler FGB og fgb, eller 2°, som i begge Polygoner skjære to




ensliggende Sider, DC, dc, i proportionale Dele, saaat $\frac{FC}{fc} = \frac{BG}{bg}$, da ere disse Linier proportionale med Polygonernes ensliggende Sider.

1°. Trianglerne BGC og bgc ere ligedannede, thi $\angle B = \angle b$, og Siderne BG og bg proportionale med BC og bc, da

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BG}{bg} \text{ og}$$
$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}; \text{ heraf følger}$$
$$\frac{GC}{gc} = \frac{BG}{bg} \text{ eller } = \frac{AB}{ab}$$
$$\text{og } \angle BCG = bcg; \angle CGB = cgb;$$
$$\text{altsaa } \angle BCF - BCG = bcf - bcg$$
$$\text{eller } \angle GCF = gcf.$$

Da fremdeles $\angle FGB = fgb$, saa er

$$\angle FGB - CGB = fgb - cgb,$$

eller $\angle CGF = cgf$, altsaa ere Trianglerne FCG og fcg ligedannede og give

$$\frac{FG}{fg} = \frac{GC}{gc} \text{ eller } = \frac{AB}{ab}, \text{ (da } \frac{GC}{gc} = \frac{AB}{ab}).$$

2°. Er, istedetfor de ligestore Vinkler FGB og fgb, Punkterne F og f tagne saaledes, at $\frac{FC}{fc} = \frac{BG}{bg}$, da ville Trianglerne FCG og fcg ogsaa være ligedannede; thi som før bevises, at de have



een ligestor Vinkel, FCG = fcg, og af $\frac{BC}{bc} = \frac{GC}{gc} = \frac{GB}{gb} = \frac{FC}{fc}$ følger, at de ere indesluttede af proportionale Sider; man kan da udlede samme Slutninger, som i 1°.

**156.** Ligedannede Polygoners Perimetre forholde sig som et Par ensliggende Sider.

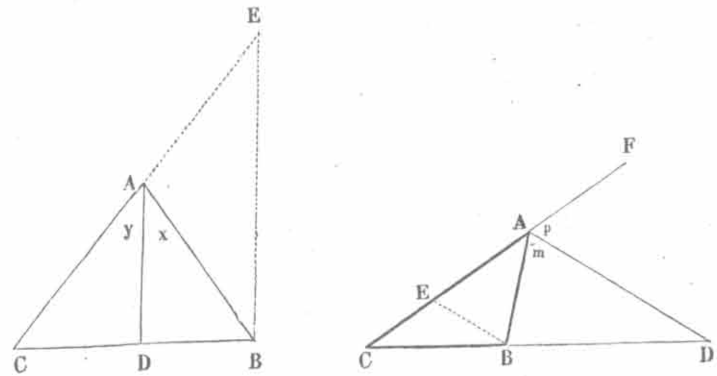
Da $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea}$, saa haves

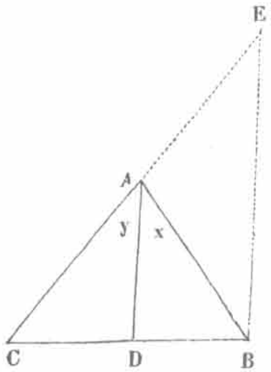
$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{ab + bc + cd + de + ea} = \frac{AB}{ab} = \ldots$$
$$\frac{\text{Perimeter ABCDE}}{\text{Perimeter abcde}} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \ldots$$

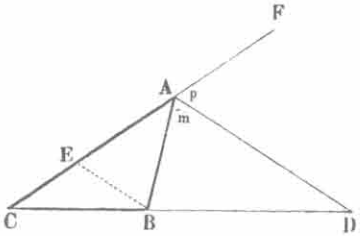
## §. 2. Af Ligedannethed udledte Forhold mellem Linier.

**157.** 1°. Den Linie, AD, som i en hvilkensomhelst Triangel, ABC, halverer en Vinkel, BAC, deler, tilstrækkelig forlænget, den modstaaende Side, BC, i to **adderende** Dele, (ɔ: hvis Sum er denne Side), proportionale med de Vinklen indesluttende Sider, saa at

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$







2°. *Den Linie* AD, *som halverer den udvendige Vinkel til* CAB, *nemlig* FAB, *deler den modstaaende Side i to* **subtraherende** *Dele* (ɔ: hvis Differens er denne Side), *proportionale med de indesluttende Sider.*

1°. (Venstre Fig.) Drages BE parallel med AD, og forlænges AC indtil Skjæring i E, da haves $\angle E = \angle y$, $\angle x = EBA$, men $x = y$ (givet), altsaa $\angle E = \angle EBA$; fremdeles haves $\frac{EA}{AC} = \frac{BD}{DC}$, men da $\angle E = \angle EBA$, saa er $EA = AB$, hvilken, indsat i Proportionen, giver $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

2°. (Høire Fig.) Drages BE parallel med AD, haves $\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{DC}$, og $\angle m = ABE$, $p = AEB$, men $m = p$, (givet), altsaa $\angle ABE = AEB$, hvoraf $AB = AE$, hvilken, indsat i Proportionen, giver $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

Anm. De omvendte Sætninger bevises paa samme Maade.

**158.** Naar fire Størrelser, A, B, C, D, ere saaledes beskafne, at Differensen mellem første og anden forholder sig til Differensen mellem tredie og fjerde, som første til fjerde, det er: $\frac{A-B}{C-D} = \frac{A}{D}$, da siges de at være **harmonisk** *proportionale.*

Ere de to mellemste Størrelser ligestore, (hver = B), da kaldes Proportionen sammenhængende harmonisk, f. Ex. $\frac{A-B}{B-C} = \frac{A}{C}$, og da er, af de 3 Størrelser A, B, C, Størrelsen B harmonisk Mellemproportional mellem A og C.



Danne Tallene a, b, c en sammenhængende harmonisk Proportion $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, da haves $ac - bc = ab - ac$, $2ac = b\,(a + c)$,

$$b = \frac{2ac}{a+c}.$$

En ret Linie AD er delt *harmonisk* i Punkterne C og

B, naar Productet af den hele Linie (AB) og det mellemste Stykke (CD) er ligt Productet af de to yderste Stykker (AC, DB), altsaa naar:

$$AB \times CD = AC \times DB.$$

Denne Ligning giver

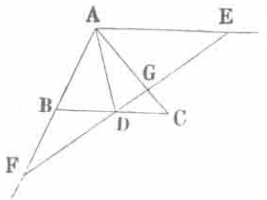
$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$, hvoraf følgende Definition: *Linien AD er delt harmonisk, naar den hele Længde AB forholder sig til det ene Endestykke AC, som det andet Endestykke DB til Mellemstykket CD, eller:*

Naar B og Cs Afstande fra den givne Linies Endepunkter, A, D, danne en rigtig Proportion.

Anm. Ombyttes Proportionens Mellemled, haves $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC}$, det er: BC er delt harmonisk i Punkterne A og D.

A, B, C, D kaldes *harmoniske* **Punkter.** A og D ere **sammenhørende** *harmoniske* Punkter, ligesaa B og C. Forbindes disse Punkter med et udenfor deres Linie liggende Punkt ved rette Linier, da kaldes disse *harmoniske* **Straaler**, og alle fire udgjøre de et *harmonisk* **Straalebundt.**

Indsættes $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$ i Proportionen, haves $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$, altsaa danne de tre Linier AB, AD, AC en sammenhængende harmonisk Proportion. Deraf Navnet harmoniske Punkter.



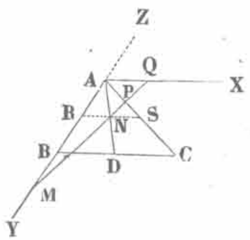

**159.** 1°. Halveres i en Triangel, ABC, en Side, i D f. Ex., drages gjennem den modstaaende Spids, A, en ret Linie, AX, parallel med BC, og igjennem D en ret Linie FE, der skjærer Triangelsiderne og Parallelen, da er FG delt harmonisk.

Thi af △ BFD og AFE følger $\frac{FD}{BD} = \frac{FE}{AE}$,

og af DGC og AGE ..... $\frac{DC}{DG} = \frac{AE}{GE}$,

hvoraf $\frac{FD}{DG} = \frac{FE}{GE}$, eller FD × GE = DG × FE.

2°. Omvendt: Udgaae fra et Punkt A fire rette Linier til de fire harmoniske Punkter F, D, G, E, hvori en ret Linie FG er delt, og drages gjennem D en Linie BC parallel med AE, da er BC halveret i D. Thi da $\frac{FD}{DG} = \frac{FE}{GE}$ og $\frac{DC}{DG} = \frac{AE}{GE}$, saa haves $\frac{D}{DC} = \frac{FE}{AE}$; da fremdeles $\frac{FD}{BD} = \frac{FE}{AE}$, indsees at BD = DC.



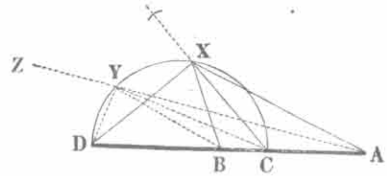

3°. Efter 1° ere AY, AD, AC, AX fire harmoniske Straaler.

Enhver ikke gjennem A dragen ret Linie, som skjæres af de fire Straaler, bliver derved harmonisk delt, f. Ex. MP; thi drages, gjennem N, Linien RS parallel med BC, saa er N Midtpunktet af RS, og AX parallel med RS, altsaa MP harmonisk delt.

**160.** Staae to sammenhørende Straaler f. Ex. AD, AX lodrette paa hinanden, saa halveres den af de to andre Straaler (AB, AC) dannede Vinkel, BAC, af AD, og dens Nabovinkel, CAZ, af AX.

Thi da AD er lodret paa AX, saa er AD lodret paa BC, da nu tillige BD = DC, saa er ABC ligebenet, og Vinklerne BAC og CAZ halverede.






**161.** Er AB delt harmonisk i C og D, saaat AC × BD = AD × BC, eller $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, og over CD beskrives en Cirkel, da har dennes Periferi den Egenskab, at Afstandene fra ethvert Punkt, X, i samme, til A og B, staae i Forholdet $\frac{AC}{BC}$. Fra det vilkaarlige Punkt, X, i Periferien drages Linierne XA, XC, XB, XD. Disse ere harmoniske Straaler, og da nu CX staaer lodret paa XD, maa XC halvere Vinkel AXB, hvorved haves $\frac{AX}{XB} = \frac{AC}{CB}$.

Omvendt: Er AB delt harmonisk, og et Punkt, Y, ligger saaledes i Planen, at $\frac{AY}{YB} = \frac{AC}{CB}$, da er (efter Nr. 157 omvendt) Vinkel AYC = CYB. Da fremdeles $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$, haves $\frac{AY}{YB} = \frac{AD}{DB}$, hvorved ∠ BYD = DYZ; følgelig Vinkel CYD en ret Vinkel, det er:

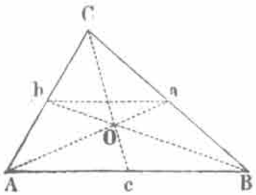
Y ligger i Periferien om CD som Diameter.

Det vil nu være klart, at:

Det geometriske Sted for alle de Punkter, hvis Afstande fra Endepunkterne, A, B, af en bestemt ret Linie, danne ligestore Forhold, er en Cirkellinie, hvis Centrum ligger et Sted i den givne rette Linies Retning, og hvis Diameter er Afstanden mellem de to Punkter C, D, hvori den givne Linie er delt harmonisk efter det forelagte Forhold.

Er Forholdet nær ved at være lig En, da er Cirklen meget stor. Er Forholdet netop En, da træder, istedetfor Cirkellinien, en lodret Linie paa Midten af den givne Linie.

**162.** De rette Linier, som forene en Triangels Spidser med Midtpunkterne af de modstaaende Sider, skjære hverandre i eet Punkt.




To af disse være Aa og Bb. Drages ba, da er den parallel med AB, altsaa er Triangel AOB ligedannet med aOb, hvoraf $\frac{aO}{AO} = \frac{ab}{AB} = \frac{aC}{BC} = \frac{1}{2}$, det er: Bb deler Aa i to Dele, der forholde sig som 1 til 2.

Paa samme Maade bevises, at Cc deler Aa i to Dele, der forholde sig som 1 til 2. Altsaa skjære de tre Linier hverandre i samme Punkt O.

Anm. Af $\frac{aO}{AO} = \frac{1}{2}$ følger $\frac{aO}{AO + aO} = \frac{1}{2+1}$,
$\frac{aO}{Aa} = \frac{1}{3}$, $aO = \frac{1}{3}$ Aa, det er:
Punktet O, hvor de tre Linier skjære hverandre, ligger, i enhver af dem, i $\frac{1}{3}$ Afstand fra den tilsvarende Grundlinie; det kaldes i Statiken Trianglens Tyngdepunkt.

Anm. II. Den rette Linie fra Spidsen til Midten af den modstaaende Side kaldes Median.

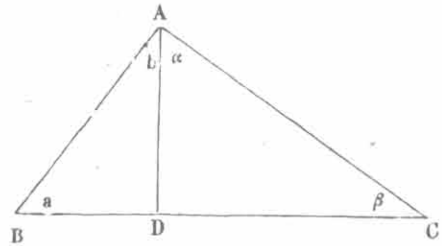
**163.** Nedfældes fra Spidsen af den rette Vinkel, A, i den retvinklede Triangel ABC, en lodret Linie, AD, paa Hypotenusen, da deles Trianglen derved i to retvinklede Triangler, og Hypotenusen i to Dele, som ere Catheternes Projectioner paa denne, og

1°. De to Triangler ABD, ACD ere ligedannede med den hele, og ligedannede indbyrdes.

2°. Naar Linierne ere udtrykte i Tal, er den Lodrette AD Mellemproportional mellem Hypotenusens to Stykker.

3°. Enhver Cathete er Mellemproportional mellem dens Projection paa Hypotenusen og Hypotenusen selv. Thi;






1°. △ ABC og ABD have ∠ B fælles, og hver en ret Vinkel, altsaa ere de ligedannede; ligeledes ABC og ADC, som have ∠ C fælles; fremdeles er $\angle a + \angle b = R = \angle b + \angle \alpha$, altsaa $\angle a = \alpha$; ligeledes $\angle b + \alpha = R = \angle \alpha + \beta$, altsaa $\angle b = \angle \beta$, og △ ABD ligedannet med ADC.

2°. Sammenlignes Trianglerne ABD og ADC, haves

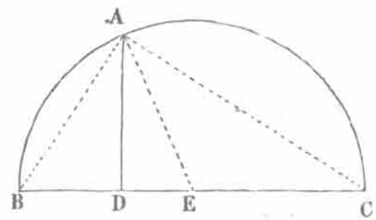
$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

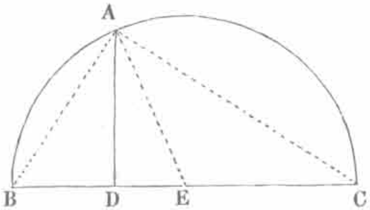
3°. Sammenlignes den hele Triangel med enhver af de smaa, haves

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Anm. Beskrives om BC som Diameter en Cirkel, da gaaer Periferien gjennem A; AD er en lodret Linie fra et Punkt i Periferien paa Diameteren, og AB og AC ere Chorder. AD kaldes da en Ordinat til Diameteren, og Sætningen kan udtrykkes saaledes:



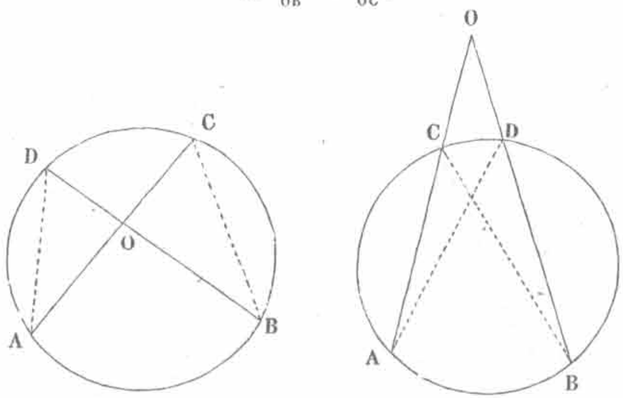


1°. Enhver Ordinat, AD, til en Diameter, BC, er Mellemproportional til dennes to Stykker, BD og DC.

2°. Enhver Chorde, AB, er Mellemproportional til dens Projection paa en Diameter gjennem dens Endepunkt B, og den hele Diameter.

**164.** De Stykker af to rette Linier, AC, DB, som ere indbefattede mellem et Punkt, O, og en Periferi, ADCB, ere omvendt proportionale,

$$ɔ: \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}.$$

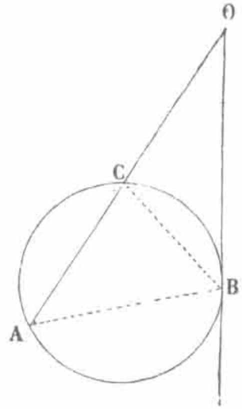


Der er to Tilfælde, eftersom O er indenfor eller udenfor Periferien, men Beviset er i begge Tilfælde det samme. Drages DA og CB, fremkomme to ligedannede Triangler DOA og COB,

thi $\angle O = \angle O$ og $\angle A = \angle B$ (Nr. 110),

altsaa $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$





Sætningen er ogsaa gjeldende, naar den ene Linie OB, tangerer Cirklen, i hvilket Tilfælde Punkterne B og D falde sammen, og Proportionens andet og tredie Led blive ligestore. Trianglerne AOB og COB ere nemlig ogsaa her ligedannede, idet $\angle O = \angle O$, og $\angle A = \angle CBO$ (Nr. 110 og 111), altsaa

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}.$$

Kaldes, som almindeligt skeer, AO Secant, OC dens Stykke udenfor Cirklen, og OB Tangent, da kan Sætningen udtrykkes saaledes:

1°. Stykkerne af to hinanden skjærende Chorder ere omvendte proportionale.

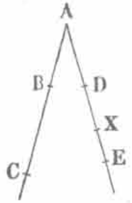
2°. Secanter, som udgaae fra samme Punkt, O, ere omvendt proportionale med deres udenfor Cirklen liggende Stykker.

3°. En Tangent er Mellemproportional mellem en Secant, som udgaaer fra samme Punkt O, og dens udenfor Cirklen liggende Stykke.

Omvendt 1°. Naar paa to rette Linier, som skjære hinanden i A, fire Punkter B, C, D og E have

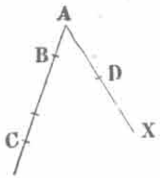
en saadan Beliggenhed, at $AC \times AB = AE \times AD$, da ligge disse fire Punkter i en og samme Cirkellinie. Thi skar en gjennem C, D, B fort Cirkellinie Linien AE i X, havde man $AC \times AB = AX \times AD$, men der er givet $AC \times AB = AE \times AD$, hvoraf vilde følge $AX \times AD = AE \times AD$, eller $AE = AX$; urimeligt.

Omvendt 2°. Naar paa to rette Linier, som skjære hinanden i A, fire Punkter B, C, D og E have en saadan Beliggenhed, at AC × AB = AE × AD, da ligge disse fire Punkter i en og samme Cirkellinie.




Thi skar en gjennem C, B og D ført Cirkellinie Linien AE i X, havde man AC × AB = AX × AD, men der er givet AC × AB = AE × AD.

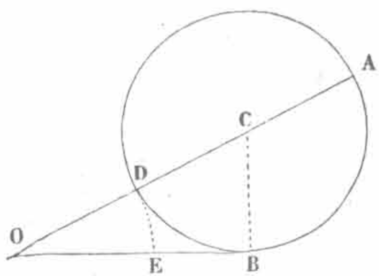
Man vilde altsaa faae AX × AD = AE × AD, eller AX = AE; urimeligt.




Omvendt 3°. Naar paa to rette Linier, som skjære hinanden i A, tre Punkter B, C, D, have en saadan Beliggenhed, at $\overline{AD}^2 = AC \times AB$, da vil en gjennem B, C, D ført Cirkellinie berøre Linien AD. Thi skar den AD f. Ex. i X, havde man AD × AX = AC × AB, hvoraf AD = AX; urimeligt.

Anm. Sætningen om Tangenten frembyder det særegne Tilfælde, at:

Secanten AO gaaer igjennem Centrum, og Tangenten OB er lig Diameteren.






Af $\frac{AO}{OB} = \frac{OB}{OD}$ følger, da

$$DA = OB,$$

$$\frac{AO}{DA} = \frac{DA}{OD},$$

AO siges at være delt i yderste og mellemste Forhold, idet en hvilkensomhelst Størrelse er delt i yderste og mellemste Forhold, naar en af dens to Dele er Mellemproportional mellem hele Størrelsen og den anden Del, som altsaa maa være den mindste Del.

Af $\frac{AO}{OB} = \frac{OB}{OD}$ følger endvidere

$$\frac{OA - OB}{OB} = \frac{OB - OD}{OD}, \text{ eller}$$

$$\frac{DO}{OB} = \frac{OB - OD}{OD}; \text{ afsættes } OE = OD,$$

haves $\frac{OE}{OB} = \frac{EB}{OE}$, eller $\frac{OB}{OE} = \frac{OE}{EB}$,

altsaa OB er ogsaa delt i yderste og mellemste Forhold.

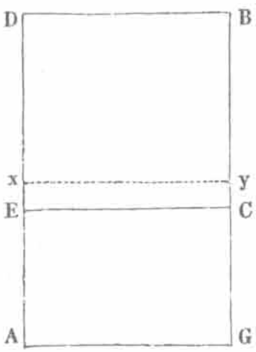
# *Femte Afdeling.*

## Retliniede Figurers Fladeindhold.

**165.** En Flades Udstrækning kaldes dens *Fladeindhold*. Forat kunne maales ɔ: udtrykkes i Tal, maa denne Udstrækning henføres til en Enhed. Den bekvemmeste og almindeligt antagne Enhed er *Qvadratet*, construeret paa en Side, der er lig Længdeenheden. Idet man istedetfor Udstrækningen sætter dens Maal, kalder man Forholdet mellem en Flades Udstrækning og Fladen af et Qvadrat, construeret paa Linieenheden, *Fladeindhold*.

**166.** *To Rectangler med ligestor Grundlinie og Høide ere ligestore*; thi de ensliggende Sider og Vinkler ere stykkevis ligestore.

### § 1. Udmaaling af retliniede Figurer.




**167.** *To Rectangler*, AB og AC, *som have ligestor Grundlinie*, AG, *forholde sig som deres Høider*, AD, AE.

Lægges Grundlinierne paa hinanden, da tage Sidelinierne samme Retning. Der vil med Hensyn til Høiderne indtræffe to Tilfælde.

I. AD *commensurabel med* AE. Er det fælles Maal, $F$, indeholdt $\alpha$ Gange i AD, og $\beta$ Gange i AE, da haves



$$\frac{AD}{AE} = \frac{\alpha F}{\beta F} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Drages, gjennem de derved fremkomne Delingspunkter, Linier parallele med AG, da bliver AB derved delt i $\alpha$, og AC i $\beta$ ligestore Rectangler, af hvilke hvert være $= R$, altsaa

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\alpha \,.\, R}{\beta \,.\, R} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Forbindes disse to Proportioner, fremkommer:

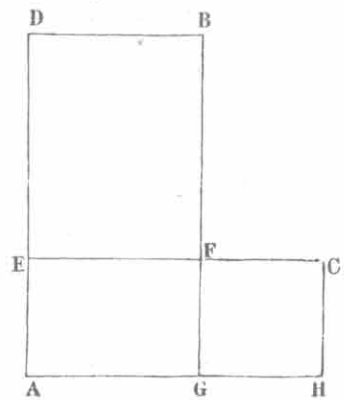
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}.$$

II. AD *incommensurabel med* AE. Proportionens Rigtighed bevises som i Nr. 144.

Da en Rectangels Grundlinie kan gjøres til Høide, og omvendt, saa indsees, at:

*To Rectangler med ligestor Høide ere proportionale med deres Grundlinier.*

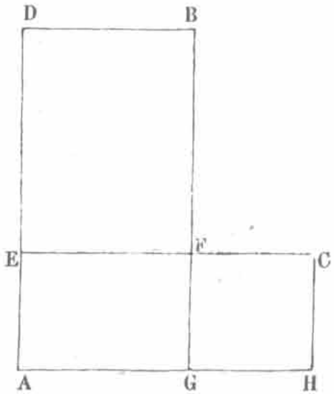
**168.** *Forholdet mellem to hvilkesomhelst Rectangler*, AB, AC, *er ligt Forholdet mellem deres Grundlinier, multipliceret med Forholdet mellem deres Høider.*




Rectanglerne kunne stilles saaledes, at de have en Vinkel A tilfælles. Lad dette være skeet, og lad F være GB's Skjæringspunkt med EC, forlænget om det er nødvendigt, da haves

$\frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AE}$, formedelst fælles Grundlinie AG; og

$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AH}$, formedelst fælles Høide AE.




Multipliceres disse to Proportioner, og bortdivideres AF, haves

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \times \frac{AG}{AH}.$$

Anm. Antages, at man med en bestemt Linieenhed har udmaalt Grundlinierne og Høiderne, da kunne disse Linier fremstilles ved deres Længde, i abstracte Tal. Er saaledes AD fremstillet ved Tallet $H$, AG ved $G$, AE ved h og AH ved g, da faaes $\frac{AB}{AC} = \frac{H.G}{h.g}$, som læses:

*To Rectangler forholde sig som Producterne af deres Grundlinier og Høider.* Men man maa vel erindre, at $H.G$ er Productet af to abstracte Tal, og ikke af to Linier — hvilket ikke giver Mening.

**169.** *Sammenlignes en hvilkensomhelst Rectangel* R, *hvis Høide og Grundlinie ere* $H$ og $G$, *med et Qvadrat* Q, *hvis Høide og Grundlinie ere* h og g, haves $\frac{R}{Q} = \frac{H.G}{h.g}$.

Antages nu, at h = g er Linieenheden, og at altsaa Fladeindholdet af Qvadratet Q er Fladeenhed, da bliver Proportionen til

$$R = H.G.$$

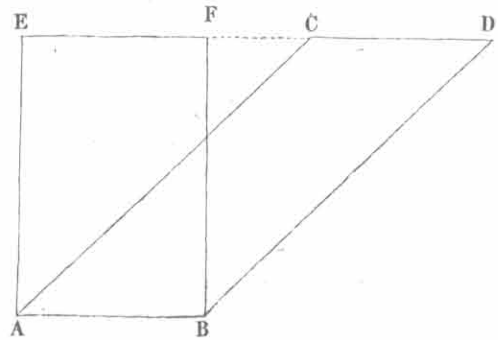
ɔ: *Enhver Rectangel har til Maal Productet af dens Grundlinie og Høide*, det vil sige: at det Tal, som angiver Forholdet af Rectanglens Fladeindhold til Fladeenheden, er ligt Productet af de Tal, som angive Grundliniens og Høidens Forhold til Linieenheden. Er $G$ saaledes = 5, og $H$ = 9, og $G$ deles i 5 ligestore Dele, og $H$ i 9 indbyrdes, og med de forrige ligestore, Dele, og man igjennem Delingspunkterne drager Linier parallele med Rectanglens Sider, da vil den være opløst



i 5 × 9 = 45 Qvadratenheder. Deraf kommer det, at man ofte kalder to Tals Product deres *Rectangel*. En Rectangels Grundlinie og Høide betegnes ofte med det fælles Navn *Dimension*, og da siger man: *En Rectangels Maal er Productet af dens to Dimensioner.*

*Ethvert Qvadrat har til Maal den anden Potens af dets Side; deraf Navnet Qvadrat for at betegne anden Potens af et Tal.*

**170.** *Ethvert Parallelogram*, ABCD, *er ligt en Rectangel paa samme Grundlinie og med samme Høide.*




Forlænges Side CD, og gjennem Endepunkterne af den modsatte Side, AB, opreises de Lodrette AE, BF, som ende sig i E og F, og drages fra den hele derved fremkomne Figur, ABDE, Trianglen ACE, haves Parallelogrammet AD; drages derimod Trianglen BDF fra samme Figur, da haves Rectanglen AF. Men de to Triangler ere congruente, idet AE = BF, AC = BD, og ∠ EAC = ∠ FBD; altsaa er Parallelogrammet AD ligt Rectanglen AF, med samme Grundlinie, AB, og samme Høide, AE.

Heraf følger:

*Ethvert Parallelogram har til Maal Productet af dets Grundlinie og Høide*, hvoraf atter følger, at:

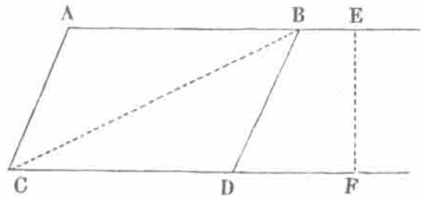
1°. To hvilkesomhelst Parallelogrammer forholde sig som Producterne af deres Grundlinie og Høide.

2°. Have de ligestore Grundlinier, forholde de sig som deres Høider.

3°. Have de ligestore Høider, forholde de sig som deres Grundlinier.

4°. To hvilkesomhelst Parallelogrammer med samme Grundlinie og samme Høide ere ligestore.

