Arithmetik,

udarbeidet

med stadigt Hensyn

til

den praktiske Anvendelse,

af

Dr. Georg Frederik Ursin,

Professor.

Kjøbenhavn.

Forlagt af Universitets-Boghandler C. A. Reitzel.

Trykt i Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1841.

Det har alt længe været mit Ønske at føie til min Geometri, hvis andet Oplag udkom Aar 1839, en elementær Arithmetik, hvori særdeles toges Hensyn til sammes praktiske Anvendelse, deels i Regnekunsten, deels til at udregne geometriske Størrelser. Denne Bog udkommer nu, efter, som Manuscript, at være anvendt til et Foredrag for Kunstakademiets Elever i afvigte Vinter. Man vil finde, at i samme er stadigen taget Hensyn til Regningen, saa at det ikke af Forfatteren ansaaes tilstrækkeligt, ene at fremsætte i videnskabelig Orden og at bevise de forskjellige Regningsregler, men tillige at behandle Exemplerne paa den letteste og hensigtsmæssigste Maade. Om ogsaa den blot theoretiske Mathematiker mindre pleier herpaa at henvende sin Opmærksomhed, fordi det er ham mere om Sætningernes Vished, end om deres Anvendelse at gjøre, og fordi han sjeldent eller næsten aldrig selv regner, saa bør dog dette ikke forbigaaes, da en hensigtsmæssig Regnemaade ogsaa har sin videnskabelige Interesse, foruden dens Nødvendighed for Livet.

Ved en saadan Behandling haaber jeg at have virket for flere af vore Instituter, Borgerskoler, eller Realskoler, hvor vel omtrent Arithmetiken bør behandles saaledes, og hvor altsaa denne Bog passende vil kunne anvendes ved Siden af Geometrien. Saalænge Underviisningen i disse kun strækker sig til omtrent det

15de Aar, da Eleverne, ved Confirmationen, forlade Skolen, for at træde ud i Livet, vil man vel sjeldent kunne gaae videre. Skulle høiere Realskoler, hvortil maaskee enkelte af Hovedstadens Skoler og den offentlige Skole i Aarhuus kunne regnes, blive almindelige, vil en Lærebog af et mere udstrakt Indhold blive i det Mindste for de høiere Classer fornøden. Dog herfor have Flere, ligesom Forfatteren, sørget ved forskjellige mathematiske Lærebøger, og man vil saaledes neppe billigen for Tiden kunne forlange i denne Henseende Mere, end at saadanne Lærebøger ogsaa have den praktiske Tendents, som Undertegnede har stræbt at give dette lille Skrift, og som Realunderviisningen synes fortrinligviis at kræve.

Juli 1841.

G. F. Ursin.

---

1. Forkl. At tælle er at samle flere eensartede Størrelser, den ene efter den anden, til et Hele.

Dette Hele, hvorved vi ikke tage Hensyn til disse Størrelsers indbyrdes Stilling, men kun til deres Mængde, kaldes et **Tal**, hver af de enkelte eensartede Dele en **Eenhed**.

Et Tal bestaaer saaledes af Eenheder.

Størrelserne, der skulle sammentælles, maae være **eensartede** d. e. lade sig henføre til samme Eenhed. Ere forskjellige Størrelser givne, saasom et Antal Personer, bestaaende af fire Sjællændere og tre Jyder, da maae vi først henføre dem til samme Eenhed, en Dansk, for at tælle dem sammen. Tallet Syv, eller Antallet af disse Personer, bestaaer saaledes af syv eensartede Dele.

2. Forkl. Et Tal kan enten tænkes i Forbindelse med den Art Gjenstande, der udgjøre dets Eenheder, f. Ex. syv Rigsbankdaler, ni Mennesker, tretten Faar, eller uafhængigt af disse, f. Ex. Syv, Ni, Tretten, hvor vi blot tage Hensyn til, at der ere syv, ni, tretten Eenheder, men derimod ikke til, af hvilken Art disse Eenheder ere. I første Tilfælde siges Tallet at være **benævnt**, i andet Tilfælde **ubenævnt**.

Arithmetiken afhandler ikkun de ubenævnte Tal. Anvendes derimod samme paa de i det daglige Liv forekommende

Størrelser, da maa den ogsaa behandle de benævnte Tal, som er det, der skeer i den praktiske Regnekunst.

3. Forkl. For med Lethed at betegne de forskjellige Talstørrelser, anvende vi bestemte Tegn, Ciffre, i Alt kun ti, nemlig:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

af hvilke de første ni, efter Ordnen, betegne Eenheden, tagen een, to, tre ..... ni Gange. Det sidste Ciffer, kaldet Nul, betegner derimod ingen Eenheder.

For at betegne et Tal, høiere end Ni, sættes disse Ciffre paa en følgende Plads til Venstre, hvor de, for hver Plads, de saaledes rykke op, betyde ti Gange mere. Henskrives nu saaledes

777

betyder Syvtallet til Høire ikkun, ligesom forhen, syv Eenheder, det næste Syvtal derimod halvfjerdsindstyve, det følgende syv hundrede Eenheder.

Paa lignende Maade betyder

3085

fem Eenheder, fiirsindstyve Eenheder og tre tusinde Eenheder, eller 5 Enere, 8 Tiere, ingen Hundreder, 3 Tusinder. Ciffret 0 er tilføiet, for at det følgende Ciffer 3 kan faae den rette Plads, saa at det betegner Tusinder.

Sprogbenævnelserne svare hertil. Vi have Hovednavnene: Een, To, Tre, Fire, Fem, Sex, Syv, Otte, Ni; den første af næste Classe (Tiernes Classe) kaldes Ti.

Elleve (11) er i Stedet for Een og Ti
Tolv (12) — — To og Ti
Tretten (13) — — Tre og Ti
Fjorten (14) — — Fire og Ti.

To Tiere kaldes Tyve, ligeledes Tredive, Fyrgetyve; Ordene Halvtredsindstyve, Tredsindstyve, Halvfjerdsindstyve, Fiirsindstyve, Halvfemsindstyve ere traadte i Stedet for Femti, Sexti, Syvti, som rigtigere brugtes i det ældre Sprog og endnu forekomme i det svenske og tydske Sprog. Hine Benævnelser tyde hen paa en Tælning efter Snese, i Stedet for den mere regelrette efter Tiere.

10 Tiere kaldes Hundrede; og efter dette Tal ere Benævnelserne aldeles regelmæssige. Et nyt Ord behøves først for at betegne 10 Hundreder, nemlig Ordet Tusinde; 1000 Gange Tusinde kaldes en Million, en Million Gange en Million kaldes en Billion; derpaa følge Benævnelserne Trillion, Qvadrillion o. s. v.

4. Forkl. Hvis vi have et Tal, bestaaende af et hvilketsomhelst Antal Ciffre, lader det sig let læse fra Høire til Venstre. F. Ex.

3980574352

læses: to Enere, fem Tiere, tre Hundreder, fire Tusinder, syv Titusinder, fem Hundredetusinder, ingen Millioner, otte Timillioner, ni Hundrede Millioner, tre Tusind Millioner.

Dog, da vi læse den sædvanlige Skrift fra Venstre til Høire, inddele vi, for paa samme Maade ogsaa at kunne læse Tal, et saadant større Tals Ciffre i Classer, tre i hver Classe, ved at afskære med Kommaer, eller ved at henskrive Ciffrene med et lidet Mellemrum ved hvert tredie. Over det syvende Ciffer (Millioner) hensættes endvidere eet Komma, over det femtende (Billioner) to Kommaer o. s. v. Det foranstaaende Tal skrives altsaa

3,980′,574,352

eller 3 980′ 574 352

og læses: 3 Tusind 980 Millioner, 574 Tusind 352.

Maaden, saaledes at henskrive Tallene med ikkun ti Ciffre og benævne dem, overeensstemmende hermed, kaldes **Titalssystemet** eller det **dekadiske System**.

Anm. Andre Talsystemer kunne ogsaa gives, saasom et Tolvtalssystem; imidlertid er Titalssystemet det, der er antaget af alle Folkefærd, sandsynligviis fordi man har tællet paa Fingrene; ogsaa er Skrivemaaden med ti Ciffre almindelig, efter at samme er indført fra Østerland til Europa.

5. Forkl. Ved en fortsat Tælning kunne vi bestemme, hvormange Eenheder flere enkelte Tal tilsammen udgjøre, eller det Tal, som indeholder saamange Eenheder, som to eller flere givne.

Vi kalde dette nye Tal **Sum** og siges at **summere** eller **addere** de givne Tal, naar vi saaledes udbringe deres Sum. Tallene, der adderes, kaldes **Addender**. Regningen, som her foretages, kaldes **Addition** eller Sammenlægning.

At to eller flere Tal skulle adderes, antydes ved at skrive imellem samme Tegnet $+$.

Exempel. $3+2+4=9$. Vi tælle til de tre Eenheder, som indeholdes i Tallet 3, de to Eenheder, som ere i 2; til disse to Tals Sum, 5, lægge vi Eenhederne af Tallet 4 og finde saaledes i Alt 9, der altsaa bliver Summen af de tre givne Addender.

6. Grunds. Addendernes Orden er ligegyldig.

$$3+2+4=3+4+2=2+3+4=$$
$$2+4+3=4+3+2=4+2+3.$$

7. Grunds. Ikkun eensartede Størrelser kunne adderes.

8. Opgave. At addere Tal, bestaaende af flere Ciffre.

Opl. Enere stilles under Enere, Tiere under Tiere o. s. v. Man adderer først Enerne; hvis Summen udgjør 10 eller derover, forvandles den til Tiere; de Enere, som blive tiloverss, opskrives, eller ogsaa, hvis ingen Enere ere tilbage, skrives 0, medens Tierne lægges til de øvrige Tiere; ere der 10 Tiere eller derover, gjøres de til Hundreder og Tiere, hvilke sidste skrives op, medens Hundrederne lægges til de øvrige Hundreder, og saaledes fortsættes Regningen videre.

Exempel. $207+13+69+512+98406+1002$.

$$\begin{array}{r} 207 \\ 13 \\ 69 \\ 512 \\ 98406 \\ 1002 \\ \hline 100209 \\ \cancel{1112} \end{array}$$

Enernes Antal er her 29 eller 9 Enere og 2 Tiere; disse 2 Tiere, som her ere henstillede, overstrøgne, under Tierne, tælles med, og man faaer saaledes 10 Tiere eller 0 Tiere og 1 Hundreder; denne, tillagt Hundrederne, giver 12 Hundreder eller 2 Hundreder og 1 Tusinder; dernæst komme 10 Tusinder eller 1 Titusinder; tilsidst 10 Titusinder eller en Hundredetusinder. Summen er saaledes 100209.

Bev. Ved at henskrive Enere under Enere, Tiere under Tiere o. s. v. og addere hver Række for sig, ere eensartede Størrelser adderede. Endvidere ere Tierne, som fremkom, forsaavidt der vare ti Enere eller derover, lagte til Tiernes Række o. s. v.

Anm. De henskrevne, her overstrøgne Ciffre kunne aldeles udelades og blot bevares i Erindringen (in mente). I Regnestykket forekomme saaledes ikke andre Ciffre, end de, som just ere nødvendige, en Regel, der stedse bør overholdes.

Hvor man har saare mange Addender, vil det være hensigtsmæssigt, at tælle først flere af dem sammen, f. Ex. 10 og 10, og tilsidst af de saaledes frembragte Partialsummer eller enkelte Summer, ved atter at addere samme, at frembringe en Hovedsum.

Ved at gjentage Sammenlægningen, for at forvisse sig et nøiagtigt Resultat, er det rettest, efter at man har talt første Gang nedenfra opad, at tælle ovenfra nedad; man faaer saaledes ikke samme Ciffre, og undgaaer derved at gjentage den Feil, man tilfældigviis kan have gjort.

9. Forkl. Ved at tælle tilbage, bestemme vi, hvormange Eenheder eet Tal er større end et andet, eller vi finde det Tal, som udtrykker Forskjellen (Differentsen) mellem to givne.

Vi betegne, at der skal fra eet Tal drages et andet, ved at skrive hiint foran, dette efter Tegnet —.

Det Tal, hvorfra et andet skal drages, kaldes Minuenden ɔ: Tallet, som skal formindskes; det andet Tal kaldes Subtrahenden ɔ: det Tal, som skal fradrages, og Regningen, som her foretages, kaldes Subtraction, Fradragning.

Exempel. $9 - 5 = 4$; her er 9 Minuenden, 5 Subtrahenden; ved at tælle 5 Eenheder tilbage, faaes Differentsen 4.

Till. 1. Vi maae omvendt faae Minuenden ud, naar Subtrahenden og Differentsen adderes, og vi indsee saaledes, at Subtractionen kan prøves ved Addition; eller at Addition og Subtraction ere modsatte Regningsarter.

Exempel. Da $9 - 5 = 4$, maa $4 + 5 = 9$.

Till. 2. Ere Minuenden og Subtrahenden ligestore, er Differentsen 0.

10. Grundſ. Ikkun eensartede Størrelser kunne subtraheres.

11. Opg. At subtrahere et fleerciffret Tal fra et større fleerciffret Tal.

Opl. Minuenden henskrives først, derunder Subtrahenden, saa at Enere komme under Enere, Tiere under Tiere o. s. v. Forsaavidt Minuendens Ciffre ere de samme eller høiere end Subtrahendens ɔ: hiin har samme eller flere Enere, Tiere, Hundreder o. s. v. end denne, skeer Subtractionen uden videre Vanskelighed, i det Enere drages fra Enere, Tiere fra Tiere, Hundreder fra Hundreder o. s. v. og Facit eller Differentsen henskrives under en Streg, lige under Subtrahenden. Er derimod eet eller flere Ciffre i Minuenden lavere end i Subtrahenden, maa, inden Fradragning kan skee, laanes 1 af næste Classe, der saaledes udgjør 10; f. Ex. hvis Minuenden har færre Enere, end Subtrahenden, laanes en Tier. Staaer paa Tierens Plads 0, laanes af næste Classe eller af Hundrederne een, saaledes at man faaer 10 Tiere, af hvilke da 1 kan laanes.

Exempel I.	9765348
	6231217
	3534131

II.	57.0.894.0.1.3
	95926587
	474967426

Det første Exempel behøver ingen videre Forklaring. I det andet Exempel maatte man først laane en Tier, da 7 Enere ikke kunne drages fra 3 Enere; man faaer saaledes i Alt 13 Enere; drages herfra de 7 Enere i Subtrahenden, faaes i Differentsen 6 Enere. Der bliver saaledes ingen Tier til Rest; derfor maa laanes en Hundreder; men, da ingen Hundreder findes, gaaer man til Tusinderne. Regningen fortsættes fremdeles paa samme Maade.

Bev. Eensartede Størrelser ere her fradragne, og Reductionerne af Eenheder af de høiere Classer til de lavere Classer ere foretagne overeensstemmende med Titalssystemet.

Till. 1. Ved Prøven, eller ved at addere Subtrahenden til det fundne Facit, undersøges, hvorvidt den rigtige Differents er funden.

Till. 2. Skulle flere Subtrahender drages fra samme Minuend, skeer Subtractionen efterhaanden, med den ene Subtrahend efter den anden, eller ogsaa adderes alle Subtrahender, og deres Sum drages fra Minuenden.

Anm. For Begynderen er det passende særskilt at betegne med . de Ciffre af Minuenden, ved hvilke der er laant; hvert Ciffer regnes da for en Eenhed mindre og 0 for 9; sættes Tegnet forneden, som Nogle bruge, betyder hvert saaledes betegnet Ciffer af Subtrahenden 1 mere.

12. Forkl. Ere ved en Addition alle Addender ligestore, bestaaer samme i en Gjentagelse af et givet Tal et vist Antal Gange.

F. Ex. have vi $7 + 7 + 7$, da er dette 7, gjentaget 3 Gange.

Vi kalde en saadan Regning *Multiplication*, som bestaaer i at gjentage et Tal (sætte det saamange Gange som Addend), som et andet Tal viser, eller som dette indeholder Eenheder.

Der høre altsaa til Multiplication to Tal, det ene *Multiplicanden*, som er det Tal, der gjentages eller sættes som Addend, det andet *Multiplicator*, der angiver det Antal Gange Multiplicanden skal sættes som Addend.

Den her fundne Sum kaldes *Product*.

Multiplicationen betegnes med $\times$ eller .; skrives saaledes $7 \times 3 = 7 . 3 = 21$, saa er 7 Multiplicanden, 3 Multiplicator, 21 Productet.

Till. 1. Productet af Enere, som Multiplicand, og Enere, som Multiplicator, findes let ved Addition. Disse Producter ordnes i følgende Tabel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Den øverste Række er her Multiplicandernes, den første nedløbende er Multiplicatorernes.

Till. 2. Enten vi tage Multiplicanden 4 og Multiplicator 3, eller Multiplicanden 3 og Multiplicator 4, finde vi Productet 12, og saaledes i ethvert Tilfælde, hvor vi ombytte Multiplicanden og Multiplicator; f. Ex. $7 \times 6 = 6 \times 7$, $9 \times 5 = 5 \times 9$. Vi indsee let dette, ved ikke at betegne Multiplicanden og Multiplicator med Ciffre, men deres enkelte Eenheder med Puncter.

$$3\left\{\overbrace{\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}}^{4}\right. \qquad\qquad 4\left\{\overbrace{\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}}^{3}\right.$$

Her viser det sig, at Multiplicanden 4 og Multiplicator 3 give samme Product, som Multiplicanden 3 og Multiplicator 4; derfor kunne begge gives det fælles Navn **Factorer**, og vi have den Grundsætning: **Factorernes Orden er ligegyldig.**

Till. 3. Er Multiplicator 1, finder ingen Multiplication Sted; thi Productet bliver da selve Multiplicanden. Er Multiplicator 0, bliver Productet 0; ligeledes hvis Multiplicanden er 0.

Anm. Det er nødvendigt, naar man vil regne blot nogenlunde færdigt, at kunne udenad alle Producter i den ovenstaaende lille Tabel eller Eengangeen, som den kaldes. De forskjellige Midler, hvormed man mechanisk har villet lette Multiplicationen, ere kun Curiositæter.

Grundsætningen, Factorernes Orden er ligegyldig, gjælder vel i Arithmetiken, hvor vi have kun med ubenævnte Tal at gjøre; men ikke i den praktiske Regnekunst, hvor benævnte Tal behandles; ved disse maa mærkes, at Multiplicanden er benævnt, Multiplicator stedse ubenævnt. Naar Tilfælde forekomme, hvor begge Factorerne synes at være benævnte, f. Ex. i Regula-Detri, hvor andet Leed multipliceres med tredie, er dog tredie Leed stedse at ansee som ubenævnt eller som Multiplicatoren, andet Leed er Multiplicanden. Ombytte vi, for Nemhedens Skyld, ogsaa her Factorerne, saa retter Productets Navn sig dog stedse efter Mellemledet, som oprindeligen var Multiplicanden.

13. Læres. Et Tal multipliceres med **10, 100** eller et hvilketsomhelst Tal, bestaaende af **1** med flere Nuller, naar disse Nuller føies til Tallet.

Bev. Haves saaledes 73×10, da er Productet 730. Thi, da ved at tilføie et Nul, 3 Enere ere blevne 3 Tiere, 7 Tiere ere ophøiede til 7 Hundreder, er Multiplicanden 73 gjort 10 Gange større, hvilket var det, som forlangtes. Saaledes føres ogsaa Beviset for hvilkensomhelst Multiplicand og hvilkensomhelst anden Multiplicator 100, 1000 ...

14. Læres. Haves et Product, bestaaende af to Factorer, og den ene af disse multipliceres med et Tal, da bliver derved hele Productet multipliceret med samme Tal.

Bev. Haves 7×5, da bliver Productet 3 Gange større, enten vi multiplicere Multiplicanden 7 eller Multiplicator 5 med 3. Thi, multipliceres Multiplicanden 7 med 3, er ingen videre Forandring skeet, end at der nu er taget et 3 Gange saa stort Tal, som forhen, til Multiplicand; da nu Multiplicator er den samme, 5, maa Productet derved være blevet 3 Gange større. Hvis vi, i Stedet for at multiplicere Multiplicanden 7 med 3, havde multipliceret Multiplicator 5, behøvedes intet videre Beviis, for at godtgjøre, at Productet var blevet 3 Gange større; thi, da $7 \times 5 = 5 \times 7$ (§ 12 Till. 2), kunne vi ansee 5 som Multiplicand, og det første Beviis gjælder da ogsaa for denne Factor.

15. Læres. Skulle vi multiplicere et Tal med et Product, bestaaende af to Factorer, multiplicere vi Tallet først med den ene Factor, dernæst det Udkomne med den anden.

Bev. Skal 9 multipliceres med 4×3, vil dette Product kunne dannes, ved først at multiplicere 9 med 4, og dernæst med 3; thi, da Productet 9×4 multipliceres med 3, ved blot at multiplicere dets ene Factor, Multiplicatoren 4, med 3, vil omvendt

$$9 \times (4 \times 3) = (9 \times 4) \times 3.$$

Till. 1. Saaledes kan et Product af tre Factorer, som $9 \times 4 \times 3$, dannes og fremdeles af hvilketsomhelst Antal Factorer, og Multiplicationen, som her forlanges, udføres, i hvilken Orden vi stille Factorerne (§ 12 Till. 2); saaledes er

$9 \times 4 \times 3 = 9 \times 3 \times 4 = 4 \times 9 \times 3 =$
$4 \times 3 \times 9 = 3 \times 9 \times 4 = 3 \times 4 \times 9.$

Till. 2. Ender een af Factorerne sig med Nuller, kan den tænkes opløst i to Factorer, den ene de betydende Ciffre og den anden 1 med Nullerne; f. Ex. $70 = 7 \times 10$; Multiplicationen foretages da først med de betydende Ciffre 7, dernæst med Factoren 1 med Nullerne, eller 10, overeensstemmende med det Foregaaende (§ 13).

Till. 3. Have begge Factorerne Nuller, multipliceres først de betydende Ciffre, og dernæst tilføies Nullerne; f. Ex.

$700 \times 50 = 7 \times 5 \times 100 \times 10 = 35000.$

16. Læres. En Sum multipliceres med et Tal, naar hver enkelt Addend multipliceres, og de saaledes frembragte enkelte Producter atter adderes.

Bev. $(5 + 4) \times 3 = 5 \times 3 + 4 \times 3$. Thi $(5 + 4) \times 3 = (5 + 4) + (5 + 4) + (5 + 4) = 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 = 5 \times 3 + 4 \times 3$.

Till. 1. Skulle to Summer multipliceres med hinanden, multipliceres hver Addend af den ene Sum med hver Addend af den anden, og alle disse Partialproducter adderes.
$(5 + 4) \times (3 + 2) = 5 \times (3 + 2) + 4 \times (3 + 2) = 5 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 2.$

Till. 2. En Differents multipliceres med et Tal, naar Minuenden multipliceres for sig og Subtrahenden for sig, og Differentsen af disse Producter tages.

$(13 - 7) \times 3 = 13 \times 3 - 7 \times 3$. Vi have nemlig $(13 - 7) \times 3 = (13 - 7) + (13 - 7) + (13 - 7) = 13 + 13 + 13 - 7 - 7 - 7 = 13 \times 3 - 7 \times 3.$

17. Opg. At multiplicere to fleercifrede Tal med hinanden.

Opl. I. Skal et fleercifret Tal multipliceres med Enere, stilles denne Multiplicator paa Enernes Plads; dernæst dannes de enkelte Producter af Multiplicandens Enere med Enerne af Multiplicator, af Multiplicandens Tiere med Multiplicator, af dens Hundreder o. s. v. og disse Producter sættes paa Enernes, Tiernes, Hundredernes Plads; er af nogen af disse Classer mere end 10, forandres hvad, der er 10 eller derover, til den følgende høiere Classe og lægges til det Product, som henhører der.

F. Ex. 894312×4

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 3577248 \end{array}$$

Her er Multiplicator 4, da den kun indeholder Enere, henskreven under Multiplicandens Enere. Producterne 2×4 ɔ: Multiplicandens Enere med Multiplicator, 1×4 ɔ: Multiplicandens Tiere med Multiplicator, 3×4 dens Hundreder med Multiplicator o. s. v. ere henskrevne; det første af disse Producter, 8, er hensat paa Enernes Plads, det andet 4, paa Tiernes; af det tredie Product, 12, ere 2 opskrevne paa Hundredernes Plads og 1 Tusinder føiet til det følgende Product af Tusinder o. s. v.

II. Skal en fleercifret Multiplicand multipliceres med en Multiplicator, ligeledes bestaaende af flere Ciffre, stilles dennes Enere, Tiere, Hundreder o. s. v. under Multiplicandens Enere, Tiere og Hundreder. Productet af Multiplicanden og Multiplicators Enere frembringes, som forhen; Productet af Multiplicanden og Multiplicators Tiere dannes paa lignende Maade, men henstilles med sidste Ciffer paa Tiernes Plads; Productet med Multiplicators Hundreder, ligeledes med sidste Ciffer paa Hundredernes Plads o. s. v. Er i Multiplicator et 0, føres dette blot ned, for at det følgende Product kan faae sin rette Plads. Alle disse enkelte Producter, saaledes ordnede, adderes derpaa tilsammen.

F. Ex.

$$\begin{array}{r} 3879514 \\ \underline{3076} \\ 23277084 \\ 27156598 \\ \underline{116385420} \\ 11933385064 \end{array}$$

Her er den første Række fremkommen ved at multiplicere med Enerne 6; næste Række, der fremkommer ved Multiplicationen med Multiplicators 7 Tiere, staaer med sit første Ciffer paa Tiernes Plads. Da Multiplicator har 0 Hundreder, er dette Nul nedskrevet, for at Productet af Multiplicators Tusinder kan faae sin rette Plads.

Bev. Ved at opløse Multiplicanden i en Sum, bestaaende af Enere, Tiere, Hundreder o. s. v. indsees, at vi have, ved at følge ovenstaaende Regel (§ 16), multipliceret hver af disse for sig og adderet alle de fremkommende enkelte Producter. Exemplet giver nemlig

$$894312 = 2 + 10 + 300 + 4000 + 90000 + 800000;$$

multipliceres denne Sum med 4, faaes:

$$\begin{array}{rcr} 2 \times 4 & = & 8 \\ 10 \times 4 & = & 40 \\ 300 \times 4 & = & 1200 \\ 4000 \times 4 & = & 16000 \\ 90000 \times 4 & = & 360000 \\ 800000 \times 4 & = & 3200000 \\ \hline 894312 \times 4 & = & 3577248 \end{array}$$

II. Naar Multiplicator er fleercifret, maa ogsaa denne opløses i en Sum af Enere, Tiere, Hundreder, og med hver

af disse Addender maa man multiplicere Multiplicanden. Vi have saaledes i Exemplet

Multiplicator $3076 = 6 + 70 + 3000$; altsaa bestaaer Productet af følgende Dele:

$$\begin{array}{rcr} 3879514 \times 6 & = & 23277084 \\ 3879514 \times 70 & = & 271565980 \\ 3879514 \times 3000 & = & 11638542000 \end{array}$$

Men i disse Partialproducter, der ere dannede overeensstemmende med § 16 Till. 2, kunne, som i Udregningen er viist, de Nuller, som i ethvert Tilfælde maae fremkomme, naar der multipliceres med Tiere, Hundreder, Tusinder o. s. v. udelades, naar man blot giver de betydende Ciffre den rette Plads.

Anm. For at lette Multiplicationen især af benævnte Tal, tjener den saakaldte *store Tabel*, der indeholder Producterne af 12 til 19 med Enerne. Multiplicere vi saaledes med to Ciffre ad Gangen, maae vi nøie iagttage at give de følgende Partialproducter den rigtige Plads.

F. Ex.

$$\begin{array}{r} 3807345 \\ \underline{31714} \\ 53302830 \\ 64724865 \\ \underline{11422035} \\ 120746139330 \end{array}$$

Her er ved den *store Tabels* Hjælp multipliceret først med 14, dernæst med 17; men, da disse ere 17 Hundreder, er det første Ciffer stillet paa Hundredernes Plads. Ligeledes er, efter denne Multiplication, Partialproductet med 3 stillet paa Titusindernes Plads.

Det bliver stundom, især ved *Hovedregning*, fordeelagtigt at opløse Multiplicator i Factorer; der multipliceres først med den ene Factor, og det fremkomne Product, som ene behøver at bevares i Hukommelsen, multipliceres dernæst med den anden Factor. F. Ex. 192×53 vilde helst regnes saaledes: $53 \times 192 = 53 \times 16 \times 12$, 53×16 findes let liig 848, og $848 \times 12 = 10176$.

18. Forkl. Ved en fortsat Subtraction ville vi kunne undersøge, hvormange Gange eet Tal indeholdes i et andet.

F. Ex. 6 lader sig drage 4 Gange fra 24, og vi finde saaledes, at 6 indeholdes 4 Gange i 24.

Denne Regningsart kaldes Division (Deelning), og Tallet, som udtrykker, hvor ofte det ene af de givne Tal indeholdes i det andet, kaldes Qvotient; det første af de givne Tal, som gjentagne Gange fradrages, kaldes Divisor, det andet, hvorfra dette drages, kaldes Dividenden.

Divisionstegnet er :, foran hvilket skrives Dividenden, efter samme Divisor. Altsaa staaer det anførte Exempel saaledes: $24 : 6 = 4$.

Till. 1. Ligesom Additionen og Subtractionen ere modsatte Regningsarter, maae Multiplicationen og Divisionen være det. Gjentage vi næmlig Divisor saamange Gange, som Qvotienten udviser, maa Dividenden atter fremkomme; eller vi prøve enhver Division ved at multiplicere Divisor med den fundne Qvotient og sammenligne det da fundne Product med Dividenden. F. Ex. $24 : 6 = 4$; altsaa omvendt $6 \times 4 = 24$. Vi bevise altsaa ligeledes enhver Divisionsregel, ved at behandle Qvotienten efter den tilsvarende Multiplicationsregel.

Till. 2. Er Divisor liig 1, bliver Qvotienten liig Dividenden; er Divisor liig Dividenden, bliver Qvotienten liig 1; er Dividenden liig 0, bliver Qvotienten liig 0.

19. Læres. Multipliceres eller divideres Dividenden med et Tal, bliver Qvotienten saamange Gange større eller mindre, som dette Tal indeholder Eenheder.

Bev. Have vi $30 : 5$, da bliver Qvotienten 3 Gange større, hvis vi multiplicere Dividenden med 3, 3 Gange mindre, hvis vi dividere Dividenden med 3. Thi, lader 5 sig drage, som her er Tilfældet, 6 Gange fra 30, vil det lade sig drage 3×6 Gange fra den 3 Gange saa store Dividend 3×30, derimod kun $6 : 3$ d. e. 2 Gange fra en Dividend, der er 3 Gange mindre eller $30 : 3$.

Till. 1. Multipliceres eller divideres Divisor med et Tal, da bliver Qvotienten saamange Gange mindre eller større, som dette Tal indeholder Eenheder. Have vi saaledes $48 : 8$, da bliver Qvotienten 2 Gange mindre, hvis vi multiplicere Divisor 8 med 2; thi 8×2 vil ikkun lade sig drage halvt saamange Gange fra 48, som Divisoren 8; Qvotienten, som var 6, kan altsaa kun blive halvt saa stor, eller 3, naar saaledes Divisor multipliceres. Omvendt bliver Qvotienten $48 : 8$ dobbelt saa stor, naar Divisoren bliver $8 : 2$ eller 4; thi denne halvt saa store Divisor lader sig drage dobbelt saa mange Gange fra; Qvotienten bliver altsaa, i Stedet for 6, $6 \times 2 = 12$.

Till. 2. En Qvotient bliver uforandret, naar Dividenden og Divisor enten multipliceres eller divideres med samme Tal; thi en saadan Qvotient, f. Ex. $54 : 6$, vilde blive 2 Gange større, hvis Dividenden 54 multipliceredes med 2; men 2 Gange mindre, hvis Divisor multipliceredes; altsaa bliver den uforandret. Paa lignende Maade vilde en Division f. Ex. med 3 i Dividenden gjør Qvotienten $54 : 6$ 3 Gange mindre eller til $18 : 6$; men en Division med 3 i Divisor 6, vilde atter gjøre Qvotienten 3 Gange større, eller gjøre den til 9, som den oprindeligen var.

Till. 3 Vi anvende ofte en saadan Division af Dividenden og Divisor med samme Tal, for at forkorte Regningen, d. e. anvende mindre Tal, uden at forandre Facit. Navnligen skeer en saadan Forkortning hver Gang to Tal, der ende sig med Nuller, skulle divideres, i det vi næmlig saa udelade ligemange Nuller i Dividenden og i Divisor. F. Ex. $4800:600 = 48:6$; vi forkorte her med 100.

Till. 4. Er Dividenden et Product af to eller flere Factorer, vil Divisionen skee, naar een af Factorerne divideres. F. Ex. $15 \times 4 : 3 = (15:3) \times 4$; thi, ved at udføre Divisionen i Dividenden 15, der er 4 Gange mindre end den egentlige Dividend 15×4, bliver Qvotienten 4 Gange mindre end den skal være; den rette Qvotient udkommer altsaa først, naar $15:3$ multipliceres med 4.

Till. 5. Er Divisor et Product, divideres med den ene Factor efter den anden. F. Ex. $72:(4 \times 3)$ findes ved først at dividere 72 med 4, dernæst den saaledes fundne Qvotient med 3. Ved nemlig, i Stedet for Divisor 4×3, at tage en 3 Gange mindre Divisor 4, faaes en Qvotient, der bliver 3 Gange større end den rette, der altsaa findes, ved derpaa at dividere med 3.

20. Læres. En Sum divideres med et Tal, naar hver enkelt Addend divideres med samme.

Bev. $(30 + 24 + 18):6 = 30:6 + 24:6 + 18:6$; thi, hvis denne Qvotient, der selv er en Sum, (overeensstemmende med § 16) multipliceres med 6, vil hver enkelt Addend for sig multipliceres, altsaa $30:6$ med 6, $24:6$ med 6, $18:6$ med 6; men Productet bliver saaledes $30 + 24 + 18$, altsaa Dividenden, og Divisionens Rigtighed er saaledes godtgjort (§ 18. Till. 1).

Till. Vi dividere paa samme Maade Forskjellen mellem to Tal, naar Minuenden divideres for sig og Subtrahenden for sig; Forskjellen mellem disse Qvotienter er da den søgte Qvotient. F. Ex. $(56 - 21):7 = 56:7 - 21:7$. Vi indsee Rigtigheden heraf, i det vi multiplicere den saaledes fundne Qvotient med 7, og finde (i Følge § 16 Till. 2) altsaa

$[56:7 - 21:7].7 = (56:7) \times 7 - (21:7) \times 7 = 56 - 21$ d. e. den oprindelige Dividend.

21. Opg. At dividere to Tal med hinanden.

Opl. I. Indeholder Divisor kun Enere, og Dividenden ligeledes kun Enere, eller Enere og Tiere, disse dog i et mindre Antal end Divisors Enere, opsøges det Tal, som, naar Divisor multipliceres med samme, frembringer Dividenden. F. Ex. $28:4 = 7$; thi $4 \times 7 = 28$.

II. Har Divisor ikkun Enere; men Dividenden derimod har høiere Classer, saasom flere Tiere end Divisors Enere, Hundreder, Tusinder o. s. v., da opskrives Dividenden, og foran stilles Divisor. Ved at dividere Divisor i den høieste eller de to høieste Classer af Dividenden, faaes den høieste Classe eller første Ciffer af Qvotienten; Productet af dette og Divisor fradrages; næste Ciffer af Dividenden flyttes ned, og derpaa bestemmes næste Classe eller andet Ciffer af Qvotienten. Saaledes fortsættes Regningen med alle følgende Ciffre af Dividenden.

F. Ex. $896508:6$

```
6)896508|149418
  6
  --
  29
  24
  --
   56
   54
   --
    25
    24
    --
     10
      6
     --
     48
     48
     --
      0
```

Qvotienten stilles enten, som her er skeet, ved Siden eller ovenfor Dividenden, dog behørigt adskilt fra samme.

III. Er Divisor fleercifret, opsættes Stykket ligesom forhen; af Dividenden tages saamange Ciffre, som Divisor har, eller eet mere, hvis Dividendens første Deel er mindre end Divisors. Man undersøger nu, med hvilket Antal Enere hele Divisor kan multipliceres, saa at der frembringes et Product, som lader sig drage fra den udtagne Deel af Dividenden, og at Resten, om nogen bliver tilbage, bliver mindre end Divisor. Det fundne Antal Enere er høieste Ciffer i Qvotienten. Næste Ciffer af Dividenden flyttes ned til Resten, hvorpaa næste Ciffer af Qvotienten søges paa lignende Maade, og ligeledes de følgende Ciffre.

F. Ex. 47357274 : 527

```
527)47357274 | 89862
    4216
     5197
     4743
      4542
      4216
       3267
       3162
        1054
        1054
           0
```

Bev. Naar vi dividere Enere i et Tal, der indeholder ikkun Enere og et færre Antal Tiere, end Antallet af Divisors Enere, anvender man den forhen viiste Multiplication af Enere med Enere, eller den lille Tabel, for at finde, hvilket Antal Enere, multipliceret med Divisor, frembringer Dividenden. Dette Tal er Qvotienten (§ 18 Till. 1).

I **II** opløstes Dividenden i en Sum, hvis enkelte Addender hver for sig divideredes. Saaledes i Exemplet **II** er Dividenden

$$896508 = 600000 + 240000 + 54000 + 2400 + 60 + 48.$$

hver Addend, for sig divideret med Divisoren 6, frembringer Qvotientens forskjellige Ciffre.