**171.** Enhver Triangel, CBD, er lig Halvdelen af en Rectangel med samme Grundlinie og Høide.



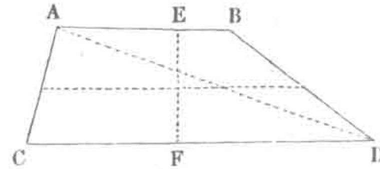

Drages gjennem C Linien CA, parallel med DB, og gjennem B Linien AB parallel med CD, haves Parallelogrammet AD, dobbelt saa stort som CBD, og med samme Grundlinie og Høide som dette; men Parallelogrammet er ligt en Rectangel med samme Grundlinie og Høide, altsaa er Sætningen beviist.

Heraf følger:

Enhver Triangel har til Maal Halvdelen af Productet af en hvilkensomhelst af dens Sider, tagen til Grundlinie, og dens tilsvarende Høide.

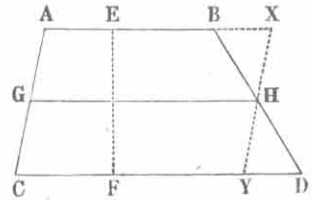
**172.** Et Trapez har til Maal Productet af dets Høide og den halve Sum af dets to parallele Sider; eller: Productet af Høiden og den Linie, som forener Midtpunkterne af de to ikke-parallele Sider.






1°. Høiden være EF. Triangel ACD $=$ EF . $\frac{1}{2}$ CD, Triangel ABD $=$ EF . $\frac{1}{2}$ AB; adderes, da

$$ABCD = EF\left(\tfrac{1}{2}\,CD + \tfrac{1}{2}\,AB\right).$$

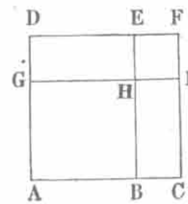



2°. Drages gjennem H og G, Midtpunkterne af BD og AC, Linien GH, da er den parallel med AB og CD (Nr. 144, omv.) Drages gjennem H XY parallel med AC, da ere Trianglerne HYD og BHX congruente, idet BH $=$ HD, $\angle$ H $= \angle$ H og $\angle B = \angle D$, altsaa Trapez ABCD $=$ Parallelogram AXYC $=$ CY . EF $=$ GH . EF.

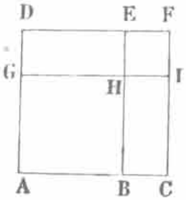
**173.** Da enhver Polygon kan deles i Triangler, saa faaes let Fladeindholdet af Polygonen, naar man kan udmaale hver Triangels Grundlinie og Høide.

## § 2. Fladeindholds Sammenligning.

**174.** Qvadratet construeret paa Summen, AC, af to Linier, AB, BC, er ligt Qvadratet construeret paa den første, plus Qvadratet paa den anden, plus det Dobbelte af Rectanglen construeret af disse to Linier.




Paa AC construeres et Qvadrat, ACDF; AG afsættes $=$ AB. Parallelerne GI og EB drages. Det sees klart, at Qvadratet ACDF er opløst i to Qvadrater, med Sider AB og BC, og to Rectangler, hvis Dimensioner ere AB og BC.



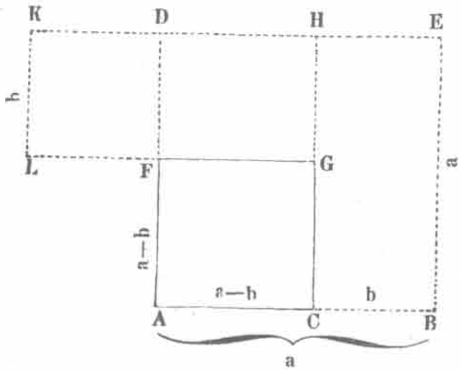

Da et Qvadrats Areal er ligt anden Potens af en Side, og en Rectangel er lig Productet af dens Grundlinie og Høide, kan Sætningen, naar AB, BC og AC udtrykkes i rene Tal, fremſtilles

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB\,.\,BC,$$

og ſættes AB = a, BC = b, haves

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab.$$

**175.** Qvadratet conſtrueret paa Differenſen, AC, af to Linier, AB, BC, er ligt Qvadratet paa AB, plus Qvadratet paa BC, minus det Dobbelte af Rectanglen conſtrueret af disſe to Linier.



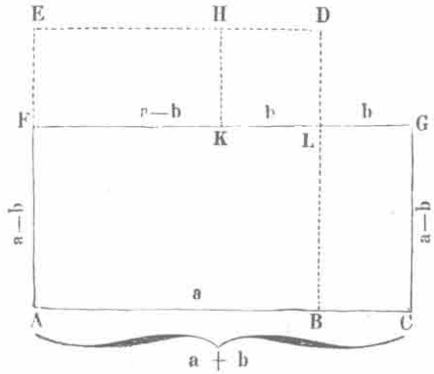

Paa AB og AC conſtrueres Qvadraterne ABDE og ACFG. CG forlænges til H. Paa DF = CB conſtrueres Qvadratet LFKD.

Hele Figuren beſtaaer af Qvadratet, conſtrueret paa AB (ABDE), og Qvadratet conſtrueret paa CB (LFKD). Den beſtaaer ogſaa af Qvadratet, conſtrueret paa AC (ACFG) og to Rectangler, conſtruerede af AB og CB (CBHE og KLGH). Sættes AB = a, BC = b, haves

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.$$

**176.** Rectanglen conſtrueret af Summen, AC, og Differenſen, AF, af to Linier, AB, BC, er lig Qvadratet, conſtrueret paa den ſtørre, minus Qvadratet, conſtrueret paa den mindre Linie.

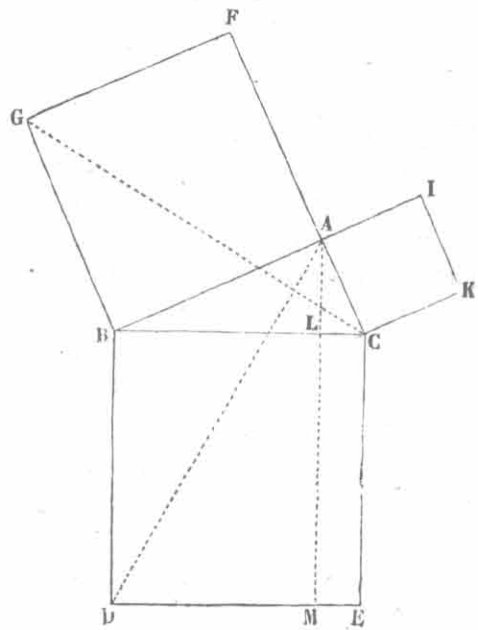


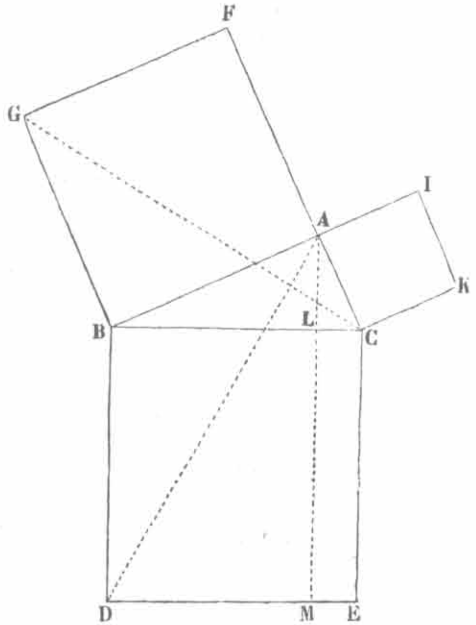



Paa AB conſtrueres et Qvadrat, ABED; EF og HD afſættes = BC. Rectangel EFHK er lig LBCG, AFGC + FEHK + HKLD = ABED + LBCG, altſaa AFGC + HKLD = ABED, eller AFGC = ABED − HKLD. Sættes AB = a, BC = b, haves

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2.$$

**177.** Qvadratet, BCDE, conſtrueret paa Hypotenuſen, BC, af en retvinklet Triangel, ABC, er ligt Summen af Qvadraterne, ABFG, ACIK, conſtruerede paa de to andre Sider, AB, AC.






1ste Bevis.

Vi antage Qvadraterne construerede udenfor Trianglen, nedfælde, fra A, den rette Vinkels Toppunkt, en Lodret, AL, paa Hypotenusen, indtil den møder DE i M, og have derved Qvadratet BCDE delt i to Rectangler, BM og CM. Dernæst drages AD og GC. Vinklerne ABD og GBC ere ligestore, som bestaaende hver af en ret Vinkel og den fælles Vinkel ABC. Da fremdeles AB = BG, og BD = BC, som Sider i samme Qvadrat, saa haves Triangel DBA = Triangel CBG. Nu er Triangel BDA Halvdelen af Rectanglen BM (Nr. 171), som havende samme Grundlinie, BD, og samme Høide, BL; fremdeles Trianglen CGB Halvdelen af Qvadratet AG, som havende samme Grundlinie, BG, og samme Høide, BA, altsaa

Rectangel BM = Qvadrat AG. Netop paa samme Maade bevises, at



Rectangel CM = Qvadrat AK, og da Rectangel BM + Rectangel CM = Qvadrat BE, følger:

Qvadrat BE = Qvadrat AG + Qvadrat AK.

2det Bevis.

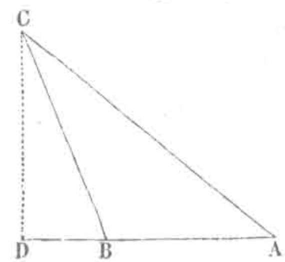
Nedfældes, fra den rette Vinkels Toppunkt, den Lodrette AL, da haves af Nr. 161:

$$\overline{AB}^2 = BC \times BL$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times LC,$$

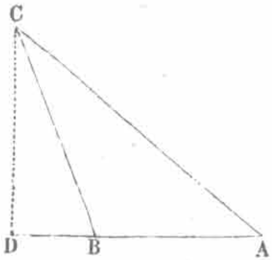
som, adderede, give $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = BC\,(BL + LC) = \overline{BC}^2$.

Anm. I. Af 1ste Bevis læres, at Qvadratet paa AB er ligt Rectanglen BM, og Qvadratet paa AC ligt Rectanglen CM; men disse Rectangler, som have samme Høide, forholde sig som deres Grundlinier, altsaa haves ogsaa: $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BL}{CL}$, det er: Catheternes Qvadrater forholde sig som deres Projectioner paa Hypotenusen. Paa samme Maade bevises at: Hypotenusens Qvadrat forholder sig til en Cathetes Qvadrat som Hypotenusen til Cathetens Projection paa Hypotenusen. Disse Sætninger udledes ogsaa let af Ligningerne i 2det Bevis.

Anm. II. Er AB = AC, da er $\overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$, altsaa er den anden Potens af et Qvadrats Diagonals Talværdi dobbelt saa stor som den anden Potens af en Sides, og Diagonalen forholder sig til Siden, som $\sqrt{2}$ til 1.

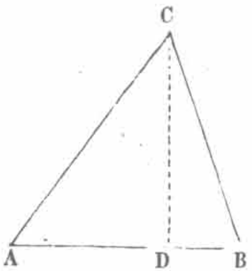



**178.** I en stumpvinklet Triangel, ABC, er Qvadratet af den Side, CA, som ligger overfor den stumpe Vinkel, B, lig Summen af de to øvrige Siders Qvadrater, plus det dobbelte Product af en af disse Sider, AB, og Projectionen, BD, af den anden Side, BC, paa Forlængningen af den første.



Thi $\overline{CA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$;
men $AD = AB + BD$, altsaa
$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,AB \times BD$;
indsættes denne Værdi for $\overline{AD}^2$ i første Ligning, haves, naar erindres, at $\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2$, Sætningen: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BD$.

**179.** I en hvilkensomhelst Triangel, ABC, er Qvadratet af en Side, CB, som ligger overfor en spids Vinkel, lig Summen af de to øvrige Siders Qvadrater, minus det dobbelte Product af en af disse Sider, AB, og Projectionen, AD, af den anden Side, AC, paa AB (forlænget om nødvendigt).



Som før haves $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$.

Eftersom den Lodrette, CD, falder indeni eller udenfor Trianglen, haves

$$BD = AB - AD, \text{ eller } BD = AD - AB.$$

Qvadreres, haves i begge Tilfælde

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,AB \times AD,$$

hvilken Værdi, indsat, som i Nr. 178, giver

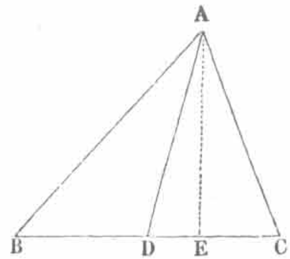
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB \times AD.$$

Omvendt. En Vinkel, A, i en Triangel er ret, spids eller stump, eftersom den overfor liggende Sides Qvadrat er lig, mindre, eller større end Summen af de to andre Siders Qvadrater.



Er AB = 3, AC = 4, BC = 5, da retvinklet;
. . . . . . . . 2, . . . . 3, . . . . 4, da stumpvinklet;
. . . . . . . . 4, . . . . 5, . . . . 6, da spidsvinklet;
. . . . . . . . 5, . . . . 12, . . . . 13, da retvinklet, o. s. v.

**180.** I en hvilkensomhelst Triangel, ABC, er Summen af to Siders, ABs, ACs, Qvadrater lig det Dobbelte af Qvadratet af Halvparten af den tredie Side, BC, plus det Dobbelte af Qvadratet af den Linie, AD, (Medianen) som forbinder denne tredie Sides Midtpunkt, D, med den modstaaende Vinkelspids.



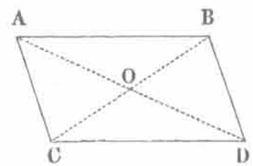
Nedfældes den Lodrette AE, haves
efter Nr. 178: $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,BD\,.\,DE$,
efter Nr. 179: $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,CD\,.\,DE$.

Adderes, og erindres, at $BD = CD$, da haves

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{BD}^2 + 2\,\overline{AD}^2.$$

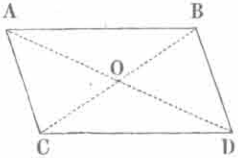
Var Trianglen ligebenet, da kunde Sætningen umiddelbart udledes af Nr. 177.

Kaldes de tre Triangelsider a, b, c, og Medianen til Midten af a sættes $= \alpha$, haves $b^2 + c^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2\alpha^2$. Anvendes samme Ligning paa de to andre Medianer, $\beta$ og $\gamma$, faaes $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.



**181.** I ethvert Parallelogram, ABCD, er Summen af Sidernes Qvadrater lig Summen af Diagonalernes Qvadrater.

Da Diagonalerne halvere hinanden, haves af Nr. 180, naar Trianglerne CAB og CDB betragtes,




$$\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 = 2.\overline{AO}^2 + 2.\overline{CO}^2.$$
$$\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = 2.\overline{OD}^2 + 2.\overline{CO}^2;$$

adderes, og erindres at: $2\,\overline{AO}^2 + 2\,\overline{OD}^2 = 4\,\overline{AO}^2 = (2\,AO)^2 = \overline{AD}^2$, og at $4\,\overline{CO}^2 = (2\,CO)^2 = \overline{CB}^2$, haves

$$\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2.$$

**182.** 1°. To hvilkesomhelst Triangler, T og t, forholde sig som Productet af deres Høide og Grundlinie (H, G og h, g).

2°. Have de ligestore Høider, forholde de sig som deres Grundlinier.

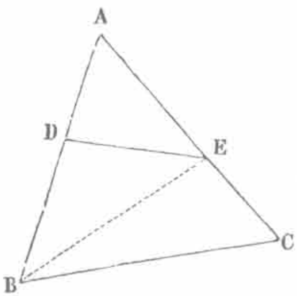
3°. Have de ligestore Grundlinier, forholde de sig som deres Høider.

1°. Af Nr. 171 haves: $T = \frac{1}{2}\,G.H$; $t = \frac{1}{2}\,g.h$. Divideres, da $\frac{T}{t} = \frac{G.H}{g.h}$.

2°. Er $H = h$, haves $\frac{T}{t} = \frac{G}{g}$.

3° Er $G = g$, da $\frac{T}{t} = \frac{H}{h}$.

**183.** Fladeindholdet af to Triangler, ABC, ADE, som have en Vinkel A fælles, er proportionalt med Rectanglerne af de Sider, som indeslutte den ligestore Vinkel.




Efterat de ligestore Vinkler ere bragte til Dækning, drages BE, og da kunne Trianglerne ABC, ABE betragtes som havende til Grundlinier AC og AE. Deres fælles Høide vil da være en Lodret fra det fælles Toppunkt, B, paa AC; altsaa ere de proportionale med Grundlinierne, eller



$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

Sammenlignes ligeledes ABE og ADE, haves

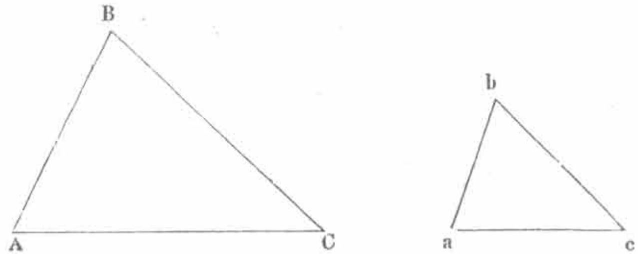
$$\frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

Multipliceres disse to Proportioner, og bortdivideres ABE, haves

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}.$$

Anm. Heraf følger: Fladeindholdet af to Parallelogrammer, som have en Vinkel fælles, er proportionalt med Rectanglerne af de Sider, som indeslutte den ligestore Vinkel.

**184.** Fladeindholdet af ligedannede Triangler, ABC, abc, er proportionalt med Qvadratet af et Par ensliggende Sider.




Da Trianglerne ere ensvinklede, haves efter forrige Sætning

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB \times AC}{ab \times ac}.$$

Da Trianglerne ere ligedannede, haves fremdeles

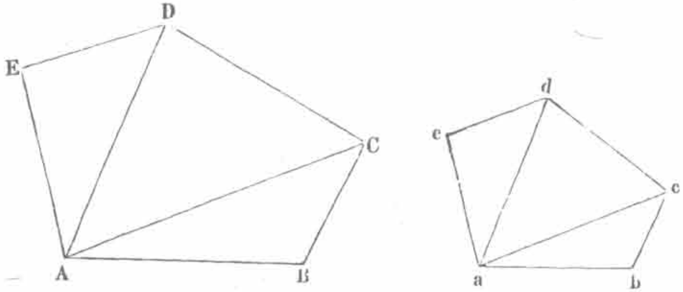
$$\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab}.$$

Multipliceres disse to Proportioner Led for Led, og bortdivideres AC af de foregaaende, og ac af de efterfølgende Led, haves

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2} \text{ eller } = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{ac}^2} \text{ eller } = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2}.$$

**185.** Fladeindholdet af ligedannede Polygoner forholder sig som Qvadratet paa et Par ensliggende Sider, eller Diagonaler.

Deles Polygonerne paa samme Maade i Triangler, da ere




disse ligedannede (Nr. 154) og forholde sig som Qvadraterne paa de ensliggende Sider, eller:

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},\quad \frac{ACD}{acd} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2},\quad \frac{ADE}{ade} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2}.$$

Men Polygonernes Ligedannethed giver

$$\frac{AB}{ab} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de},\ \text{hvoraf}$$

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{cd}^2} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{de}^2};$$

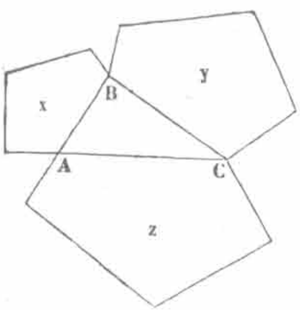
Forholdet mellem de tilsvarende Triangler i begge Polygoner er altsaa overalt ligestort, eller

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{ACD}{acd} = \frac{ADE}{ade},\ \text{hvoraf følger}$$

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{abc + acd + ade} = \frac{ABC}{abc}\ \text{eller}$$

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}.$$

**186.** Construeres paa Siderne af en retvinklet Triangel, ABC, som ensliggende, tre ligedannede Figurer, x, y, z, da vil Figuren, construeret paa Hypotenusen, være lig Summen af Figurerne, construerede paa begge Catheterne.





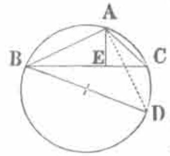

Nr. 185 giver $\frac{x}{y} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$,

hvoraf $\frac{x+y}{y} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{\overline{BC}^2}$.

Fremdeles $\frac{z}{y} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$, altsaa $\frac{x+y}{z} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$.

Nu er $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, altsaa $x + y = z$.

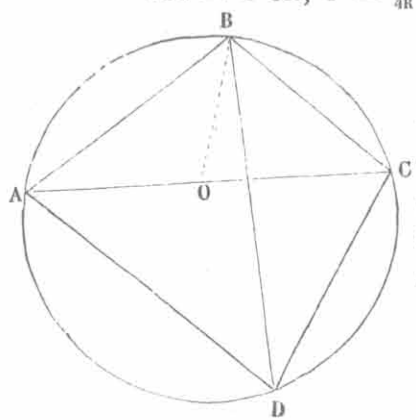
**187.** I enhver Triangel er Rectanglen af to Sider, AB, AC, lig Rectanglen construeret af den til den tredie Side svarende Høide, AE, og den omskrevne Cirkels Diameter, BD.



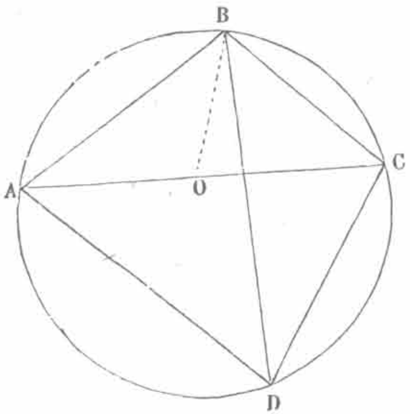

Drages AD, da er Triangel AEC ligedannet med BAD; thi begge ere retvinklede, og $\angle C = D$; deraf $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{AB}$, eller $AC \times AB = AE \times BD$.

Anm. Fremstille, i denne Ligning, AC, AB osv. Liniernes Talværdi, og multipliceres paa begge Sider med det Tal, der udtrykker BC, haves $AC \times AB \times BC = AE \times BD \times BC$. Istedetfor $AE \times BC$ kan sættes det Dobbelte af Trianglens Areal; altsaa: I enhver Triangel er Productet af de tre Sider ligt Trianglens Areal, multipliceret med det Dobbelte af den omskrevne Cirkels Diameter, eller: kaldes Trianglens Areal T, dens tre Sider a, b, c, og den omskrevne Cirkels Radius R, haves

$$abc = 4\,TR;\ T = \frac{abc}{4R};\ R = \frac{abc}{4T}.$$




**188.** I enhver indskreven Firkant, ABCD, er Productet af Diagonalerne ligt Summen af de modstaaende Siders Product,




ɔ: AC × BD = AB × CD + BC × AD.

Drages BO saaledes, at ∠ ABO = ∠ CBD,

og altsaa ∠ ABD = ∠ OBC,

da ere Trianglerne ABD og OBC, i hvilke ogsaa ∠ ADB = ∠ OCB, ligedannede, altsaa:

$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{OC}$, eller BD × OC = AD × BC . . . . (I).

Endvidere ere Trianglerne BCD og ABO ligedannede, idet ∠ A = ∠ D, og ∠ ABO = ∠ DBC, altsaa

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AO}$, eller BD × AO = DC × AB . . . (II).

Adderes I og II, haves

BD (AO + OC) = AD × BC + DC × AB,

eller BD × AC = AD × BC + DC × AB.

**189.** I enhver indskreven Firkant, ABCD, forholde Diagonalerne sig som Summen af Rectanglerne construerede af de Sider, der have Endepunkter fælles med dem: det er:

$$\frac{AC}{DB} = \frac{AB.\ AD + BC.\ DC}{AB.\ BC + AD.\ DC}.$$

Betragt først ABCD som bestaaende af ABC og ADC, da haves, efter Nr. 187, Anm., naar Diameter sættes = d,



$$\left.\begin{array}{l} AB.\ BC.\ AC = 2\ d.\ ABC \\ AD.\ DC.\ AC = 2\ d.\ ADC \end{array}\right\}\ \text{Adderes, da}$$

(1) . . . AC (AB. BC + AD. DC) = 2 d. ABCD.

Betragt dernæst ABCD som bestaaende af ABD og DBC, da haves

$$\left.\begin{array}{l} AB.\ AD.\ DB = 2\ d.\ ADB \\ BC.\ DC.\ DB = 2\ d.\ DBC \end{array}\right\}\ \text{Adderes, da}$$

(2) . . . DB (AB. AD + BC. DC) = 2 d. ABCD.

Af (1) og (2) følger

AC (AB. BC + AD. DC) = DB (AB. AD + BC. DC),

$$\frac{AC}{DB} = \frac{AB.\ AD + BC.\ DC}{AB.\ BC + AD.\ DC}.$$

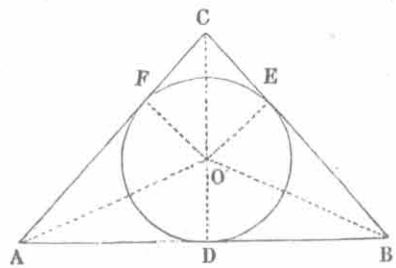
Anm. Kaldes en indskreven Firkants paa hinanden følgende Sider a, b, c, d, og dens Diagonaler $\alpha$ og $\beta$, haves efter Nr. 188,

$\alpha\beta = ac + bd$ og, efter 189, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

Multipliceres disse to Ligninger, haves

$$\alpha^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Divideres, da $\beta^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.




**190.** En Triangels Fladeindhold er ligt Productet af dens Perimeter og det Halve af Radius til den indskrevne Cirkel.

Thi Trianglen AOB = ½ AB × OD

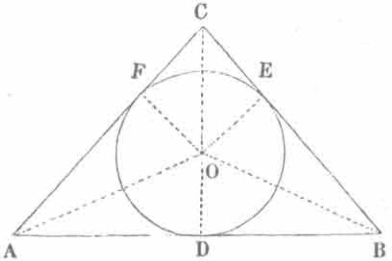
. . . . . . . . COB = ½ CB × OE

. . . . . . . . AOC = ½ AC × OF,

altsaa Trianglen

ACB = ½ AB × OD + ½ CB × OE + ½ AC × OF,

eller, da OD = OE = OF,

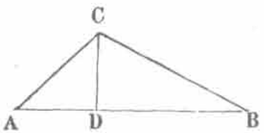



Trianglen ACB $= \frac{1}{2}$ OD (AB + CB + AC)

. . . . . . . . . $= \frac{1}{2}$ OD $\times$ Perimetren.

Kaldes Perimetren $2s$, Radius til indskreven Cirkel $r$, og Trianglen $T$, haves $T = rs$.

**191.** En Triangels Areal er ligt Qvadratroden af det Product, som udkommer ved at multiplicere dens halve Perimeter med de tre Factorer, som erholdes ved fra den halve Perimeter at drage hver af Siderne.




Vi udtrykke først en Høide i Trianglen ABC i dens tre Sider: BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$.

Tages AB til Grundlinie, og CD $= h$ til Høide, og sættes AD $= d$, da giver $\triangle$ ACD

$$h^2 = b^2 - d^2.$$

$\triangle$ ABC giver efter Nr. 179

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,cd$$

$$\text{altsaa } d = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$\text{og } h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4\,b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

$$= \frac{(2\,bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2\,bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

$$= \frac{[(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]}{4c^2}$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)\,(a + b - c)\,(a + c - b)}{4c^2}.$$

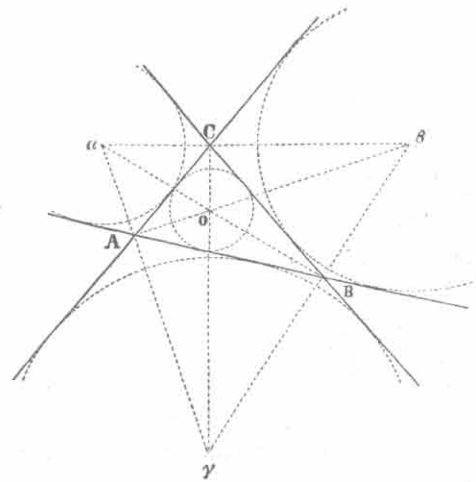


Sættes, for Kortheds Skyld, $a + b + c = 2\,s$, altsaa $b + c - a = 2\,(s - a)$; $a + b - c = 2\,(s - c)$; $a + c - b = 2\,(s - b)$, da haves $h^2 = \frac{4}{c^2}.\ s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)$, altsaa $h = \frac{2}{c} \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$. Multipliceres paa begge Sider med $\frac{c}{2}$, haves

$$h.\ \frac{c}{2} = ABC = T = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

Anm. Kaldes Radius til den om $\alpha$ beskrevne Cirkel $r_1$, haves, da ABC (= T) $= \alpha AB + \alpha CB - \alpha AC$,

$$T = \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}ar_1 - \tfrac{1}{2}br_1 = (s - b)\,r_1.$$




Kaldes Radierne til de om $\beta$ og $\gamma$ beskrevne Cirkler $r_2$ og $r_3$, faaes paa samme Maade:

$$T = (s - a)\,r_2;\ T = (s - c)\,r_3.$$

Da fremdeles (190) $T = sr$, haves

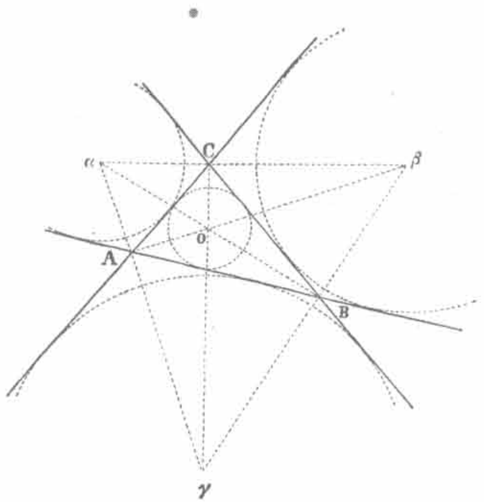
$$T^4 = s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)\,r\ r_1\ r_2\ r_3,$$

og da $T^2 = s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)$ (191),

udkommer: $T^2 = r\ r_1\ r_2\ r_3$,

$T = \sqrt{r\ r_1\ r_2\ r_3}$, det er:

Trianglens Areal er ligt Qvadratroden af Productet




af Radierne til den indvendige og de udvendige Berørings=Cirkler.

De fire Værdier for T give:

$$s = \frac{T}{r},\ s - b = \frac{T}{r_1},\ s - a = \frac{T}{r_2},\ s - c = \frac{T}{r_3}.$$

Adderes de tre sidste Ligninger, haves:

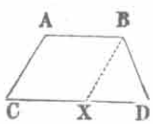
$$3\,s - (a + b + c) = \frac{T}{r_1} + \frac{T}{r_2} + \frac{T}{r_3},\ \text{eller:}$$

$$s = \frac{T}{r_1} + \frac{T}{r_2} + \frac{T}{r_3}.$$

Forbindes denne med første Ligning, og divideres med T, udkommer

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

**192.** At udtrykke Arealet af et Trapez i dets fire Sider, AB = a, BD = b, DC = c og AC = d. Sæt den fra B paa DC nedfældede Høide = h.




Efter Nr. 172 haves: Trapez ABCD $= \frac{a+c}{2}\,.\,h$. Efter Nr. 191 haves, naar Triangel BXD, hvori BD = b, DX = c — a og XB = d, betragtes:



$$h^2 = \frac{(b + c - a + d)\,(b + c - a - d)\,(d + c - a - b)\,(d + b - c + a)}{4\,(c - a)^2}$$

Sættes $a + b + c + d = 2p$, faaes

$$h^2 = \frac{2\,(p - a).\,2\,(p - a - d).\,2\,(p - a - b).\,2\,(p - c)}{4\,(c - a)^2}$$

$$h = \frac{2}{c - a}\sqrt{(p - a)\,(p - c)\,(p - a - d)\,(p - a - b)},\ \text{og}$$

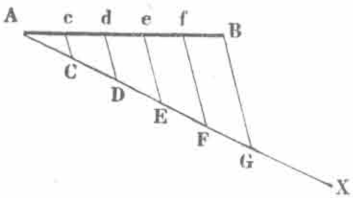
da Trapez ABCD $= \frac{a+c}{2}\,.\,h$, haves

Trapez ABDC $= \frac{a+c}{c-a}\sqrt{(p - a)\,(p - c)\,(p - a - d)\,(p - a - b)}$.

# Sjette Afdeling.

## Opgaver.

**193.** At dele en given ret Linie, AB, i ligestore Dele f. Ex. 5.




Gjennem et af Endepunkterne, A, drages, under passende Vinkel, en ret Linie AX. Paa denne tages, fra A, en vis Længde, AC (omtrent $\frac{1}{5}$ af AB), som afsættes 5 Gange paa AX. Fra sidste Delingspunkt, G, drages en ret Linie til B, og gjennem de øvrige, F, E, D, C, Paralleler med BG. AB vil da være delt i 5 ligestore Dele.

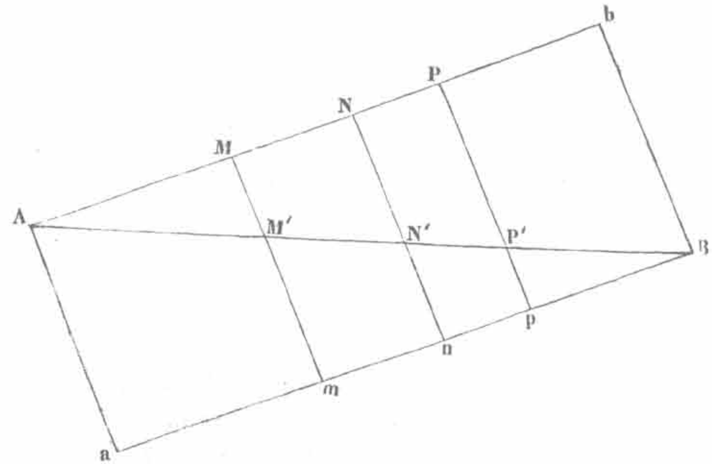
**194.** At dele en given ret Linie AB i Dele, proportionale med de givne rette Linier, hvis Længde = $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

Gjennem A drages en ret Linie. Paa denne afsættes AM $= \alpha$, MN $= \beta$, NP $= \gamma$, Pb $= \delta$. b forbindes med B, og gjennem P, N, M drages Parallelerne $PP_1$, $NN_1$, $MM_1$. AB er da delt paa den forlangte Maade.

Anm. For at undgaae Constructionen af mange Paralleler, er følgende Fremgangsmaade at foretrække:

Gjennem Punkterne A, B drages, i modsat Retning, Parallelerne Ab, Ba. Paa den ene, Ab, afsættes de givne rette

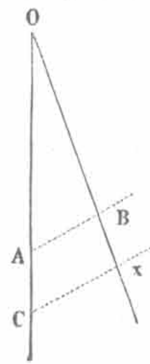





Linier, AM, MN, NP, Pb, og paa den anden de samme, men i omvendt Orden, Bp, pn, nm, ma; de rette Linier Aa, Mm, Nn, Pp, bB drages. Derved er AB delt paa den forlangte Maade; thi da aM, mN, nP og pb ere Parallelogrammer, saa ere (Nr. 144) Delene af AB proportionale med dem af Ab, eller Ba.

Samme Fremgangsmaade kan anvendes ved forrige Opgave.

**195.** At finde fjerde proportionale Linie, x, til tre givne, a, b, c, saaledes at $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.




Under en vilkaarlig Vinkel drages to rette Linier, dernæst afsættes OA = a, OB = b, OC = c; AB drages, og Cx parallel med samme; da er Ox den forlangte, thi (Nr. 144. Anm.)

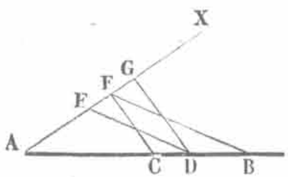
$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{Ox}$, eller $\frac{a}{b} = \frac{c}{Ox}$, altsaa Ox = x.

Man kan ogsaa afsætte AC = c, da var Bx = x.

**196.** At finde en tredie proportional Linie, x, til to givne a, b, saaledes at $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

Constructionen som i forrige Nr., naar b sættes = c.

**(197.)** Der er givet en ret Linie, AD, og et Punkt i denne, eller dens Forlængning; der skal findes det til dette Punkt hørende harmoniske Punkt.




1°. Punktet (C) ligger mellem A og D. Drag en vilkaarlig ret Linie AX, og fra et vilkaarligt Punkt i denne, F, en Linie til C, fremdeles DG $\neq$ CF; afsæt EF = FG, drag DE og, gjennem F, en Linie $\neq$ ED, nemlig FB, da ere A, C, D, B fire harmoniske Punkter.

2°. Punktet (B) ligger i Forlængningen af AD.

Drag en vilkaarlig ret Linie AX, og fra et vilkaarligt Punkt, F, i denne Linie, FB, fremdeles DE $\neq$ FB; afsæt FG = FE, drag GD og gjennem F en Linie $\neq$ GD, nemlig FC, da er C det til B hørende harmoniske Punkt; thi Figuren giver

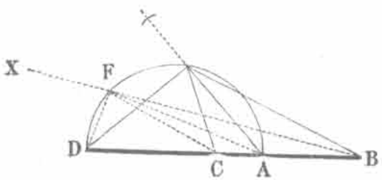
$$\frac{AB}{DB} = \frac{AF}{EF} = \frac{AF}{FG}, \text{ (da } FG = EF\text{), og}$$

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AC}{CD}, \text{ altsaa}$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC}, \text{ eller } AB \,.\, CD = DB \,.\, AC.$$

En anden Construction:

1°. A, D, C givne. Om AD som Diameter beskrives en Halvcirkel; drag fra C en vilkaarlig Linie CF, drag FA, afsæt $\angle$ AFB = CFA, da er B det til C hørende harmoniske Punkt,

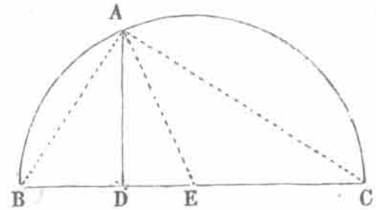





thi: Vinkel AFB = AFC; ligeledes er XFD = DFC, idet hver = 1 R — AFB. Den første Egenskab giver $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$, den anden: $\frac{FB}{FC} = \frac{BD}{DC}$, Nr. 157; altsaa $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

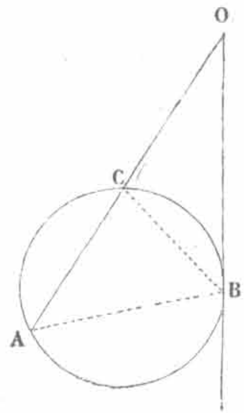
2°. A, D, B givne. Om AD en Halvcirkel; drag fra B en vilkaarlig Linie BF, samt AF, og afsæt $\angle$ AFC = BFA, da er C det søgte Punkt.

**198.** At finde en Mellemproportionallinie mellem to givne rette Linier, a og b.



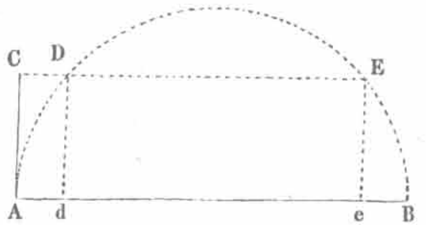

1ste Construction: Afsæt BD = a, DC = b, beskriv om BC som Diameter en Halvcirkel, opreis i D en Lodret, DA; denne vil være den forlangte (Nr. 161, Anm.).

2den Construction: Er a den største af de givne Linier, da afsæt BC = a, BD = b, opreis den Lodrette DA, drag Chorden BA; denne vil være den forlangte (Nr. 161, Anm.).




3die Construction: Afsæt AO = a, OC = b. Beskriv om Resten, AC, en Cirkel; den fra O til samme dragne Tangent, OB, er den forlangte (Nr. 164, 3°).

**(199.)** 1°. At dele en given ret Linie, AB, i to Dele saaledes: at Mellemproportionallinien mellem disse er lig en given Linie, AC.



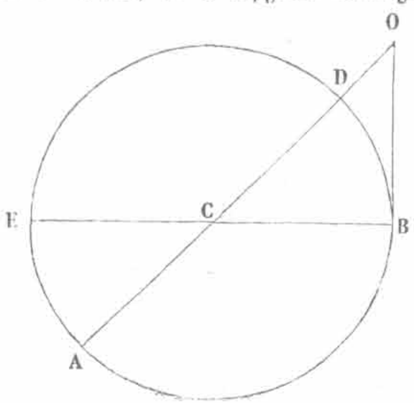

Constr.: Om AB som Diameter beskrives en Halvcirkel; paa AB, i A, opreises den Lodrette AC; gjennem C drages CE, parallel med AB, som skjærer Periferien i D; fra D nedfældes paa AB den Lodrette Dd.

Ad og dB ville være de to forlangte Dele, thi baade haves

$$Ad + dB = AB,$$

og (Nr. 163, 2°) $Ad \times dB = \overline{dD}^2 = \overline{AC}^2$.

I Reglen, det er, naar $AC < \frac{1}{2} AB$, vil CE skjære Periferien i to Punkter D og E, men Opløsningen bliver den samme. Tangerer CE Periferien, det er: er $AC = \frac{1}{2} AB$, da blive Delene ligestore = Radius. Falder CE udenfor Cirklen, det er: er $AC > \frac{1}{2} AB$, da er Opgaven umulig.






2°. At finde to rette Linier, hvis Differens er en given ret Linie, EB, og hvis Mellemproportionallinie er en ret Linie, BO.

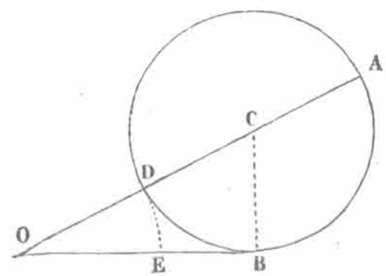
Om EB som Diameter beskrives en Cirkellinie. Paa EB, i B, opreises den Lodrette BO; fra O, gjennem Midtpunktet, drages Secanten OA; da vil OA og OD være de søgte Linier; thi baade er

$$OA - OD = DA = EB,$$

og (Nr. 164, 3°) $OA \times OD = \overline{BO}^2$.

Opgaven er altid mulig.

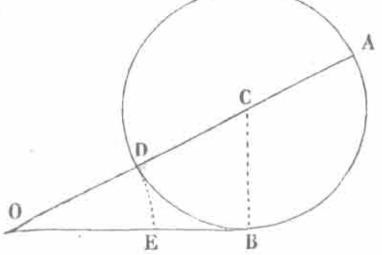
**200.** At dele en given ret Linie, OB, i yderste og mellemste Forhold [saaledes, at naar E er det søgte Delingspunkt, at da $\frac{OB}{OE} = \frac{OE}{EB}$].




Paa OB, i Punktet B, opreises en Lodret $BC = \frac{1}{2} OB$; CO drages; CB afsættes paa OC ved en Cirkelbue BD, beskreven fra Punktet C som Midtpunkt; OD afsættes paa OB ved en Cirkelbue DE, beskreven fra O som Midtpunkt, og Opgaven er løst, thi efter Nr. 164 haves

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OD}, \quad \frac{OA - OB}{OB} = \frac{OB - OD}{OD}.$$

Men $OA - OB = OA - DA$, og $OB - OD = OB - OE$, altsaa $\frac{OD}{OB} = \frac{EB}{OD}$, eller $\frac{OE}{OB} = \frac{EB}{OE}$, hvoraf $\frac{OB}{OE} = \frac{OE}{EB}$.

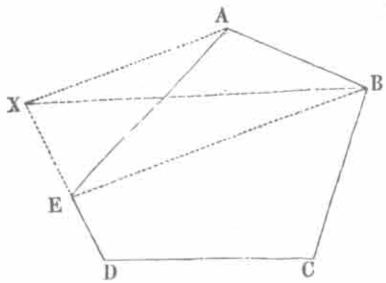



Anm. Sættes OB = a, da er BC = $\frac{1}{2}$ a,

altsaa OC = $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, og

OE = OD = $\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

**201.** At forvandle en hvilkensomhelst Polygon (f. Ex. Femkanten ABCDE) til en ligestor, med een Side mindre (og altsaa tilsidst til en Triangel).




En Diagonal, BE, drages saaledes, at den afskjærer en Triangel; gjennem A drages en Linie parallel dermed; DE forlænges indtil den skjærer den i X, XB drages.

XBCD er den forlangte Firkant = den givne Femkant, thi Trianglerne EAB og EXB ere ligestore, da de have samme Grundlinie, EB, og deres Toppunkter, A, X, i den med Grundlinien parallele AX; og EDCB er fælles for begge.

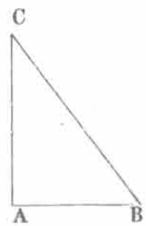


**202.** At construere et Qvadrat, ligestort med et givet Parallelogram, eller en given Triangel.

Er Parallelogrammets Grundlinie og Høide G og H, og kaldes Qvadratsiden x, da haves Ligningen $x^2 = HG$, eller $\frac{G}{x} = \frac{x}{H}$. Man søger derfor Mellemproportionallinien mellem Parallelogrammets Grundlinie og Høide. Denne Mellemproportionallinie er den søgte Qvadratside.

Er Trianglens Grundlinie og Høide g og h, og sættes Qvadratsiden = y, haves $y^2 = \frac{1}{2}hg$, eller $\frac{g}{y} = \frac{y}{\frac{1}{2}h}$, eller $\frac{\frac{1}{2}g}{y} = \frac{y}{h}$. Den søgte Qvadratside er da Mellemproportionallinie mellem Grundlinien og det Halve af Høiden, eller mellem Høiden og det Halve af Grundlinien.

Anm. Ved Hjelp af de to sidste Sætninger kan en hvilkensomhelst Mangekant omformes til et ligestort Qvadrat.




**203.** At construere et Qvadrat, ligt Summen af to givne Qvadrater ($\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$).

Paa en ret Vinkels Been afsættes de givne Qvadratsider, AB, AC. Drages BC, da vil den være Siden i det forlangte Qvadrat, efter Nr. 177.

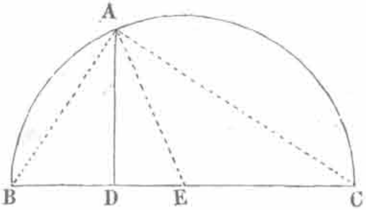
Anm. I. Paa samme Maade kan man:

Construere et Qvadrat ligt Summen af et hvilketsomhelst Antal Qvadrater.

Anm. II. De tre forangaaende Opgaver afgive Midler til

at omforme en hvilkensomhelst Sum af givne Polygoner til eet Qvadrat.

**204.** At construere et Qvadrat ligt Differensen mellem to givne Qvadrater ($\overline{BC}^2$, $\overline{AB}^2$).



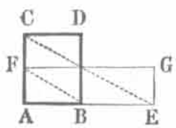

Om det større Qvadrats Side, BC, som Diameter, beskrives en Halvcirkel. Fra B som Centrum, og med Radius BA, beskrives en lille Bue, som skjærer Halvcirklen i A. AC drages og vil, efter Nr. 177, være Siden i det forlangte Qvadrat.

**205.** Paa en given Side, a, at construere en Rectangel [eller Parallelogram] lig en given Rectangel [eller Parallelogram], hvis hosliggende Sider ere AB = b, AC = c, [og som danne samme Vinkel].

Kaldes den søgte Side x, haves,

$$ax = bc, \quad \text{hvoraf} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

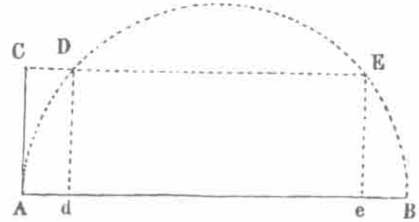
x findes da som fjerde Proportionallinie til tre givne Linier: a, b, c, og construeres bekvemt saaledes




Fra A afsættes paa AB (forlænget om nødvendigt) AE = a. EC drages. Gjennem B drages en Parallel med EC. AF er = x, og AG den forlangte Rectangel.

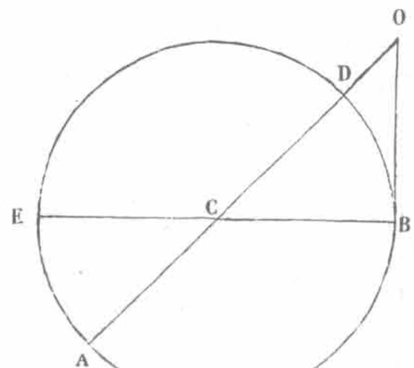
**206.** At construere en Rectangel ligestor med et givet Qvadrat, $\overline{AC}^2$, og hvis hosliggende Siders Sum er ligestor med en given ret Linie, AB.





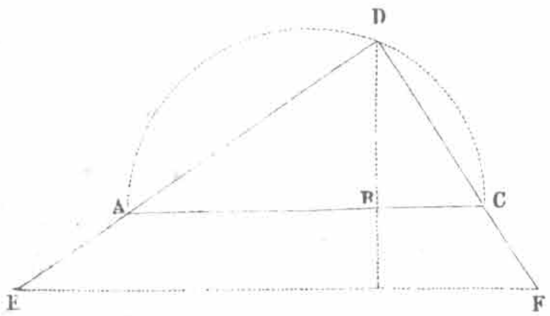

Rectanglens søgte Sider ere de i Opgaven Nr. 199, 1° bestemte rette Linier Ad, dB; thi $\frac{Ad}{dD} = \frac{dD}{dB}$, eller $\overline{dD}^2 = Ad.\ dB$, eller $\overline{AC}^2 = Ad.\ dB$.

**207.** At construere en Rectangel ligestor med et givet Qvadrat, $\overline{OB}^2$, og hvis sammenstødende Siders Differens er ligestor med en given ret Linie, EB.




Rectanglens søgte Sider ere de i Opgaven Nr. 199, 2° bestemte rette Linier OA og OD; thi $\frac{AO}{OB} = \frac{OB}{OD}$, eller $\overline{OB}^2 = AO.\ OD$.

**208.** At construere et Qvadrat, der forholder sig til et givet Qvadrat, hvis Side = a, som en given Linie p til en anden given Linie m.




Af Nr. 177, Anm. I, følger, at naar de givne Linier afsættes ved Siden af hinanden, og om dem beskrives en Halvcirkel, og Ordinaten BD opreises, at da

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{AB}{BC}.$$

Var altsaa AD Siden i det ene Qvadrat, da var DC Siden i det andet. Men da samme Forhold finder Sted for AB, BC og to Qvadrater, hvis Sider ere proportionale med de omtalte Qvadraters, saa haves følgende almindelige

Construction. Paa en ret Linie afsættes AB = m, BC = p.

Om AC som Diameter beskrives en Halvcirkel; Ordinaten DB, og Chorderne AD, DC drages og forlænges, om nødvendigt. Paa DA, fra D, afsættes DE lig a, Siden i det givne Qvadrat. Gjennem E drages EF parallel med AC; DF vil være Siden, x, i det søgte Qvadrat; thi

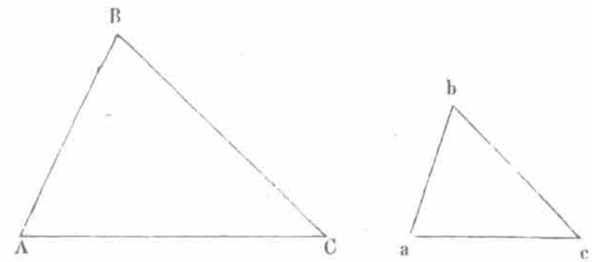
efter Nr. 144: $\frac{DA}{DC} = \frac{DE}{DF}$, eller $\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}^2}$,

fremdeles, efter Nr. 177, Anm.: $\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{AB}{BC}$,

altsaa $\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}^2} = \frac{AB}{BC}$, eller $\frac{a^2}{x^2} = \frac{m}{p}$.

**209.** At construere en Triangel ligedannet med en given, ABC, paa en given ret Linie, ab, ensbeliggende med AB.






Da den søgte Triangel skal være ligedannet med den givne, saa maa

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}, \text{ og}$$
$$\angle A = a,\ B = b,\ C = c.$$

Constructionen kan da skee ved:

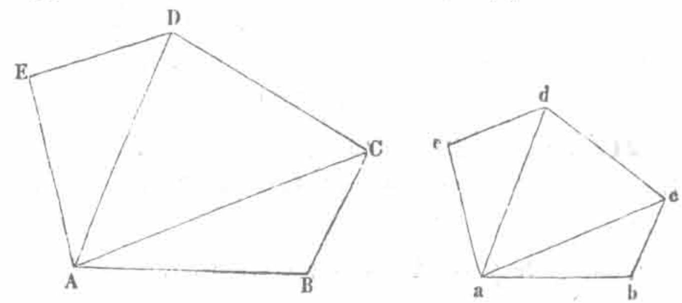
1°. At afsætte, ved Punkterne a, b, Vinkler lig med A og B.

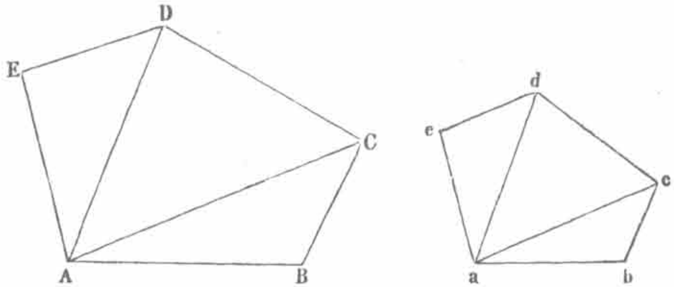
2°. At construere en 4de Proportional, ac, til AB, ab og AC, dernæst en 4de Proportional, bc, til AB, ab og BC. Den af ab, ac, bc construerede Triangel er den forlangte.

3°. At bestemme, som i Nr. 2, enten ac, eller bc, og af denne, af ab, og mellemliggende Vinkel at construere Trianglen.

4°. Ved at drage Siderne parallele, hvis ab tillige er givet at være parallel med AB.

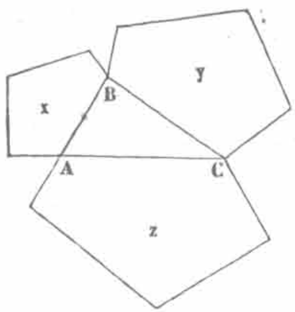
**210.** At construere en Polygon ligedannet med en given, ABCDE, paa en given ret Linie, ab, ensbeliggende med en vis Side, AB, i Polygonen.






Den givne Polygon deles i Triangler; paa ab construeres, efter forrige Nr., abc ligedannet med ABC; derved er c bestemt; paa ac construeres ligeledes acd ligedannet med ACD; derved er d bestemt, og saaledes videre. abcde vil være ligedannet med ABCDE, da de begge ere sammensatte af samme Antal indbyrdes ligedannede og ensbeliggende Triangler (Nr. 153).

**211.** Naar to ligedannede Figurer, X og Y, ere givne, at construere en Figur, ligedannet med dem, og lig deres Sum.




De ensliggende Sider, BA og BC, af de givne Figurer afsættes paa Benene af den rette Vinkel B. Hypotenusen AC drages. En paa denne, som ensliggende med de to andre Linier, construeret Figur, ligedannet med de givne, vil være den forlangte (Nr. 186).

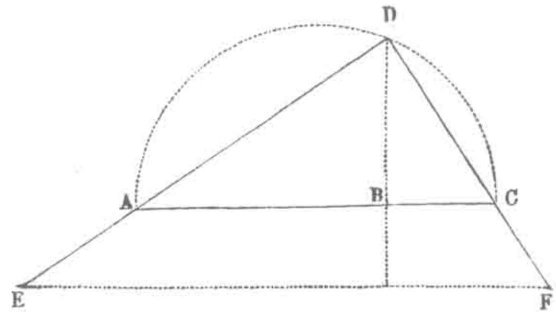
**212.** Naar to ligedannede Figurer, Z og Y, ere givne, at construere en med dem ligedannet og lig deres Differens.

Omkring en Side, AC, af den ene beskrives en Halvcirkel,



i denne indføres den andens ensliggende Side, BC, som Chorde. BA vil være den ensliggende Side i den forlangte Polygon.

**213.** At construere en Polygon, X, ligedannet med en given Polygon, P, og som forholder sig til denne som n til m.




Lad a være en Side i den givne Polygon.

Constructionen er som i Nr. 208.

Paa en ret Linie afsættes AB = m, BC = n; om AC beskrives en Halvcirkel, Ordinaten BD, og Chorderne AD, DC drages; paa DA, eller paa DA, forlænget om nødvendigt, afsættes DE = a; gjennem E drages EF parallel med AC. DF er Siden i den søgte Polygon. Construeres altsaa paa DF, ensliggende med a, en Polygon X, der er ligedannet med P, haves

$$\frac{P}{X} = \frac{a^2}{DF^2},\ \frac{a^2}{DF^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DC}^2},\ \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DC}^2} = \frac{m}{n},\ \text{altsaa}\ \frac{P}{X} = \frac{m}{n}.$$

**214.** At construere en Polygon, X, ligedannet med en given Polygon, P, og som forholder sig til en anden given Polygon, Q, som m til n.

Kaldes en Side i Polygonen P, a, og den ensliggende i X, x, da haves

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{X}{P}\ \text{og}\ \frac{X}{Q} = \frac{m}{n},$$

Omformes nu P og Q til Qvadrater, hvis Sider = p og q, og antages, at Siden i et Qvadrat = X var = y, da forvandles de anførte Proportioner til

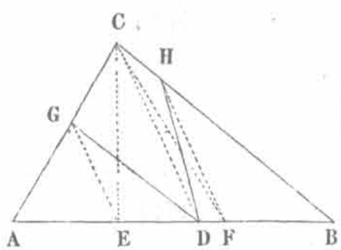
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{p^2},\ \text{eller}\ \frac{x}{a} = \frac{y}{p},\ \text{og}\ \frac{y^2}{q^2} = \frac{m}{n}.$$

Af denne sidste Proportion kan y findes efter Nr. 208, og derpaa x af den næstsidste, som fjerde Proportionallinie til p, y og a; x vil være en Side i den søgte Polygon, ensliggende med a. Skal den søgte Polygon være = Q, da bliver en Construction mindre at udføre, idet y = q.

**215.** At dele en Triangel i Dele proportionale med givne Linier, ved rette Linier, dragne fra et Toppunkt til den modstaaende Side.

Da den givne hele Triangel, saavelsom de søgte Triangler, alle have samme Høide, forholde de sig som deres Grundlinier. Opgaven er da blot, at dele den givne Triangels Grundlinie i Dele proportionale med de givne.

**216.** At dele en given Triangel, ABC, i Dele proportionale med givne Linier, ved Hjelp af rette Linier, udgaaende fra samme Punkt, D, i Perimetren.