I **III** er ligeledes Dividenden opløst, i det

$$47357274 = 42160000 + 4743000 + 421600 + 31620 + 1054$$

hvilke Addender divideres hver for sig med Divisoren 527, hvorved Qvotienten $80000 + 9000 + 800 + 60 + 2 = 89862$, udkommer.

Till. 1. Var Dividendus mindre end Divisor, kunde Divisionen ikke foretages; men man kan blot antyde samme ved at skrive Dividendus over en Streg, Divisoren under samme. F. Ex. $3:7 = \frac{3}{7}$. Ligeledes, hvis, efter at Divisionen er foretagen, en Rest bliver tilbage, betegnes den paa samme Maade. $29:6$ giver som Qvotient 4, og 5 bliver tilbage som Rest; vi skrive altsaa $4\frac{5}{6}$ eller $29:6 = 4\frac{5}{6}$. Ofte betegnes Divisionen i Almindelighed saaledes; f. Ex. $9:7 = \frac{9}{7}$.

Till. 2. Ere Dividendus og Divisor ligestore, da er Qvotienten 1. $7:7 = \frac{7}{7} = 1$. Er Divisor 1, finder egentligen ingen Division Sted; Qvotienten bliver næmlig liig Dividendus; $23:1 = 23$.

Till. 3. Er Dividenden 0, da er Qvotienten 0, hvilken Størrelse end Divisor er; f. Ex. $0:3 = 0$; $0:17 = 0$.

Anm. 1. Ved den praktiske Regning foretages enhver Division med Enere in mente og uden at nedskrive de enkelte Producter af Divisor med Qvotientens Ciffre; ligeledes hvis Divisor er 12, 13...19, eller eet af Tallene af den store Tabel. F. Ex.

896508 : 6;   7036578 : 18

6)896508   18)7036578
149418   390921

Er Divisor fleercifret, kan vel ogsaa den Øvede undgaae at nedskrive flere Cifre, ved umiddelbart at trække hvert Ciffer af de enkelte Producter fra Dividendens Dele. Udregningen af Exemplet III bliver da følgende:

89862
527)47357274
5197
4542
3267
1054
0

Qvotienten sættes endvidere, som her er skeet, foroven.

Især ved Hovedregningen bliver det beqvemt at opløse Divisor i Factorer. F. Ex.

10138176 : 108.

Da 108 = 12 × 9, skeer Divisionen saaledes

12)10138176
9)844848
93872

Anm. 2. Ved Regning med *benævnte* Tal er Dividendus benævnt, Divisor et ubenævnt Tal, og Qvotienten bliver da benævnt. F. Ex.

16 Rbd. 5 ℳ 8 ß : 7 = 2 Rbd. 2 ℳ 8 ß

hvilken Regning naturligviis ogsaa udføres in mente, da Divisor kun er Enere. Imidlertid tjener Divisionen tillige til at undersøge, hvor ofte et benævnt Tal indeholdes i et ligeartet benævnt; da bliver Qvotienten ubenævnt. F. Ex. Hvor ofte indeholdes 4 ℳ i 6 Rbd. 4 ℳ; her gjøres Dividendus 6 Rbd. 4 ℳ først til ℳ, eller samme Navn som Divisor; den udgjør 40 ℳ, og, da 40 : 4 = 10, vil ligeledes 4 ℳ indeholdes 10 Gange i 40 ℳ eller 6 Rbd. 4 ℳ. Angaaende denne Division, som er at ansee som en Art Reduction, se Regnebogen S. 37.

22. Forkl. Gaaer et Tal aldeles op i et andet, siges det at være et *Maal* for samme.

I 12 gaaer 3 op; thi 12 : 3 = 4, og her er ingen Rest, altsaa er 3 Maal for 12. Desuden ere 2, 4, 6 Maal for 12 og endvidere 1 og 12 selv.

Till. Ethvert Tal har som Maal Eenheden og Tallet; f. Ex. i 7 gaae 1 og 7 op; Eenheden giver nemlig selve Tallet til Qvotient, Tallet, taget som Divisor, derimod Eenheden.

23. Forkl. Et Tal, der ene har som Maal Eenheden og Tallet selv, kaldes et *Primtal*. De første Primtal, indtil 100, ere saaledes:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Till. Tal, der have eet eller flere Maal, foruden de nævnte, kaldes *delelige* eller *sammensatte Tal*. Saaledes er 12 et deleligt Tal, da dette har, foruden Maalene 1 og 12, de forhen anførte 2, 3, 4, 6.

24. Forkl. Ethvert deleligt Tal lader sig ansee som et Product af Primtal. Disse Primtal kaldes Tallets enkelte *Factorer*. F. Ex. 12 = 2 × 2 × 3; følgeligen ere Primtallene 2, 2, 3 de enkelte Factorer af Tallet.

Till. Et Product af nogle af disse enkelte Factorer bliver ogsaa en Factor, men, da denne er et deleligt eller sammensat Tal, kaldes den en sammensat Factor; f. Ex. 2 × 2 = 4, 2 × 3 = 6 ere de sammensatte Factorer af Tallet 12.

25. Læres. Er et Tal Maal for en Factor af et Product, er det ogsaa Maal for hele Productet.

Bev. Da 4 er Maal for 16, er det ogsaa Maal for 16 × 3. Dette Product vilde nemlig divideres med 4, ved blot at dividere den ene Factor 16 dermed (§ 19. Till. 4). Men

16 : 4 frembringer, i Følge Antagelsen, et heelt Tal, 4, som, multipliceret med 3, maa give et heelt Tal som Product.

Till. 1. Gaaer et Tal op i to eller flere Tal, gaaer det ogsaa op i disse Tals Sum. Tage vi Exemplet 30+24 +18, hvor 6 gaaer op i hver af Addenderne, vil 6 være et Maal for samme, saafremt Divisionen ikke efterlader nogen Rest; men denne Division udføres ved at dividere hver enkelt Addend med 6; hvilket kan skee, da 6 er Maal for samme, uden nogen Rest. Summen af disse enkelte Qvotienter, 30:6 +24:6+18:6, er saaledes Qvotienten, uden at nogen Rest kan fremkomme.

Till. 2. Gaaer et Tal op i to andre, gaaer det ogsaa op i deres Differents. 7 er saaledes Maal for 56 og 21, altsaa ligeledes for 56—21; thi Divisionen med 7 vilde skee ved at dividere 56 med 7 og 21 med 7; der frembringes saaledes to Tal, uden Rest, og disse fradragne give Qvotienten, der ligeledes bliver uden Rest, næmlig blot Forskjellen mellem de fundne hele Tal.

26. Opg. At undersøge, om 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ere Maal for et givet Tal.

Opl. 2, naar Tallet er et lige Tal ɔ: naar det sidste Ciffer er 0, eller lader sig dividere med 2.

4, naar 4 gaaer op i den sidste Deel af Tallet, der indeholder sammes Enere og Tiere, eller disse ere Nuller.

8, naar 8 gaaer op i den Deel af Tallet, der bestaaer af Enere, Tiere og Hundreder, eller disse ere Nuller.

5, naar Tallet endes med 5 eller 0.

3 og 9, naar disse Tal gaae op i Tværsummen d. e. i Summen af alle Tallets Ciffre, uden Hensyn til deres Plads.

6, naar Tallet er et lige Tal og 3 gaaer op i Tværsummen.

10, naar Tallet endes med 0.

Exempel. 161280 er et saadant Tal, hvori 2 gaaer op, da det sidste Ciffer er 0, endvidere 4, da 4 gaaer op i Enere og Tiere 80, ligeledes 8, da 8 gaaer op i 280. Tallet er fremdeles deelbart med 5, da det ender sig med 0; med 3 og 9, da disse Tal gaae op i Tværsummen

$$1+6+1+2+8+0=18$$

da det saaledes er deelbart med 3 og tillige med 2, gaaer ogsaa 6 op deri. Endvidere gaaer 10 op i Tallet, fordi det ender sig med Nul.

Bev. 2 gaaer op i 10, altsaa, hvis vi dele et Tal i Tiere og Enere, er Spørgsmaalet blot om 2 gaaer op i Enerne; thi det Øvrige af Tallet lader sig ansee som et Product af 10, hvorfor 2 er Maal (25). For 5 føres Beviset paa samme Maade; saaledes vil Tallet i Exemplet opløses i $16128\times10+0$; den første Deel er deelbar med 5, forsaavidt Factoren 10 er det; og, enten der nu fandtes ingen eller 5 Enere, vil 5 ogsaa gaae op heri, følgeligen i Summen af begge disse Dele, eller i det givne Tal.

Da 4 gaaer op i 100, bliver Spørgsmaalet kun om det gaaer op i Enere og Tiere. Tallet $161280=1612\times100$ $+80$; da 4 gaaer op i 100, vil det gaae op i 1612×100, altsaa, naar det gaaer op tillige i 80, i Summen 1612×100 $+80$ eller i det givne Tal.

Paa samme Maade godtgjøres, at, da 8 gaaer op i 1000, undersøge vi blot, om det gaaer op i Hundreder, Tiere og Enere. $161280=161\times1000+280$; da nu 8 gaaer op i 280 og tillige i 1000, altsaa i 161×1000, gaaer det op i begge Addender, altsaa i Summen, der er liig det givne Tal.

Da ethvert Tal lader sig opløse i Enere, Tiere, Hundreder o.s.v. og $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$ o.s.v. saa lader Tallet 161280 sig opløse i:

$$1(99999+1)+6(9999+1)+1(999+1)+2(99+1)+8(9+1)+0=$$

$$1\times 99999+1+6\times 9999+6+1\times 999+1+2\times 99+2+8\times 9+8+0.$$

Delene, der ere Producter af 9, 99, 999 ... ere deelbare med 3 og 9, Spørgsmaalet bliver altsaa, om Tværsummen

$$1+6+1+2+8+0$$

er deelbar med 3 og 9, da i saa Tilfælde hele Tallet vil være deelbart med samme.

Da $6 = 3\times 2$, indsees, at 6 maa være et Maal, saafremt begge Factorer 3 og 2, som findes i 6, ere Maal for Tallet.

Anm. 1. For Tallet 7 gives vel ogsaa en Regel. Ville vi undersøge, om 7 gaaer op i Tallene 16128, henskrive vi Tallet, drage fra først Enerne og et dobbelt saa stort Antal Tiere, altsaa 168; Resten, som faaer et Ciffer mindre, behandles paa samme Maade, til vi faae tilsidst en Rest af et enkelt eller to Ciffre, som vi da undersøge, hvorvidt 7 gaaer op i samme. Regningen med det forlangte Exempel vilde staae saaledes:

16128
168
1596
126
147
147
0

Men Udøvelsen af denne Regel, som grunder sig i, at 7 gaaer op i 21 og alle Producter af samme, er aabenbart vidtløftigere end at prøve ligefrem ved en Division, om 7 gaaer op.

Anm. 2. Paa Reglen om Tværsummen grunder sig den saakaldte Niprøve. Ved hvilkensomhelst Regningsart tage vi, for de enkelte Tal, Tværsummen og henskrive, efter at denne er divideret med 9, den udkomne Rest eller 0, hvis ingen Rest findes. Behandles disse Rester nu overeensstemmende med Regningsarten, fremkommer et Tal, som, divideret med 9, giver en Rest, svarende til den, som Tværsummen af det Udkomne giver, efter at være divideret med 9.

I. Additions-Exempel

3980765		2
598069		1
7035812		8
49605		6
11664251	26	17
	8	8

Tværsummerne af Summen og af Resternes Sum frembringe, efter en Division med 9, samme Rest 8, hvilket tjener til Prøve paa Regningens Rigtighed.

II. Subtractions-Exempel

580473120		3
93204017		8
487269103	40	
	4	

Da 8 her ikke kan drages fra 3, føies 9 til Resten 3, og, da $12-8=4$, er Prøven tilstede.

III. Multiplications-Exempel

590643		0
308		2
4725144		0
17719290		
181918044	36	

Men 36, divideret med 9, giver ingen Rest, hvilket Prøven ogsaa kræver.

IV. Divisions-Exempel

47357274 : 527 = 89862 (Side 20)

men 47357274 giver 3

527 — 5

da 5 ikke gaaer op i 3, lægges hertil 3×9; 5 gaaer nu op i $3 \times 9 + 3 = 30$, og giver Resten 6, den samme, som Qvotienten 89862 giver, naar vi dividere dens Tværsum med 9.

Denne Prøve er dog som oftest vidtløftig og upaalidelig, forsaavidt vi kunne have feilet 9 eller flere Gange 9 Eenheder; f. Ex. hvis vi i Divisions-Exemplet feilagtigen havde sat 0, i Stedet for 9 i Qvotienten, vilde Prøven slaae til, ihvorvel Stykket var urigtigt.

27. Opg. At finde et Tals enkelte Factorer.

Opl. Vi forsøge med Primtallene, indtil vi ved en fortsat Division tilsidst faae et Primtal som Qvotient.

F. Ex. 4620.

$$
\begin{array}{r}
2)4620 \\
2)2310 \\
3)1155 \\
5)385 \\
7)77 \\
11.
\end{array}
$$

Factorerne ere saaledes 2, 2, 3, 5, 7, 11, hvis Product
$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 4620.$$

Bev. Rigtigheden heraf følger umiddelbart af Forklaringen over de enkelte Factorer.

Till. Samle vi disse enkelte Factorer i Producter, faae vi Tallets sammensatte Factorer.

Anm. Man har Tabeller, deels over Primtallene, deels over alle delelige Tals Factorer, hvorved denne vidtløftige Regning undgaaes.

28. Forkl. Et Tal, der er Maal for to eller flere andre, siges at være et fælleds Maal for disse.

F. Ex. 8 er fælleds Maal for 24 og 56.

Till. 1. Eenheden er fælleds Maal for alle Tal.

Till. 2. Tal, der intet andet fælleds Maal have end Eenheden, kaldes indbyrdes Primtal. Tal, der have andet fælleds Maal, derimod indbyrdes delelige Tal. Saaledes ere 7 og 33 indbyrdes Primtal. 24 og 56 indbyrdes delelige Tal.

Till. 3. Gaaer eet Tal op i et andet, da er det fælleds Maal for disse og navnligen det største fælleds Maal for samme. F. Ex. 16 gaaer op i 80, nu er 16 størst fælleds Maal for Tallene 16 og 80.

Till. 4. Ere to Tal absolute Primtal, f. Ex. 7 og 19, ere de ogsaa indbyrdes Primtal. Er det større et Primtal, ville Tallene, om ogsaa det mindre er et deeligt Tal, være indbyrdes Primtal; f. Ex. 8 og 37. Er det mindre Tal et Primtal, vil intet fælleds Maal gives, uden forsaavidt dette gaaer op i det større Tal; f. Ex. 13 og 52, hvis fælleds Maal er 13. Tal kunne gjerne absolut være delelige og dog indbyrdes Primtal, saasom 8 og 9.

29. Læres. Gaaer en Divisor ikke op, men efterlader en Rest, vil det fælleds Maal for Dividendus og Divisor ogsaa være Maal for Resten.

Bev 77 : 21 give til Qvotient 3, men efterlader som Rest 14. Man kan bevise, at 7, som er Maal for 77 og 21, ogsaa maa være Maal for 14.

$$77 - 3 \times 21 = 14.$$

Men 7 gaaer op i 21 altsaa ligeledes i 3×21; det gaaer endvidere op i 77, følgeligen ogsaa i Forskjellen mellem disse to Tal eller i 14 (§ 25 Till. 2).

Till. Hvis et Tal er Maal for den ved en Division forekommende Rest og tillige for Divisor, er den ogsaa Maal for Dividendus. I det anførte Exempel er Dividenden

$$77 = 3 \times 21 + 14.$$

Men, da 7 her gaaer op i 21, altsaa i 3×21 og tillige i 14, gaaer den ogsaa op i disses Sum eller 77 (§ 25 Till. 1).

30. Opg. At søge det største fælleds Maal for to Tal.

Opl. Tallene være 754 og 221. Det mindre Tal divideres i det større; Resten i det mindre, denne Rest atter i den foregaaende o. s. v. Regningen føres altsaa paa saadan Maade

```
221)754 | 3
    663
     91)221 | 2
        182
         39)91 | 2
            78
            13)39 | 3
               39
                0
```

13, der er den sidste Divisor, er nu det største fælleds Maal for Tallene.

Bev. Vi kunne godtgjøre, baade at 13 er fælleds Maal for de givne Tal og tillige største fælleds Maal. Det er Maal; thi 13 er fælleds Maal for 13 og 39, altsaa for Resten ved den sidste Division og sammes Divisor, følgeligen ogsaa for Dividenden 91; men i den foregaaende Division er 39 Rest, 91 Divisor, altsaa disses fælleds Maal 13 ogsaa Maal for Dividenden 221, og følgeligen, da ved den første Division 91 er Resten, 221 Divisor, ogsaa for Dividenden 754.

Men 13 er tillige det største Maal; thi, gives et større Maal for Tallene 754 og 221, maatte dette ogsaa være Maal for Resten 91, men saadant fælleds Maal for 91 og 221 er ogsaa Maal for den næste Rest 39; men denne bliver Divisor i den følgende Division, som har Resten 13; følgeligen maatte dette antagne Maal ogsaa være Maal for 13; men dette er umuligt, da intet Tal kan have større Maal end selve Tallet. Saaledes bliver 13 baade fælleds Maal og største fælleds Maal.

Till. 1. Bliver den sidste Rest 1, da er det Tegn, at Tallene intet andet fælleds Maal have end 1, at de altsaa ere indbyrdes Primtal.

Till. 2. Skal det fælleds Maal søges for flere Tal, søges det først for to; for dette fundne Maal og det følgende Tal søges atter det fælleds Maal o. s. v. Dette sidste Maal er da det største fælleds Maal for alle Tallene. F. Ex. 258, 1677, 817. Her er 129 Maal for 258 og 1677, for 129 og 817 er 43 største fælleds Maal og saaledes det største fælleds Maal for samtlige Tal.

Anm. 1. Havde vi en Tabel over Tallenes enkelte Factorer, vilde samme tjene til at finde det største fælleds Maal, som bliver Productet af alle de enkelte Factorer, begge Tal have tilfælleds. F. Ex.

$$9660 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 23$$
$$42420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 101$$

altsaa er

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$$

det største fælleds Maal for disse to Tal.

Anm. 2. Den fortsatte Division stilles ellers i den praktiske Regning beqvemmere saaledes, forsaavidt man ikke har Brug for Qvotienterne, hvilke derfor enten kunne bortkastes eller særskilt nedskrives.

221	754
182	663
39	91
39	78
0	13

Qvotienterne ere: 3, 2, 2, 3. (Jvfr. Regnebogen S. 22).

31. Forkl. Hvis to eller flere Tal gaae op i eet og samme Tal, da siges det at være et **fælleds deleligt Tal** for disse.