F. Ex. at dele Trianglen ABC i 3 ligestore Dele, DAG, DGCH, HDB, ved Hjelp af de rette Linier DG, DH.

Drag CD; del AB, i E og F, i tre ligestore Dele; drag EG og FH parallele med CD. Drag DG og DH, da er Delingen skeet.

Thi drages CE, CF, fra det modstaaende Toppunkt, da vil ACE være = $\frac{1}{3}$ ACB = ECF = CFB.



Men △ GEC = GED,
AGE = AGE,
altsaa ACE = AGD.
Fremdeles HFC = HDF,
FHB = FHB,
altsaa CFB = BHD,
altsaa AGD = $\frac{1}{3}$ ACB, og BHD = $\frac{1}{3}$ ACB,
hvoraf GDHC = $\frac{1}{3}$ ABC.

**217.** At finde to rette Linier (x, y) proportionale med to givne Rectangler (a × b; A × B).

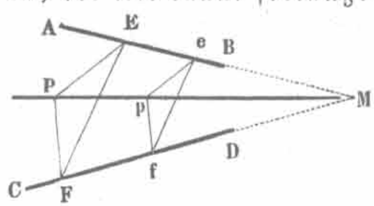
$$\frac{x}{y} = \frac{ab}{AB}$$
$$x = \frac{aby}{AB}.$$

Da en af de søgte Linier kan tages vilkaarlig, saa kan f. Ex. y sættes = B, hvoraf

$$x = \frac{ab}{A}\ \text{eller}\ \frac{x}{a} = \frac{b}{A}.$$

Constr.: Søg fjerde Proportionallinie til A, b, a; dens Forhold til B vil være det samme som Rectanglen ab's til Rectanglen AB.

**218.** Gjennem et givet Punkt, P, at drage en ret Line, som møder Sammenstødspunktet af to rette Linier, AB, CD, der ikke kunne forlænges.




Drag fra P vilkaarlige rette Linier, PE og PF, til AB og CD. Foren E med F. Drag ethvert andet Sted en Linie, ef, parallel med EF. Drag ep og fp, parallele med EP og FP, der skjære hinanden i p. En ret Linie gjennem P og p vil være den forlangte.

**219.** Der er i det Foregaaende vist, hvorledes en Cirkellinie kan føres gjennem tre givne Punkter (Nr. 124), og hvorledes man kan beskrive en Cirkellinie, der rører tre givne rette Linier (Nr. 125). Man kan ogsaa forelægge den Opgave, at finde en Cirkellinie, der skal berøre tre givne Cirkler; ligeledes kan man søge Cirkellinier, der dels gaae gjennem Punkter, dels berøre visse Linier, og man faaer i det Hele, ved Combination af Punkter, rette Linier og Cirkellinier, følgende 10 Opgaver:

At construere en Cirkellinie, som

1°. gaaer igjennem tre givne Punkter;

2°. gjennem to Punkter, og berører en given ret Linie;

3°. gjennem to Punkter, og berører en given Cirkellinie;

4°. gjennem et Punkt og berører to rette Linier;

5°. gjennem et Punkt, og berører en ret Linie, og en Cirkellinie;

6°. gjennem et Punkt, og berører to Cirkellinier;

7°. berører tre rette Linier;

8°. berører to rette Linier, og en Cirkellinie;

9°. berører en ret Linie og to Cirkellinier;

10°. berører tre Cirkellinier.

Inden vi gaae over til Behandlingen af disse Opgaver, forudskikkes følgende Sætninger, der indeholde almindeligere Principer for Løsning af disse, og af beslægtede Opgaver.

**220.** Naar to Cirkellinier, A og B, berøre hinanden, i C, og gjennem Berøringspunktet, C, drages en ret Linie, CM, saa vil til de derved fremkomne Chorder, CM, CN, svare ligestore Centrivinkler; og omvendt: Have Cirkellinierne A og B et Punkt C fælles, og de Chorder, som fremkomme ved gjennem C at drage en ret Linie, afskjære Buer, hvis Centrivinkler ere ligestore, da berøre Cirkellinierne hinanden.



Fig. I.

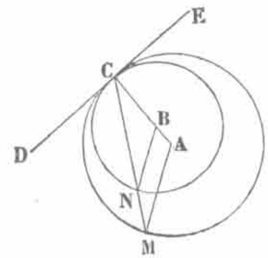
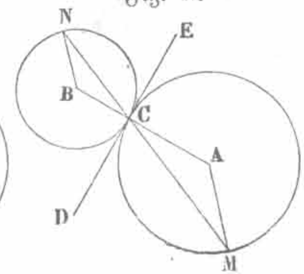



Fig. II.




Drages den fælles Tangent DE, og construeres de til CM og CN svarende Centrivinkler, haves (Fig. I):

$$\left.\begin{array}{l}\angle\ DCN = \tfrac{1}{2}\,CBN \\ \angle\ DCM = \tfrac{1}{2}\,CAM\end{array}\right\}\ \text{Nr. 111;}$$

altsaa $CBN = CAM$, og $BN \neq AM$;

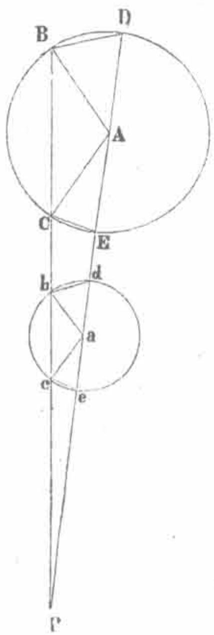
og (Fig. II): $\angle\ NCE = \frac{1}{2}\,NBC$; $DCM = \frac{1}{2}\,CAM$, men $NCE = DCM$, altsaa $NBC = CAM$, og $BN \neq AM$.

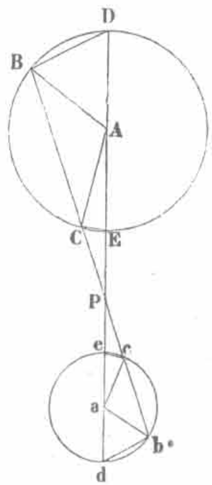
Omvendt. Givet: $\angle\ CBN = CAM$, og Punktet C fælles for begge Cirkellinier. Gjennem C drages en Tangent, DE, til Cirklen A, hvorved haves $\angle\ DCM = \frac{1}{2}\,CAM$, altsaa ogsaa $DCM = \frac{1}{2}\,CBN$. Gjennem C drages en Tangent til Cirklen B. Denne Tangent maa med CN danne en Vinkel $= \frac{1}{2}\,CBN$, altsaa $= DCM$, det er: denne Tangent maa falde sammen med DE, altsaa maae Cirkellinierne berøre hinanden.

**221.** Det Punkt, i hvilket to ydre Tangenter til to Cirkellinier skjære hinanden, kaldes deres ydre Lighedspunkt, (P i venstre Fig. paa Side 154) det, i hvilket to indre Tangenter skjære hinanden, kaldes deres indre Lighedspunkt. (P i høire Fig.) Disse Punkter ligge i Centrilinien, da denne er Halveringslinie for den af Tangenterne dannede Vinkel (Nr. 38).

**222.** 1. Drages fra et Lighedspunkt, P, en Secant, PB, til begge Cirkler, saa ere de til de fremkomne Chorder svarende Centrivinkler ligestore, og de Radier, som ere disse Vinklers Been, to og to parallele.

2. Drages tillige fra samme Punkt en Secant, PD, gjennem begge Midtpunkter, saa have de otte Punkter, hvori disse to rette Linier skjære Periferierne, en saadan Beliggenhed, at de fire indvendige, C, E, d, b, ligge i en, de fire udvendige, B, D, c, e, i en anden Cirkelperiferi, naar Secanten er draget fra det udvendige Lighedspunkt; er den derimod draget fra det indvendige Lighedspunkt, ligge to indvendige Punkter af den ene Cirkellinie, og to udvendige af den anden i samme Periferi.




1. Tænkes den fælles Tangent fra P dragen, og ere Radierne til de to Cirkler R og r, haves $\frac{AP}{aP} = \frac{R}{r}$, altsaa $\frac{AP}{aP} = \frac{AB}{Ab}$,

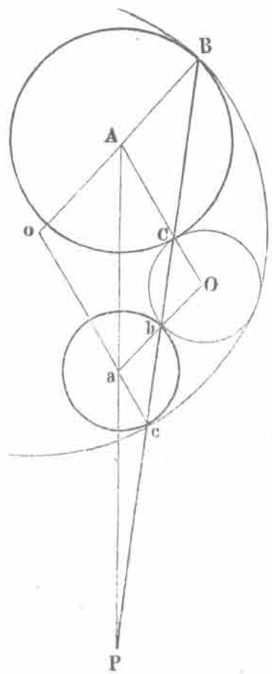


hvoraf AB $\neq$ ab; ligesaa $\frac{AP}{aP} = \frac{AC}{ac}$, hvoraf AC $\neq$ ac, hvoraf $\angle$ BAC = bac.

2. Da Triangel ACE er ligedannet med ace, haves CE $\neq$ ce, hvoraf $\frac{PC}{PE} = \frac{Pc}{Pe}$. Men efter Nr. 164 haves $\frac{PD}{PB} = \frac{PC}{PE}$, altsaa $\frac{PD}{PB} = \frac{Pc}{Pe}$, det er: B, D, c og e ligge i samme Periferi.

Paa samme Maade bevises, at BD er parallel med bd, hvoraf $\frac{PB}{PD} = \frac{Pb}{Pd}$, men $\frac{PB}{PD} = \frac{PE}{PC}$, altsaa $\frac{Pb}{Pd} = \frac{PE}{PC}$, det er: C, E, d, b ligge i samme Periferi.

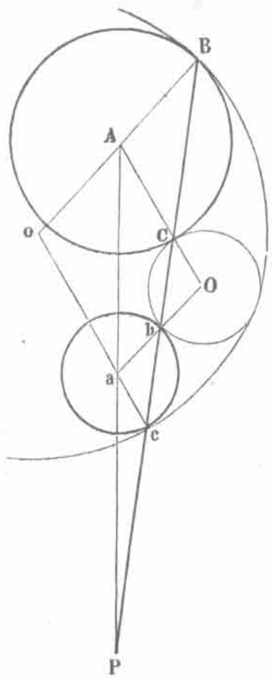
**223.** Drages gjennem to Cirklers ydre Lighedspunkt, P, en Secant, PB, til de to Cirkler, saa ere de indvendige Skjæringspunkter, C, b, Berøringspunkter for de to Cirkler og en tredie, som berører dem udvendigt; og omvendt:




Berøres to Cirkler udvendigt af en tredie, saa ligge begge Berøringspunkter, C, b, i samme rette Linie med de to førstes udvendige Lighedspunkt.

Drages gjennem to Cirklers ydre Lighedspunkt, P, en Secant, PB, til dem, saa ere de udvendige Skjæringspunkter, B, c, Berøringspunkter for de to Cirkler og en tredie, der berører dem indvendigt; og omvendt:

Berøres to Cirkler indvendigt af en tredie, saa ligge begge Berøringspunkter, B, c, i samme rette Linie med de to førstes udvendige Lighedspunkt.




Forlæng AC og ab indtil Skjæring i O. AC er parallel med ac, altsaa Vinkel ACB = acb = abc. Heraf følger:

Vinkel bCO = CbO, og OC = Ob.

Cirklen om O, med Radius OC, berører altsaa Cirklerne om A og a udvendigt.

Forlænges dernæst AB og ac indtil Skjæring i o, haves

Vinkel ABC = abc = acb, altsaa

oB = oc.

Cirklen om o, med Radius oB, berører altsaa A og a indvendigt.

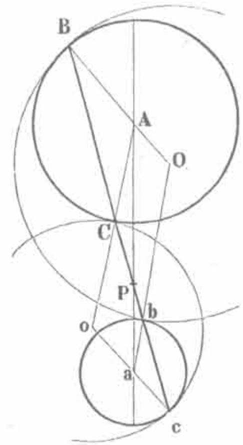
Omvendt: Berører Cirklen O de to andre udvendigt i C og b, og gjennem disse Punkter drages en Secant, der skjærer en Secant gjennem Midtpunkterne A, a, i P, saa haves, da OC = Ob: Vinkel CbO = bCO, altsaa ACB = abc = acb, altsaa AC parallel med ac, og $\frac{AP}{aP} = \frac{AC}{ac}$. Heraf følger: at P er det udvendige Lighedspunkt.

**224.** Drages en Secant gjennem det indre Lighedspunkt, P, saa ere stedse et ydre og et indre Skjæringspunkt med Cirkellinierne de to Punkter, hvori en tredie Cirkel berører de to andre, den ene indvendigt, den anden udvendigt; og omvendt:

Berøres to Cirkler, den ene indvendigt, den anden udvendigt, af en tredie, saa ligge de to Punkter, hvori denne berører de to første, i samme rette Linie med disses indvendige Lighedspunkt.



Forlænges BA og ab, indtil Skjæring i O, haves AC parallel med ab, altsaa Vinkel ACB = ObB, hvoraf Vinkel ABC = ObB, og OB = Ob. En Cirkel fra O som Midtpunkt, med Radius OB, berører altsaa A indvendigt, a udvendigt.




Forlænges AC og ca indtil Skjæring i o, haves o som Midtpunkt, og oC som Radius til en Cirkel, der berører A udvendigt, a indvendigt.

Omvendt. Berører Cirklen O de to andre i B og b, da er OB = Ob, og Vinkel B = ObB = abc = bca; altsaa AB parallel med ac, hvoraf $\frac{AP}{Pa} = \frac{AB}{ac}$. P maa altsaa være det indvendige Lighedspunkt.

Paa samme Maade bevises, at P ligger i ret Linie med C, c.

Anm. Den letteste Construction for at finde det udvendige Lighedspunkt til to Cirkellinier er (venstre Fig. Side 154) at drage to parallele Radier, AB, ab, til samme Side. Der hvor den forlængede Bb skjærer Centrilinien, er Lighedspunktet.

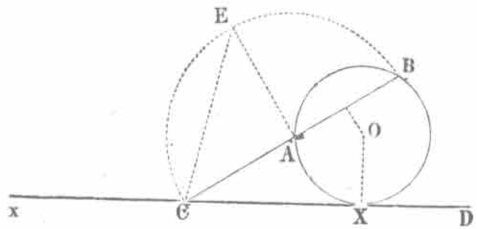
Det indvendige Lighedspunkt findes ved at drage (høire Fig. Side 154) de parallele Radier AC ac, til forskjellige Sider. Overskjæringspunktet af Cc med Centrilinien er dette Punkt.

**225.** Opgaver:

1°. At beskrive en Cirkellinie, som gaaer gjennem tre givne Punkter (er løst Nr. 124).

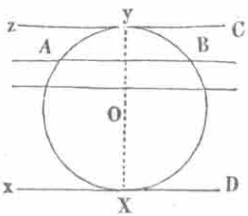
2°. At beskrive en Cirkellinie, som gaaer gjennem to givne Punkter, A, B, og berører en given ret Linie xD.

Antages, at den søgte Cirkel er O, og dens Berøringspunkt X, da haves, naar A og B forenes, og Linien forlænges til Skjæring med xD i C, efter Nr. 164, at CX er Mellemproportional mellem CB og CA.



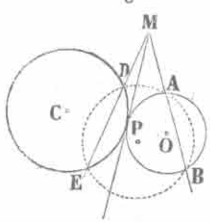

Heraf følgende Construction: Træk en ret Linie gjennem A og B, indtil den skjærer xD i C, søg Mellemproportional, CE, mellem BC og AC, afsæt den fra C paa xD, saaat CX (og Cx) = CE; beskriv en Cirkellinie gjennem A, B og X, eller gjennem A, B og x, da haves den forlangte.

Der er altsaa to Opløsninger.




Anm. Ligger Linien AB parallel med xD, opreises paa Midten af AB en Lodret yX, og en Cirkel beskreven gjennem A, B og X er den forlangte.

3°. At beskrive en Cirkellinie, som gaaer gjennem to Punkter, A, B, og berører en given Cirkel C.



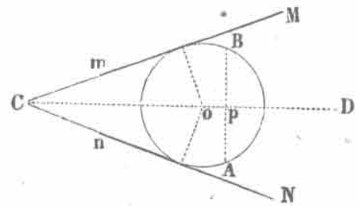

Antages Opgaven løst, O at være den søgte Cirkel, P dens Berøring med C, og drages gjennem A og B en Secant indtil den møder den for Cirklerne fælles Tangent gjennem P, i M, da haves, naar en Secant, ME, drages gjennem Cirklen C, baade $\overline{MP}^2 = ME.MD$, og $MP^2 = MB.MA$, hvoraf $ME.MD = MB.MA$,



eller $\frac{ME}{MB} = \frac{MA}{MD}$, hvilken Proportion lærer, at A, B, D og E ligge i samme Periferi DAEB.

Constructionen bliver: Gjennem A og B føres en Periferi saaledes, at den skjærer den givne Periferi i to Punkter, D og E, Chorderne ED og BA drages og forlænges til Skjæring i M. Fra M drages Tangenter, MP, Mp, til den givne Cirkel; deres Berøringspunkter ere ogsaa Cirklernes Berøringspunkter. Føres derfor en Cirkellinie gjennem A, B og P, eller gjennem A, B og p, haves den forlangte Cirkel.

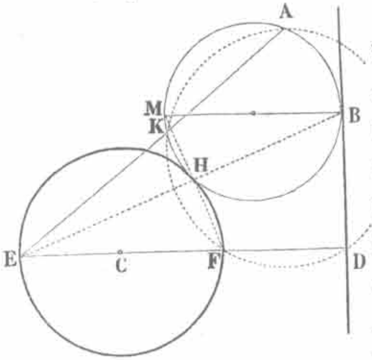
4°. At beskrive en Cirkellinie, som gaaer gjennem et givet Punkt B, og berører to givne rette Linier mM, nN.




Antages Cirklen om o at være den forlangte, og forlænges mM, nN indtil Skjæring i C, da indsees, at Centrum, O, maa ligge i Vinklens Halveringslinie, CD, og at, naar Bp drages lodret paa CD, forlænges, og pA afsættes = Bp, at da A maa være et Punkt i den forlangte Cirkellinie.

Constructionen er da: de givne Linier forlænges indtil Skjæring, den fremkomne Vinkel halveres, fra B nedfældes en Lodret Bp paa CD, den forlænges og pA afsættes = Bp. Der beskrives nu en Cirkellinie, der gaaer gjennem B og A og berører CN (efter 2°), som vil være den forlangte.

Anm. (Fig. Nr. 2, Anm.). Ere de givne rette Linier parallele: xD og zC, og Punktet: B, da drages en ret Linie, parallel med de givne, midt imellem dem. Denne maa indeholde Centrum, og dens Afstand fra en af de givne maa være Radius til den søgte Cirkel. Beskrives derfor med denne Afstand som Radius, og med B som Centrum en lille Bue, da vil det Punkt, O, hvori denne skjærer Midterparallelen, være Centrum, og OB Radius til den søgte Cirkel.




5°. At beskrive en Cirkel, der gaaer gjennem et givet Punkt, A, og berører en given ret Linie, BD, og en given Cirkel, C. Nedfæld fra C en Lodret, CD, paa BD; beskriv en Cirkel, som gaaer gjennem A, F, D; træk EA, som skjærer den sidst slaaede Cirkel i K. Beskrives nu en Cirkel gjennem A og K og berørende BD, da vil den være den forlangte, det er: berøre Cirklen C.

Thi drages EB, der skjærer Cirklen C i H, og drages HF, saa er BHF = 90°, thi EHF = 90°; ligesaa er D = 90°. Der lader sig altsaa beskrive en Cirkel gjennem B, H, F, D, hvorved DE × EF = BE × EH. Men DE × EF = EA × EK, altsaa BE × EH = EA × EK. Heraf læres, at H maa ligge i den Cirkel, der gaaer gjennem A, K og berører BD.

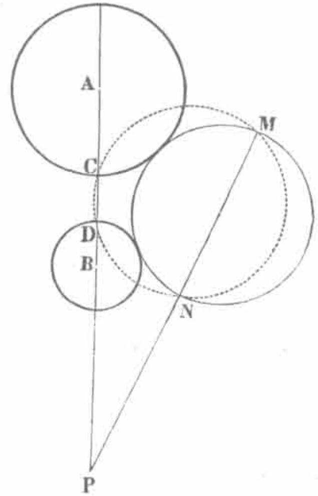
Drages Diametren BM, da er BM parallel med ED, altsaa Vinkel B = BED, altsaa Centrivinklerne til Chorderne MH og HF ligestore, hvorved er godtgjort, at Cirklerne C og AHB berøre hinanden.

Da der igjennem A og K kan drages to Berøringscirkler til BD, tilfredsstilles Opgaven af to den givne udvendigt berørende Cirkler.

Føres Hjelpecirklen gjennem A, E og D og drages FA (istedetfor EA), faaes to den givne indvendigt berørende Cirkler, som ogsaa tilfredsstille Opgaven.

6°. At beskrive en Cirkel, som berører to givne Cirkler, om A og om B, og gaaer gjennem et givet Punkt, M.





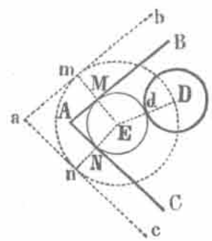

Fra As og Bs ydre Lighedspunkt, P, drages Centrilinien og en Linie til M. Gjennem C, D og M føres en Cirkellinie, der skjærer PM i N. En Cirkellinie gjennem M og N berørende Cirklen A udvendigt vil være den forlangte.

Beskrives gjennem M og N en Cirkellinie, som indvendigt berører Cirklen A, faaes en anden Opløsning, hvis Cirkel indvendigt berører de givne Cirkler. Dog kan M ligge saaledes, at begge de fundne Cirkler ville berøre de givne indvendigt, eller begge udvendigt.

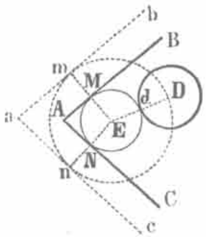
Benyttes det indre Lighedspunkt istedetfor det ydre, faaes to andre Opløsninger, hvori den frembragte Cirkellinie berører de to givne paa uensartet Maade.

7°. At beskrive en Cirkellinie, som berører tre givne rette Linier (er løst Nr. 125).

8°. At beskrive en Cirkellinie, som berører to givne rette Linier, AB, AC, og en given Cirkel, D.




De givne rette Linier forlænges, om nødvendigt, indtil Skjæring. Parallele med dem, og i en Afstand lig Radius til Cirklen D, drages ab, ac. Der beskrives en Cirkel (ED), berørende ab, ac, og gaaende gjennem Midtpunktet D. Denne Cirkels Midtpunkt, E, er ogsaa Midtpunkt for den søgte, hvis Radius bliver ED, hvorfra er draget Radius til Cirklen D, eller: hvis Radius er Ed.

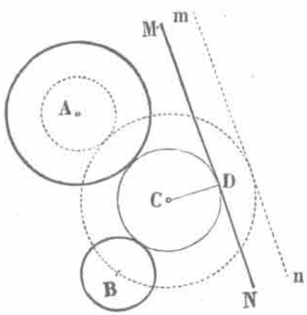



Thi: berører Cirklen ED Linierne ab, ac, i m og n, da haves ED = Em = En, og, naar Dd ſubtraheres, Ed = EM = EN, og AB, AC tangere Cirkellinien Ed.

Der vil i Reglen være fire Opløsninger.

Ere de to givne rette Linier parallele, modificeres Conſtructionen i Overensſtemmelſe med 4°.

9°. At beſkrive en Cirkellinie, ſom berører to givne Cirkler, A og B, og en given ret Linie, MN.




Radius til A være = R, til B = r. Drag mn, parallel med MN, i Afſtand = r; beſkriv fra A, med en Radius = R − r, en Cirkel (her punkteret). Beſkriv en Cirkel, ſom gaaer gjennem B, berører mn og den Cirkel om A, hvis Radius = R − r, udvendigt. Dens Centrum, C, er Centrum til den ſøgte Cirkel. Nedfæld fra C en Lodret, CD, paa MN, da er CD Radius til den ſøgte Cirkel, der vil berøre de to givne udvendigt. Da der i Reglen kan beſkrives to Cirkellinier gjennem B, berørende mn og Cirkellinien A med Radius R — r udvendigt, faaes ved denne Conſtruction to Cirkler, ſom begge berøre de givne udvendigt.

Drages mn paa den modſatte Side, beſkrives om A en Cirkel med Radius = R + r, og derpaa en Cirkel, ſom berører denne udvendigt og Linien mn, ſamt gaaer gjennem Centrum B, da vil denne Cirkels Centrum være Centrum til den ſøgte Cirkel. Man faaer to Cirkler, ſom begge berøre den ſtørre udvendigt og den mindre indvendigt.

Drages mn, ſom i første Tilfælde, til Høire for MN, og

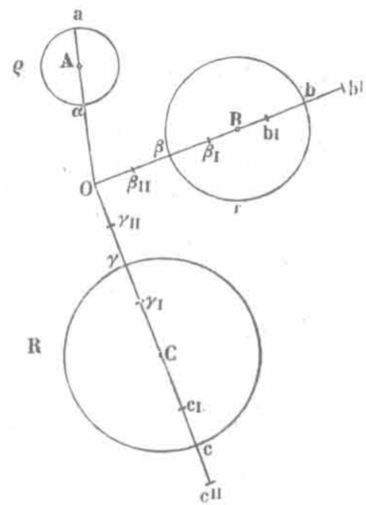


beſkrives om A en Cirkel med Radius = R + r, faaes to Cirkler, ſom berøre den ſtørre af de givne indvendigt, den mindre udvendigt.

Drages mn til Venſtre for MN og beſkrives Hjelpecirklen om A med Radius = R − r, faaes to Cirkler, ſom indvendigt berører de to givne.

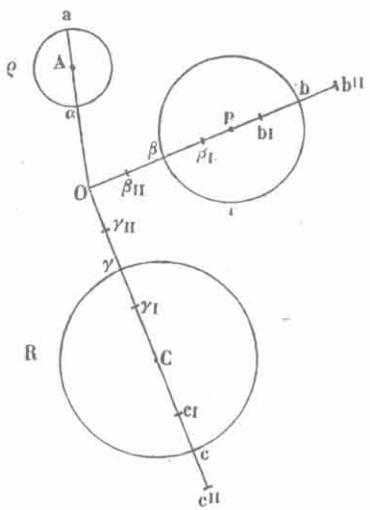
Det er klart, at de givne Cirkler maae ligge paa ſamme Side af den givne rette Linie.

10°. At beſkrive en Cirkellinie, ſom berører de tre givne Cirkler A (antagen at være den mindſte og havende en Radius $\varrho$), B (med Radius r), og C (med Radius R).




Antag, at O er Midtpunktet for den ſøgte Cirkel, drag fra O rette Linier gjennem de tre Midtpunkter og afſæt paa disſe Linier, fra b, $\beta$, c, $\gamma$, ſaavel udad ſom indad, en Linie = $\varrho$, ſaaat

$$bb_1 = bb_{II} = \beta\beta_1 = \beta\beta_{II} = cc_1 = cc_{II} = \gamma\gamma_1 = \gamma\gamma_{II} = \varrho.$$




Antages fremdeles, at O er Midtpunkt for en Cirkel, der indvendigt berører de tre givne, saa er $Oa = Ob = Oc$,

$$\text{altsaa } Oa - \varrho = Ob - \varrho = Oc - \varrho,$$

$$\text{eller } OA = Ob_1 = Oc_1.$$

Heraf sees, at O er Midtpunkt for en Cirkel, der gaaer gjennem Punktet A, berører indvendigt en Cirkel, med B til Midtpunkt, og $r - \varrho$, eller $Bb_1$ til Radius; og ligeledes berører indvendigt en Cirkel, med C til Midtpunkt, og $R - \varrho = Cc_1$ til Radius.

Constructionen er da:

Om B og C som Midtpunkter, med Radierne $r - \varrho$ og $R - \varrho$, beskrives Cirkler; efter 6° findes Midtpunktet til en Cirkellinie, der gaaer gjennem A og berører indvendigt de om B og C, med Radierne $r - \varrho$ og $R - \varrho$, construerede Cirkler. Dette Punkt, X, er Midtpunktet, og Xa Radius til den søgte Cirkel.

Skal den søgte Cirkel indvendigt berøre Cirklerne A og B, men Cirklen C udvendigt, saa maa

$$Oa = Ob = O\gamma, \text{ eller } OA = Ob_1 = O\gamma_{II}.$$



Der søges altsaa Midtpunktet til en Cirkel, der gaaer gjennem A og berører indvendigt en Cirkel om B, med Radius $r - \varrho$, og udvendigt en Cirkel om C, med Radius $R + \varrho$.

Skal Cirklen A berøres indvendigt, og de to andre udvendigt, saa er

$$Oa = O\beta = O\gamma,$$

$$\text{eller } OA = O\beta_{II} = O\gamma_{II}.$$

Det søgte Midtpunkt svarer altsaa til en Cirkel, der gaaer gjennem A, og udvendigt berører Cirklen om B, med Radius $r + \varrho$, og Cirklen om C, med Radius $R + \varrho$.

Skulle alle de givne Cirkler berøres udvendigt, saa er

$$O\alpha = O\beta = O\gamma,$$

$$\text{eller } OA = O\beta_1 = O\gamma_1.$$

Det søgte Midtpunkt svarer altsaa til en Cirkel, der gaaer gjennem A, og udvendigt berører Cirklen om B, med Radius $r - \varrho$, og Cirklen om C, med Radius $R - \varrho$.

Skulle A og C berøres udvendigt, B indvendigt, saa er $O\alpha = Ob = O\gamma$, eller $OA = Ob_{II} = O\gamma_1$. Det søgte Midtpunkt svarer altsaa til en Cirkel gjennem A, der indvendigt berører Cirklen om B, med Radius $r + \varrho$, og udvendigt Cirklen om C, med Radius $R - \varrho$.

Skal endelig den søgte Cirkel berøre A udvendigt, og de to andre indvendigt, saa er

$$O\alpha = Ob = Oc,$$

$$\text{eller } OA = Ob_{II} = Oc_{II}.$$

Det søgte Midtpunkt svarer da til en Cirkel, der gaaer gjennem A og indvendigt berører Cirklen om B, med Radius $r + \varrho$, og Cirklen om C, med Radius $R + \varrho$.

Anm. I. Der er i Reglen otte Cirkler, som tilfredsstille Opgaven.

Anm. II. Denne Opgave indeholder alle de foregaaende om Cirklers Beskrivning i sig.

Sættes nemlig en Radius lig Nul, bliver Cirklen til et Punkt; sættes Radius uendelig stor, bliver Cirklen en ret Linie, og en Hjelpecirkel, som skal være concentrisk, bliver en ret Linie parallel med den givne i den givne Afstand.

Er saaledes $\varrho = r = R = o$, haves Opg. 1, tre Punkter.

. . . . . . . $\varrho = r = o$; $R = \infty$, haves Opg. 2, to Punkter een ret Linie.

. . . . . . . $\varrho = r = o$, $R = R$, haves Opg. 3, to Punkter, een Cirkellinie.

. . . . . . . $\varrho = o$, $r = R = \infty$, haves Opg. 4, eet Punkt, to rette Linier.

. . . . . . . $\varrho = o$, $r = \infty$, $R = R$, haves Opg. 5, eet Punkt, een ret Linie, een Cirkellinie.

. . . . . . . $\varrho = o$, $r = r$, $R = R$, haves Opg. 6, eet Punkt, to Cirkellinier.

. . . . . . . $\varrho = r = R = \infty$, haves Opg. 7, tre rette Linier.

. . . . . . . $\varrho = \varrho$, $r = R = \infty$, haves Opg. 8, to rette Linier og een Cirkellinie.

. . . . . . . $\varrho = \varrho$, $r = \infty$, $R = R$, haves Opg. 9, een ret Linie og to Cirkellinier.

I sidste Tilfælde bliver saaledes Cirklen om B en ret Linie, og den Hjelpecirkel, som skal construeres om B, bliver en med den rette Linie parallel Linie, i en Afstand $= + \varrho$ eller $= - \varrho$.

I næstsidste Tilfælde fremkomme to rette Linier. Der drages Linier, parallele med disse, i Afstande $= + \varrho$ og $- \varrho$, og der beskrives Cirkler, som gaae gjennem A, og berøre to af disse rette Linier.

---



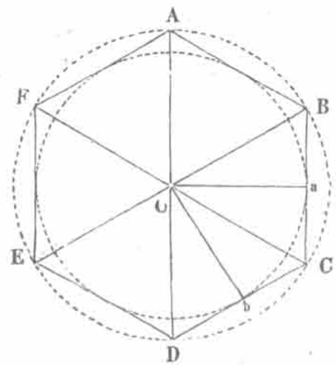
# Syvende Afdeling.

## Regelmæssige Polygoner.

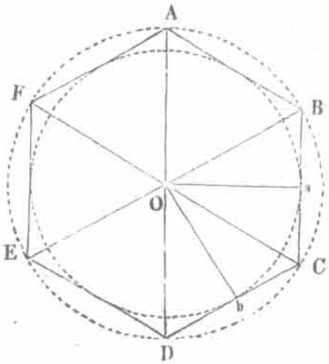
**226.** En Polygon er **regelmæssig,** naar baade dens Sider og Vinkler ere indbyrdes ligestore.

Af denne Definition følger: at to regelmæssige Polygoner af samme Antal Sider ere ligedannede, som havende proportionale Sider og ligestore Vinkler.

**227.** Omkring enhver regelmæssig Polygon, ABCDEF, lader sig beskrive en Cirkel.




Halveres to af Polygonens hosliggende Vinkler, f. Ex. $\angle$ FED og EDC, og drages fra Halveringsliniernes Skjæringspunkt, O, rette Linier til alle de øvrige Vinkelspidser: C, B, A og F, da kan bevises, at alle disse Linier ere ligestore; thi da $\angle$ FED = $\angle$ EDC, saa er $\angle$ OED = $\angle$ EDO, altsaa Trianglen OED ligebenet, eller:




$$OE = OD;$$

fremdeles er $\triangle\, DEO \cong \triangle\, ODC$; thi $OD = OD$, $\angle\, ODE = \angle\, ODC$, og $ED = DC$, altsaa er Trianglen ODC ogsaa ligebenet, og

$$OD = OC.$$

Af denne Congruens følger ogsaa: $\angle\, OCD = \angle\, OED = \frac{1}{2}$ Polygonvinkel, altsaa er $\angle\, OCD = \angle\, OCB$, og $\triangle\, ODC \cong \triangle\, OCB$. Vedbliver man saaledes, bevises, at alle Triangler ere congruente. Da nu den første Triangel, OED, var ligebenet, saa ere de alle ligebenede, eller

$$OE = OD = OC = OB = OA = OF.$$

Beskrives derfor fra O som Centrum, og med OE som Radius, en Cirkel, da vil den gaae gjennem alle Polygonens Spidser, og denne være indskreven i Cirklen.

**228.** I enhver regelmæssig Polygon, ABCDEF, kan beskrives en Cirkel.

Halveres to af Polygonens Vinkler, da haves, efter forrige Nr., Centrum til den omskrevne Cirkel. Tænke vi os denne beskreven om Polygonen, da blive Polygonens Sider Chorder i Cirklen, og da de ere ligestore, have de ligestor Afstand fra Centrum, det er:



Alle de fra O paa Polygonsiderne nedfældede lodrette Linier, Oa, Ob ...., ere ligestore. Beskrives derfor fra O som Centrum, og med Oa som Radius, en Cirkel, da vil den gaae gjennem a, b ...., og altsaa berøre hver Polygonside i dens Midtpunkt. Polygonsiderne ville altsaa være Tangenter til Cirklen, og Cirklen indskreven i Polygonen.

Anm. Radius til den omskrevne Cirkel kaldes Polygonens største Radius, Radius til den indskrevne Cirkel kaldes Polygonens mindste Radius. Enhver Vinkel, som dannes af to paa hinanden følgende største Radier, kaldes Polygonens Centrivinkel, f. Ex. EOD. I samme Polygon ere alle Centrivinkler ligestore, og da de alle tilsammen udgjøre 4 rette Vinkler, saa indsees, at i en n-Kant er hver Centrivinkel $= \frac{4R}{n}$. Figuren viser, at to halve Polygonvinkler (f. Ex. OED og ODE) + en Centrivinkel (EOD) udgjøre en Triangels tre Vinkler, eller at deres Sum er lig 2 R. Man har altsaa, naar en Polygonvinkel betegnes ved P, og Centrivinklen ved C,

$$P + C = 2\,R = 180^\circ,$$

og da $\angle\, C = \frac{4\,R}{n} = \frac{360^\circ}{n}$, haves

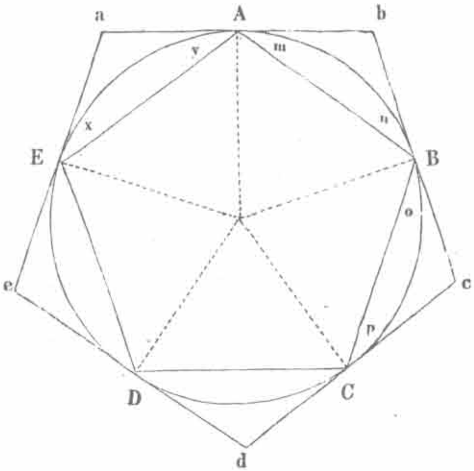
$$P = 2\,R - C = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Heraf følger, at i en regelmæssig

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Trekant er $\angle\, C =$ | $\frac{4}{3}\,R =$ | $120^\circ$, | og $\angle\, P = \frac{2}{3}\,R =$ | $60^\circ$ |
| Firkant ....... | $1\,R =$ | $90^\circ$, | ........ $1\,R =$ | $90^\circ$ |
| Femkant ...... | $\frac{4}{5}\,R =$ | $72^\circ$, | ........ $\frac{6}{5}\,R =$ | $108^\circ$ |
| Sexkant ...... | $\frac{2}{3}\,R =$ | $60^\circ$, | ........ $\frac{4}{3}\,R =$ | $120^\circ$ |
| Ottekant ...... | $\frac{1}{2}\,R =$ | $45^\circ$, | ........ $\frac{3}{2}\,R =$ | $135^\circ$ |
| Tikant ........ | $\frac{2}{5}\,R =$ | $36^\circ$, | ........ $\frac{8}{5}\,R =$ | $144^\circ$ |
| Femtenkant .... | $\frac{4}{15}\,R =$ | $24^\circ$, | ........ $\frac{26}{15}\,R =$ | $156^\circ$. |

Man seer heraf, at som Sideantallet voxer, bliver Centrivinklen mindre, og Polygonvinklen større, og at Polygonvinklen kan nærme sig saameget man vil til, men ikke blive = 2 R.

**229.** Er en Cirkelperiferi delt i ligestore Dele: AB = BC = CD = . . ., og mellem de paa hinanden følgende Delingspunkter: A, B, C, D, E drages Chorder, AB, BC, CD . . ., da vil den af disse Chorder dannede indskrevne Polygon, ABCDE, være regelmæssig; thi:




Siderne ere ligestore, som Chorder, der svare til ligestore Buer, og

Polygonvinklerne EAB, ABC . . . ere ligestore, som Periferivinkler paa ligestore Buer [der, paa vor Figur, hver er $= \frac{3}{5}$ af Periferien]. Polygonen er altsaa regelmæssig, efter Nr. 226.

**230.** Er en Cirkelperiferi delt i ligestore Dele, og gjennem alle Delingspunkterne: A, B, C, D, E drages Tangenter til Cirklen, da vil den af disse Tangenter dannede Polygon, abcde, være regelmæssig;



thi: drages Chorderne AB, BC, CD . . . ., da ville alle de derved fremkomne Triangler, EaA, AbB . . ., være ligebenede, idet $\angle x = \angle y$, da de begge have til Maal Halvdelen af Buen EA; $\angle m = \angle n$ af samme Grund, o. s. v.;

og congruente: thi da EA = AB . . . som Chorder, der svare til ligestore Buer, og $\angle y = \angle m$, samt $\angle x = \angle n$, som svarende til ligestore Buer, saa er $\triangle EaA \cong \triangle AbB$. Paa samme Maade bevises Congruensen af AbB og BcC, af BcC og CdD . . .

Vi have altsaa Ea = aA (formedelst Ligebenethed),
aA = Ab (formedelst Congruens),
Ab = bB (formedelst Ligebenethed),
bB = Bc (formedelst Congruens),
. .
. .

altsaa aA + Ab = bB + Bc = . . . . ɔ: Siderne ere indbyrdes ligestore. Trianglernes Congruens giver fremdeles $\angle a = \angle b = \angle c = . . .$

Polygonen er altsaa regelmæssig.

**231.** Perimeterne, P og p, af regelmæssige Polygoner, som have samme Sideantal, forholde sig som Radierne til de omskrevne, eller indskrevne Cirkler; Fladeindholdene, F, f, af disse Polygoner forholde sig som Radierne qvadrerede.

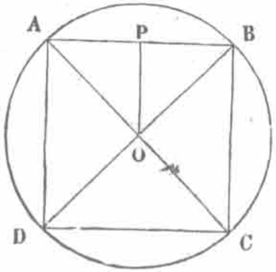

1°. Ere AB = S, og ab = s Sider i disse Polygoner, de største Radier AO = R og ao = $R_1$, og de mindste Ra-


dier $OC = r$ og $oc = r_1$, da haves, efter Nr. 156, at Perimeterne forholde sig som Siderne, eller $\frac{P}{p} = \frac{S}{s}$. Da $\angle A = a$ og $B = b$, som Halvdele af ligestore Polygonvinkler, saa er $\triangle ABO$ ligedannet med $abo$, hvoraf: $\frac{AB}{ab} = \frac{AO}{ao}$, eller $\frac{S}{s} = \frac{R}{R_1}$.

Da tillige Vinklerne C og c ere rette, saa er $\triangle AOC$ ligedannet med $aoc$, hvoraf $\frac{AO}{ao} = \frac{OC}{oc}$, eller $\frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$. Vi have da $\frac{P}{p} = \frac{S}{s} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$.

2°. Af Nr. 185 følger, at Polygonernes Fladeindhold forholde sig som et Par Sider qvadrerede, eller $\frac{F}{f} = \frac{S^2}{s^2}$; da nu $\frac{S}{s} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$, haves $\frac{F}{f} = \frac{S^2}{s^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$.

**232.** Qvadratsiden, AB, er lig Radius, OA, til omskrevne Cirkel multipliceret med Qvadratroden af 2.

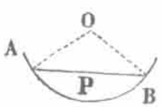



Da Vinklen $AOB = R$, saa er $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\,\overline{OA}^2$;

Er altsaa Radius $= r$, og Firkantsiden $= S_4$, saa er $S_4 = r\sqrt{2}$.

Da i Trianglen APO $\angle A = \frac{1}{2} R = \angle O$, saa er mindste Radius $OP = \frac{1}{2} AB$. Sættes mindste Radius $= \varrho$, da haves $\varrho = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$.

**233.** Den regulære Sexkantside, AB, er lig Radius, OA, til den omskrevne Cirkel.




Er AB den regulære Sexkantside, saa er Buen $AB = \frac{1}{6}$ Periferi, og Vinklen $AOB = \frac{1}{6}$ af $4R = \frac{4}{6} R = \frac{2}{3} R$, altsaa i Triangl en AOB er $\angle A + B = 2R - \frac{2}{3} R = \frac{4}{3} R$,

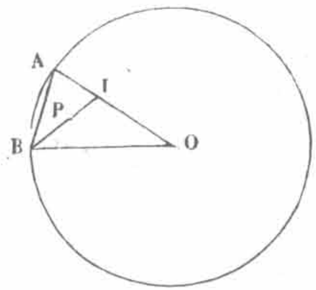


men $A = B$, altsaa hver $= \frac{2}{3} R$, og Trianglen AOB er ligesidet, hvoraf $AB = AO$.

Vi have da $S_6 = r$.

Mindste Radius $OP = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} r^2} = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$.

**234.** Den regulære Tikantside, AB, er lig det største Stykke af Radius til den omskrevne Cirkel, OA, delt i yderste og mellemste Forhold.

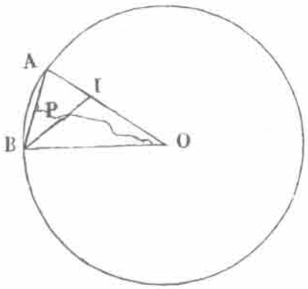



Er AB Tikantsiden, da er Buen $AB = \frac{1}{10}$ Periferi, og Centrivinklen $AOB = \frac{4}{10} R = \frac{2}{5} R$; altsaa $OAB + ABO = 2R - \frac{2}{5} R = \frac{8}{5} R$, altsaa $\angle OAB = \frac{4}{5} R = \angle ABO$.

Halveres nu $\angle ABO$ ved IB, da er $\angle IBO = \frac{2}{5} R = \angle IOB$, altsaa $IB = IO$, og $\angle AIB = \angle IBO + \angle IOB = \frac{2}{5} R + \frac{2}{5} R = \frac{4}{5} R = \angle IAB$, altsaa $AB = IB$; fremdeles efter Nr. 157, 1° $\frac{OB}{AB} = \frac{OI}{AI}$, eller $\frac{AO}{OI} = \frac{OI}{AI}$, altsaa er OA delt i yderste og mellemste Forhold, men det største Stykke $OI = AB$, altsaa = Tikantsiden.

Efter Nr. 200, Anm., haves, naar Tikantsiden betegnes ved $S_{10}$, og Radius ved $r$: $S_{10} = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

Tikantsiden kan ogsaa findes saaledes: Sættes Radius $= r$, og Tikantsiden $= x$, haves




$\frac{r}{x} = \frac{x}{r-x}$, eller $x^2 + rx - r^2 = o$,

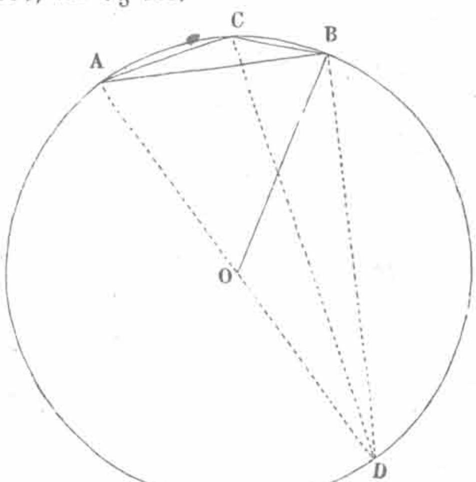
altsaa $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Mindste Radius OP er $= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2}$

$= \sqrt{r^2 - [\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)]^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}(6 - 2\sqrt{5})}$,

$= \sqrt{\frac{r^2}{16}(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

**235.** Buen, som svarer til Siden, BC, i en regulær indskreven Femtenkant, er lig Differensen mellem de Buer, som svare til den regulære Sex- og Tikantside, AB og AC.






Er AB Sexkantsiden, da er Buen AB $= \frac{1}{6}$ Periferi; er AC Tikantsiden, da er Buen AC $= \frac{1}{10}$ Periferi, altsaa Buen CB $= (\frac{1}{6} - \frac{1}{10})$ Periferi $= \frac{1}{15}$ Periferi, og Linien CB Siden i den indskrevne regelmæssige Femtenkant.

For at finde dens Størrelse, drages Diameter AD, samt DC og DB, hvorved fremkommer en Firkant, ACBD, med Diagonalerne AB og CD, hvori $AB = r$, $AD = 2r$, $AC = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5})$, $BD = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$,
$CD = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})}$.
$= \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

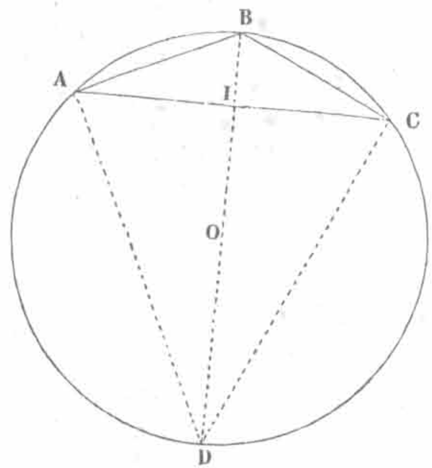
Altsaa haves efter Nr. 188:

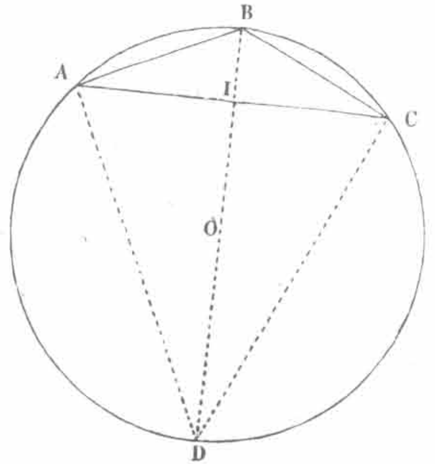
$$CB \times AD + AC \times DB = AB \times CD, \text{ eller}$$

$$CB \times 2r + \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5}) . r\sqrt{3} = r . \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BC = \frac{r}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}).$$

**236.** Naar Siden, AB = c, til en regelmæssig Polygon, tilligemed største Radius, r, ere givne, da at finde Siden til en i samme Cirkel indskreven regelmæssig Polygon af det halve Sideantal.





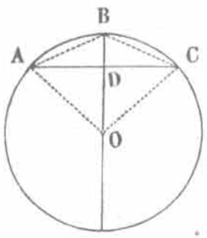

Afsættes BC = AB, og drages AC, da er AC den søgte Side. Drages Diameter BD, samt Chorderne AD og DC, da haves, efter Nr. 188, $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$, hvor $BD = 2r$, $CD = \sqrt{4r^2 - c^2} = AD$, altsaa

$$AC \, . \, 2r = c\sqrt{4r^2 - c^2} + c\sqrt{4r^2 - c^2}; \quad AC = \frac{c}{r}\sqrt{4r^2 - c^2}$$

eller, naar $AB = S_{2n}$, $AC = S_n$,

$$S_n = \frac{S_{2n}}{r}\sqrt{4r^2 - S_{2n}^2}.$$

**237.** Naar Siden, $AC = b$, til en indskreven Polygon, tilligemed Cirklens Radius $= r$ ere givne, da at finde Siden til en Polygon af dobbelt Sideantal.




Drages Radius BO lodret paa AC, og drages AB, da er AB den forlangte Side. Drages OA, da giver $\triangle$ ABO efter Nr. 179

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,OB \, . \, OD, \text{ hvori}$$

$$AO = OB = r, \text{ og } OD = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}b^2}, \text{ altsaa}$$

$$\overline{AB}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}b^2} = r\left(2r - \sqrt{4r^2 - b^2}\right),$$

$$\text{og } AB = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - b^2}\right)}.$$



Sættes $AC = S_n$ og $AB = S_{2n}$, haves

$$S_{2n} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - S_n^2}\right)}.$$

Vi kunne altsaa ved Hjelp af Lineal og Passer indskrive og, ved Hjelp af de foregaaende Sætninger, beregne Dimensionerne i følgende regelmæssige Polygoner:

1°. Polygoner af 4, 8, 16, 32 . . . . $2 . 2^n$ Sider
2°. . . . . . . . . . 3, 6, 12, 24 . . . . $3 . 2^n$ . . .
3°. . . . . . . . . . 5, 10, 20, 40 . . . . $5 . 2^n$ . . .
4°. . . . . . . . . . 15, 30, 60, 120 . . . . $15 . 2^n$ . . .,

hvor n betyder et hvilketsomhelst helt Tal.

Anmærkning angaaende Construction af regelmæssige Polygoner i og om givne Cirkler.

Constructionen afhænger af at dele Periferien i saamange ligestore Buer, som Polygonen skal have Sider (Nr. 229 og 230).

I. (Nr. 187). Drages to Diametre lodrette paa hinanden, da er Periferien delt i 4 ligestore Dele; altsaa kan Firkanten construeres; ved Buernes Halvering haves Ottekanten o. s. v.

II. Afsættes Radius som Chorde, da vil den tilsvarende Bue være indeholdt 6 Gange i Periferien (Nr. 233); altsaa kan Sexkanten beskrives, og ved Buernes Fordobling eller Halvering Trekanten, Tolvkanten o. s. v.

III. Afsættes det største Stykke af Radius, delt i yderste og mellemste Forhold, som Chorde, da er den tilsvarende Bue (Nr. 234) indeholdt ti Gange i Periferien; altsaa kan Tikanten beskrives, og ved Buernes Fordobling eller Halvering Femkanten, Tyvekanten o. s. v.

IV. Afsættes Sexkantsiden som Chorde, og fra dens ene Endepunkt Tikantsiden som Chorde, da vil den Bue, som er Differensen mellem Buerne, svarende til Sexkantsiden og til Tikantsiden, være indeholdt 15 Gange i Periferien (Nr. 235).

Altsaa kan Femtenkanten beskrives, og ved Buernes Halvering Tredivekanten o. s. v.

**238.** Nr. 1. Af Firkantsiden, $S_4 = r\sqrt{2}$, udledes saaledes, ved Hjelp af Formlen i Nr. 237, Ottekantsiden

$$S_8 = \sqrt{r\,(2r - \sqrt{4r^2 - 2r^2})} = \sqrt{r\,(2r - r\sqrt{2})}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$S_{16} = \sqrt{r\,(2r - \sqrt{4r^2 - r^2\,(2 - \sqrt{2})})}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \text{ o. s. v.}$$

Omvendt findes Radierne udtrykte i Siderne

$$r = \frac{S_4}{\sqrt{2}} = \frac{S_4\sqrt{2}}{2};$$

$$r = \frac{S_8}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{S_8\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{S_8}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}; \text{ o.s.v.}$$

Nr. 2. Af Sexkantsiden, $S_6 = r$, udledes, ved Hjelp af Formlen i Nr. 236, Trekantsiden

$$S_3 = \frac{r}{r}\sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3};$$

og, ved Hjelp af Formlen i Nr. 237, Tolvkantsiden

$$S_{12} = \sqrt{r\,(2r - \sqrt{4r^2 - r^2})} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}; \text{ o. s. v.}$$

$S_{12}$ kan ogsaa gives Formen $\frac{1}{2} r\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Omvendt findes Radierne at være

$$r = \frac{S_3}{\sqrt{3}} = \frac{S_3\sqrt{3}}{3};\ r = \frac{2\,S_{12}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{S_{12}\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}; \text{ o.s.v.}$$

Nr. 3. Af Tikantsiden

$S_{10} = \frac{r}{2}\,(-1 + \sqrt{5})$, udledes, ved Hjelp af Formlen i Nr. 236, Femkantsiden

$$S_5 = \frac{S_{10}}{r}\sqrt{4r^2 - S_{10}^2}$$
$$= \frac{\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})}{r}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}\,(-1+\sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}\,(6 - 2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{r^2}{4}\,(10 + 2\sqrt{5})}$$



$$= \frac{r}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})\,(-1 + \sqrt{5})^2}$$
$$= \frac{r}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})\,(6 - 2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{r}{4}\sqrt{40 - 8\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Ved Hjelp af Formlen i Nr. 237 udledes Tyvekantsiden

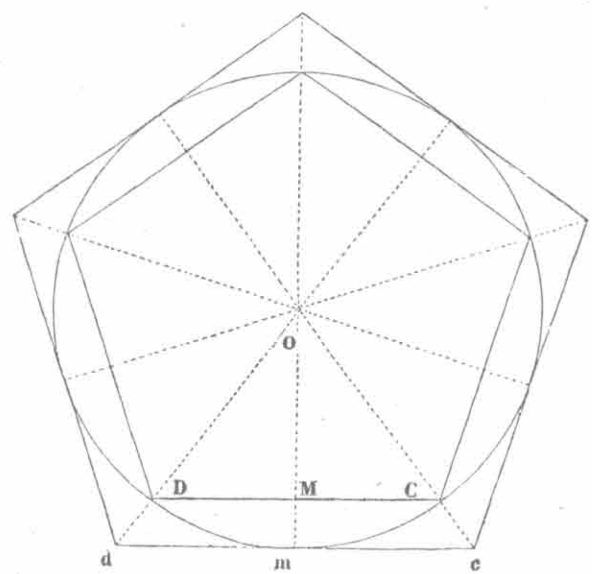
$$S_{20} = \sqrt{r\left[2r - \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}\,(-1 + \sqrt{5})^2}\right]}$$
$$= \sqrt{r\left[2r - \frac{r}{2}\sqrt{16 - (6 - 2\sqrt{5})}\right]}$$
$$= r\sqrt{2 - \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$
$$= \frac{r}{2}\sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}; \text{ o. s. v.}$$

Omvendt findes Radierne at være

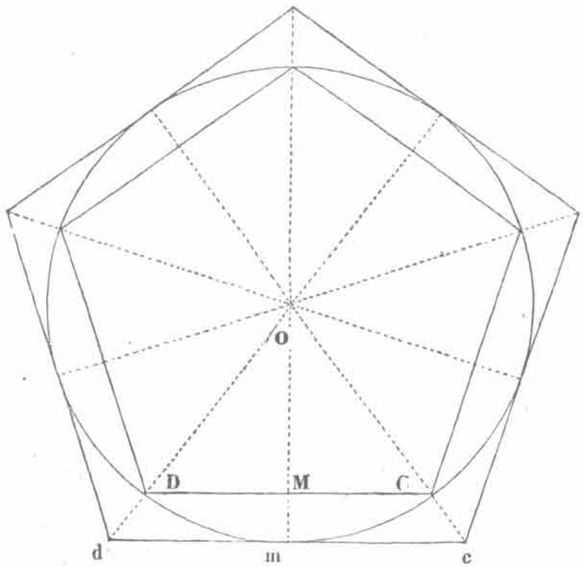
$$r = \frac{2\,S_{10}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{S_{10}\,(1+\sqrt{5})}{2}.$$

$$r = \frac{2\,S_5}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{S_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}; \text{ o. s. v.}$$

**239.** Naar Siden, DC = s, til en indskreven regelmæssig Polygon og Radius, OD = r, ere givne,



da at finde Siden, dc = S, til en omskreven Polygon af samme Sideantal.




Da Siderne, DC og dc, ere proportionale med deres mindste Radier, OM, Om (Nr. 231), haves $\frac{dc}{DC} = \frac{Om}{OM}$, hvor

$$OM = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} s^2}$$

altsaa $\frac{S}{s} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}} = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$,

hvoraf $S = \frac{2sr}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$;

saaledes er $S_3 = \frac{2s_3 r}{\sqrt{4r^2 - s_3^2}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = 2r\sqrt{3}$

$S_4 = 2r$, $S_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$, o. s. v.

**240.** Omvendt. Naar Siden, dc = S, til en omskreven regelmæssig Polygon og Radius, Om = OD = r, ere givne, at finde Siden, DC = s, til en indskreven Polygon af samme Sideantal.