Exempel. 7, 12, 21 gaae op i 84, altsaa er 84 **fælleds deleligt Tal** for de nævnte tre Tal.

Till. 1. Et fælleds deleligt Tal maa stedse indeholde de enkelte Factorer, som findes i de forskjellige Tal, hvorfor det er fælleds deleligt Tal. F. Ex. hvis 84 er fælleds deleligt Tal for 7, 12, 21, indeholder det, foruden 7, der, som Primtal, ingen Factorer har, tillige Factorerne af 12, nemlig 2, 2, 3 og af 21 eller 3 og 7.

Till. 2. Productet af to eller flere Tal bliver deres fælleds delelige Tal. Ere Tallene indbyrdes Primtal, er dette Product tillige disses **mindst fælleds delelige Tal.** F. Ex. 12 og 25 have $12 \times 25 = 300$ som fælleds deleligt Tal og tillige som det mindste, da 300 baade skal indeholde Factorerne af 12 og af 25, og, da disse to Tal, som indbyrdes Primtal, ikke have noget Maal eller Factor tilfælleds, alle de enkelte Factorer af Tallene 12 og 25, altsaa maa være selve Productet af 12 og 25.

32. Opg. At søge det mindst fælleds delelige Tal for to eller flere Tal.

Opl. 1. Tallene opløses i deres enkelte Factorer, og af de saaledes forekomne enkelte Factorer tages af hver saamange, som fremkomme i noget af Tallene; disse enkelte Factorers Product er det mindste fælleds delelige Tal.

F. Ex. Tallene 8, 12, 15, 16, 20, 25, 56 være givne

$8 = 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$
$15 = 3 \times 5$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$20 = 2 \times 2 \times 5$
$25 = 5 \times 5$
$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$

Productet $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 8400$ er det søgte Tal.

Opl. 2. Først undersøges, om nogle af Tallene kunne gaae op i de andre; disse udelades; derpaa forsøges med eet af de lavere Primtal, om det kan gaae op i to eller flere af de givne; hvis saa er, divideres med samme, og Qvotienterne nedskrives; tillige nedskrives de Tal, der ikke dermed lade sig dividere; man forsøger paa ny med samme eller et andet Primtal, saalænge saadant findes, der gaaer op i to af Tallene eller i de fremkomne Qvotienter; endvidere efterses hver Gang, om nogen af Qvotienterne gaaer op i de nedskrevne Tal, hvilken da udelades. Er, efter saadan gjentagen Division, intet Maal for to af Tallene, multipliceres disse og Productet endvidere med alle Maalene, hvormed der er divideret. F. Ex.

2) 8 — 12 — 15 — 16 — 20 — 25 — 56
2) 6 — 15 — 8 — 10 — 25 — 28
2) 3 — 15 — 4 — 5 — 25 — 14
5) 15 — 2 — 25 — 7
3 — 2 — 5 — 7.

$3 \times 2 \times 5 \times 7 = 210$

$210 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 8400.$

Her er 8 udeladt, forsaavidt det gaaer op i 16; efter at der to Gange er divideret med 2, bortfalde 3 og 5 ligeledes.

Bev. Opløsningen **I** godtgjøres umiddelbart ved § 31 Till. 2. Opløsningen **II** bestaaer i, at foretage Opløsningen i Factorer, dog saaledes, at alle de Tal, der blive overflødige, forsaavidt de gaae op i andre, udelades. Productet, der dannes af de sidste Qvotienter (i Exemplet $3 \times 2 \times 5 \times 7 = 210$), er det mindste fælleds delelige Tal for disse, forsaavidt de ere indbyrdes Primtal; men endvidere maa multiplíceres med Divisorerne 2, 2, 2, 5, forsaavidt de oprindelige Tal indeholde disse Factorer, foruden Qvotienterne, nemlig $16 = 2 \times 2 \times 2$ multipliceret med Qvotienten 2; $15 = 3 \times 5$; $25 = 5 \times 5$. Det sidste Product bliver saaledes fælleds deleligt Tal og tillige det mindste fælleds delelige Tal.

33. Forkl. Den Qvotient, som vi fandt ved Divisionen, naar enten Dividendus var mindre end Divisor, eller Divisionen efterlod en Rest, kaldes en Brøk. F. Ex. $3:5 = \frac{3}{5}$ $11:32 = \frac{11}{32}$; $\frac{3}{5}$ og $\frac{11}{32}$ ere saaledes Brøker.

Till. 1. Da $3 = 1 + 1 + 1$, vil $3:5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$. Vi kunne altsaa ligeledes forklare Brøken ved at være et vist Antal af Eenhedens ligestore Dele. Ligesom $\frac{3}{5}$ saaledes er Eenheden, deelt i 5 ligestore Dele, hvoraf ere tagne 3, er $\frac{11}{32}$ Eenheden, deelt i 32 ligestore Dele, hvoraf ere tagne 11.

Till. 2. En Brøk kan ansees som et Tal, forsaavidt man tager som Eenhed een af de ligestore Dele, hvori den oprindelige Eenhed er deelt. F. Ex. for $\frac{3}{5}$ bliver $\frac{1}{5}$ Eenhed, for $\frac{11}{32}$ er $\frac{1}{32}$ Eenhed.

Till. 3. Divisor og Dividendus i en saadan Qvotient faae særegne Navne; Divisor, som skrives under Stregen, kaldes **Brøkens Nævner**, Dividendus **Brøkens Tæller**; saaledes er i $\frac{3}{5}$ Tælleren 3 og Nævneren 5.

Till. 4. Divisionen antydes ofte i Almindelighed ved at sætte Tallene under Brøks Form (§ 21 Till. 1). F. Ex. $5:3 = \frac{5}{3}$. Dog en saadan Brøk skjelner sig fra den forklarede, ved at Nævneren ikke er større end Tælleren. Den kaldes i Modsætning til denne, der faaer Navnet **ægte Brøk**, en **uægte Brøk**

og lader sig stedse forandre til et heelt Tal eller et **blandet Tal** d. e. et heelt Tal og en ægte Brøk. F. Ex.

$$\frac{5}{5} = 1,\ \frac{8}{4} = 2,\ \frac{5}{3} = 1\tfrac{2}{3}.$$

Till. 5. Ere Tæller og Nævner ligestore, er Brøken stedse liig 1; saaledes er $\frac{5}{5} = 1$, ligeledes $\frac{16}{16} = 1$, $\frac{324}{324} = 1$.

34. Læres. En Brøk multipliceres eller divideres med et heelt Tal, naar enten dens Tæller multipliceres eller divideres, eller dens Nævner divideres eller multipliceres med Tallet.

Bev.
$$\frac{12}{64} \times 4 = \frac{12 \times 4}{64} = \frac{12}{64 : 4}$$
$$= \frac{48}{64} = \frac{12}{16}$$
$$\frac{12}{64} : 4 = \frac{12 : 4}{64} = \frac{12}{64 \times 4}$$
$$= \frac{3}{64} = \frac{12}{256}$$

Da en Brøk er at ansee som en Qvotient, vil Rigtigheden heraf følge umiddelbart af § 19. Hvis vi nemlig multiplicere eller dividere Tælleren (her 12) med et Tal (4), da er det Dividendus, som hermed multipliceres eller divideres, og altsaa bliver Qvotienten eller Brøken saamange Gange større eller mindre, som Tallet indeholder Eenheder. Bliver Nævneren derimod multipliceret eller divideret med et Tal, da er det Divisor, som bliver multipliceret eller divideret med Tallet, og Qvotienten, altsaa Brøken, bliver herved saamange Gange mindre eller større, som Tallet, hvormed multipliceredes eller divideredes, indeholdt Eenheder (§ 19. Till. 1).

Till. En Brøks Værdi forandres ikke, om vi multiplicere eller dividere baade Tæller og Nævner med eet og samme Tal. F. Ex.

$$\frac{12}{64} = \frac{12 \times 4}{64 \times 4} = \frac{12 : 4}{64 : 4}$$
$$= \frac{48}{256} = \frac{3}{16}$$

Følger deels umiddelbart af § 19 Till. 2; deels indsees, at, hvis Brøken $\frac{12}{64}$ gjordes et vist Antal (4) Gange enten større eller mindre ved i Tælleren at multiplicere eller dividere med et Tal 4, blev den atter lige saa mange Gange mindre eller større, hvis Nævneren multipliceredes eller divideredes med samme Tal.

35. Forkl. At *forkorte en Brøk* er at udtrykke den med mindre Tal, dog saa, at dens Værdi ikke forandres.

Till. Den forkortes meest, eller bringes til sin *mindste Benævning*, naar Tæller og Nævner divideres med deres største fælleds Maal. En Brøk, hvis Tæller og Nævner ere indbyrdes Primtal, lader sig ikke forkorte.

Anm. 1. Regningen, som her bliver at anvende, udføres aldeles efter § 30 og sammes Anm. 2.

Anm. 2. Man vil dog ofte let kunne forkorte in mente, ved at anvende Reglerne § 26. F. Ex.

$$\frac{2232}{5688} = \frac{31}{79}$$

Her søges enten det største fælleds Maal, nemlig

2232	5688
1224	4464
1008	1224
864	1008
144	216
144	144
0	72

altsaa:

$$\frac{2232}{5688} \Bigg| \overbrace{\frac{31}{79}}^{72}$$

eller ogsaa indsee vi, at 9 gaaer op i Tællerens og Nævnerens Tværsum, endvidere, at 8 er Maal for begge, og forkorte derfor saaledes

$$\frac{2232}{5688} \Bigg| \overbrace{\frac{248}{632}}^{9} \Bigg| \overbrace{\frac{31}{79}}^{8}$$

36. Forkl. Brøker siges at være *af eens Benævning*, naar de have samme Nævner.

Till. 1. Flere Brøker bringes til eens Benævning, naar man vælger et fælleds deleligt Tal for deres Nævnere, hvilket bliver Brøkernes *Generalnævner*, og henfører dem til denne Nævner, ved at dividere hver enkelt Brøks Nævner i dette Tal og dernæst multiplicere Brøkens Tæller og Nævner med Qvotienten. Regningen føres naturligviis med de mindste Tal, naar til alle Nævnere søges det mindste delelige Tal som Generalnævner. F. Ex.

$$\begin{array}{c|c|l} & \overbrace{}^{840} & \\ \frac{5}{6} & 140 & = \frac{700}{840} \\ \frac{3}{8} & 105 & = \frac{315}{840} \\ \frac{4}{5} & 168 & = \frac{672}{840} \\ \frac{3}{7} & 120 & = \frac{360}{840} \\ \frac{4}{15} & 56 & = \frac{224}{840} \end{array}$$

Her er det fælleds delelige Tal for Nævnerne 6, 8, 5, 7, 15 søgt paa den forhen (§ 32) viiste Maade; dette, der findes liigt 840, bliver Generalnævneren; ved at dividere den første Brøks Nævner 6 i 840 findes Qvotienten 140, hvormed $\frac{5}{6}$ multipliceres i Tæller og Nævner og bliver saaledes en Brøk, hvis Nævner er liig Generalnævneren. Saaledes behandles ogsaa de øvrige Brøker, der altsaa ere herved bragte til eens Benævning.

Till. 2. Da en Brøk er at ansee som et Tal, forsaavidt den indeholder een eller flere Gange en Brøk, hvis Tæller er 1 og Nævneren den givne Brøks Nævner, og som ansees som Eenhed, indsee vi, at en anden Brøk kun er *eensartet* dermed, forsaavidt den har samme Nævner. Have altsaa een eller flere Brøker forskjellige Nævnere, maae de først bringes til eens Benævning, forend de kunne ansees for eensartede. F. Ex. Hvis Brøkerne $\frac{8}{15}$ og $\frac{7}{25}$ ere givne, ere samme ueensartede; thi Eenheden for hiin er $\frac{1}{15}$, for denne $\frac{1}{25}$; men, søge vi Generalnævneren 75 og bringe Brøkerne til eens Benævning, i det $\frac{8}{15} = \frac{40}{75}$, $\frac{7}{25} = \frac{21}{75}$, ere de eensartede; thi $\frac{1}{75}$ er nu deres fælleds Eenhed.

37. Opg. At addere Brøker.

Opl. Hvis Brøkerne ikke ere af eens Benævning, bringes de dertil, Tællerne adderes dernæst og disses Sum udgjør Tælleren, Generalnævneren Nævnere i den Brøk, der ere de givne Brøkers Sum. F. Ex. Brøkerne $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ og $\frac{4}{15}$ være givne; disse bringes til eens Benævning; Tællerne nedskrives og adderes.

	840
$\frac{5}{6}$	700
$\frac{3}{8}$	315
$\frac{4}{5}$	672
$\frac{3}{7}$	360
$\frac{4}{15}$	224
	$\frac{2271}{840} = 2\frac{591}{840} = 2\frac{197}{280}$

Den uegentlige Brøk er her først bragt til blandet Tal, dernæst Brøken $\frac{591}{840}$ forkortet.

Bev. Inden Addition fandt Sted, bragtes Addenderne til at være eensartede; derpaa adderedes Tællerne, hvorved alle Addendernes Eenheder sammentaltes til een Sum.

Till. Skulle blandede Tal adderes, adderes først Brøkerne. Summen af disse, hvis den bliver en uegentlig Brøk, forvandles til blandet Tal, og de saaledes udbragte Hele føies til de øvrige Hele, der adderes paa sædvanlig Maade.

	48
$7\frac{3}{8}$	18
$3\frac{2}{3}$	32
$11\frac{5}{6}$	40
$9\frac{13}{48}$	13
$3\frac{5}{24}$	10
$17\frac{1}{4}$	12
$52\frac{29}{48}$	$\frac{125}{48} = 2\frac{29}{48}$.

Da alle Nævnere gaae op i 48, bliver denne Generalnævneren; Summen af Tællerne er, efter at Brøkerne ere bragte til eens Benævning, 125, altsaa Brøkernes Sum $\frac{125}{48} = 2\frac{29}{48}$; heraf adderes 2 til de Hele.

Anm. Hvad, der ved den praktiske Regning iøvrigt er at iagttage, læres i Regnebøgerne. (Ursins Regnebog S. 23 - 25).

38. Opg. At subtrahere Brøker.

Opl. Hvis Brøkerne ikke ere af eens Benævning, bringes de dertil; Tællerne subtraheres, og den fælleds Nævner bliver Differentsens Nævner. F. Ex.

$$\frac{9}{16} - \frac{5}{12}$$

	48
$\frac{9}{16}$	27
$\frac{5}{12}$	20
$\frac{7}{48}$	7

Bev. Da eensartede Størrelser ene kunne subtraheres, blive Brøkerne først bragte til eens Benævning, forsaavidt de ikke allerede ere det, og subtraheres dernæst som sædvanlige Tal, ved at drage Subtrahendens Tæller fra Minuendens (i Exemplet 20 fra 27).

Till. Bestaaer Minuendus af hele Tal eller er et blandet Tal, og Subtrahenden er en Brøk eller Hele og Brøk;

men saaledes beskaffen, at Minuenden ikke indeholder en Brøk, der er liig eller større end dennes Brøk, maa man laane 1 af de Hele, der da gjøres til Brøk, med Tæller og Nævner liig Generalnævneren.

F. Ex. $3\frac{1}{8} - 1\frac{5}{18}$

$$\begin{array}{r|r} & \underbrace{72} \\ 3\frac{1}{8} & 9 \\ 1\frac{5}{18} & 20 \\ \hline 1\frac{61}{72} & 61 \end{array}$$

Da 20 ikke kunde drages fra 9, laantes $1 = \frac{72}{72}$, Minuenden fik saaledes i Alt $\frac{81}{72}$, hvorfra $\frac{20}{72}$ drages.

Anm: Ogsaa henvise vi til Regnebogen angaaende de ved Subtractionen forekommende Tilfælde, som behandles særskilt efter praktiske Regler, hvilke dog ere begrundede i hvad her er beviist (Regnebog S. 25 o. følg.).

39. Læres. Et heelt Tal multipliceres med en Brøk, ved at multiplicere Tallet med Brøkens Tæller, og dividere med dens Nævner.

Bev. $37 \times \frac{3}{5} = \frac{37 \times 3}{5} = 22\frac{1}{5}$. I Følge § 12 bestaaer Multiplicationen i at gjentage et Tal saamange Gange, som et andet indeholder Enheden. Men, er Multiplicator en Brøk, indeholder den ikke Enheden selv et vist Antal Gange, i Exemplet 3 Gange, men Enheden er deelt i 5 lige Dele og af saadanne Femtedele 3 tagne; vi dele altsaa Multiplicanden 37 i 5 Dele eller dividere den med 5, og tage denne Quotient 3 Gange eller multiplicere med 3.

Till. Er Multiplicator en Brøk, hvis Tæller er 1, vil Multiplicationen med samme skee ved ene at dividere med Nævneren, f. Ex. $340 \times \frac{1}{7} = 340 : 7 = 48\frac{4}{7}$. Denne Regning er saa beqvem, at vi ofte opløse Multiplicator i saadanne

Dele, at de kunne forkortes til Brøker, hvis Tæller er 1. F. Ex. havde vi $\frac{13}{16}$, opløste vi den i $\frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$.

Dog endnu beqvemmere bliver det at ordne disse Dele saaledes, at hver enkelt følgende Brøk ansees som een Deel af den foregaaende, ligesom denne af Eenheden eller af en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere lige med Brøkens Nævner. Dette kaldes at tage i Part, og Regningen udføres, som efterstaaende Exempel viser:

$$\begin{array}{rl} 324 & \times \frac{13}{16} \\ \hline 162 & (8\frac{1}{2} \\ 81 & (4\frac{1}{2} \\ 20\frac{1}{4} & (1\frac{1}{4} \\ \hline 263\frac{1}{4} & \end{array}$$

Her er Brøken $\frac{13}{16}$, ligesom forhen, opløst i $\frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16}$; men 8 er imod 16 $\frac{1}{2}$, saaledes fremkommer den første Part; 4 er atter $\frac{1}{2}$ af 8, altsaa giver $\frac{4}{16}$ den anden Part $\frac{1}{2}$, 1 er $\frac{1}{4}$ af 4, saaledes bliver $\frac{1}{4}$ den tredie Part. Nu multipliceres 324 med $\frac{1}{2}$, d. e. divideres med 2, saaledes fremkommer den første Deel af Productet eller 162; næste Deel, 81, frembringes ved at multiplicere med den anden Part $\frac{1}{2}$, eller dividere 162 med 2; den tredie Deel $20\frac{1}{4}$ fremkommer ved at multiplicere 81 med den tredie Part $\frac{1}{4}$ eller dividere med 4.

Till. 2. Er Multiplicator et blandet Tal, kan den enten forvandles til uegentlig Brøk, og da følges Hovedreglen, eller ogsaa multipliceres med de Hele for sig og dernæst med Brøken, der, som oftest, beqvemt tages i Part.