Da Polygonsiderne dc og DC ere proportionale med Radierne Od, OD (Nr. 231), haves $\frac{DC}{dc} = \frac{OD}{Od}$,

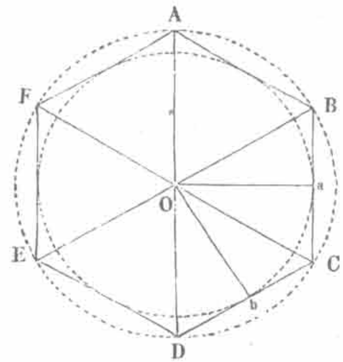


hvor $Od = \sqrt{\overline{Om}^2 + \overline{dm}^2} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} S^2}$,

altsaa $\frac{s}{S} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}S^2}} = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 + S^2}}$,

hvoraf $s = \frac{2Sr}{\sqrt{4r^2 + S^2}}$.

**241.** En regelmæssig Polygons Fladeindhold er ligt dens Perimeter multipliceret med det Halve af dens mindste Radius.




Den regelmæssige Polygon kan deles i ligesaamange ligebenede Triangler, som den har Sider, idet hver Side er Grundlinie i en af disse Triangler. Sættes en af disse Sider BC = $S_n$, idet Polygonen antages at have n Sider, og Oa = $\varrho$, da er $\triangle$ BOC = $\frac{1}{2}\varrho \,.\, S_n$, og Polygonen $P_n = \frac{1}{2}\varrho \,.\, n S_n = \frac{1}{2}\varrho$ . Perimeter.

Da $\varrho = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{Ca}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}S_n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - S_n^2}$, naar den største Radius sættes = r, haves

$$\mathbf{P_n = \frac{n}{4} S_n \sqrt{4r^2 - S_n^2}}.$$

Sættes n = 3, haves Fladeindholdet af den ligesidede Triangel

$$P_3 = \tfrac{3}{4} r\sqrt{3}\sqrt{4r^2 - 3r^2} = \tfrac{3}{4} r^2\sqrt{3}.$$

Sættes n = 4, haves Qvadratet

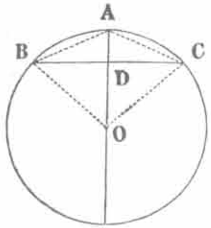
$$P_4 = \tfrac{4}{4} r\sqrt{2}\sqrt{4r^2 - 2r^2} = 2r^2.$$

Sættes n = 5, haves den regelmæssige Femkant

$$P_5 = \tfrac{5}{4} \,.\, \tfrac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \,.\, \sqrt{4r^2 - \tfrac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \tfrac{5r}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \,.\, \tfrac{r}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{5}{8} r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$




For Polygoner, hvis Sidetal er lige, findes Fladeindholdet lettere formedelst følgende Formel:

Er AB Siden i en 2n-kant, eller er $AB = S_{2n}$, da ere $BC = S_n$, og $\triangle AOB = \frac{1}{2} AO \,.\, BD = \frac{1}{2} r \,.\, \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{4} r S_n$, altsaa, da Polygonen bestaaer af 2n saadanne Triangler,

$$\mathbf{P_{2n}} = \frac{2n}{4} r S_n = \frac{n}{2} \mathbf{rS_n}.$$

Sættes $2n = 6$, haves Sexkanten

$$P_6 = \frac{3}{2} r \,,\, r\sqrt{3} = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}.$$

Sættes $2n = 8$, haves Ottekanten

$$P_8 = 2r \,.\, r\sqrt{2} = 2r^2\sqrt{2}.$$

Sættes $2n = 10$, haves Tikanten

$$P_{10} = \frac{5}{2} r \,.\, \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{5}{4} r^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Sættes $2n = 12$, haves Tolvkanten

$$P_{12} = \frac{6}{2} r \,.\, r = 3r^2 \quad \text{o. s. v.}$$

I Tal haves

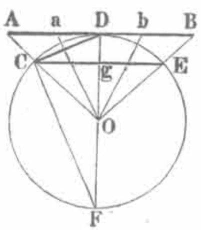
$P_3 = r^2 \times 1{,}2990 \ldots$ $\quad P_8 = r^2 \times 2{,}8284 \ldots.$

$P_4 = r^2 \times 2.$ $\quad P_{10} = r^2 \times 2{,}9389 \ldots.$

$P_5 = r^2 \times 2{,}3776 \ldots$ $\quad P_{12} = r^2 \times 3.$

$P_6 = r^2 \times 2{,}5980 \ldots$

Disse Tal vise, at Polygonens Fladeindhold voxer med Sideantallet.




**(242.)** Man kjender Siderne, $CE = s_n$, og $AB = S_n$, til to regelmæssige Polygoner af samme Sideantal, ind- og omskrevne samme Cirkel; man skal finde Siderne CD og ab (der betegnes med $s_{2n}$ og $S_{2n}$) til ind- og omskrevne Polygoner af dobbelt Sideantal.



1°. I $\triangle$ AOD er $\angle$ O halveret, hvoraf:

$$\frac{Aa}{aD} = \frac{AO}{DO} = \frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CE},$$

$$\text{eller } \frac{Aa}{aD} = \frac{S_n}{s_n};\ \frac{Aa + aD}{aD} = \frac{S_n + s_n}{s_n}$$

$$\frac{2(Aa + aD)}{2\,aD} = \frac{S_n + s_n}{s_n};\ \frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{S_n + s_n}{s_n}$$

$$S_{2n} = S_n \,.\, \frac{s_n}{S_n + s_n} \ldots. \text{ [I].}$$

2°. $\triangle$ CDF giver: $\frac{FD}{CD} = \frac{CD}{Dg}$

$$\overline{CD}^2 = 2\ DO \,.\, Dg \ldots.$$

$\triangle$ CDG er ligedannet med DOa, hvoraf $\frac{Dg}{Da} = \frac{Cg}{DO}$; $Dg = \frac{Da \,.\, Cg}{DO}$.

$$CD^2 = 2\,Da \,.\, Cg;\ s_{2n}{}^2 = S_{2n} \,.\, \tfrac{1}{2} s_n,$$

$$s_{2n} = \sqrt{\tfrac{1}{2} S_{2n} \,.\, s_n} \ldots. \text{ [II].}$$

Anm. Multipliceres [I] paa begge Sider med Tallet 2n, og dernæst i Brøken Tæller og Nævner med n, haves

$$2n\,S_{2n} = 2 \,.\, n\,S_n\, \frac{n\,s_n}{n\,S_n + n\,s_n},$$

som, naar Perimeterne af de Polygoner af n Sider, hvortil $S_n$ og $s_n$ høre, betegnes ved $\mathfrak{P}_n$ og $\mathfrak{p}_n$, og de af 2n Sider, hvortil $S_{2n}$ og $s_{2n}$ høre, ved $\mathfrak{P}_{2n}$ og $\mathfrak{p}_{2n}$, kan skrives saaledes:

$$\mathfrak{P}_{2n} = 2 \,.\, \mathfrak{P}_n\, \frac{\mathfrak{p}_n}{\mathfrak{P}_n + \mathfrak{p}_n}.$$

Multipliceres (II) ogsaa paa begge Sider med 2n, haves

$$2n \,.\, s_{2n} = \sqrt{4\,n^2 \,.\, \tfrac{1}{2} S_{2n} \,.\, s_n} = \sqrt{2n \,.\, S_{2n} \,.\, n s_n}, \text{ eller}$$

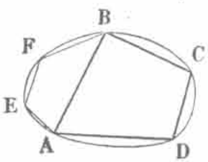
$$\mathfrak{p}_{2n} = \sqrt{\mathfrak{P}_{2n} \,.\, \mathfrak{p}_n}.$$

# Ottende Afdeling.

## Cirkelregning.

### § 1. Om Cirkelliniens Forhold til Diametren, og om Cirklens Fladeindhold (Rectification og Qvadratur).

**243.** *At rectificere* (eller udtrykke i retliniet Maal) en Curve er at bestemme denne Curves Længde i Forhold til en retliniet Linieenhed. At rectificere Cirkelperiferien er da at finde dens Længde udtrykt i Radius eller Diameter.




Indskrives i en convex Curve, AEFBCD, en Polygon, ABCD, tages paa hver Bue et eller flere mellemliggende Punkter, og dannes, ved at drage AE, EF, FB o. s. v., en anden Polygon; vedbliver man saaledes bestandigt at lade Sidernes Antal voxe, idet hver af dem bliver saa lille, som man ønsker: da ville de saaledes efterhaanden erholdte Flader have en Grændse, der er Fladeindholdet af AEFBCD.

Vi forstaae derfor ved *Fladeindholdet af en plan Figur, der er begrændset af en Curve, Grændsen for de Fladeindhold, som man erholder ved i denne Curve at indskrive en Række af convexe Polygoner, hvis Sider aftage i det Ubestemmelige, saaat de kunne blive mindre end enhver angivelig Størrelse.*



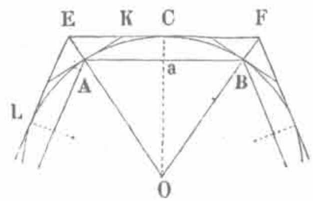
Sees hen til Perimeterne af Polygonerne, da er det klart, at Perimeteren af Polygonen AEFBCD er større end af ABCD, og at man, ved at vælge flere og flere mellemliggende Punkter i Curven, kan construere Polygoner, hvis Perimetre stadigt voxe, men dog ikke i det Uendelige, thi enhver af dem er mindre end den indesluttende convexe Linie.

Af denne Betragtning vil følgende Definition forstaaes:

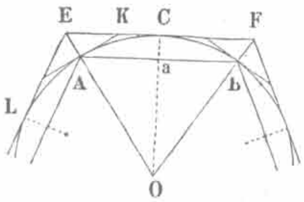
*Længden af en convex plan Curve er den Grændse, til hvilken Perimeterne af de i Curven indskrevne Polygoner nærme sig mere og mere, efterhaanden som Siderne, der kunne blive mindre end enhver angivelig Størrelse, aftage i det Ubestemmelige.*

Fra disse almindelige Betragtninger gaae vi nu over til vort egentlige Formaal: nærmelsesvis at finde Cirkelliniens Længde, udtrykt i retliniet Maal (rectificeret), og dens Flademaal med Hensyn til den almindelige Enhed: Qvadratet.

**244.** *Efterhaanden som Sidernes Antal i en indskreven Polygon fordobles, bliver dens Perimeter (og dens Fladeindhold) større, uden dog nogensinde at blive saa stor som Cirklens Periferi (Fladeindhold), medens den omskrevne Polygons Perimeter (og dens Fladeindhold), under samme Omstændigheder, bliver mindre og mindre, uden dog nogensinde at blive saa lille som Cirkelperiferien (Cirklens Fladeindhold).* Thi




1°. da enhver Polygonside, AB, er mindre end den tilsvarende Bue, ACB, saa maa hele Periferien, udtrykt i retliniet Maal, være større end enhver indskreven Polygons Perimeter.




Fremdeles: er C Midtpunktet af Buen ACB, da haves Chorden AB < Chorden AC + CB, hvilket viser, at naar Sideantallet af den indskrevne Polygon fordobles, da nærmer Perimetren sig mere og mere Cirkelperiferien, idet den dog altid bliver mindre end samme.

2°. Da Buen CAL < CE + EL, saa er enhver omskreven Polygons Perimeter større end Periferien. Tangenten AK er den halve Side til en omskreven Polygon af dobbelt Sideantal (Nr. 227), og da den Lodrette KA er < KE, haves AK + KC < EC; fordobles altsaa den omskrevne Polygons Sideantal, da bliver Perimetren mindre og nærmer sig mere Længden af Periferien, idet den dog altid bliver større end samme. (For Fladeindholdet er Sætningen umiddelbart indlysende af Figuren.)

**245.** *Med Hensyn til en given Cirkellinie, kan man altid indskrive i den, og omskrive om samme regulære Polygoner af ligemange Sider, af den Beskaffenhed, at Forskjellen mellem deres Perimeter, eller deres Fladeindhold, er mindre end enhver given Størrelse.* Indskrives og omskrives to Polygoner af ligemange Sider, og fordobles Sideantallet, da paastaaes, at denne Fordobling kan fortsættes saa længe, indtil Differensen mellem de to sidste Perimetre, som betragtes, er mindre end en given Størrelse D. Perimeterne af de to først beskrevne Polygoner være $\mathfrak{p}$ og $\mathfrak{P}$, største Radius OA = r, og mindste Radius Oa = $\varrho$, da haves

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} = \frac{r}{\varrho} \quad \frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{p}}{\mathfrak{P}} = \frac{r-}{r} \quad \mathfrak{P}-\mathfrak{p} = \frac{r-\varrho}{r}\mathfrak{P}.$$

Af Factorerne paa høire Side aftager $\mathfrak{P}$ stadigt, som Sideantallet voxer, r er constant. Der skal altsaa kun bevises, at r — $\varrho$ kan blive mindre end enhver given Størrelse d, thi da kan $\mathfrak{P} - \mathfrak{p}$ ogsaa bringes til at være mindre end D; r — $\varrho$ = OA — Oa er mindre end Aa, det er: mindre end det Halve af Siden i den Polygon, som sidst construeres; da man nu kan vedblive at construere Polygoner indtil man finder en Side, der er mindre end den givne Størrelse d, sees at Sætningen er beviist.



Da Differensen mellem Perimeterne af ind- og omskrevne Polygoner af ligemange Sider aftager i det Ubestemmelige, saaledes at den kan blive mindre end enhver given Størrelse, saa maae disse Perimetre have en fælles Grændse. Det Samme gjælder om Polygonernes Fladeindhold. Da fremdeles de ind- og omskrevne Polygoner, med Hensyn til *Formen*, desto mere nærme sig til Cirklens Form, jo mere Sideantallet forøges, ere følgende Definitioner retfærdiggjorte:

*En Cirkelperiferis Længde er den fælles Grændse, som Perimeterne af de ind- og omskrevne regelmæssige Polygoner stræbe at naae.*

*En Cirkels Fladeindhold* (Areal) *er den fælles Grændse, som Fladeindholdene af de regelmæssige ind- og omskrevne Polygoner nærme sig mere og mere, jo større Antallet af deres Sider bliver.*

**246.** *To Cirkelperiferier forholde sig som deres Radier; to Cirklers Fladeindhold forholde sig som deres Radier qvadrerede.*

1°. I den ene Cirkel være Periferiens Længde udtrykt ved P, dens Areal ved A, dens Radius ved R; i den anden Cirkel være disse Størrelser fremstillede ved p, a, r.

Indskriver man i de givne Cirkler regelmæssige Polygoner af samme Antal Sider, og kaldes deres Perimetre $\mathfrak{P}$ og $\mathfrak{p}$, haves $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} = \frac{R}{r}$.

Fordobles Sideantallet, og kaldes Perimeterne $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ ..., $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ ..., haves $\frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{p}_2} = \frac{R}{r}$, $\frac{\mathfrak{P}_3}{\mathfrak{p}_3} = \frac{R}{r}$, o. s. v.

Jo oftere Sideantallet i Polygonerne fordobles, desto mere nærme $\mathfrak{P}$ og $\mathfrak{p}$ sig til P og p, der ere disse Perimetres Grændser, og Forholdet $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}$ bliver stedse $= \frac{R}{r}$.

Forholdet mellem Grændserne for de to foranderlige Størrelser bliver altsaa ligt Forholdet mellem disse Størrelser selv, og man har

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

2°. Kaldes Fladeindholdene $\mathfrak{A}$ og $\mathfrak{a}$, udledes af

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} = \frac{R^2}{r^2},$$

paa samme Maade:

$$\frac{A}{a} = \frac{R^2}{r^2}.$$

**247.** Af forrige Sætning følger: $\frac{P}{R} = \frac{p}{r}$, eller $\frac{P}{2R} = \frac{p}{2r}$, eller $\frac{P}{D} = \frac{p}{d}$, (naar de to Cirklers Diametre ere D og d), hvilket viser, at Forholdet mellem en Cirkels Periferi og dens Diameter er det samme for alle Cirkler, eller, med andre Ord: det Tal, der angiver, hvor ofte en Cirkels Diameter er indeholdt i dens Periferi, er det samme for alle Cirkler; altsaa Forholdet mellem en Cirkels Periferi og dens Diameter er en **constant** Størrelse.

Dette Forhold er en incommensurabel Størrelse, der almindeligt betegnes ved Bogstavet $\pi$, hvis Nærmelsesværdi, udtrykt i Decimalbrøk, er

$$\frac{P}{D} = \pi = 3{,}1415926535 \ldots.$$

**248.** Af $\frac{P}{D} = \pi$ følger: $\mathbf{P} = \pi\mathbf{D} = \mathbf{2}\pi\mathbf{R}$, det er: Længden af en Cirkelperiferi erholdes ved at multiplicere dens Diameter, eller det Dobbelte af dens Radius, med Værdien af $\pi$.



**249.** En Cirkels Fladeindhold er ligt Productet af dens Periferi og halve Radius.

En regelmæssig Polygons Fladeindhold er ligt dens Perimeter multipliceret med dens halve Radius.

Da nu Grændsen for Polygonen er Cirklen, for Perimetren er Periferien, og for mindste Radius er Radius i den omskrevne Cirkel, saa indsees at:

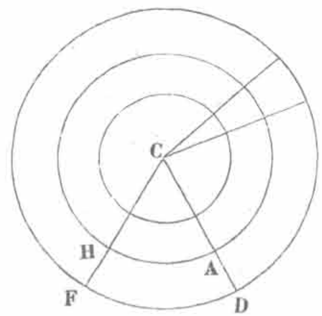
Cirklen = Periferi $\times \frac{1}{2}$ Radius,

eller Cirk. (R) = Perif. (R) $\times \frac{1}{2}$ R;

da nu Perif. (R) = $2\pi$R,

saa er **Cirk. (R)** $= \mathbf{2\pi R \times \frac{1}{2}R = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2}$.

**250.** Buer, HA og FD, som svare til samme eller ligestor Centrivinkel, HCA = FCD, ere proportionale med deres Radier.




Da enhver hel Cirkelperiferi kan betragtes som en Bue svarende til 4 Rette, haves (Nr. 107)

$$\frac{\text{Bue FD}}{\text{Perif. CD}} = \frac{\angle\,\text{FCD}}{4\,\text{R}} \text{ og}$$

$$\frac{\text{Bue HA}}{\text{Perif. CA}} = \frac{\angle\,\text{HCA}}{4\,\text{R}}, \text{ altsaa}$$

$$\frac{\text{Bue FD}}{\text{Bue HA}} = \frac{\text{Perif. CD}}{\text{Perif. CA}} = \frac{\text{CD}}{\text{CA}}.$$

Derfor siges Buer i forskjellige Cirkler, som svare til ligestore Centrivinkler, at være ligedannede.

**251.** Cirkelsectorer, som svare til samme Centrivinkel, forholde sig som Qvadraterne af deres Radier.

$$\frac{\text{Sector FCD}}{\text{Cirkel (CF)}} = \frac{\angle\,\text{FCD}}{4\,\text{R}};\quad \frac{\text{Sector HCA}}{\text{Cirkel (CH)}} = \frac{\angle\,\text{HCA}}{4\,\text{R}}$$

$$\frac{\text{Sector FCD}}{\text{Sector HCA}} = \frac{\text{Cirkel (CF)}}{\text{Cirkel (CH)}} = \frac{\overline{\text{CF}}^2}{\overline{\text{CH}}^2}.$$

**252.** Ligesaastor en Part, som en Bues Størrelse i Grader er af 360, ligesaastor en Part er Buens Længde af hele Periferien, udtrykt i retliniet Maal. Kaldes derfor denne P, Buens Længde b, og dens Gradeantal g, haves

$$\frac{360^0}{g^0} = \frac{P}{b}, \text{ altsaa}$$

$$b = \frac{g^0}{360^0} \times P = \frac{g}{360} \times 2\pi r = \frac{\pi}{180} \times g\,r$$

under Forudsætning, at Buen er given i Grader. Er Buen given i Minuter = m, saa er $m' = \frac{m}{60}$ Grad, altsaa Buens Længde

$$b = \frac{\pi}{180} \times \frac{m}{60} \times r = \frac{\pi}{180.60}\, mr.$$

Er Buen given i Secunder = s, da er

$$b = \frac{\pi}{180.60.60} \times s\,r.$$

Er Buen udtrykt baade i Grader, Minuter og Secunder, saa kan enten Minuter og Secunder udtrykkes i Brøk af en Grad (f. Ex. $53^\circ\ 33'\ 9'' = 53\frac{221}{400}{}^\circ$), og den første Formel benyttes, eller man kan beregne Grader, Minuter og Secunder hver for sig, og addere Resultaterne. Saaledes er Længden af en Bue, som indeholder g Grader, m Minuter og s Secunder

$$= r\left(g \cdot \frac{\pi}{180} + m \cdot \frac{\pi}{180.60} + s \cdot \frac{\pi}{180.60.60}\right).$$

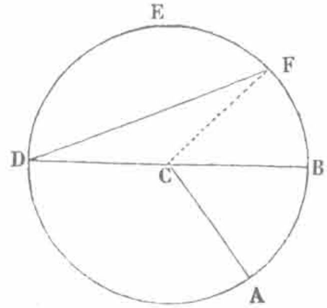
**253.** En Cirkelsector, CAB, har til Maal Halvdelen af Productet af den tilsvarende Bue, AB (rectificeret), og Radius, CA. Thi

$$\frac{\text{Sector CAB}}{\text{Cirkel CA}} = \frac{\text{Buen AB}}{\text{Perif. CA}} = \frac{\text{Buen AB} \times \frac{1}{2}\text{CA}}{\text{Perif. CA} \times \frac{1}{2}\text{CA}}.$$

Da den sidste Nævner er lig den første Nævner, saa følger, at Tælleren ogsaa er det; eller

$$\text{Sector CAB} = \text{Buen AB} \times \tfrac{1}{2}\text{CA}.$$






Da Sectoren er ligesaastor en Part af Cirklen, som dens Centrivinkel af 4 R, eller dens Bues Gradeantal af 360°, haves, naar Buen = g°, og Radius = r

$$\frac{\text{Sector}}{\text{Cirkel}} = \frac{g^0}{360^0}$$

$$\textbf{Sector} = \frac{g}{360}\,\pi r^2.$$

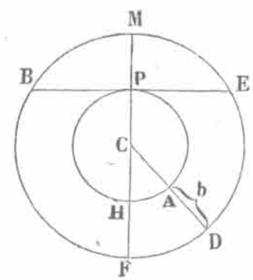
En Sector svarende til 120°, 90°, 72°, 60° . . . er saaledes $= \frac{1}{3}\pi r^2,\ \frac{1}{4}\pi r^2,\ \frac{1}{5}\pi r^2,\ \frac{1}{6}\pi r^2$.

Anm. I. Indholdet af Segmentet, DEF, findes ved fra Sectoren, DEFC, at drage Triangeln, DCF.

Da Segmentet DEF er ligt Sectoren DEFC, hvorfra er draget Triangeln DCF, og Sectorens Fladeindhold altid kan findes, naar Radius og Grademaalet af Buen er bekjendt, ligeledes Trianglens, naar DF er bekjendt, saa indsees, at naar Buens Grademaal divideret i 360 giver et Tal af Formen $2^n$, eller $3.2^n$, eller $5.2^n$, eller $3.5.2^n$, hvorved DF bliver en i Radius udtrykkelig Polygonside, at Segmentets Areal da kan findes.

F. Ex. Buen DEF være 120°, Radius = r; Sectoren er da $= \frac{1}{3}\pi r^2$, og $DF = S_3 = r\sqrt{3}$.

Sættes mindste Radius (Trianglens Høide) $= \varrho$, er Triangeln $= \frac{1}{2} S_3 \varrho = \frac{1}{2} r\sqrt{3}\ \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} . 3\,r^2} = \frac{1}{4} r^2\sqrt{3}$, og Segmentet $= \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} = \frac{1}{12} r^2 (4\pi - 3\sqrt{3})$.

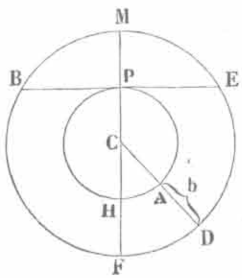



Anm. II. Den Del af Planen, som ligger mellem to concentriske Cirkler, kaldes en Cirkelring; Afstanden mellem Periferierne (AD = CD — CA) kaldes dens Brede.

Sættes CD = R, og CA = r, da sees let, at Ringen er lig $\pi R^2 - \pi r^2 =$

$$\pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r)(R - r).$$

Sættes Ringens Brede $= b$, saa haves Ringen $= (2r + b) b\pi = b . 2 \pi r + \pi b^2$.




Drages til et hvilketsomhelst Punkt, P, en Tangent til den indre Cirkel, endende sig i den stores Periferi, i B og E, og en Diameter, MF, lodret paa samme, da er: $R + r = FP$, og $R - r = MP$, altsaa Ringen $= \pi . FP . MP = \pi . \overline{BP}^2 = \frac{1}{4} \pi \overline{BE}^2$, det er: Ringen er lig en Cirkel, hvis Diameter er en Chorde i den større Cirkel, der tangerer den mindre Cirkel.

Anm. III. Arealet af et cirkelformigt Trapez, HADF, hvis Buer og Høide ere givne, findes saaledes:

$$HADF = \frac{FD . CF - HA . CH}{2}; \text{ men } \frac{FD}{HA} = \frac{CF}{CH};$$

$$\text{altsaa } \frac{FD - HA}{CF - CH} = \frac{FD}{CF} \text{ og } \frac{FD - HA}{CF - CH} = \frac{HA}{CH},$$

$$\text{hvoraf } CF = \frac{FD . FH}{FD - HA} \text{ og } CH = \frac{HA . FH}{FD - HA},$$

$$\text{altsaa } HADF = \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{FD}^2 . FH}{FD - HA} - \frac{\overline{HA}^2 . FH}{FD - HA} \right)$$

$$= \frac{1}{2} FH . \frac{\overline{FD}^2 - \overline{HA}^2}{FD - HA} = \frac{1}{2} FH . (FD + HA).$$

## §. 2. Nærmelsesvis at finde Værdien af $\pi$.

**254.** Da Forholdet mellem en Cirkels Periferi og Diameter, som bemærket, er incommensurabelt, kan det ikke udtrykkes nøie ved et endeligt Antal Ciffre. Her skal vises, hvorledes man kan finde en Nærmelsesværdi for dette Forhold.

Da $\pi = \frac{\text{Perif. (R)}}{2 R}$, saa indsees, at Opgaven kan løses ved for en given Radius at beregne, med en vis Nøiagtighed, den tilsvarende Periferi.

Sætte vi Cirklens Radius $= 1$, derpaa indskrive og omskrive regelmæssige Sexkanter, da er den indskrevnes Perimeter $= 6$, den omskrevnes $= \frac{2 \sqrt{3}}{3} \times 6 = 4 \sqrt{3} = 4 . 1{,}7320508$



$\pi$ er altsaa større end $\frac{6}{2}$ ɔ: $> 3$,
men mindre end $\frac{6{,}9282032}{2}$ ɔ: $< 3{,}4641016$.

Gaaende ud fra disse, beregner man efter Formlerne Nr. 242 Perimeterne af ind- og omskreven regelmæssige Tolvkant ($\mathfrak{P}_{12}$ og $\mathfrak{p}_{12}$)

$$\mathfrak{P}_{12} = 2 . 6{,}9282032 . \frac{6}{6{,}9282032 + 6} = 6{,}4307806,$$

$$\mathfrak{p}_{12} = \sqrt{6{,}4307806 \times 6} = 6{,}2116571.$$

Fortsættes denne Regning, faaes efterhaanden

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{p}_{24}$ | $= 6{,}2652572$ | $\mathfrak{p}_{768}$ | $= 6{,}2831678$ |
| $\mathfrak{P}_{24}$ | $= 6{,}3193199$ | $\mathfrak{P}_{768}$ | $= 6{,}2832203$ |
| $\mathfrak{p}_{48}$ | $= 6{,}2787004$ | $\mathfrak{p}_{1536}$ | $= 6{,}2831809$ |
| $\mathfrak{P}_{48}$ | $= 6{,}2921724$ | $\mathfrak{P}_{1536}$ | $= 6{,}2831941$ |
| $\mathfrak{p}_{96}$ | $= 6{,}2820639$ | $\mathfrak{p}_{3072}$ | $= 6{,}2831842$ |
| $\mathfrak{P}_{96}$ | $= 6{,}2854292$ | $\mathfrak{P}_{3072}$ | $= 6{,}2831875$ |
| $\mathfrak{p}_{192}$ | $= 6{,}2829049$ | $\mathfrak{p}_{6144}$ | $= 6{,}2831850$ |
| $\mathfrak{P}_{192}$ | $= 6{,}2837461$ | $\mathfrak{P}_{6144}$ | $= 6{,}2831858$ |
| $\mathfrak{p}_{384}$ | $= 6{,}2831152$ | $\mathfrak{p}_{12288}$ | $= 6{,}2831852$ |
| $\mathfrak{P}_{384}$ | $= 6{,}2833260$ | $\mathfrak{P}_{12288}$ | $= 6{,}2831854.$ |

Af denne Tabel sees, hvorledes de tilsvarende ind- og omskrevne Polygoners Perimetre nærme sig hinanden mere og mere; for Polygonen med 12288 Sider ere de kun 0,0000002 forskjellige fra hinanden, og den fælles Grændse for begge er Cirkelperiferiens Længde. De syv første Ciffre, som ere fælles for begge, ville altsaa nødvendigen svare til Nærmelsesværdien for $2\pi$, og vi have beregnet

$$\pi = \frac{6{,}283185}{2} = 3{,}141592 \text{ eller } 3{,}141593$$

med en Feil, der er mindre end en Miliontedel.