F. Ex. $1024 \times 13\frac{5}{12}$

$1024 \times 13\frac{5}{12}$		$1024 \times 13\frac{5}{12}$	
161	$\frac{161}{12}$	13	$(4\frac{1}{3}$
1024		13312	$(1\frac{1}{4}$
6144		$341\frac{1}{3}$	
1024		$85\frac{1}{3}$	
$12)164864$		$13738\frac{2}{3}$	
$13738\frac{2}{3}$			

40 Opg. At multiplicere en Brøk med en anden.

Opl. Tæller multipliceres med Tæller, Nævner med Nævner. F. Ex.

$$\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}.$$

Bev. Her er Multiplicator ogsaa en Brøk, der indeholder ikke flere Gange Eenheden, men dens Femtedeel 3 Gange; altsaa skal der først divideres med 5; men dette skeer ved at multiplicere Nævneren (§ 34) med Tallet 5, dernæst skal multipliceres med 3, hvilket skeer ved at multiplicere Tælleren.

Till. 1. Ogsaa kan det her stundom blive beqvemt at tage i Part.

F. Ex. $\frac{15}{28} \times \frac{7}{24}$

	224	$(6\frac{1}{4}$
		$(1\frac{1}{6}$
$\frac{15}{112}$	30	
$\frac{5}{224}$	5	
$\frac{35}{224}$	35	

eller $\frac{5}{32}$.

Till. 2. To blandede Tal eller Brøk og blandet Tal multipliceres, naar de blandede Tal forvandles til uegentlig Brøk, hvorpaa Multiplicationen foretages efter Hovedreglen,

eller ogsaa vil man beqvemt betragte hver af Factorerne som Summer og foretage Multiplicationen efter § 16 Till. 1.

$$16\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{5} = \frac{50}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{50 \times 8}{3 \times 5} = \frac{400}{15} = 26\frac{2}{3}$$

eller

$16\frac{2}{3} \times$	$1\frac{3}{5}$
$16\frac{2}{3}$	$(1\frac{1}{5}$
$3\frac{1}{3}$	$(2$ G.
$6\frac{2}{3}$	
$26\frac{2}{3}$	

Anm. Angaaende de særegne Regler, der i praktisk Henseende blive at anvende, se Regnebogen S. 28 o. følg.

41. Læres. Et heelt Tal divideres med en Brøk, naar Brøken vendes om, d. e. Tæller gjøres til Nævner, og Nævner til Tæller, og dernæst multipliceres.

Bev. $320 : \frac{5}{7} = 320 \times \frac{7}{5}$.

Multiplicere vi næmlig denne Qvotient med Divisor $\frac{5}{7}$, skal blot den ene Factor multipliceres (§ 14). Altsaa anstille vi Prøven paa Divisionens Rigtighed, ved at undersøge, om

$$320 \times (\tfrac{7}{5} \times \tfrac{5}{7}) = 320.$$

Men enhver Brøk, multipliceret med dens omvendte Brøk, frembringer et Product, der er en Brøk, hvori Tæller og Nævner ere ligestore, næmlig her $\frac{7 \times 5}{5 \times 7}$, følgeligen giver et Product liig 1; men saaledes forsvinder den ene Factor, forsaavidt den bliver 1, aldeles, og ene Dividendus bliver tilbage.

Till. 1. Er Divisor et blandet Tal, maa dette først forvandles til uegentlig Brøk, hvorpaa samme vendes om. F. Ex.

$$320 : 2\frac{2}{3} = 320 : \frac{8}{3} = 320 \times \frac{3}{8} = 120.$$

Till. 2. Den omvendte Brøk behandles aldeles som Multiplicator; den kan følgeligen tages i Part.

42. Opg. At dividere en Brøk med en anden.

Opl. Divisor vendes om, hvorpaa multipliceres.

Bev. $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$.

Her vil nemlig ogsaa Divisionen prøves, naar vi multiplicere med Divisor $\frac{2}{3}$; men dette skeer, naar vi multiplicere den ene Factor i Qvotienten $\frac{3}{2}$ med den omvendte $\frac{2}{3}$; men $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$; saaledes fremkommer ogsaa her efter Prøven den oprindelige Dividendus; altsaa er Qvotienten den rigtige.

Till. 1. Divisionen med Brøker vil ogsaa skee ved at dividere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner, naar Divisors Tæller og Nævner gaae op i Dividenden.

F. Ex. $\frac{8}{27} : \frac{2}{3} = \frac{8 \,:\, 2}{27 \,:\, 3} = \frac{4}{9}$

thi, da Multiplicationen med $\frac{3}{2}$ vilde udføres ved at multiplicere Dividenden med 3 og dividere den med 2, og dette kan skee ved at dividere Nævneren med 3 og dernæst dividere Tælleren med 2, indsee vi Rigtigheden af den givne Regel.

Till. 2. Et blandet Tal eller en Brøk divideres med Brøk eller blandet Tal, efter samme Regel, naar vi forandre de blandede Tal til uegentlig Brøk; og i ethvert Tilfælde, om vi end beholde Dividendus uforandret, da den kan betragtes som en Sum, maa Divisor, hvis den er blandet Tal, forandres til uegentlig Brøk, for behørigen at kunne omvendes.

F. Ex. $305\frac{2}{5} : 2\frac{2}{5}$

$$\frac{12}{5}$$

altsaa
$$\begin{array}{r|rl}
305\frac{2}{5} & \times & \frac{5}{12} \\
\hline
 & 20 & (4\frac{1}{3} \\
101\frac{4}{5} & 16 & (1\frac{1}{4} \\
25\frac{9}{20} & 9 & \\
\hline
127\frac{1}{4} & 25 &
\end{array}$$

Anm. Regnebogen S. 32 og følg. vise de praktiske Regler, der skulle iagttages ved Division med Brøk.

43. Forkl. Findes enten i Tæller eller Nævner af en Brøk eller i begge atter Brøk, da opstaaer Brøks-Brøk. F. Ex.

$$\frac{3\frac{1}{3}}{5}; \quad \frac{5}{1\frac{9}{16}}; \quad \frac{5\frac{1}{3}}{9\frac{1}{7}}.$$

Till. Saadanne Brøks-Brøker fremkomme, naar vi stille Divisionen under Brøks Form; de givne Exempler udtrykke saaledes Qvotienterne

$$3\tfrac{1}{3} : 5; \quad 5 : 1\tfrac{9}{16}; \quad 5\tfrac{1}{3} : 9\tfrac{1}{7}.$$

Vi ophæve denne forviklede Form, naar vi multiplicere i Tæller og Nævner med de enkelte Brøkers Nævnere eller med deres Nævneres fælleds delelige Tal; saaledes er

$$\frac{3\frac{1}{3}}{5} = \frac{3\frac{1}{3} \times 3}{5 \times 3} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{1\frac{9}{16}} = \frac{5 \times 16}{1\frac{9}{16} \times 16} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$\frac{5\frac{1}{3}}{9\frac{1}{7}} = \frac{5\frac{1}{3} \times 21}{9\frac{1}{7} \times 21} = \frac{112}{192} = \frac{7}{12}.$$

44. Forkl. Dividere vi en egentlig Brøk i Tæller og Nævner med Tælleren, fremkommer en ny Brøk, liig denne, hvis Tæller er 1, hvis Nævner derimod bliver et heelt Tal og en Brøk; behandle vi denne Brøk atter paa lignende Maade, forandres den til en lignende Brøk, og vi kunne fortsætte denne Regning, indtil vi tilsidst slutte med en Brøk, der har ene et heelt Tal til Nævner. Den saaledes fremkomne Brøks-Brøk, der er liig den oprindelige Brøk, kaldes en Kjædebrøk.

F. Ex. $\frac{114}{347}$.

Dividere vi med 114 i Tæller og Nævner, faaes

$$\frac{114}{347} = \frac{1}{3\frac{5}{114}}.$$

Paa lignende Maade findes

$$\frac{5}{114} = \frac{1}{22\frac{4}{5}}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{1\frac{1}{4}}$$

Vi kunne saaledes sætte

$$\frac{114}{347} = \cfrac{1}{3\cfrac{1}{22\cfrac{1}{1\frac{1}{4}}}}$$

hvilken Kjædebrøk vi dog almindeligen give følgende Form:

$$\frac{114}{347} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$$

Till. En saadan Kjædebrøk kan anvendes til at udtrykke tilnærmende den forelagte Brøk; tage vi nemlig $\frac{1}{3}$, da bortkaste vi Brøkdelen i Nævneren, og faae saaledes en Værdi, der er noget for stor; bortkaste vi i det næste Leed atter Brøken, faae vi dette Leed lidet for stort, altsaa vil

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22}}$$

vel nøiagtigere udtrykke Brøken $\frac{114}{347}$ end $\frac{1}{3}$, dog være noget for liden, da Nævneren her er for stor; tage vi eet Leed til, faae vi en større Nøiagtighed; men, da vi her forøge Nævneren af $\frac{1}{22}$ med noget formeget, faae vi denne for liden, altsaa bliver

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1}}}$$

vel endnu nærmere, end de to foregaaende, men større end Hovedbrøken $\frac{114}{347}$.

Disse enkelte Brøker kaldes *Partialbrøker*, og vi indsee i Almindelighed, at enhver følgende Partialbrøk udtrykker Hovedbrøken nøiagtigere end den foregaaende, at endvidere den første, tredie, femte o. s. v. ere større, anden, fjerde, sjette o. s. v. mindre end Hovedbrøken.

Værdien af Partialbrøkerne finde vi, saavidt de ere Brøks-Brøker, efter § 43 Till., ved at multiplicere Tæller og Nævner i hvert Leed nedenfra med Ledets Nævner; saaledes er

$$\frac{1}{3+\frac{1}{22}} = \frac{22}{67}$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{23}} = \frac{23}{70}.$$

Altsaa ere Partialbrøkerne, sammenlignede med Hovedbrøken, følgende:

$$\frac{1}{3} - \frac{114}{347} = \frac{5}{1041}$$
$$\frac{114}{347} - \frac{22}{67} = \frac{4}{23249}$$
$$\frac{23}{70} - \frac{114}{347} = \frac{1}{24290}.$$

Anm. Regningen, som her bliver at foretage, udføres lettest paa samme Maade, som er viist ved at søge fælleds Maal, kun opskrives Qvotienterne her, da samme ere de hele Tal, der fremkomme i Nævnerne. F. Ex. $\frac{114}{347}$.

		Qvotienter.
114	347	3, 22, 1, 4
110	342	
4	5	
4	4	
	1	

Kjædebrøken bliver nu den forhen anførte, og Partialbrøkerne dannes let

$$\underbrace{3}_{\frac{1}{3}} \quad \underbrace{22}_{\frac{22}{67}} \quad \underbrace{1}_{\frac{23}{70}} \quad \underbrace{4}_{\frac{114}{347}}$$

Den sidste er Hovedbrøken, og den 3die er dannet af de foregaaende, ved for den tredie at multiplicere den anden $\frac{22}{67}$ i Tæller og Nævner med det tredie hele Tal 1 og føie hertil Tæller og Nævner af den første Brøk; ligeledes for den fjerde, ved at multiplicere Tæller og Nævner af tredie Brøk med det fjerde hele Tal (4) og dertil føie Tæller og Nævner af den anden Brøk; nemlig:

$$4 \times 23 + 22 = 114$$
$$4 \times 70 + 67 = 347.$$

Hvis vi tænkte os endvidere foran en Partialbrøk $\frac{0}{1}$, vilde selv den anden dannes paa lignende Maade af den første og den tilføiede Brøk $\frac{0}{1}$. Den andens Tæller og Nævner bliver nemlig:

Tæller $22 \times 1 + 0 = 22$

Nævner $22 \times 3 + 1 = 67$

Brøken altsaa $\frac{22}{67}$.

Andet Exempel $\frac{4109}{13601}$.

		Qvotienter.
4109	13601	3, 3, 4, 2, 3, 1, 1, 2
3822	12327	
287	1274	
252	1148	
35	126	
21	105	
14	21	
14	14	
0	7	

Heraf dannes Partialbrøkerne:

$$\frac{0}{1} \quad \underbrace{3}_{\frac{1}{3}} \quad \underbrace{3}_{\frac{3}{10}} \quad \underbrace{4}_{\frac{13}{43}} \quad \underbrace{2}_{\frac{29}{96}} \quad \underbrace{3}_{\frac{100}{331}} \quad \underbrace{1}_{\frac{129}{427}} \quad \underbrace{1}_{\frac{229}{758}} \quad \underbrace{2}_{\frac{587}{1943}}$$

Den sidste er liig Hovedbrøken, den lader sig forkorte med 7.

45. Forkl. Brøker, som have til Nævner 10, 100 eller overhovedet hvilketsomhelst Tal, hvis første Ciffer er 1, de følgende Nuller, kaldes **Decimalbrøker.** F. Ex. $\frac{3}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{3576}{1000}$, $\frac{9}{10000}$.

Till. 1. Enhver saadan Brøk skrives beqvemt ved ene at opskrive Tælleren, afskære i samme ved et Komma saamange Ciffre, som der findes Nuller i Nævneren, der udelades; eller, hvis Tælleren har et mindre Antal Ciffre, sætte Nuller foran, saa at stedse saamange Ciffre komme bag Komma, som der er Nuller i den udeladte Nævner. Er nu endvidere i sidste Tilfælde intet Ciffer foran Komma, eller ligeledes, hvis Tælleren havde samme Antal Ciffre, som Nævneren har Nuller, sættes endnu foran et 0. Altsaa

$$\frac{3}{10} = 0{,}3$$
$$\frac{17}{100} = 0{,}17$$
$$\frac{3576}{1000} = 3{,}576$$
$$\frac{9}{10000} = 0{,}0009.$$

Till. 2. De Ciffre, der i en saaledes skreven Decimalbrøk staae efter Komma, kaldes **Decimaler**, og et saadant Tal, bestaaende af Decimaler, eller ogsaa af Hele og Decimaler, kaldes et **Decimaltal.**

Till. 3. Betragte vi nærmere et saadant Decimaltal, f. Ex. 398,79063

finde vi, at, ligesom de Hele ere skrevne fra Høire til Venstre, overeensstemmende med Titalssystemet, saa at paa Enernes Classe følger den ti Gange saa høie Classe af Tiere, dernæst Hundredernes Classe o. s. v. eller, hvis vi omvendt gaae nedad, paa enhver høiere Classe følger en 10 Gange lavere, fortsættes i Decimaltallene samme System ud over Komma. Det første Decimal er nemlig Tiendedele, det andet er Hundrededele, det tredie Tusinddele o. s. v.

Till. 4. Vi kunne føie til Høire af et Decimaltal eet eller flere Nuller, uden at forandre dettes Værdi.

Anm. Ifølge Vedtægt sættes et Komma, hvor Decimalerne begynde. Vi kunne dog dertil vælge et hvilketsomhelst andet Tegn; saaledes bruges ofte ikkun Punctum (.). I enkelte nyere Skrifter findes Decimalerne betegnede med mindre Ciffre, hvilket er ret hensigtsmæssigt. F. Ex. 398,19063. Englænderne udelade ofte Nullet og skrive saaledes 0,0097 = .0097.

46. Opg. At forvandle sædvanlig Brøk til Decimalbrøk.

Opl. Nævneren divideres i Tælleren, hvortil føies Nuller. Det udkommende Decimaltal gives saa mange Decimaler, som der ere tilføiede Nuller.

F. Ex. $\frac{7}{32}$.

32)70 | 21875
64
60
32
280
256
240
224
160
160
0

$\frac{7}{32} = 0{,}21875.$

Bev. $\frac{7}{32} = \frac{7 \times 100000}{32 \times 100000} = \frac{700000}{32 \times 100000}$
$= \frac{21875}{100000} = 0{,}21875.$

Till. 1. De færreste Brøker lade sig nøie forvandle til Decimalbrøk; tage vi saaledes den simple Brøk $\frac{1}{3}$, finde vi ved Division

3)10000
3333

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$

men, da samme Rest 1 stedse fremkommer, vil Divisionen, om end flere Nuller tilføies, bestandigt give samme Ciffer 3 i Qvotienten.

Endvidere ville vi udregne Exemplet

$\frac{3}{11}$)30 | 27
22
80
77
3.

Her kommer altsaa det første Tal atter frem som Rest, og

$\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$

Ligeledes findes

$\frac{13}{101} = 0{,}12871287$

Endvidere bliver

$\frac{7}{12} = 0{,}583333\ldots$

$\frac{1}{296} = 0{,}003378378.$

Alle disse Decimaltal kalde vi *periodiske Decimalbrøker* eller *Decimaltal*, og, eftersom Perioden bestaaer af 1, 2, 3 ... Ciffre, kalde vi dem *eenciffrede*, *tociffrede*, *treciffrede* periodiske Decimaltal. I de to sidste Exempler bemærke vi, at Perioden begynder ikke umiddelbart efter Komma, men ved $\frac{7}{12}$, der giver et eenciffret periodiskt Decimaltal, først med det tredie Ciffer, ved $\frac{1}{296}$, der giver et treciffret periodiskt Decimaltal, først med det fjerde Ciffer.

Till. 2. Ihvorvel en given Brøk saaledes ofte ikke lader sig nøiagtigt udtrykke med et Decimaltal, vil man dog tilnærmende stedse kunne udtrykke samme saa nøiagtigt, som Regningen byder. Sætte vi saaledes

$$\tfrac{13}{101} = 0,1287$$

altsaa afbryde ved det 4de Decimal, da kan Feilen ikke være $\frac{1}{10000}$; thi det sidste Decimal maatte da være større eller mindre; tage vi eet Decimal til, er Feilen ikke $\frac{1}{100000}$; tages 6 Decimaler, er Feilen ikke $\frac{1}{1000000}$.

Indskrænke vi os saaledes til et bestemt Antal Decimaler, ville vi, hvis det første af de bortkastede er 5 eller derover, forhøie det sidste Decimal 1; vi komme nemlig saaledes Sandheden nærmere. F. Ex. Vi sætte

$$\tfrac{13}{101} = 0,128713$$

hellere end

$$= 0,128712$$

thi Forskjellen mellem det første Decimaltal og Brøken er

$$0,0000001287\ldots$$

mellem Brøken og det andet

$$0,0000008712\ldots$$

47. Opg. At forvandle en Decimalbrøk til sædvanlig Brøk.

Opl. I. Er Decimalbrøken endelig, skrives den under sædvanlig Brøks Form, hvorpaa undersøges, om den kan forkortes.

F. Ex. $0,21875 = \frac{21875}{100000} = \frac{7}{32}$.

II. Er Decimalbrøken periodisk, og begynder Perioden umiddelbart efter Komma, tages Periodens Ciffre som Tæller, som Nævner 9, 99, 999 ... eller et Tal, hvori findes Ciffret 9 saamange Gange, som Perioden har Ciffre. Derpaa undersøges, hvorvidt kan forkortes.

F. Ex. $0,272727\ldots = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

III. Begynder Perioden ikke umiddelbart efter Komma, fortsættes den tilbage til Komma; vi finde saaledes en periodisk

Decimalbrøk, som udgjør med den givne en Sum eller Differents, der er en endelig Brøk; men, forvandle vi nu denne, ligesom den periodiske Decimalbrøk, til sædvanlig Brøk, finde vi let enten, ved at subtrahere eller addere, den givne Brøks Værdi. F. Ex.

$$0,003\,378\,378\ldots$$

Perioden, fortsat tilbage til Komma, giver

$$0,378\,378\,378.$$

Men, drage vi herfra den oprindelige Brøk, som vi ville kalde B, have vi 0,375. Altsaa er omvendt

$$\begin{aligned} B &= 0,378\,378\,378 - 0,375 \\ &= \tfrac{378}{999} - \tfrac{375}{1000} \\ &= \tfrac{14}{37} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{296} \end{aligned}$$

Ligeledes er

$$\begin{aligned} 0,583333\ldots &= 0,25 + 0,333333\ldots \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}. \end{aligned}$$

Bev. Opløsningen I følger ligefrem af Decimaltallenes Omskrivning til sædvanlig Brøk og sammes Forkortning.

II beroer derimod paa følgende

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{9} &= 0,11111\ldots \\ \tfrac{1}{99} &= 0,01\,01\,01\,01\ldots \\ \tfrac{1}{999} &= 0,001\,001\,001\,001\ldots \text{ o.s.v.} \end{aligned}$$

altsaa giver $\frac{1}{9}$ en periodisk eenciffret Decimalbrøk, hvis Ciffer i Perioden er 1, $\frac{1}{99}$ giver Ciffrene 01, $\frac{1}{999}$ Ciffrene 001. Saaledes lader den periodiske Decimalbrøk sig stedse ansee, som een af hine Brøker, multipliceret med et Tal, der altsaa bliver Tælleren, medens 9, 99, 999 blive Nævneren.

III. At en periodisk Decimalbrøk, hvis Periode ikke begynder umiddelbart efter Komma, er liig Summen eller Differentsen af en endelig og en periodisk Decimalbrøk, er allerede ved selve Opløsningen behørigen oplyst.

48. Opg. At addere Decimaltal.

Opl. Komma skrives under Komma, og derpaa adderes efter Reglerne for hele Tal. I Summen stilles Kommaet under Addendernes Komma.

F. Ex. 3,8047 + 2,705 + 0,004326 + 307 + 0,481

```
  3,8047
  2,705
  0,004326
307
  0,481
313,995026.
```

Addenden 307, der ene bestaaer af Hele, stilles med sidste Ciffer umiddelbart før Komma.

Bev. Ligesom ved hele Tal Enere stilles under Enere, Tiere under Tiere, Hundreder under Hundreder, ere her Tiendedele stillede under Tiendedele, Hundrededele under Hundrededele o. s. v. og saaledes Decimaltallenes eensartede Dele adderede.

49. Opg. At subtrahere Decimaltal.

Opl. Komma stilles under Komma; er i Minuendus et mindre Antal Decimaler, end i Subtrahenden, tilføie vi eller tænke vi tilføiede saamange Nuller, at Decimalernes Antal bliver lige, hvorpaa Subtractionen skeer efter de sædvanlige Regler for hele Tal. F. Ex.

I. 3,8072 — 1,467

```
1,467
2,3402
```

II. 3,807 — 0,98635

```
0,98635
2,82065.
```

Bev. Her bleve ogsaa de eensartede Dele stillede under hinanden, hvorved Subtractionen kunde foretages efter Reglerne for hele Tal.

Till. Vi kunne foretage Subtractionen ved at tage det saakaldte d e k a d i s k e C o m p l e m e n t til Subtrahenden, d. e. drage denne fra 1, 10, 100 ..., derpaa addere og tilsidst drage 1, 10, 100 fra, eftersom til hvilket af disse Tal Complementet er taget. Exemplet II regnes saaledes

```
  3,807
  0,01365   (= 1 — 0,98635)
  3,82065
— 1
  2,82065.
```

Denne Regning medfører især Lettelse, naar to Decimaltal skulle adderes og derfra drages eet eller flere, eller ogsaa fra eet to eller flere drages. De dekadiske Complementer henskrives da ligesaa let, som Tallene selv. F. Ex.

I. 0,301030 + 0,447122 — 0,287915

```
0,301030
0,447122
0,712085 — 1
0,460237.
```

Her er under Optællingen bortkastet 1, der skulde fradrages.

Ofte tages det dekadiske Complement til 10, selv naar ingen Hele ere tilstede; de 10, som skulle subtraheres, henskrives da aldeles ikke, fordi man ikke vil kunne oversee at fradrage samme, uden strax at mærke det urigtige Facit.

F. Ex. 0,698479 + 0,263471 — 0,401832 — 0,069712

```
0,698479
0,263471
9,598168
9,930288
0,490406.
```

50. Opg. At multiplicere Decimaltal.

Opl. Der multipliceres uden Hensyn til Komma; i det Udkomne sættes ligesaa mange Decimaler, som i begge Factorer.

F. Ex. $3,84 \times 0,321$

```
   384
   321
   ---
   384
  768
 1152
 -------
 1,23264
```

Bev. Skrive vi Decimaltallene som sædvanlige Brøker, have vi $3,84 \times 0,321 = \frac{384}{100} \times \frac{321}{1000} = \frac{384 \times 321}{100 \times 1000} = \frac{123264}{100000} = 1,23264$. Multiplicationen er her foretagen efter de sædvanlige Regler for Brøkers Multiplication; men Productet af Nævnerne maa give et Tal med Nuller, som atter bestemmer Antallet af Decimalerne i Productet, lige med Antallet af begge Factorernes Decimaler.

51. Opg. At dividere Decimaltal.

Opl. Man efterseer først, om Dividendus har samme eller et større Antal Decimaler, end Divisor; hvis ikke, giver man den, ved at tilføie Nuller, i det Mindste ligesaa mange Decimaler. Divisionen skeer nu, som med Hele, medens man intet Hensyn tager til Komma, og i Qvotienten bliver hele Tal, hvis der ere lige mange Decimaler i Dividendus og i Divisor; eller man faaer saamange Decimaler, som Dividendus har flere end Divisor.

F. Ex. $0,0324 : 1,8$

```
18) 324
   -----
   0,018.
```


II. $0,76 : 0,0475$

$0,76 = 0,7600$

```
475)7600 | 16
    475
    ----
    2850
    2850
    ----
       0
```

Qvotienten er her 16.

Bev. Divisionen med Brøker vil kunne foretages efter § 42 Till. 1. Altsaa, hvis vi skrive Decimaltallene under sædvanlig Brøks Form, er

$0,0324 : 1,8 = \frac{324}{10000} : \frac{18}{10} = \frac{324 : 18}{10000 : 10} = \frac{18}{1000} = 0,018.$

I det andet Tilfælde vil saadan Division ikke kunne skee, med mindre vi give Dividenden i det Mindste en ligesaa stor Nævner, som Divisor, altsaa

$0,76 : 0,0475 = \frac{76}{100} : \frac{475}{10000} = \frac{7600}{10000} : \frac{475}{10000} = \frac{7600 : 475}{10000 : 10000} = \frac{16}{1} = 16.$

Till. Forsaavidt en Division ikke gaaer op, vil man i Dividendus kunne tilføie Nuller, indtil Divisionen enten gaaer op, eller man faaer et saa tilnærmende Resultat, som man ønsker.

F. Ex. $0,027 : 3,84$

```
3,84)0,02700 | 703125
       2688
       ----
        1200
        1152
        ----
          480
          384
          ---
          960
          768
          ----
          1920
          1920
          ----
            0.
```

Her er, med de tilføiede Nuller, i Alt 10 Decimaler i Dividenden, 2 i Divisor; altsaa faaer Qvotienten 8 Decimaler eller bliver 0,00703125.

II. 3,84 : 0,027

$$\begin{array}{r} 0{,}027)3{,}840 \mid 142\ldots \\ 27 \\ \hline 114 \\ 108 \\ \hline 60 \\ 54 \\ \hline 6. \end{array}$$

Her see vi, at en fortsat Regning vil give bestandigen Ciffret 2; altsaa er Qvotienten

142,222 .....

Anm. Vi have ovenfor seet, at mangfoldige Decimaltal fremkomme, som ikke ere absolut nøiagtige, men kunne feile indtil $\frac{1}{2}$ i sidste Decimal. Naar Regningen skeer med disse, faaer Facit ogsaa kun en tilnærmende Nøiagtighed, og Feilen i sidste Decimal kan ofte virke endog paa flere Decimaler i Facit. F. Ex.

$0{,}477121 \times 0{,}387249.$

Antage vi her, at disse Decimaltal ere i sidste Decimal usikkre, hvorfor vi ville betegne dette med *1* og *9*, saa vil Multiplicationen give følgende Tal usikkre.

$$\begin{array}{r} 0{,}47712\mathit{1} \\ 0{,}38724\mathit{9} \\ \hline \mathit{4294089} \\ 190848\mathit{4} \\ 95424\mathit{2} \\ 333984\mathit{7} \\ 381696\mathit{8} \\ 143136\mathit{3} \\ \hline 0{,}18476\mathit{4630129} \end{array}$$

Af dette Product er saaledes kun de fem første Decimaler paalidelige, og vi besvære Regningen uden Nytte ved at angive de øvrige.

Man har derfor anvendt en forkortet Multiplicationsmethode, i Følge hvilken Stykket udføres saaledes:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{r} 0{,}4\dot{7}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{1} \\ 0{,}387249 \\ \hline 0{,}1431363 \\ 381697 \\ 33398 \\ 954 \\ 191 \\ 42 \\ \hline 0{,}1847645 \end{array}$$

Regningen afviger fra den sædvanlige, først ved at der er begyndt med det forreste Decimal af Multiplicator (3), dernæst er multipliceret med det andet Ciffer 8; men, førend dette skeer, udstryges sidste Decimal af Multiplicandus (hvilket betegnes enten med en Streg over Ciffret, eller, som her, med en Prik); dog tages der Hensyn til samme, forsaavidt derved bestemmes hvad, der skal tages in mente. I Exemplet fremkommer af det udslettede 1 saaledes 8, hvilket ikke giver Noget in mente; dog, da 8 er nærmere 10 end 0, lægge vi 1 til og saaledes overhovedet stedse 1, naar det Tal, der skal bortkastes, er 5 eller derover. Inden Multiplicationen med 3de Decimal eller 7, udstryges 2 i Multiplicandus, dog giver dette $2 \times 7 = 14$, altsaa 1 in mente. Regningen fortsættes videre. Komma sættes enten strax, da saa de Decimaler af Multiplicator, der endnu ikke ere anvendte, ikke regnes med, eller tilsidst, hvor da de udstrøgne Decimaler af Multiplicanden ikke regnes.

$$\text{II.}\quad \begin{array}{r} 0{,}5\dot{3}\dot{8}\dot{4}\dot{6}\dot{2} \\ 0{,}428571 \\ \hline 2153848 \\ 107692 \\ 43077 \\ 2692 \\ 377 \\ 5 \\ \hline 0{,}2307691 \end{array}$$

Hvor nøiagtigt Productet her er fundet, vil sees deraf, at Multiplicandus er $\frac{7}{13}$ forvandlet til Decimalbrøk, Multiplicator $\frac{3}{7}$, Productet altsaa $\frac{3}{13}$; men, forvandles denne til Decimalbrøk, faae vi

$$\tfrac{3}{13} = 0,2307692.$$

Den forkortede Multiplication giver altsaa alle de Decimaler, hvorpaa man kan stole, nøiagtige og har endvidere den Fordeel, at den ikke giver Skin af en Nøiagtighed, som Regningen i det Virkelige ikke har.

Vi anvende paa lignende Maade en forkortet Division.

I. 5,83447 : 0,91836

0,91836)583447 | 6,3531
551016
32431
27551
4880
4592
288
275
13
9
4

Her ere ogsaa efterhaanden Decimalerne udstrøgne i Divisor, og Multiplicationen af samme med Qvotientens enkelte Ciffre foretagen efter de forhen givne Regler.

II. 1 : 3,141593

3,141593)1,0000000 | 0,3183098
9424779
575221
314159
261062
251327
9735
9425
310
283
27
25
2

Qvotienten er 0,3183099, da sidste Ciffer forhøies 1, formedelst Resten, der viser at den Deel, der bortkastes, er over $\frac{1}{2}$.

Her tilføiedes først 7 Nuller til Dividendus, inden Divisionen foretoges.

III. 174,31078 : 23,837

23,837)174,31078 | 7,3126
166859
7451
7151
300
238
62
48
14
14
0

Her ere de to sidste Decimaler aldeles ikke komne i Brug; de have heller ikke nogen Indflydelse paa Qvotienten, forsaavidt vi antage sidste Ciffer i Divisor usikkert; man havde derfor kunnet sætte fra Begyndelsen Dividenden liig 174,311 og havde da faaet samme Resultat.

Komma sættes, som anført, efter de sædvanlige Regler, enten først eller sidst; kunne disse ofte ikke ligefrem anvendes, vil dette dog være af mindre Betydning, forsaavidt en Regning med de første Ciffre stedse giver et omtrentligt Resultat, og vi altsaa let undgaae at sætte Komma paa et urigtigt Sted, da dette, ved at stilles blot eet Ciffer for langt frem eller tilbage, gav et 10 Gange mindre eller større Facit. Vi ville saaledes i sidste Exempel strax see, at Divisor, der omtrent e 24, vil indeholdes 7 Gange i Dividendus; men Kommaet, henstillet, enten foran 7 eller efter 3, vilde gjøre Facit 10 Gange mindre eller større, end det i Følge dette foreløbige Overslag kunde være.

52. Forkl. De Talstørrelser, vi hidindtil have betragtet, kaldes Cifferstørrelser, forsaavidt de betegnedes med Ciffre, der bestandigen indeholde et vist Antal Eenheder; f. Ex. 7 betegner stedse 7 Eenheder. Men vi kunne ogsaa betegne Talstørrelser med almindelige Taltegn, f. Ex. Bogstaverne a, b, c ... af hvilke hvert, saasom a, i een Regning kan betyde et vist Antal Eenheder, i en anden Regning et andet Antal. Forsaavidt Størrelserne ere betegnede paa saadan Maade, kaldes de **Bogstavstørrelser**, da Bogstaver, især af det lille latinske Alphabet, bruges som saadanne **almindelige Taltegn**.

Till. 1. Bogstaverne have ingen særskilt forhøiet eller formindsket Værdi, efter den Plads, hvorpaa de staae; de henhøre saaledes hverken til det dekadiske eller noget andet Talsystem.

Till. 2. Vi kunne derfor ved Bogstaver betegne een Regningsart ved at sætte dem umiddelbart paa hinanden; saaledes antydes Multiplicationen, i det vi, i Stedet for $a \times b$ eller $a . b$, skrive ab.

Till. 3. Ogsaa naar et med Ciffre udtrykt Tal er multipliceret med en Bogstavstørrelse, skrives disse to Factorer umiddelbart paa hinanden, dog saaledes, at Cifferstørrelsen stilles stedse foran Bogstavet; f. Ex.

$$7 \times a = 7a.$$

En Cifferstørrelse, der staaer foran en Bogstavstørrelse, kaldes dennes **Coefficient**.

Till. 4. Have vi et Product, bestaaende af flere ligestore Factorer, ville vi betegne et saadant Product kortere, ved at skrive Factoren blot een Gang, og med et lidet Ciffer til Høire, der kaldes **Exponenten**, antyde, hvormange Gange Factoren fandtes i Productet. F. Ex.

$$a \times a \times a \times a = aaaa = a^4.$$

Samme Betegnelsesmaade anvendes ogsaa ved Cifferstørrelser, f. Ex.

$$7 \times 7 \times 7 = 7^3.$$

Et saadant Product kalde vi en **Potens** og Tallet til Høire, som forhen nævnt, **Potensens Exponent**: a^4 er saaledes den 4de Potens af a, og 4 sammes Exponent,

$7^3 = 343$ er 3die Potens af 7, og 3 er Potensens Exponent.

53. Forkl. De Størrelser, vi hidindtil have betragtet, vare endvidere, forsaavidt de lode sig henføre til samme Eenhed, **overeensstemmende**; sammenlagte, forøge de hinanden; men vi have Størrelser, der ere **modsatte**, og hvor den ene, føiet til den anden, aldeles forsvinder og tillige berøver den anden saamange Eenheder, som den selv havde. F. Ex. 18 Rbd. Indtægt og 13 Rbd. Udgift have vel samme Eenhed 1 Rbd; men, samle vi begge, forsvinde de 13 Rbd. Udgift, og 5 Rbd. Indtægt blive tilbage. Det Antal Fod et Legeme stiger, er en Størrelse, modsat Antallet af Fod, det daler. Udgaae vi paa Thermometret fra det Punct, der svarer til smæltende Iis (Frysepunctet), blive Varmegraderne, eller Graderne over dette Punct, modsatte Kuldegraderne under samme.

Till. 1. En saadan modsat Størrelse kan stedse antages at fremkomme ved en Subtraction. For i et Regnskab at finde Kassebeholdningen, drage vi Udgiften fra Indtægten; men, er hiin større end denne, kunne vi ene antyde, at en saadan Subtraction skal skee, i det vi betegne det, som Udgiften overskrider Indtægten, med —. F. Ex. er Indtægten 700 Rbd. og Udgiften 914 Rbd., og vi spørge, hvor stor er Kassebeholdningen, faae vi —214 Rbd. ɔ: der bliver af Udgiften 214 Rbd. tilovers, som skulde fradrages, hvis Indtægten havde tilladt det.

En saadan Størrelse, betegnet med —, kaldes en **negativ** Størrelse, i Modsætning til de andre Størrelser, som kaldes positive, og som betegnes med +.

Till. 2. Ligesom to positive Størrelser ere overeensstemmende, ere to negative det ogsaa. F. Ex. en Kassebeholdning af —214 Rbd. eller 214 Rbd. Underballance er overeensstemmende med en anden Kassebeholdning af -117 Rbd. eller 117 Rbd. Underballance.

Till. 3. De negative Størrelser maae stedse betegnes med $-$; ved de positive Størrelser udelades derimod Tegnet $+$ ofte, saaledes i Begyndelsen af Linien eller efter Liigheds-Tegnet.

54. Forkl. Bogstavstørrelser ere kun at ansee, som eensartede, naar de bestaae af samme Bogstaver eller samme Producter af Bogstaver; de kunne altsaa kun i Tegn eller Coefficienter være forskjellige. F. Ex. $-3a$ og $+7a$ ere eensartede, men ikke $-3a^2$ og $7a^3$; $5cd$ er eensartet med $-7dc$; thi Producterne cd og dc ere de samme; Factorernes Orden er blot forskjellig.

Till. For med Lethed at oversee, om to Producter af Bogstavstørrelser ere eensartede, ordner man i Almindelighed Factorerne efter Bogstavernes alphabetiske Orden. F. Ex. man skriver hellere $-7cd$ end $-7dc$.