Udvikles 3,141592 i Kjædebrøk, blive de fire første Nærmelsesbrøker $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$.

$\frac{3}{1}$, som kun er nøie i 7de Dele, kan ikke anvendes.

$\frac{22}{7}$, det arkimediske Forhold, bruges ofte, da Feilen er mindre end $\frac{1}{742}$, altsaa mindre end 2 Tusindedele.

$\frac{333}{106}$ bruges ikke, da det følgende med samme Cifferantal giver en langt større Nærmelse.

$\frac{355}{113}$, som har Navn efter Metius, kan let erindres, da det erholdes ved at dele Tallet 113355 i to Dele, hver med 3 Ciffre; det er nøie i Miliontedele.



# Niende Afdeling.

## Om Algebraens Anvendelse paa Geometrien.

### Construction af algebraiske Udtryk og Opløsning af nogle Opgaver.

**255.** For at anvende den almindelige Mathematik paa Geometrien, maae Linier og Flader udtrykkes i Tal. At dette kan skee, have vi ofte seet i det Foregaaende. Man behøver kun at tage en af disse geometriske Størrelser til Enhed og dermed udmaale de andre ensartede Størrelser. Resultatet af denne Udmaaling bliver et Tal, og Tallene kunne, for større Almindeligheds Skyld, fremstilles ved Bogstaver; altsaa lader enhver geometrisk Størrelse sig fremstille algebraisk (som en almindelig Størrelse). Udtrykker saaledes $a$ hvormange Gange den antagne Linieenhed er indeholdt i et Qvadrats Sidelinie, da vil $\sqrt{2a^2}$ udtrykke dette Qvadrats Diagonal, og $a^2$ dets Fladeindhold; udtrykke $a$ og $b$ Antallet af Linieenheder, indeholdte i en Rectangels to hosliggende Sider, da vil $a \times b$ udtrykke dens Fladeindhold.

Da den almindelige Størrelseslæres Methoder ere anvendelige paa alle mulige numeriske Opgaver, maae de ogsaa kunne tjene til at opløse de Opgaver, som Geometrien frembyder.

Til den Ende tegner man (ligesom ellers ved en Opgave i

Geometrien) en Figur, som indeholder Opgavens Dele og Betingelser, og undersøger de Forhold, hvori de forskjellige Dele staae indbyrdes, eller med andre vilkaarligt dragne Linier.

Dernæst søger man at udtrykke de fundne Forhold med almindelige Tegn og danne Ligninger, som udtrykke Forbindelsen mellem de Givne, fremstillede enten ved Tal eller Bogstaver, og de Ubekjendte, altid fremstillede ved Bogstaver. Hele Undersøgelsen bliver da ført tilbage paa Ligningernes Opløsning, hvorved man erholder de Ubekjendte udtrykte ved Hjelp af de bekjendte Linier; hvilke Udtryk dernæst geometrisk fremstilles (construeres).

*Ved at anvende Algebraen paa Geometrien har man altsaa til Formaal: at oversætte Geometriens Opgaver i det almindelige mathematiske Sprog, og omvendt: at fremstille de fundne Resultaters geometriske Betydning.*

### Exempel.

**256.** *Der er givet Fladeindholdet af et Qvadrat; dette skal forvandles til en ligestor Triangel, hvis Grundlinie er lig Qvadratets Side.*

Kaldes det Tal, som angiver, hvor ofte den antagne Linieenhed er indeholdt i Qvadratsiden: $a$, da er Qvadratets Fladeindhold $= a^2$. Kaldes den søgte Triangels Høide $x$ (idet $x$ tænkes bestemt med Hensyn til samme Linieenhed, som gav Qvadratsiden $= a$), da er dens Fladeindhold $= \frac{ax}{2}$.

Opgaven fremstilles altsaa algebraisk ved Ligningen

$$\frac{ax}{2} = a^2, \text{ eller } x = 2a, \text{ det er:}$$

Trianglens Høide maa være dobbelt saa stor som Qvadratsiden.

Den geometriske Fremstilling heraf skeer ved paa en Linie



$= a$ at opreise en Lodret $= 2a$, og fra dennes Endepunkt at drage rette Linier til Endepunkterne af hin.

### Et andet Exempel.

**257.** *At dele en given ret Linie i yderste og mellemste Forhold*, det er saaledes i to Dele, at den ene er Mellemproportional mellem hele Linien og den anden Deel (Jevnf. 164, Anm. og 200).

Den givne Linie være $= a$, Mellemproportionalen $= x$, da er den anden Deel $= a - x$, og Opgaven udsiger

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}, \text{ eller}$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

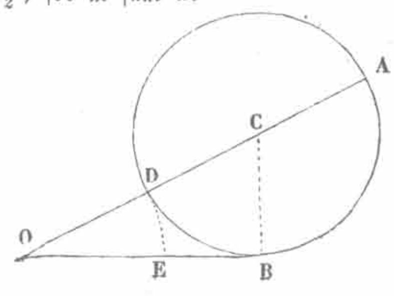
$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

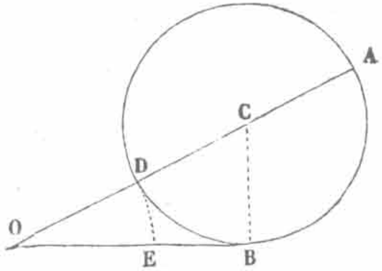
som opløst giver de to Rødder

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ og}$$

$$x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Kun den første af disse Værdier kan tilfredsstille Opgaven; thi den anden er, naar ikke tages Hensyn til Tegnet $-$, aabenbart større end $a$. Vi ville her kun beskjæftige os med den første. Den bestaaer af to Dele, hvoraf den *ene*: $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ udtrykker Hypotenusen i en retvinklet Triangel, hvis Catheter ere lig $a$ og $\frac{a}{2}$, og den *anden*: $-\frac{a}{2}$, simpelthen er lig Halvdelen af den givne Linie. Da denne anden Del er negativ, maa man først construere $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ og derfra drage $\frac{a}{2}$, for at faae $x$.






Vi drage altsaa en Linie $OB = a$, opreise i Endepunktet B en Lodret $BC = \frac{a}{2}$, drage OC og have øiensynligt

$$OC = \sqrt{a^2 + (\tfrac{a}{2})^2}.$$

For fra denne Linie at drage $\frac{a}{2}$, afsættes $\frac{a}{2}$ fra C til D; Resten OD vil være $= x$, og, for at udføre den forlangte Deling, er det tilstrækkeligt at overføre $x$ paa OB fra O, hvilket skeer ved fra O som Midtpunkt, med Radius OD, at beskrive Buen DE, thi da er $OE = OD = x$.

Om den negative Værdi for $x$, der er en for denne Opgave fremmed Rod, skulle vi tale i det Følgende.

**258.** Det Anførte vil være tilstrækkeligt til at vise, at Opløsningen af en geometrisk Opgave ved Hjelp af Algebra bestaaer af tre Hovedstykker:

At oversætte Opgaven i det mathematiske Sprog, eller sæte den i Ligning;

at opløse Ligningen (eller Ligningerne, hvis der er flere Ubekjendte); og

at construere, eller at udtrykke i Linier det algebraiske Udtryk, hvortil man er kommet.

For at sætte Opgaven i Ligning kan ikke gives anden Regel end, at man bør betragte Opgaven som opløst og sammenligne indbyrdes alle de Størrelser, der findes i den, uden at tage Hensyn til, om de ere bekjendte eller ubekjendte; dernæst



undersøge, hvorledes de afhænge af hinanden, forat see, hvilke maae være givne, for at bestemme de andre. Ligningens Opløsning læres i Algebraen, kun maa her gjøres opmærksom paa, at man maa bestræbe sig for at give den Ubekjendtes Værdi den simplest mulige Skikkelse.

For den sidste Deel, at construere Værdien for den Ubekjendte, kan derimod gives bestemte Regler, hvilke her skulle fremsættes.

**259.** Vi betragte kun her de rationale Udtryk og de irrationale af anden Grad, det vil sige de Resultater, der fremkomme af Ligninger af første og anden Grad.

Deres Construction kan henføres til følgende fem Hovedtilfælde, naar $x$ betegner den søgte Linie, og $a, b, c, d \ldots$ betegne de givne Linier, hvoraf den afhænger.

Nr. 1. $\boldsymbol{x = a - b + c - d} +$ 2c.
Nr. 2. $\boldsymbol{x = \frac{ab}{c}}$
Nr. 3. $\boldsymbol{x = \sqrt{ab}}$
Nr. 4. $\boldsymbol{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$
Nr. 5. $\boldsymbol{x = \sqrt{a^2 - b^2}}$.

Nr. 1. For at construere Udtrykket

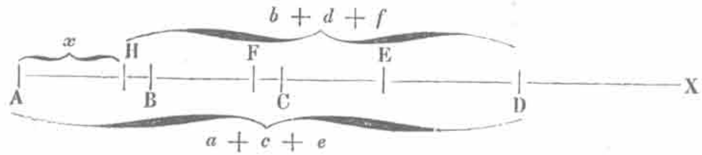
$$\boldsymbol{x = a - b + c - d + e - f + \ldots},$$

samles alle de negative Størrelser, saa at Udtrykket faaer Formen

$$x = (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$$

og fremstiller Differensen mellem Summen af de rette Linier

$$a, c, e \ldots \text{ og af } b, d, f, \ldots$$




Paa en ubestemt ret Linie, AX, afsættes; idet man gaaer ud fra A, Linien AB $= a$, BC $= c$, CD $= e$; altsaa haves AD $= a + c + e$.

Dernæst afsættes, fra D mod A, DE $= b$, EF $= d$, FH $= f$, som giver: DH $= b + d + f$. Følgelig er

$$AH = AD - DH$$
$$= (a + c + e) - (b + d + f) = x.$$

AH er derfor den forlangte Linie. Paa samme Maade gaaes frem med et hvilketsomhelst Antal Linier.

Man maa lægge Mærke til, at Additionen maa udføres fra Venstre mod Høire, og Subtractionen fra Høire mod Venstre.

Ligesaa let lade Udtryk som $6a$, $3b$ . . . sig construere, idet den givne Linie, $a$, eller $b$, afsættes saamange Gange i Træk paa en ret Linie, som Coefficienten angiver.

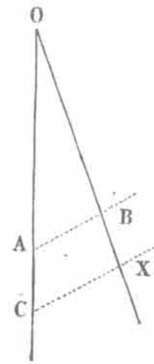
Da der er vist i Nr. 193, hvorledes en ret Linie kan deles i et hvilkelsomhelst Antal ligestore Dele, har det heller ingen Vanskelighed at construere Udtryk som

$$x = \frac{5a}{3};\quad x = \frac{4a}{7} \text{ o. s. v.}$$

For saaledes at construere $x = \frac{5a}{3}$, dannes en ret Linie $= 5a$, og denne deles i tre ligestore Dele. En af disse ligestore Dele er $= x$; eller ogsaa, da $x = 5 \cdot \frac{a}{3}$, deles den givne Linie, $a$, i 3 ligestore Dele, og en af disse ligestore Dele afsættes 5 Gange i Træk paa en ret Linie.

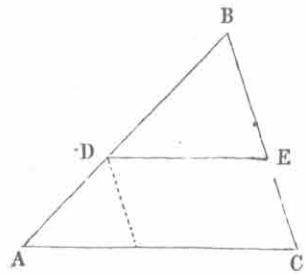
Nr. 2. For at construere $x = \frac{ab}{c}$,
fremstilles dette Udtryk saaledes $\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$,
som lærer, at $x$ er fjerde proportionale Linie til $c$, $a$ og $b$. Denne kan construeres paa to Maader.






1°. Paa en vilkaarlig Vinkels Been afsættes, idet man gaaer ud fra Toppunktet O, Linien OA $= c$, OC $= a$, og paa det andet Been OB $= b$; derpaa drages AB og, parallel med samme, CX. Punktet X, hvor denne skjærer OX, bestemmer OX $= x$, thi efter Nr. 144, Anm. haves

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OX} \text{ eller } \frac{c}{a} = \frac{b}{OX}, \text{ altsaa}$$
$$OX = \frac{OC \times OB}{OA} = \frac{ab}{c} = x.$$

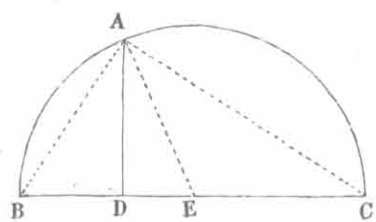


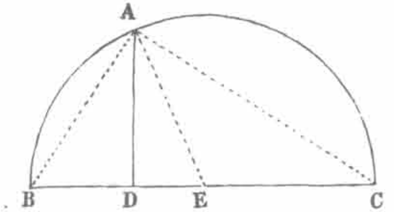

2°. Paa en vilkaarlig Linie, BC, afsættes BE $= c$, BC $= a$. Fra Punktet E drages en vilkaarlig ret Linie, paa hvilken afsættes ED $= b$; gjennem D og B drages en ret Linie BA, og gjennem C en Linie parallel med DE; denne Linie AC vil være den forlangte; thi Constructionen giver

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}, \text{ det er: } \frac{c}{a} = \frac{b}{AC}; \text{ altsaa } AC = x.$$

Efter samme Regler construeres $x = \frac{a^2}{c}$, eller $x = \frac{a \times a}{c}$; thi heraf udledes $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$, som viser, at $x$ er tredie proportionale Linie til $c$ og $a$.

Naar $c > a$, kan man ogsaa undertiden fordelagtig anvende følgende Construction:






Omkring BC $= c$ som Diameter beskrives en Halvcirkel; fra B indføres i denne en Chorde BA $= a$; fra A nedfældes den Lodrette AD. BD vil da være $= x$; thi efter Nr. 163, 3° haves $\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}$, eller $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$, det er: $x = \frac{a^2}{c}$.

Nr. 3. $x = \sqrt{ab}$ udtrykker en **Mellemproportional** mellem $a$ og $b$, thi af dette Udtryk udledes

$$x^2 = ab, \text{ hvoraf } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Der er tre Constructioner:

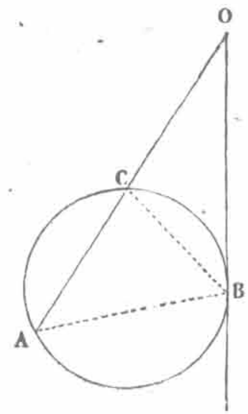
1°. Paa en ubestemt ret Linie afsættes BD $= a$, DC $= b$, dernæst beskrives om BC, $= a + b$, som Diameter en Halvcirkel, og den Lodrette DA opreises. Denne Lodrette er Mellemproportional mellem BD og DC (Nr. 163, 2°), altsaa

$$\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{CD}, \text{ eller } \frac{a}{DA} = \frac{DA}{b}, \text{ hvoraf}$$
$$\overline{DA}^2 = ab;\ DA = \sqrt{ab} = x.$$

2°. Om den største af de givne Linier, BC $= a$, beskrives en Halvcirkel; dernæst tages BD $= b$, og i D opreises den Lodrette DA. Drages Chorden BA, da er den lig $x$, thi efter Nr. 163, 3° haves

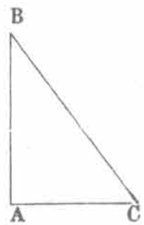
$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}, \text{ eller } \frac{a}{BA} = \frac{BA}{b}, \text{ hvoraf}$$
$$\overline{BA}^2 = ab;\ BA = \sqrt{ab} = x.$$






3°. Afsæt OA $= a$, OC $= b$; beskriv om Differensen AC en Cirkel; drag, fra O, en Tangent til denne Cirkel. Tangentstykket OB vil være ligt $x$; thi efter Nr. 164, 3° haves $\frac{AO}{OB} = \frac{OB}{OC}$, $\overline{OB}^2 = AO \,.\, OC$, eller $\overline{OB}^2 = a \,.\, b$, eller $OB = \sqrt{ab} = x$.

Nr. 4. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ fremstilles ved Hypotenusen i en retvinklet Triangel, hvis Catheter ere lig $a$ og $b$.




Man construerer derfor en ret Vinkel BAC, afsætter AB $= a$, AC $= b$, og drager BC; man har da

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = x.$$

Nr. 5. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ fremstilles ved den ene Cathete i en retvinklet Triangel, hvis Hypotenuse $= a$, og hvis anden Cathete $= b$. Udtrykket kan construeres paa tre forskjellige Maader.

1°. Paa en ret Vinkels ene Been afsættes den mindre Linie AC $= b$, derfra beskrives fra C som Midtpunkt, med en Radius CB $= a$, en Cirkelbue, som skjærer Vinklens andet Been i B; AB er da $= x$, thi man har

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2 = a^2 - b^2,$$
$$\text{hvoraf } AB = \sqrt{a^2 - b^2} = x.$$

2°. (Fig. Side 202). Om BC $= a$ som Diameter beskrives en Halvcirkel, Chorden BA $= b$ drages; den anden Chorde, AC, vil være $= x$, thi Trianglen BAC er retvinklet i A.

3°. Udtrykket $\sqrt{a^2 - b^2}$ kan gives Formen $\sqrt{(a + b)(a - b)}$, og fremstilles altsaa ved en Mellemproportional mellem $a+b$ og $a-b$.

**260.** Ved Hjelp af disse Constructioner kunne de mest sammensatte algebraiske Udtryk construeres, og vi skulle her fremsætte nogle Exempler paa Fremgangsmaaden.

Expl. 1. $x = \frac{2abc}{de}$;
Det kan gives Formen: $x = \frac{2ab}{d}\cdot\frac{c}{e}$; $\frac{2ab}{d}$ udtrykker fjerde proportionale Linie til $d$, $2a$ og $b$; udføres denne Construction og sættes $\frac{2ab}{d} = m$, haves $x = m \times \frac{c}{e}$, hvoraf sees, at $x$ er fjerde proportionale Linie til $e$, $m$ og $c$.

Expl. 2. $x = \frac{2a^3bc^2}{3d^2f^2g}$.
Dette Udtryk kan sættes under Formen
$$x = \frac{2a^2}{3d} \times \frac{a}{d}\times\frac{b}{f}\times\frac{c}{f}\times\frac{c}{g}.$$
$$\frac{2a^2}{3d} = \frac{2a\,.\,a}{3d}$$
er fjerde proportionale Linie til $3d$, $2a$ og $a$, som construeret være $= m$; man har da
$$x = m \times \frac{a}{d}\times\frac{b}{f}\times\frac{c}{f}\times\frac{c}{g}.$$
Construeres atter $m\times\frac{a}{d}$, og sættes $= p$, haves
$$x = p\cdot\frac{b}{f}\cdot\frac{c}{f}\cdot\frac{c}{g}.$$
Ved saaledes bestandigt at construere fjerde proportionale Linie, erholdes $x$.

Expl. 3. $x = a\sqrt{5}$. Udtrykket omformes til $\sqrt{5a^2}$, der atter opløses i $\sqrt{5a\,.\,a}$, og da construeres som Mellemproportional mellem $5a$ og $a$; eller til $\sqrt{4a^2+a^2} = \sqrt{(2a)^2+a^2}$, og construeres da som Hypotenuse i en retvinklet Triangel, hvis ene Cathete $= 2a$, og den anden $= a$.

Expl. 4. $x = \frac{abc-d^3}{mn+p^2}$;
det omformes til $\frac{d^2\left(\frac{abc}{d^2}-d\right)}{d\left(\frac{mn}{d}+\frac{p^2}{d}\right)} = \frac{d\left(\frac{abc}{d^2}-d\right)}{\frac{mn}{d}+\frac{p^2}{d}}$.



Construeer $y = \frac{abc}{d^2} = \frac{ab}{d}\cdot\frac{c}{d}$; $z = \frac{mn}{d}$, og $v = \frac{p^2}{d}$, da haves $x = \frac{d(y-d)}{z+v}$ at være fjerde Proportionallinie til $(z+v)$, $d$ og $(y-d)$.

Expl. 5. $x = \frac{a^4 - a^2b^2 + ab^3}{a^3+b^3}$.
Divideer Tæller og Nævner med $a^2$, da er $x = \frac{a^2-b^2+\frac{b^3}{a}}{a+\frac{b^3}{a^2}}$.
Opløs $\frac{b^3}{a}$ i $b\,.\,\frac{b^2}{a}$, og construeer $y=\frac{b^2}{a}$, da er $\frac{b^3}{a} = by$, sæt $\sqrt{by} = z$, og construeer $z$,
$$\text{da er } x = \frac{a^2-b^2+z^2}{a+\frac{by}{a}};$$
construeer $v = \frac{by}{a}$, da haves $x = \frac{a^2-b^2+z^2}{a+v}$. Construeer et Quadrat $= a^2-b^2+z^2$, og sæt dets Side $= q$; addeer $a$ og $v$ og sæt Summen $= s$, da haves $x = \frac{q^2}{s}$.

Expl. 6. $x = \sqrt{a^2+\frac{1}{4} b^2 \pm a\sqrt{a^2+b^2}}$. Construeer en retvinklet Triangel, hvis Catheter ere $a$ og $b$; dens Hypotenuse være $= \alpha$. Construeer en retvinklet Triangel, hvis Catheter ere $a$ og $\frac{1}{2} b$; dens Hypotenuse være $= \beta$, da er
$$x = \sqrt{\beta^2 \pm a\alpha}.$$
Søg Mellemproportionalen mellem $a$ og $\alpha$; den være $=\gamma$, da er $x = \sqrt{\beta^2\pm\gamma^2}$, som let construeres efter Nr. 4 og Nr. 5.

Expl. 7. $x = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{a^2b^2 - abc^2 + c^4}{ac+b^2}}$.
Det omformes til
$$x = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{c^3\left(\frac{a^2b^2}{c^3} - \frac{ab}{c} + c\right)}{c\left(a+\frac{b^2}{c}\right)}}$$
$$= \frac{ab}{c} + \sqrt{c\,.\,\frac{c\left(\frac{a^2b^2}{c^3}-\frac{ab}{c}+c\right)}{a+\frac{b^2}{c}}}.$$
Construeres $y = \frac{ab}{c}$; $z = \frac{ab}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}$; $v = \frac{b^2}{c}$;
$u = \frac{ac}{b}$; da er $x = u + \sqrt{c\,.\,\frac{c\,(z-y+c)}{a+v}}$.
Søg fjerde Proportional til $(a+v)$, $c$ og $(z-y+c)$,

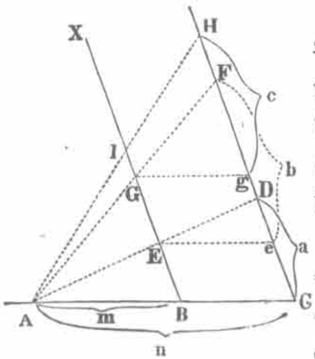
og Mellemproportionalen til denne og $c$. Adderes Mellemproportionalen til $u$, haves $x$.

Expl. 8. $x = \sqrt[4]{\frac{a^7 - 3a^4b^3 + b^7}{a^3 + b^3}}$

$$= \sqrt[4]{\frac{a^6\left(a - \frac{3b^3}{a^2} + \frac{b^7}{a^6}\right)}{a^2\left(a + \frac{b^3}{a^2}\right)}} = \sqrt[4]{a^3 . \frac{a\left(a - \frac{3b^3}{a^2} + \frac{b^7}{a^6}\right)}{a + \frac{b^3}{a^2}}}.$$

Alle Ledene i Parenthesen i Tælleren ere Linier; de construeres og reduceres, hvorved fremkommer en Linie $m$; Nævneren construeres og sættes $= p$, da haves $x = \sqrt[4]{a^3 . \frac{am}{p}}$.

Sæt $\frac{am}{p} = y$, da er $x = \sqrt[4]{a^3 y} = \sqrt{\sqrt{a^3 y}} = \sqrt{a\sqrt{ay}}$. Construeres $z = \sqrt{ay}$, da er $x = \sqrt{az}$.




Expl. 9. Udtrykket $x = \frac{am^3}{n^3} + \frac{bm^2}{n^2} + \frac{cm}{n}$ kan søges af tre rette Linier, der let construeres som Fjerdeproportionaler. Kortere faaes en sammenhængende Construction paa følgende Maade:

Paa en ret Linie afsættes $AB = m$, $AC = n$; gjennem C drages en vilkaarlig ret Linie, paa hvilken afsættes $CD = a$, gjennem B drages BX parallel med samme, da haves $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE}$ ɔ: $\frac{n}{m} = \frac{a}{BE}$: altsaa $BE = \frac{am}{n}$.

Drag $Ee \neq AC$, da er $Ce = BE$, afsæt $eF = b$, drag AF, da $\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BG}$ ɔ: $\frac{n}{m} = \frac{\frac{am}{n} + b}{BG}$; altsaa $BG = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n}$.

Drag $Gg \neq AC$, afsæt $gH = c$, drag AH, da haves $\frac{AC}{AB} = \frac{Cg + gH}{BI}$ ɔ: $\frac{n}{m} = \frac{\frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} + c}{BI}$; altsaa



$$BI = \frac{am^3}{n^3} + \frac{bm^2}{n^2} + \frac{cm}{n} = x.$$

Gives Udtrykket for $x$ følgende Form:

$$x = \frac{m}{n}\left[\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}a + b\right) + c\right],$$

oversees let Gangen i Constructionen.

**261.** De Formler, som vi i det Foregaaende have construeret, have havt den Beskaffenhed, at alle Led i Tælleren have været af samme Grad indbyrdes, ligeledes i Nævneren; og at Graden i Tælleren har været een høiere end i Nævneren i de rationale, og to i Rodudtrykkene. Disse Udtryk siges da at være ensartede (homogene), og til saadanne Udtryk maa man altid komme, naar man, idet man sætter den geometriske Opgave i Ligning, betegner hver Linie ved et Bogstav. Denne Ligning maa nemlig indeholde enten Forhold mellem Linier, udtrykte hver ved et Bogstav, eller Ligheder mellem Flader, der altid udtrykkes enten ved en Linie qvadreret ($a^2$), eller ved et Product af to Linier ($a \times b$), [altsaa altid ved to Dimensioner eller Grader], følgelig maae alle Ledene være ensartede, hvilken Ensartethed ikke forstyrres ved de Forandringer, som man efter Algebraens Regler underkaster Ligningen.

Har man derimod, idet man satte Opgaven i Ligning, for Kortheds Skyld taget en af Linierne til Enhed, saa vil det skee, da alle Potenser af 1 ere 1, at alle de Led, hvori denne Linie forekommer, maae have een eller flere Grader for faa i Forhold til de andre Led. Sættes saaledes i Udtrykkene

$$x = \frac{ab}{c};\ x = \frac{2a^3b^2c}{3d^2f^2g},$$

$b = 1$, da blive de forvandlede til

$$x = \frac{a}{c};\ x = \frac{2a^3c}{3d^2f^2g}.$$

Da de nu ikke opfylde Ensartethedens Betingelser, kunne de ikke construeres under deres nuværende Form, hvilket og er naturligt, da den søgte Linie maa afhænge af alle Opgavens Linier, altsaa ogsaa af den til Enhed antagne Linie.

Den maa altsaa igjen indføres i Udtrykket for $x$ i en saadan Potens, at Ensartetheden tilveiebringes. Forat Udtrykket

$$x = \frac{2a - 3a^2b + 2bc}{b^2 - 2a + 3}$$

kan blive ensartet, maae alle Led i Tælleren være af tredie Grad, da et Led, $3a^2b$, er af denne Grad, og alle Led i Nævneren være af anden Grad, da et Led, $b^2$, er af denne Grad. Kaldes derfor den til Enhed antagne Linie $\varepsilon$, bliver

$$x = \frac{2a\,{}^2 - 3a^2b + 2bc\varepsilon}{b^2 - 2a\varepsilon + 3\varepsilon^2},$$

hvilket Udtryk kan construeres.

Er $x = \sqrt{\frac{abc}{de} - \frac{a^4k}{e}}$, og

$x$ skal betyde en Linie, da maae alle Led under Rodtegnet være af anden Grad, og $\frac{abc}{de}$ maa omformes til $\frac{abc\varepsilon}{de}$, ligeledes $\frac{a^4k}{e}$ til $\frac{a^4k}{e\varepsilon^2}$, og Udtrykket bliver

$$x = \sqrt{\frac{abc\varepsilon}{de} - \frac{a^4k}{e\varepsilon^2}}.$$

Sættes nu $\frac{abc\varepsilon}{de} = \frac{ab}{d} \times \frac{c\varepsilon}{e} = p^2$, da haves

$$p = \sqrt{\frac{ab}{d} \times \frac{c\varepsilon}{e}}.$$

Sættes ligeledes $\frac{a^4k}{e\varepsilon^2} = a \times \frac{a^3k}{e\varepsilon^2} = q^2$, da haves

$$q = \sqrt{a \times \frac{a^3k}{e\varepsilon^2}}.$$

Construeres $p$ og $q$ efter de angivne Regler, da haves

$$x = \sqrt{p^2 - q^2},$$

et Udtryk, som construeres efter Nr. 5.