55. Opg. At addere eensartede Bogstavstørrelser.

Opl. Have de samme Tegn, adderes Coefficienterne, og det Udkomne faaer det fælleds Tegn; have de forskjelligt Tegn, subtraheres de; ere de ligestore, ophæve de hinanden, ere de uligestore, faaer det Udkomne det Størres Tegn.

Exempel. $8e-4e+7e-11e=0$.
Her udgjøre $8e$, dertil lagt $-4e$, $+4e$, dette og $+7e$ udgjøre $+11e$, hertil $-11e$ er 0.

Bev. De eensartede Størrelser ere adderede efter de sædvanlige Additions-Regler; de modsatte Størrelser ere fradragne, hvilket følger af deres Begreb (§ 53).

Till. 1. Ere Størrelser ueensartede, kunne de ene med

deres Tegn stilles ved Siden af hinanden. F. Ex. $3g$, dertil lagt $-7h^2$, udgjør $3g-7h^2$.

Till. 2. Have vi Addender, bestaaende af flere med $+$ og $-$ forbundne Dele (Leed), ville vi først, saavidt som muligt, stille de eensartede Leed under hinanden og derpaa addere. F. Ex.

$(7x-6y-g+5z)+(-x-3y-g)+(-x+7g+y-3z)+(2x+3y+3z-g)+(x+8y+g-5z)$.

Dette opstilles nu saaledes:

$$\begin{array}{r}
7x-6y-g+5z\\
-x-3y-g\\
-x+y+7g-3z\\
2x+3y-g+3z\\
x+8y+g-5z\\
\hline
8x+3y+5g
\end{array}$$

Cifferstørrelser med $+$ og $-$ adderes som Coefficienter, hørende til eet Bogstav, og kunne vilkaarligen ordnes. F. Ex.

$$\begin{array}{rcr}
-13+5-7+8 & = & -7\\
-4-6+9+13 & = & 12\\
11+2-8-1 & = & 4\\
\hline
-6+1-6+20 & = & 9
\end{array}$$

56. Opg. At subtrahere Bogstavstørrelser.

Opl. Tegnet i Subtrahendus forandres til det modsatte, derpaa adderes den til Minuendus. Altsaa:

$$+5a-(+3a)=+5a-3a=+2a$$
$$+5a-(-3a)=+5a+3a=+8a$$
$$-5a-(+3a)=-5a-3a=-8a$$
$$-5a-(-3a)=-5a+3a=-2a$$

Bev. Vi kunne sætte Minuendus

$$+5a=+5a+3a-3a$$
$$-5a=-5a+3a-3a$$

Drage vi nu i første Tilfælde $+3a$ bort, faae vi $5a - 3a$; i andet Tilfælde fradrage vi $-3a$, der bliver altsaa tilbage $5a + 3a$; ligeledes indsees Rigtigheden af den i tredie og fjerde Tilfælde brugte Fremgangsmaade.

Till. 1. Er Intet, hvorfra Subtrahendus kan drages, sættes den ned med sit forandrede Tegn.

Till. 2. Bestaaer Minuendus og Subtrahendus af flere Leed, ordnes de, saa at eensartede Størrelser komme til at staae under hinanden, hvorpaa Tegnene i Subtrahendus forandres; dernæst adderes. F. Ex.

$$-a - 5b - 7c - d - (4b + 2d - 3c + 3k)$$

$$\begin{array}{r} -a - 5b - 7c - d \\ 4b - 3c + 2d + 3k \\ - \quad + \quad - \quad - \\ \hline -a - 9b - 4c - 3d - 3k \end{array}$$

57. Grundf.

Eenheden er stedse at ansee som positiv.

Till. Et negativt Tal, f. Ex. -3, kan derfor ikke ansees som umiddelbart fremkommet af Eenheden; men ved at addere det Modsatte af Eenheden -1 nogle Gange til sig selv; saaledes er -3 fremkommen ved at føie -1 til -1 og atter dertil -1.

58. Opg.

At multiplicere Bogstavstørrelser, som dog ikke bestaae af flere Leed, med hinanden.

Opl. Reglen for Tegnene er: samme Tegn give $+$, modsatte Tegn give $-$; Coefficienterne multipliceres, og Bogstaverne stilles enten ved Siden af hinanden eller trækkes sammen ved Exponenter. F. Ex. $3a \times 5b = 15ab$; $-3a \times b = -3ab$; $5a^2 \times -2b = -10a^2b$; $-a^2 \times -7ab = 7a^3b$.

Bev. Reglen for Tegnene kræver nærmest Beviis. Vi

ville, for at godtgjøre samme, ene tage Cifferstørrelser og have saaledes

$$+5 \times +3 = +15$$
$$-5 \times +3 = -15$$
$$+5 \times -3 = -15$$
$$-5 \times -3 = +15$$

De to første Tilfælde godtgjøres let; thi, da Multiplicator indeholder Eenheden 3 Gange, fremkommer Productet aldeles ligefrem ved at addere Multiplicanden 3 Gange; det faaer saaledes samme Tegn, som denne, bliver altsaa i første Tilfælde positivt, i andet negativt. Er Multiplicator derimod -3, er samme fremkommen af Eenheden (§ 57 Till.) ved at tage det Modsatte af denne -1 og lægge den et vist Antal Gange sammen; vi maae altsaa paa lignende Maade tage det Modsatte af Multiplicandus og addere den samme Antal Gange; saaledes maae vi i første Tilfælde addere -5 trende Gange, Productet bliver altsaa -15, i andet Tilfælde det Modsatte af -5, altsaa $+5$, saa at Productet bliver $+15$.

Paa en anden Maade oplyses vi om Rigtigheden af denne Regel. Antage vi, at den negative Størrelse er fremkommen ved en Subtraction, sætte altsaa f. Ex. Multiplicator $-3 = 6 - 9$, vil $+5 \times -3 = +5 \times (6-9)$. Men, gaae vi ud fra Productet 5×6, ville vi indsee, at, for hver Eenhed vi formindske Multiplicatoren, vil Productet blive 5 mindre, saasom $5 \times (6-1) = 5 \times 6 - 5$; $5 \times (6-2) = 5 \times 6 - 5 \times 2$; paa samme Maade maa $5 \times (6-9)$ blive liig $5 \times 6 - 5 \times 9 = 30 - 45 = -15$.

Paa samme Maade indsee vi, efter at vi have godtgjort, at $-5 \times +3 = -15$, at $-5 \times -3 = +15$; thi, sætte vi $-5 \times -3 = -5 \times (6-9)$, og gaae her ud fra Productet $-5 \times 6 = -30$, indsee vi, at, for hver Eenhed Multiplicator bliver mindre, maa $-5 \times 1 = -5$ fradrages, d. e. (§ 56) $+5$ lægges til; saaledes er $-5 \times (6-1) = -30 - (-5 \times 1) = -30 - (-5) = -30 + 5 = -25$; $-5 \times (6-2) = -5 \times 6 - (-5 \times 2) = -30 + 10 = -20$ o. s. v.; altsaa vil ligeledes $-5 \times (6-9) = -5 \times 6 + 5 \times 9 = -30 + 45 = +15$.

Hvad Coefficienterne og Bogstaverne angaaer, indsees Rigtigheden af sammes Behandling umiddelbart af det Foregaaende (§ 52 Till. 3 og 4).

Till. Har enten Multiplicanden flere Leed, eller baade Multiplicanden og Multiplicator, ville de være at betragte som Summer, og altsaa maa hvert Leed af Multiplicanden multipliceres med hvert Leed af Multiplicator; de enkelte Producter adderes derpaa. F. Ex.

I. $(6a + 3b - 5f) \times 5g$

$$\begin{array}{l} 6a + 3b - 5f \\ \underline{5g \qquad\qquad\qquad} \\ 30ag + 15bg - 25gf \end{array}$$

II. $(3a - 2b) \times (a - 5b)$

$$\begin{array}{rr} 3a - & 2b \\ a - & 5b \\ \hline 3a^2 - & 2ab \\ & -15ab + 10b^2 \\ \hline 3a^2 & -17ab + 10b^2 \end{array}$$

III. $(m + n) \times (m - n) = m^2 - n^2$

$$\begin{array}{ll} m + n & \\ m - n & \\ \hline m^2 + mn & \\ \quad - mn & - n^2 \\ \hline m^2 & - n^2 \end{array}$$

I dette sidste Exempel forsvinder Productet mn, og samme

viser, at to Tals Sum, multipliceret med deres Forskjel, er liig Qvadraternes Forskjel og omvendt, at Forskjellen mellem to Qvadrater er liig Summen og Differentsen af de qvadrerede Tal (Rodderne) multiplicerede.

59. Opg. At dividere Bogstavstørrelser, som dog ikke bestaae af flere Leed.

Opl. Reglen for Tegnene er den samme, som ved Multiplicationen, nemlig: samme Tegn give $+$, modsatte Tegn give $-$. Coefficienterne divideres; Bogstaverne sættes under Brøks Form, og, forsaavidt samme Bogstaver findes i Tæller og Nævner, forkortes Bogstavbrøken.

Exempel I. $5a : 3b = \dfrac{5a}{3b}$

II. $-8a : 2b = -\dfrac{4a}{b}$

III. $12a^2 : -4ab = -\dfrac{3a^2}{ab} = -\dfrac{3a}{b}$

IV. $-27a^3b^2cfg : -18abcghk = \dfrac{3a^3b^2cfg}{2abcghk} = \dfrac{3a^2bf}{2hk}$.

Bev. Reglen for Tegnene bevise vi først for følgende simple Tilfælde.

$$\begin{aligned} +12 : +4 &= +3 \\ -12 : +4 &= -3 \\ +12 : -4 &= -3 \\ -12 : -4 &= +3 \end{aligned}$$

Da Multiplication og Division ere modsatte Regningsarter, maa man give Qvotienten saadant Tegn, at den, multipliceret med Divisor, kan frembringe Dividendus. I første og tredie Tilfælde, hvor Dividenden er positiv, maa den altsaa have samme Tegn, som Divisor, følgeligen være i hiint positiv, i dette negativ. I andet og fjerde er Dividenden negativ; altsaa faaer Qvotienten det Tegn, der er modsat Divisors; følgeligen bliver den i andet Tilfælde negativ, i fjerde Tilfælde positiv.

Coefficienterne, ligesom Bogstaverne, ere behandlede efter de i det Foregaaende godtgjorte Regler.

Till. 1. Bestaaer Dividendus af flere Leed, men Divisor har kun eet Leed, bliver hvert af Dividendens Leed divideret med dette. F. Ex. $(18acf - 6bdef - 2ad) : 3adf = \frac{6c}{d} - \frac{2be}{a} - \frac{2}{3f}$.

Till. 2. Bestaaer Divisor af flere Leed, maae vi, inden Divisionen begynder, ordne Dividenden saaledes, at det Leed af Dividendus, hvori de samme Bogstaver, som findes i første Leed af Dividendus, oftest forekomme, sættes først. Dernæst undersøge vi, hvor ofte første Leed af Divisor indeholdes i første Leed af Dividendus, og med dette saaledes fundne Leed af Qvotienten multipliceres hele Divisor; dette Product drages fra Dividendus; Resten ordnes atter, ligesom Dividendus forhen, og behandles paa samme Maade. Divisionen fortsættes saaledes, indtil den gaaer op, eller efterlader en Rest, der ikke kan divideres og derfor sættes under Brøks Form.

Exempel I. $(3a^2 + 6bc - 2ab - 9ac) : (3a - 2b)$.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad a - 3c \\
3a - 2b\,)\,\overline{3a^2 + 6bc - 2ab - 9ac} \\
\qquad\quad 3a^2 \qquad\quad - 2ab \\
\quad - \qquad\qquad\quad + \\
\hline
\qquad - 9ac + 6bc \\
\qquad - 9ac + 6bc \\
\qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Vi have her, efter at det første Product var fradraget, behørigen ordnet Resten, i det Ledet $-9ac$ er draget frem. Qvotienten er stillet foroven.

II. $(36a^2b - 63ab^2 + 20b^3 + 8b^2c) : (12ab - 5b^2)$.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad 3a - 4b \\
12ab - 5b^2\,)\,\overline{36a^2b - 63ab^2 + 20b^3 - 8b^2c} \\
\qquad\qquad 36a^2b - 15ab^2 \\
\qquad\quad - \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad - 48ab^2 \\
\qquad\qquad\qquad - 48ab^2 + 20b^3 \\
\qquad\qquad\qquad + \qquad\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 8b^2c.
\end{array}
$$

Da denne sidste Rest ikke lader sig dividere, maa den sættes under Brøks Form $\frac{8b^2c}{12ab - 5b^2}$

Samme lader sig imidlertid forkorte med b, saa at hele Qvotienten bliver $3a - 4b + \frac{8bc}{12a - 5b}$.

III. $(81a^4 - 16b^4) : (3a - 2b)$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad 27a^3 + 18a^2b + 12ab^2 + 8b^3 \\
3a - 2b\,)\,\overline{81a^4 - 16b^4} \\
\qquad\quad 81a^4 - 54a^3b \\
\qquad\quad - \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 54a^3b - 16b^4 \\
\qquad\qquad\quad 54a^3b - 36a^2b^2 \\
\qquad\qquad\quad + \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 36a^2b^2 - 16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 36a^2b^2 - 24ab^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad - \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 24ab^3 - 16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 24ab^3 - 16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \qquad\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

60. Forkl. En Størrelse, der bestaaer af flere med + eller — forbundne Dele, kaldes en sammensat Størrelse, og efter Antallet af disse Dele eller Leed kaldes den en toledet Størrelse (Binomium), en treledet, mangeledet Størrelse.

F. Ex. $a+b$ eller $a-b$, $3x-5y$ ere toledede Størrelser; $5a-3b+7c$ er en treledet Størrelse; $\frac{3a^2bc}{f}$ er derimod en enkelt Størrelse.

Till. Skal ved en saadan fleerledet Størrelse een eller anden Regneoperation antydes, sluttes den i Parenthes, og det Tegn, hvormed Regningen antydes, sættes udenfor samme. F. Ex. $5a-(3b-2c)$ antyder, at fra $5a$ skal den toledede Størrelse $3b-2c$ drages. Skulle to Størrelser, sluttede i Parentheser, multipliceres, udelades Multiplicationstegnet mellem Parentheserne. F. Ex.

$(5a-3b)\times(a+2b)=(5a-3b)(a+2b)$.

Ogsaa sættes en Cifferstørrelse, hvormed en sammensat Størrelse skal multipliceres, umiddelbart foran denne, ligesom Coefficienten ved en enkelt Bogstavstørrelse. F. Ex. $2\times(a+3b)=2(a+3b)$.

Till. 2. Ofte forkortes Bogstavudtryk eller Formler væsentligen ved at opsøge fælleds Factorer for flere Leed, og stille disse udenfor en Parenthes. F. Ex. have vi $ac-bc-ab+b^2$, er dette enten at omforme til $ac-b(c+a-b)$ eller til $(a-b)c-(a-b)b=(a-b)(c-b)$.

61. Forkl. Efter at nu forskjellige Arter af Størrelser ere fremstillede, nemlig deels Cifferstørrelser, deels Bogstavstørrelser, deels hele Tal, deels Brøk, deels positive, deels negative, ville vi fra en mere almindelig Side kunne betragte Regningsarterne og Forklaringerne af samme.

Additionen eller Sammenlægningen bestaaer i: af to eller flere Tal, Addenderne, at frembringe et nyt, Summen, der indeholder saamange Eenheder, som alle de givne.

Addition kan kun finde Sted, naar Størrelserne ere eensartede eller lade sig reducere til samme Eenhed; den bliver da en fortsat Optælling, Numeration.

I andet Tilfælde kan Additionen aldeles ikke finde Sted, men Størrelserne henskrives kun ved Siden af hinanden med deres Fortegn (§ 55, Till. 1).

Subtractionen bestaaer i: af to Tal, Minuendus og Subtrahendus at finde et tredie, Differentsen, der indeholder saamange Eenheder, som Minuendus har flere end Subtrahendus.

Denne Regningsart er aldeles modsat Additionen og kunde forklares som bestaaende i at finde det Tal, der skal lægges til et givet, Subtrahendus, for at frembringe Minuendus.

Hvor Subtrahendus er ueensartet med Minuendus, kan egentligen ingen Subtraction finde Sted. Hvis den altsaa ikke kan bringes til at være eensartet med Minuendus, kunne vi blot addere Subtrahendus med sit modsatte Tegn for saaledes at tilkjendegive Differentsen. (§ 56. Till. 1).

Multiplicationen er den Regningsart, i Følge hvilken vi frembringe af to Tal, Multiplicandus og Multiplicator, et nyt Tal Productet, der skal dannes paa samme Maade, som Multiplicator fremkom af Eenheden.

Er Multiplicator et heelt og positivt Tal, bliver Multiplicationen en fortsat Addition af ligestore Addender (§ 12); er Multiplicator en Brøk, f. Ex. $\frac{3}{7}$, vil den fremkomme af Eenheden, ved at gjentage denne et vist Antal Gange, her 3, dividere det Udkomne med 7; vi behandle derfor Multiplicanden overeensstemmende dermed (§ 39). Er Multiplicatoren endeligen negativ, undersøge vi, hvorledes den kan tænkes frembragt af Eenheden, og behandle nu Multiplicandus paa en lignende Maade (§ 58).

Divisionen bestaaer i: af to Tal Dividendus og Divisor at finde et tredie Qvotienten, der indeholdes ligesaa mange Gange i Dividendus, som Divisor indeholder Eenheden. Den bliver en Regningsart, modsat Multiplicationen, og kunde følgeligen forklares, som den Regningsart, i Følge hvilken vi søge et Tal, der, multipliceret med Divisor, frembringer Dividendus.

62. De almindelige Grundsætninger, der anvendes saavel i Arithmetiken, som i Geometrien (Geom. § 14), anføre vi endvidere her.

1. Grundsætning. Enhver Størrelse er ligestor med sig selv. F. Ex. $7=7$.

2. Grunds. Enhver Størrelse er ligestor med alle sine Dele. F. Ex. $8=1+3+4$.

3. Grunds. Enhver Størrelse er større end een af dens Dele eller nogle af dem tilsammen. F. Ex. $8>3$, $8>3+4$.

4. Grunds. Ligestore Størrelser kunne sættes i Stedet for hinanden. F. Ex. $8=2\times 4$; vi indsætte altsaa, hvor vi finde det passende, 8 i Stedet for 2×4, eller 2×4 i Stedet for 8.