Hvad der er udviklet om Linieenheden, lader sig indbefatte i Følgende:

Anvendes Algebraen paa et geometrisk Spørgsmaal, da forudsætter Liniernes Betegnelse ved et Bogstav altid, at en vis bestemt Linie er antagen til Enhed, idet Bogstavet angiver Liniens Forhold til Linieenheden, eller hvor ofte denne er indeholdt i hin, men nu indtræffer der to Tilfælde med Hensyn til det erholdte Resultat for den Ubekjendte:



enten er det ensartet, eller ikke.

I første Tilfælde er det ikke nødvendigt at kjende den brugte Enhed for at construere Udtrykket; i andet Tilfælde er det en af Opgavens givne Linier, som man, for at gjøre Regningen simplere, har antaget $= 1$, og da er det aldeles nødvendigt at indføre den i Resultatet for Constructionens Skyld, hvilket er meget let efter de to for Ensartetheden givne Regler.

## Construction af Rødderne i den qvadratiske Ligning.

**262.** Den almindelige Formel er

$$x^2 \pm px \pm q = 0.$$

Forat kunne construeres, maa den være ensartet. Da $x$ skal fremstilles ved en Linie, maa $p$ ogsaa fremstille en Linie, altsaa $q$ en Flade, eller et Product af to Linier, som man altid kan antage forvandlet til et Qvadrat, $k^2$. Ligningen bliver da

$$x^2 \pm px \pm k^2 = 0,$$

hvilken indbefatter følgende fire:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & x^2 + px + k^2 = 0, \text{ og} \\
& x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - k^2} \;\ldots\ldots\; (1) \\
& \phantom{x} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - k^2} \;\ldots\ldots\; (2) \\
\text{II.} & x^2 - px + k^2 = 0, \text{ og} \\
& x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - k^2} \;\ldots\ldots\; (3) \\
& \phantom{x} = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - k^2} \;\ldots\ldots\; (4)
\end{array}\right\} \text{(A)}$$

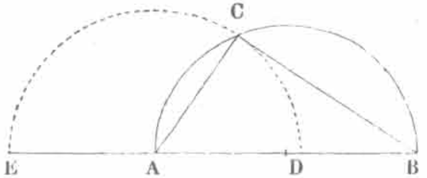
$$\left.\begin{array}{ll}
\text{III.} & x^2 + px - k^2 = 0, \text{ og} \\
& x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + k^2} \;\ldots\ldots\; (5) \\
& \phantom{x} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + k^2} \;\ldots\ldots\; (6) \\
\text{IV.} & x^2 - px - k^2 = 0, \text{ og} \\
& x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + k^2} \;\ldots\ldots\; (7) \\
& \phantom{x} = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + k^2} \;\ldots\ldots\; (8).
\end{array}\right\} \text{(B)}$$

**263.** Construction af I og II.

Værdierne (1) og (2) ere negative og kunne skrives

$$-\left(\tfrac{p}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2}\right) \text{ og } -\left(\tfrac{p}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2}\right);$$

tages derfor kun Hensyn til den absolutte Værdi af $x$, er det tilstrækkeligt at construere Rødderne af II, som skeer ved enten til $\frac{p}{2}$ at addere, eller fra $\frac{p}{2}$ at subtrahere $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-k^2}$.




Constructionen kan skee paa flere Maader.

Enten: Om AB $= \frac{p}{2}$ som Diameter beskrives en Halvcirkel, og BC $= k$ indføres som Chorde, da er

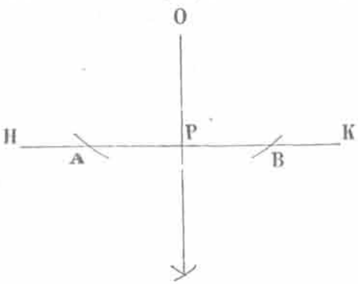
$$AC = \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2}.$$

Beskrives fra A, med Radius AC, en Halvcirkel, da er

$$EB = \tfrac{p}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2}, \text{ og } DB = \tfrac{p}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2},$$

altsaa Værdien

(1) = − DB; (2) = − EB; (3) = + EB; (4) = + DB.




Eller: Afsæt HP $= \frac{p}{2}$ opreis den Lodrette PO $= k$, beskriv fra O, med Radius $\frac{p}{2}$, en Bue, som skjærer HK i A og B, da er

$$AP = \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2}, \text{ og } PB = \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-k^2}, \text{ samt}$$

Værdien (3) $= HP + PB = \frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-k^2} = HB$,

Værdien (4) $= HP - AP = \frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-k^2} = HA$.



Anm. Det er indlysende, at første Construction er umulig naar CB > AB, eller $k > \frac{p}{2}$, i hvilket Tilfælde man i Algebraen siger, at Rødderne ere imaginære.

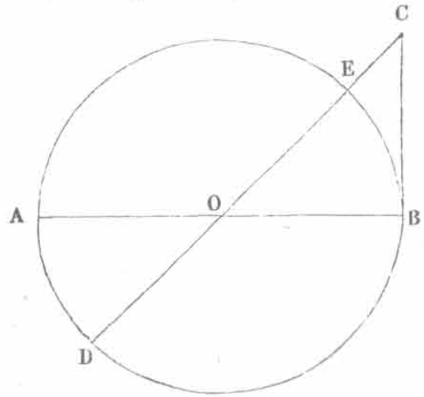
I anden Construction er det Samme øiensynligt Tilfældet, naar OP > OA, eller $k > \frac{p}{2}$.

**264.** Construction af III og IV.

Værdierne (6) og (8) ere ligeledes negative og kunne skrives

$$-\left(\tfrac{p}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+k^2}\right) \text{ og } -\left(-\tfrac{p}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+k^2}\right).$$

Det er altsaa tilstrækkeligt at construere Værdierne (5) og (7).




Construction: Med Radius OB $= \frac{p}{2}$ beskrives en Cirkel; i B opreises en Lodret CB $= k$ paa OB, da er

$$OC = \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+k^2}, \text{ og}$$

$$DC = \tfrac{p}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+k^2};$$

$$EC = -\tfrac{p}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2+k^2}, \text{ altsaa}$$

Værdien (5) = + EC; (6) = − DC;

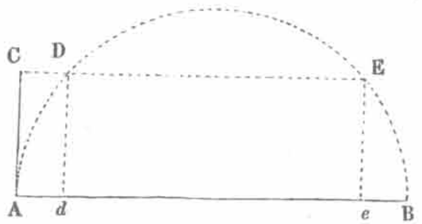
(7) = + DC; (8) = − EC.

**265.** Ogsaa uden at opløse den qvadratiske Ligning lader den sig construere.

Da Ligningerne I og II kun ere forskjellige med Hensyn til Tegnet, ligeledes III og IV, er det tilstrækkeligt at construere Rødderne af II og IV.

Ligningen II $x^2 - px + k^2 = 0$ kan, naar Tegnene forandres, skrives under Formen $x\ (p - x) = k^2$ og er da den algebraiske Oversættelse af Sætningen:

At construere en Rectangel, naar man kjender dens Fladeindhold, $k^2$, og Summen, $p$, af dens hosliggende Sider; thi kaldes den ene Side $x$, da er den anden $p - x$, og Rectanglens Fladeindhold udtrykt ved $(p - x)\ x$.




Construction: Om AB $= p$ som Diameter beskrives en Halvcirkel; i A opreises en Lodret AC $= k$; gjennem C drages CE parallel med AB; den Lodrette D$d$ nedfældes. A$d$ og $d$B ville være de søgte Rødder; thi Figuren giver

$$\frac{Ad}{dD} = \frac{dD}{dB} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

eller $\frac{Ad}{k} = \frac{k}{p - Ad}$, hvoraf

$Ad\ (p - Ad) = k^2$, som sammenlignet med

$x\ (p - x) = k^2$, giver $x = Ad$.

Ligeledes haves af (1)

$\frac{p - dB}{k} = \frac{k}{dB}$, hvoraf

$dB\ (p - dB) = k^2$, som sammenlignet med

$x\ (p - x) = k^2$, giver $x = dB$.

De to Rødder af I ere

$- Ad$ og $- dB$.

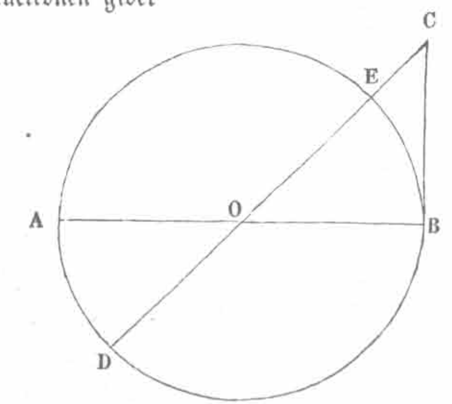


Anm. Det sees let, at Constructionen er umulig, naar $k > \frac{p}{2}$, i hvilket Tilfælde Algebraen lærer, at Rødderne ere imaginære.

Ligningen IV $x^2 - px - k^2 = 0$ kan gives Formen $x\ (x - p) = k^2$, hvilket, udtrykt geometrisk, betyder:

At construere en Rectangel, naar dens Fladeindhold, $k^2$, og Differensen, $p$, mellem dens hosliggende Sider ere givne; thi er $x$ den større Side, da er $x - p$ den mindre, og Rectanglens Indhold $= x\ (x - p)$.

Construction: Om AB $= p$ som Diameter beskrives en Cirkel; i B opreises en Lodret BC $= k$; gjennem C og Centrum O drages Secanten OC, da vil DC være Ligningens positive Rod, og EC være den absolutte Værdi af den negative; thi Constructionen giver




$$\frac{DC}{CB} = \frac{CB}{CE} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

eller $\frac{DC}{k} = \frac{k}{DC - p}$, hvoraf

$DC\ (DC - p) = k^2$, som sammenlignet med

$x\ (x - p) = k^2$, giver $x = DC$.

(2) giver endvidere $\frac{EC + p}{k} = \frac{k}{EC}$, hvoraf

$EC\ (EC + p) = k^2$, eller

$-EC\ (-EC - p) = k^2$, som sammenlignet med

$x\ (x - p) = k^2$, giver $x = -EC$.

De to Rødder af III ere $-$ DC og $+$ EC.

Anm. Constructionen er altid mulig, hvilket stemmer med Algebraen, som lærer, at Rødderne altid ere reele.

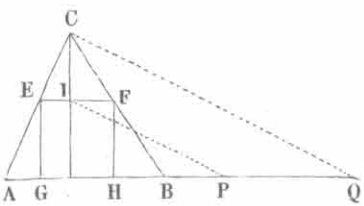
Vi ville nu ved Exempler vise:

1°. Hvorledes bestemte Opgaver sættes i Ligning, og hvorledes man ved Construction af Resultatet for den Søgte saavidt muligt benytter den givne Figurs Linier.

2°. Hvad Betydning et negativt Resultat har i Geometrien, og:

3°. Hvorledes det skal forstaaes, naar man erholder flere forskjellige Værdier for den Ubekjendte i en Opgave, der kun fordrede een.

**266.** At indskrive et Qvadrat i en Triangel.




Den givne Triangel være ABC. Antag Qvadratet indskrevet, og at EG er dets Side. Nedfæld Høiden CD, betegn denne ved $h$, Grundlinien ved $g$, og Qvadratsiden ved $x$. Vi have GH = FH = EF = EG = ID = $x$, altsaa CI = $h - x$. Da EF er parallel med AB, haves

$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{CI}$, eller

$\frac{g}{h} = \frac{x}{h-x}$, hvoraf $g\,(h - x) = hx$, eller

$gh = gx + hx = x\,(g + h)$ og

$x = \frac{gh}{g+h}$.

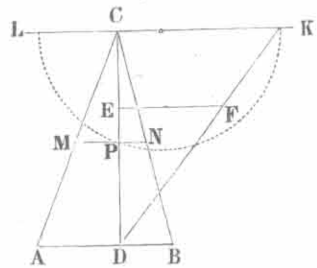
Dette Udtryk angiver Talværdien af Qvadratsiden ved Hjelp af Trianglens Grundlinie og Høide. Dens geometriske Construction skeer ved at søge fjerde proportionale Linie til $g + h$, $g$ og $h$.



Men for umiddelbart at benytte Høiden, betjene vi os af Vinklen CDB. Vi forlænge AB, afsætte DP = $g$, PQ = $h$; dernæst forenes C og Q med en ret Linie, og gjennem P drages PI parallel med CQ. ID vil være den fjerde proportionale Linie, eller det søgte Qvadrats Side.

Vi bemærke her, at Constructionen er desto nettere og simplere, jo færre fremmede Linier der anvendes.

**267.** At construere en Triangel, ligedannet med ABC (hvis Grundlinie AB = G og Høide CD = H), og **ligestor** med $abc$ (hvis Grundlinie er given = $g$, og Høide = $h$).




Den forlangte Triangel være MCN, hvor MN er parallel med AB. Opgaven er løst, naar PC (= $x$) er funden.

$\frac{ABC}{CMN} = \frac{\overline{CD}^2}{CP^2}$; CMN er efter Antagelsen ligestor med $abc$, og $\frac{ABC}{abc} = \frac{G \cdot H}{g \cdot h}$, altsaa $\frac{G \cdot H}{g \cdot h} = \frac{\overline{CD}^2}{CP^2}$, eller $\frac{G \cdot H}{g \cdot h} = \frac{H^2}{x^2}$, $x = \sqrt{\frac{ghH}{G}}$
$= \sqrt{g \cdot \frac{hH}{G}}$.

Construction: Afsæt DE = G, drag EF parallel med AB, og afsæt EF = $h$. Drag DF, og forlæng den indtil den skjærer Parallelen gjennem C i K, da haves

$\frac{DE}{DC} = \frac{EF}{CK}$, eller $\frac{G}{H} = \frac{h}{CK}$ det er: CK = $\frac{hH}{G}$.

Afsæt CL = $g$, beskriv om LK en Halvcirkel, da er CP = $x$.

**268.** At construere en Figur ligedannet med en given og i et vist Størrelsesforhold til den.

Ex. At construere en Polygon ligedannet med en given, P, hvori en Side = $a$, og i Størrelse lig $\frac{2}{3}$ af P.

Den søgte Polygon være X, en Side i samme, ensliggende med $a$, være $x$.

Da $X = \frac{2}{3} P$, saa haves $\frac{X}{P} = \frac{2}{3}$, men $\frac{X}{P} = \frac{x^2}{a^2}$, altsaa $\frac{x^2}{a^2} = \frac{2}{3}$; $x = \sqrt{a \cdot \frac{2}{3} a}$.

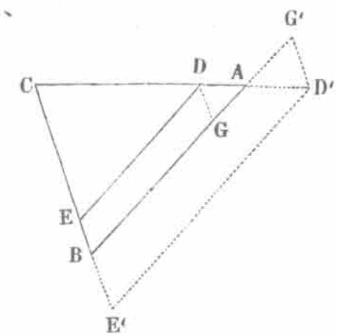
Der søges Mellemproportionalen mellem $a$ og $\frac{2}{3} a$, og paa den, ensliggende med $a$, construeres en Polygon ligedannet med P.

At construere en Cirkel, der er $2\frac{1}{5}$ Gange saa stor som en given, C, hvis Radius $= r$.

Den søgte være X, dens Radius $x$, da haves $X = \frac{11}{5} C$; $\frac{X}{C} = \frac{11}{5}$; $\frac{X}{C} = \frac{x^2}{r^2}$; $\frac{x^2}{r^2} = \frac{11}{5}$; $x = \sqrt{r \cdot \frac{11}{5} r}$. Denne Radius construeres let.

## Negativt Resultat.

**269.** Naar en Triangel, ACB, er given, at finde paa Siden AC et Punkt, D, saaledes beliggende, at naar DE drages parallel med AB, denne Parallel da er lig en given Linie $c$.




Da DE er parallel med AB, haves $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DE}$.

Antages Afstanden fra det faste Punkt, A, til D for Ubekjendt, og sættes AB $= a$, AC $= b$, AD $= x$, altsaa DC $= b - x$, da bliver Proportionen

$\frac{b}{a} = \frac{b - x}{c}$, hvoraf

$cb = ab - ax$, og

$$x = \frac{b(a-c)}{a} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \text{(I)}.$$

$x$ er altsaa fjerde proportionale Linie til $a$, $b$ og $a - c$, som, naar Vinklen BAC benyttes til Constructionsvinkel, da man alt har AB $= a$, AC $= b$, construeres ved at afsætte fra B Linien



BG $= c$, og dernæst drage GD parallel med BC. D vil være det forlangte Punkt, thi man har

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AD}, \text{ eller } \frac{a}{b} = \frac{a-c}{AD}, \text{ altsaa } AD = x.$$

Det er endvidere klart, at, naar DE drages parallel med AB, haves DE $=$ GB $= c$.

Saalænge $c < a$, viser I, at $x$ er positiv, og dens Værdi tilfredsstiller ligefrem Opgaven.

Er $c = a$, da er $x = o$, det er: det søgte Punkt D falder sammen med A, hvilket ogsaa en umiddelbar Anskuelse af Figuren viser, idet AB da tilfredsstiller Opgaven.

Er derimod $c > a$, da er Værdien for $x$ negativ og kan skrives: $x = \frac{-b(c-a)}{a}$.

For at tyde dette Resultat, forandres i den oprindelige Ligning,

$\frac{b}{a} = \frac{b-x}{c}$, $x$ til $-x$, hvorved haves

$$\frac{b}{a} = \frac{b+x}{c} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \text{(II)}.$$

$b - x$ er nu blevet til $b + x$, og fremstiller en Sum af to Linier, hvilket kun kan finde Sted, naar det søgte Punkt befinder sig i D' paa Forlængningen af CA, det vil sige i modsat Retning af den, det før antoges at ligge i.

Opløses Ligningen II, haves $x = \frac{b(c-a)}{a}$,

som construeres ved at afsætte fra B Linien BG' $= c$, hvorved AG' $= c - a$, og derpaa drage G' D' parallel med BC. D' er da det søgte Punkt.

**270.** Udvidelse af Opgaven i Nr. 257.

I Opgaven erholdt vi, foruden det positive Resultat

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

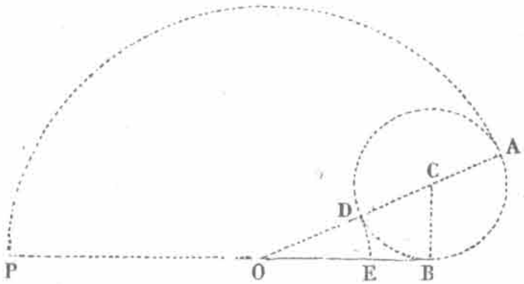
som der er construeret, og som alene tilfredsstillede den der fremsatte Opgave, ogsaa det negative

$$x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Dets Betydning skal her undersøges.

Det kan gives Formen $-x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, hvilket viser, at efterat have construeret $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, saaledes som i Nr. 257, maa man dertil lægge $\frac{a}{2}$. Forlænges derfor OC til A, haves CA = CB = $\frac{a}{2}$ og altsaa

$$OA = OC + CA = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = -x.$$




Da $x$ nu her er negativ, maa dens Værdi tages i modsat Retning af den, hvori den toges, da den var positiv. Forandres, i den oprindelige Ligning, $-x$ til $x$, haves $x^2 = a\,(a+x)$, (2), og tages den Værdi, der før var negativ, positivt, haves $x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, som tilfredsstiller Ligningen (2). Men denne Ligning erholder man netop naar man, paa Forlængningen af OB, søger et Punkt P saaledes, at PO er Mellemproportional mellem PB og den givne OB. Altsaa, istedetfor at afsætte Værdien for $x$ paa OB fra O i Retning af OB, maa den afsættes i modsat Retning fra O til P, paa Forlængningen af OB, og man har

$$\frac{OB}{OP} = \frac{OP}{PB}.$$

Skjøndt denne Opløsning ikke ganske tilfredsstiller Opgaven, da OB ikke er *delt* i to Dele, saa opløser den dog samme i alle andre Henseender; thi en af de fundne Linier er Mellemproportional mellem den anden Linie og $a$, og fremdeles er *Summen* af disse to Linier, naar $x$ tages *negativt*, lig $a$. Heraf sees, at naar man finder flere forskjellige Værdier for den Ubekjendte i en Opgave, da maa denne Opgave kunne tillade forskjellige Opløsninger. Hvis altsaa den Maade, paa hvilken den er udtalt, ikke tilsteder flere end een, da er den fremstillet for snæver, og Spørgsmaalet maa kunne betragtes paa en mere almindelig Maade. Fremstilles den her omtalte Opgave saaledes paa følgende Maade:



Paa en given ubegrændset ret Linie, der gaaer gjennem to Punkter, O og B, at bestemme et Punkt af den Beskaffenhed, at dets Afstand fra O er Mellemproportional mellem Punktets Afstand fra B og den givne Afstand OB,

da indbefatter den begge Opløsningerne, som de to Værdier for $x$ give, idet saavel Punktet E som P opfylder den forlangte Betingelse. For i dette Tilfælde at danne Forholdene mellem de givne Størrelser og den søgte, er der ingen Grund til at antage det søgte Punkt beliggende hellere til Høire for O, end til Venstre for samme. Man kan altsaa gjøre hvilken af disse Antagelser man vil, af hvilke den første giver $a - x$ som det søgte Punkts Afstand fra B, og den anden $a + x$ som denne Afstand, og man vil desuagtet stedse erholde de to fundne Værdier for $x$.

Anm. I. En ren geometrisk Betragtning giver den her fundne Proportion, ligesom den i Nr. 164, Anm. og 200 gav den i Nr. 257 fundne. Af $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OD}$ følger nemlig $\frac{OA+OB}{OA} = \frac{OB+OD}{OB}$, eller $\frac{PB}{PO} = \frac{PO}{OB}$, eller $\frac{OB}{PO} = \frac{PO}{PB}$.

Anm. II. Den sidst behandlede Opgave kan tjene til at gjøre opmærksom paa en Feilslutning, hvortil en overfladisk Betragtning kunde forlede.


Vi antoge ikke i Opgaven Nr. 257 og 269, at det søgte Punkt kunde ligge i Retning af BY, thi da for ethvert Punkt, N, til Høire for B, dets Afstand fra O = ON er større end OB og større end BN, kunde det ikke tilfredsstille Opgavens Betingelse: $\overline{ON}^2 = OB \times BN$. Men lad os antage, at man ikke havde lagt Mærke til denne Omstændighed, og at man søgte et Punkt N, saaledes beliggende, at $\overline{ON}^2 = OB \times BN$. Sættes $BN = x$, og $OB$, som før, $= a$, da er $ON = a + x$, og den Ligning, som skal løses, er $(a + x)^2 = ax$, eller

$x^2 + ax + a^2 = o$. Af denne faaes:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3a^2}{4}},$$

det er: imaginære Værdier, som tilkjendegive en Umulighed. Dog vilde man feile meget ved at antage Opgaven for umulig; vi have jo nyligt løst den. Hele Umuligheden ligger her i den Antagelse, at det søgte Punkt skal ligge til Høire for B. Vi ville, forat overbevise os herom, undersøge, om der paa den anden Side af B ligger noget Punkt, som kan tilfredsstille Opgaven, idet vi atter her sætte det ubekjendte Punkts Afstand fra B lig $x$; dets Afstand fra O er da enten $= a - x$, eller $= x - a$, eftersom det ligger mellem B og O, eller til Venstre for O.

I første Tilfælde haves $(a - x)^2 = ax$,
i andet . . . . . . . . . $(x - a)^2 = ax$,
hvilke begge give $x^2 - 3ax + a^2 = o$,

Denne Ligning maa altsaa baade give E og P. Dette er ogsaa Tilfældet, thi den giver to reele og positive Værdier for $x$, nemlig

$$x = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}.$$

Heraf læres: Søges en ubekjendt Afstand i en Retning, der er modsat den, i hvilken den skulde været



søgt, da rettes den feilagtige Antagelse ikke altid derved, at man faaer negative Værdier. I dette Exempel var det de imaginære Udtryk, der gjorde opmærksom derpaa.

**271.** At construere en retvinklet Triangel, hvis Hypotenuse $= a$, og hvis Areal er ligt et Qvadrat med Side $= b$.

Ere Catheterne $x$ og $y$, haves

$x^2 + y^2 = a^2$, og $xy = 2b^2$, hvoraf $2xy = 4b^2$.

Adderes sidste Ligning til, og derpaa subtraheres fra første, faaes,

$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 4b^2$, og $x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 4b^2$,

$x + y = \sqrt{a^2 + 4b^2}$, og $x - y = \sqrt{a^2 - 4b^2}$, hvoraf

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2};$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2};$$

Linier, som let construeres efter Nr. 259, 4° og 5°.

**272.** At construere en retvinklet Triangel, hvori Summen af begge Catheter ($x$ og $y$) bliver lig Linien $a$, og Arealet ligt et Qvadrats, hvis Side $= b$. Af Ligningerne $x + y = a$; $\frac{1}{2} xy = b^2$, udledes Ligningen $x^2 - ax + 2b^2 = 0$, hvoraf

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b^2}, \text{ og } y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b^2}.$$

Anm. Opløsningen giver foran det første Rodtegn $\pm$, og foran det sidste $\mp$, det vil sige: Tages den ene Rod positivt, maa den anden tages negativt, og omvendt, og det er her ligegyldigt, hvilken sættes positiv, da der ingen Bestemmelse er for, om $x$ eller $y$ skal være størst.

**273.** At construere en retvinklet Triangel, hvori Differensen mellem Catheterne $x$ og $y$ er lig en given Linie $a$, og Arealet ligt et Qvadrat med Side $= b$.

Antages, at $x$ er den største Cathete, haves $x - y = a$; $xy = 2b^2$, hvoraf $x^2 - ax - 2b^2 = 0$, som opløst giver $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8b^2}}{2}$. Tegnet — maa her forkastes, som en for denne Opgave fremmed Rod, da $x$ ikke kan være negativ; man har da $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2b^2} + \frac{a}{2}$, hvoraf $y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2b^2} - \frac{a}{2}$.

**274.** At construere en regelmæssig Femkant lig et Qvadrat, hvis Side $= a$.

Sættes Femkantens Areal lig A, dens Side lig $s$, og største Radius lig $r$, haves

$$A = \frac{5}{4} s \sqrt{4r^2 - s^2} \ldots (1), \text{ og } s = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

hvoraf $r = \frac{2s}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$, og $r^2 = \frac{4s^2}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{2s^2}{5 - \sqrt{5}}$,

som, indsat i (1), giver

$$A = \frac{5}{4} s \sqrt{\frac{8s^2}{5 - \sqrt{5}} - s^2} = \frac{5}{4} s^2 \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}, \text{ hvoraf}$$

$$s^2 = \frac{4}{5} A \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} = \frac{4}{5} A \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{9 - 5}} = \frac{4}{5} A \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

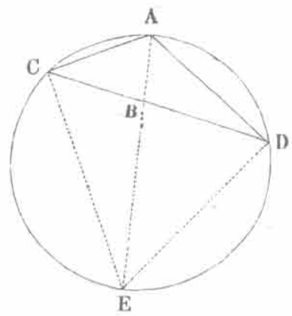
Da Femkantens Areal skal være lig Qvadratets, haves $A = a^2$, og den søgte Side $s = \sqrt{\frac{4}{5} a^2 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$.

Dette Udtryk gjøres bekvemt for Construction ved at forvandles til $s = \sqrt{\frac{4}{5} a \sqrt{a(5a - 2\sqrt{5a^2})}}$.

$\sqrt{5a^2}$ construeres som i Nr. 260, Expl. 3. Det Dobbelte af denne Linie subtraheres fra $5a$. Der søges Mellemproportionalen, $y$, mellem denne Differens og $a$. En Mellemproportional mellem $y$ og $\frac{4}{5}a$ er den søgte Femkantside.

**275.** Der er givet en Vinkel, CAD, halveret af AE. Gjennem et givet Punkt i denne, B, at drage en ret Linie, CBD, saaledes, at CD har en given Længde $= a$. AB være givet $= b$.






Antages Opgaven løst, og føres en Cirkellinie gjennem A, C og D, da er Buen CE = ED. Sæt AC = $x$, AD = $y$, CE = ED = $m$, AE = $d$, da er

(1) ... $d.a = m(x + y)$; fremdeles er

(2) ... $\frac{d}{a} = \frac{xy + m^2}{m(x + y)}$. Da endvidere △ ACB ∼ AED, haves $\frac{x}{d} = \frac{b}{y}$, eller

(3) ... $xy = bd$. Af (1) og (2) følger $\frac{d}{a} = \frac{xy + m^2}{da}$, $d^2 = xy + m^2$. Indsæt Værdien for $xy$ fra (3), da

$$d^2 = bd + m^2, \text{ hvoraf } d = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + m^2}.$$

Construction. Afsæt en ret Linie CD = $a$, beskriv om denne et Segment CAD, rummende den givne Vinkel A, halveer den nederste Bue, CED, i E og drag CE; da er CE = $m$. Af $b$ og $m$ construeres $d$. Fra E som Centrum, med $d$ som Radius, slaaes en Bue, der skjærer CAD i A. Man har da, naar AC og AD drages, AC = $x$ og AD = $y$. Afsættes nu paa den givne Vinkels Been disse Længder for $x$ og $y$, da vil en ret Linie gjennem deres Endepunkter være den forlangte.

Anm. Endeligningen $d^2 - bd - m^2 = 0$ faaes lettere saaledes: ∠ EAD = BDE, da begge = ∠ CAE; fremdeles ∠ AED = AED, altsaa Triangel EAD ligedannet med BDE, hvoraf:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{DE}{BE}, \text{ eller } \frac{d}{m} = \frac{m}{d - b}, \text{ hvoraf}$$

$$d^2 - bd - m^2 = 0.$$