5. Grunds. Ere to Størrelser ligestore med een og samme tredie, ere de indbyrdes ligestore. F. Ex.

$$\begin{array}{l} 24 = 6\times 4 \\ \underline{24 = 8\times 3} \\ 6\times 4 = 8\times 3. \end{array}$$

6. Grunds. Er een Størrelse større eller mindre, end een af to ligestore, er den ogsaa større eller mindre end den anden. F. Ex.

a) $$\begin{array}{l} 28 > 24 \\ \underline{24 = 6\times 4} \\ 28 > 6\times 4. \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} 35 < 40 \\ \underline{40 = 5\times 8} \\ 35 < 5\times 8. \end{array}$$

7. Grunds. Er en Størrelse større end den største eller mindre end den mindste af to uligestore Størrelser, da er den ogsaa større end den mindste, eller mindre end den største af samme to uligestore Størrelser.

a) $$\begin{array}{l} 13 > 12 \\ \underline{12 > 3\times 3} \\ 13 > 3\times 3. \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} 9 < 14 \\ \underline{14 < 5\times 3} \\ 9 < 5\times 3. \end{array}$$

Under Regningsarterne henhøre følgende Grundsætninger.

I. Additions-Grundsætninger.

a) Ligestort, adderet til Ligestort, giver ligestore Summer. F. Ex.

$$\begin{array}{l} 16 = 4\times 4 \\ \underline{28 = 7\times 4} \\ 16+28 = 4\times 4+7\times 4 \\ \text{ɔ: } 44 = 4\ (4+7). \end{array}$$

b) Ligestort, lagt til Større og Mindre, giver Større og Mindre. F. Ex.

$$\begin{array}{c} 18 > 5 \times 3 \\ 12 = 4 \times 3 \\ \hline 18 + 12 > 5 \times 3 + 4 \times 3 \end{array}$$

ɔ: $30 > 3\ (5 + 4)$.

c) Større og Mindre, lagt til Ligestort, giver større og mindre Summer. F. Ex.

$$\begin{array}{c} 20 = 4 \times 5 \\ 29 > 4 \times 7 \\ \hline 20 + 29 > 4 \times 5 + 4 \times 7 \end{array}$$

ɔ: $49 > 4\ (5 + 7)$.

d) Større, lagt til Større, og Mindre til Mindre, give større og mindre Summer. F. Ex.

$$\begin{array}{c} 23 > 5 \times 4 \\ 37 > 5 \times 7 \\ \hline 60 > 5\ (4 + 7). \end{array}$$

II. Subtractions-Grundsætninger.

a) Ligestort, subtraheret fra Ligestort, giver ligestore Differentser. F. Ex.

$$\begin{array}{c} 30 = 5 \times 6 \\ 10 = 5 \times 2 \\ \hline 30 - 10 = 5 \times 6 - 5 \times 2 \end{array}$$

ɔ: $20 = 5\ (6 - 2)$.

b) Ligestort, subtraheret fra Større og Mindre, giver større og mindre Differentser.

$$\begin{array}{c} 6 \times 7 > 28 + 13 \\ 6 \times 4 = 24 \\ \hline 6 \times 7 - 6 \times 4 > 28 + 13 - 24 \end{array}$$

ɔ: $6\ (7 - 4) > 17$.

c) Større og Mindre, trukket fra Ligestort, giver mindre og større Differentser.

$$\begin{array}{c} 48 = 12 \times 4 \\ 18 > 4 \times 4 \\ \hline 48 - 18 < 12 \times 4 - 4 \times 4 \end{array}$$

ɔ: $30 < 4\ (12 - 4)$.

d) Større og Mindre, draget fra Mindre og Større, giver mindre og større Differentser.

$$\begin{array}{c} 59 < 8 \times 8 \\ 25 > 8 \times 3 \\ \hline 59 - 25 < 8\ (8 - 3). \end{array}$$

III. Multiplications-Grundsætninger.

a) Ligestort, multipliceret med Ligestort, giver ligestore Producter.

$$\begin{array}{c} 13 = 8 + 5 \\ 7 = 7 \\ \hline 13 \times 7 = 7\ (8 + 5). \end{array}$$

b) Ligestore positive Størrelser, multiplicerede med Større og Mindre, give større og mindre Producter. F. Ex.

1) $$\begin{array}{c} 18 = 9 \times 2 \\ 7 > 6 \\ \hline 18 \times 7 > 9 \times 2 \times 6 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{c} 18 = 9 \times 2 \\ -6 > -7 \\ \hline -18 \times 6 > -7 \times 9 \times 2. \end{array}$$

c) Større og mindre Multiplicander, multiplicerede med ligestore positive Multiplicatorer, give større og mindre Producter.

Ex. $13 > 8 + 4$
$6 = 6$
$13 \times 6 > 6\,(8 + 4).$

d) Større og mindre positive Multiplicander, multiplicerede med større og mindre positive Multiplicatorer, frembringe større og mindre Producter.

Ex. $29 > 7 \times 4$
$12 > 3 \times 3$
$29 \times 12 > 7 \times 4 \times 3 \times 3.$

IV. Divisions-Grundsætninger.

a) Ligestort, divideret med Ligestort, giver ligestore Qvotienter.

$72 = 12 \times 6$
$3 = 3$
$72 : 3 = (12 : 3) \times 6.$

b) Ligestore positive Dividender, dividerede med større og mindre Divisorer, give mindre og større Qvotienter.

Ex. $108 = 60 + 48$
$18 > 12$
$108 : 18 < 60 : 12 + 48 : 12$
ɔ: $6 < 5 + 4.$

c) Større og mindre Dividender, dividerede med ligestore positive Divisorer, give mindre og større Qvotienter.

Ex. $112 > 100$
$4 = 4$
$112 : 4 > 100 : 4$
ɔ: $28 > 25.$

d) Større og mindre positive Størrelser, dividerede med mindre og større positive Divisorer, give større og mindre Qvotienter.

$130 > 16 \times 8$
$5 < 8$
$130 : 5 > 16.$

Anm. Indskrænkningen ved Multiplications-Grundsætningerne b — d og ligeledes Divisions-Grundsætningerne b — d, at samme gjælde kun for positive Størrelser, er nødvendige; thi f. Ex. vi ville faae af

$-18 = -9 \times 2$
$7 > 6$

følgende uligestore Størrelser

$-18 \times 7 < -9 \times 2 \times 6$

efterdi det negative Tal af flere Eenheder end et andet negativt Tal er mindre. Efter Multiplications-Grundsætningen b, hvis den ikke havde Indskrænkning, ville vi derimod slutte

$-18 \times 7 > -9 \times 2 \times 6.$

Saaledes ogsaa ved Divisionen

$-88 < -72$
$-8 = -8$
$-88 : -8 > -72 : -8$
ɔ: $11 > 9$

hvorimod, hvis vi slutte efter Divisions-Grundsætningen c, uden at indskrænke samme, faae vi urigtigen.

$11 < 9.$

63. Forkl. Den anden Potens kalde vi almindeligen Qvadratet, den tredie Potens Kubus. Saaledes er $7^2 = 7 \times 7$ Qvadratet af 7, a^3 Kubus af a.

Omvendt kaldes enhver af de ligestore Factorer, hvoraf en Potens bestaaer, en Rod; er Potensen den anden, kaldes en saadan Rod Qvadratroden, er den den tredie, kaldes den Kubikroden eller tredie Rod. Saaledes er 7 Qvadratroden af $7^2 = 49$, a Kubikroden af a^3.

Roden af et Tal tilkjendegives ved foran samme at skrive Tegnet $\sqrt{}$, der kaldes Rodtegnet. I Aabningen af samme sætte vi, som Exponent, det Tal, som antyder Rodens Grad; dog kan denne Rodexponent udelades ved den anden Rod eller Qvadratroden.

$$7 = \sqrt{49};\quad a = \sqrt[3]{a^3}.$$

Skal Roden uddrages af en sammensat Størrelse, sluttes den i Parenthes, eller ogsaa drages en Linie ovenfor samme, som en Forlængelse af Rodtegnet; det Sidste anvendes ofte ogsaa ved fleerciffrede Talstørrelser. F. Ex.

$$\sqrt{(a+2b)} = \sqrt{a+2b};\quad \sqrt[3]{54007801}.$$

64. Forkl. At ophøie et givet Tal til en Potens, er at danne et Product af dette Tal, sat saamange Gange, som Factor, som Potens-Exponenten indeholder Eenheder.

At uddrage en given Rod af et Tal, er at opløse dette i saamange ligestore Factorer, som Rodexponenten har Eenheder, og tage een af disse.

Till. 1. At ophøie et Tal til en Potens skeer efter de sædvanlige Regler for Multiplicationen; derimod kræver Uddragningen af Roden særegne Regnings-Regler.

Till. 2. Ved Multiplicationen findes saaledes Qvadrat- og Kubiktallene af Enere, hvilke vi oftere ville bruge, og som derfor ere indesluttede i efterstaaende Tabel.

Rod	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Qvadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

65. Læres. En Potens af en Brøk findes ved at ophøie Tæller for sig og Nævner for sig til Potensen.

Bev. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$.

Her er ene anvendt Reglerne for Brøkers Multiplication (§ 40); saaledes er altsaa

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}.$$

66. Læres. En Rod uddrages af en Brøk, naar Roden uddrages af Tælleren for sig og af Nævneren for sig.

Bev. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$;

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{b}.$$

Vi uddrage næmlig Roden, naar vi søge et Tal, der, ophøiet til en Potens af samme Grad, som den, hvoraf Roden er, atter frembringer den Størrelse, hvoraf Roden skulde uddrages. Men den angivne Rod er selv en Brøk, altsaa (§ 65) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ og ligeledes

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{a})^3}{(\sqrt[3]{b})^3} = \frac{a}{b}.$$

67. Læres. Af en positiv ægte Brøk er enhver høiere Potens mindre end den lavere.

Bev. Er $a < b$,

$$\begin{aligned}
&\text{vil } \frac{a}{b} < 1. \\
&\times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \\
\hline
&\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

altsaa Qvadratet mindre end selve Brøken. Multiplicere vi atter

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < \frac{a}{b}$$

$$\text{med } \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\text{faaes } \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Saaledes er Kubus atter mindre end Qvadratet o. s. v.

Till. Hvor hurtigt Værdien af en egentlig Brøk formindskes, naar vi ophøie den til stedse høiere Potenser, viser efterstaaende Exempel. Vi have herved forvandlet de udkomne Brøker til Decimalbrøker, for lettere at kunne anstille Sammenligning:

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{5} &= \ldots\ldots = 0{,}600000 \\
(\tfrac{3}{5})^2 &= \tfrac{9}{25} \ldots\ldots = 0{,}360000 \\
(\tfrac{3}{5})^3 &= \tfrac{27}{125} \ldots = 0{,}216000 \\
(\tfrac{3}{5})^4 &= \tfrac{81}{625} \ldots = 0{,}129600 \\
(\tfrac{3}{5})^5 &= \tfrac{243}{3125} \;.\,. = 0{,}077760 \\
(\tfrac{3}{5})^6 &= \tfrac{729}{15625} \;.\,. = 0{,}046656 \\
(\tfrac{3}{5})^7 &= \tfrac{2187}{78125} \;.\,. = 0{,}027994 \\
(\tfrac{3}{5})^8 &= \tfrac{6561}{390625} \;. = 0{,}016796 \\
(\tfrac{3}{5})^9 &= \tfrac{19683}{1953125} = 0{,}010078 \\
(\tfrac{3}{5})^{10} &= \tfrac{59049}{9765625} = 0{,}006047.
\end{aligned}$$

Her er $\frac{3}{5}$, som er en Brøk, der er større end $\frac{1}{2}$, allerede, ved at ophøies til den 10de Potens, bleven mindre end $\frac{1}{150}$.

68. Læres. Ere en Brøks Tæller og Nævner hele Tal eller lade sig bringe dertil, men Brøken selv ikke ligestor med Hele alene, da er heller ingen Potens af den et heelt Tal.

Bev. Er Brøken *ægte*, ville de høiere Potenser være mindre end samme, altsaa afvige stedse mere og mere fra Eenheden, følgeligen ikke nogen af dem kunne blive liig Eenheden eller et heelt Tal, bestaaende af flere Eenheder.

Er Brøken *uægte*, vil enten Tæller og Nævner være indbyrdes Primtal eller kunne lade sig bringe dertil. Have vi saaledes for det Første $\frac{17}{12}$, vil $(\frac{17}{12})^n$, hvor n kan betyde hvilketsomhelst heelt og positivt Tal, ikke kunne udgjøre nogetsomhelst heelt Tal; thi

$$(\tfrac{17}{12})^n = \frac{17 \times 17 \times 17 \ldots\ldots .17}{12 \times 12 \times 12 \ldots\ldots .12}$$

Men, da 12 intet Maal har tilfælleds med 17, vil det heller ikke have Maal tilfælleds med 17×17 eller nogensomhelst Potens af 17; saaledes vil endog blot den ene Factor 12 i Nævneren ikke tillade, at denne Brøks Potens bliver et heelt Tal.

Havde vi Brøken $\frac{51}{36}$, kunde denne først forkortes med 3; den blev da $\frac{17}{12}$, og det førte Beviis vilde, efter at vi saaledes havde bragt Tæller og Nævner til indbyrdes Primtal, gjælde ogsaa for den.

69 Læres. Er en Rod af et heelt Tal intet heelt Tal, da er den ei heller noget blandet Tal (heelt Tal og Brøk), der med hele og endelige Tal lader sig angive.

Bev. $\sqrt{2}$ er saaledes større end 1, mindre end 2; men den kan ikke være liig $1\frac{5}{12}$ eller hvilketsomhelst andet heelt Tal og Brøk; thi da maatte omvendt

$$(1\tfrac{5}{12})^2 = (\tfrac{17}{12})^2 = 2$$

hvilket er umuligt, i Følge § 68.

Till. 1. Vi komme saaledes til en aldeles egen Art Størrelser, *Irrationalstørrelser*, som ikke paa sædvanlig Maade lade sig bestemme, men hvis Værdi vi dog tilnærmende kunne finde, i Følge Regler, som senere foredrages.

Till. 2. I Modsætning til disse Størrelser kaldes de andre Størrelser *Rationalstørrelser*. En *fuldkommen Potens* er den, hvis Rod er rational; saaledes ere de (§ 64, Till. 2) angivne Qvadrattal de fuldkomne Qvadrattal under 100, Kubiktallene de fuldkomne Kubiktal under 1000.

70. Læres. Et Tal, der ender med Nuller, ophøies til en Potens, naar den Deel, der staaer foran Nullerne, ophøies til Potensen, og et saamange Gange større Antal Nuller tilføies, som Potens-Exponenten har Eenheder.

Bev. $30^2 = 900$; $700^3 = 343000000$. Thi $30^2 = 30 \times 30$ og $700^3 = 700 \times 700 \times 700$; men, behandles disse Producter efter § 15 Till. 3, fremkomme Størrelserne overeensstemmende med Reglen.

71. Læres. Qvadratet af en toledet Størrelse bestaaer af: 1) Qvadratet af den første Deel, 2) det dobbelte Product af begge Dele, 3) den anden Deel af Roden qvadreret.

Bev. Kaldes den ene Deel a, den anden Deel b, saa er $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. (§ 58, Till.).

Till. 1. Denne Regel, som kort udtrykkes ved den fremsatte Formel, tjener til at qvadrere et tocifret Tal. Vi dele det nemlig i Tiere og Enere, betegne Tierne med a, Enerne med b og sammensætte saaledes Qvadratet overeensstemmende med Formlens Dele. F. Ex. $37^2 = (30+7)^2$. Her betegne vi 30 med a, 7 med b og have saaledes

$$37^2 = \begin{cases} 30^2 & = 900 \\ 2 \times 30 \times 7 & = 420 \\ 7^2 & = 49 \end{cases}$$
$$\overline{1369.}$$

Till. 2. Er Tallet fleercifret, dele vi det ligeledes i Enere og Tiere; disse betegne vi med a, hine med b; men Formlen anvende vi atter for at qvadrere Tierne, i det vi betegne Hundrederne med a, hvilket Bogstav dog saaledes faaer en anden Betydning end forhen, Tierne med b; saaledes videre, om Tallet havde flere end tre Ciffre.

$$374^2 = \overset{a+b}{(370+4)^2} = \begin{cases} 370^2 = \overset{a+b}{(300+70)^2} = \begin{cases} 300^2 & = 90000 \\ 2 \times 300 \times 70 & = 42000 \\ 70^2 & = 4900 \end{cases} \\ 2 \times 370 \times 4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2960 \\ 4^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 16 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 139876 \end{cases}$$

Et fiircifret Tal vil have følgende Dele.

$$3746^2 = \overset{a+b}{(3740+6)^2} = \begin{cases} 3740^2 = \overset{a+b}{(3700+40)^2} = \begin{cases} 3700^2 = \overset{a+b}{(3000+700)^2} = \begin{cases} 3000^2 & = 9000000 \\ 2.3000.700 & = 4200000 \\ 700^2 & = 490000 \end{cases} \\ 2.3700.40 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 296000 \\ 40^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = 1600 \end{cases} \\ 2.3740.6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 44880 \\ 6^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 36 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 14032516 \end{cases}$$

Till. 3. Ved at sammenligne de her fundne Resultater, indsee vi, at, da Tallet forøgedes med eet Ciffer, forøgedes Qvadratet med to; og i Almindelighed ville vi indsee, at, ligesom alle eetciffrede Tals Qvadrater eller Qvadraterne af alle Tal fra 1, men mindre end 10, ere 1 eller derover, men mindre end 100, altsaa ere een- eller tociffrede, ville Qvadraterne af alle tociffrede Tal være 100 eller derover, men mindre end 10000, altsaa være tre- eller fiirciffrede, af alle treciffrede Tal være under 1000000, altsaa fem- eller sexciffrede.

Omvendt er Roden af et eet- eller tociffret Tal eenciffret, af et tre- eller fiirciffret Tal tociffret, af et fem- eller sexciffret Tal treciffret o. s. v.

72. Opg. At uddrage Qvadratroden af et Tal.

Opl. Er det givne Tal eet- eller tociffret og tillige findes i Tabellen over Qvadraterne (§ 64, Till. 2), haves dets Rod umiddelbart; findes det ikke i Tabellen, ville vi dog kunne bestemme, mellem hvilke to Tal den ligger. Har det tre eller flere Ciffre, deles det i Classer fra Høire til Venstre, to Ciffre i hver, hvorved altsaa den høieste Classe kan bestaae af eet eller to Ciffre. Saaledes er Antallet af Rodens Ciffre givet. Dernæst følges efterstaaende Regler, som oplyses ved Exemplet.

$$\sqrt{13|69} = \overset{a+b}{3\;7}$$

$$\begin{array}{lcr} & & 9 \\ \hline & & 469 \\ (2a) & = & (6) \\ 2ab & = & 42 \\ b^2 & = & 49 \\ \hline & & 469 \\ \hline & & 0. \end{array}$$

Det i Tabellen over Enernes Qvadrater (§ 64, Till. 2) nærmest mindre Qvadrattal 9, der kan drages fra høieste Classe 13, henstilles under samme og fradrages. Dets Rod 3 er det første Ciffer, som vi betegne med a; vi have saaledes fradraget Formlens første Deel a^2. Næste Classe nedflyttes, og, da det andet Ciffer eller b ikke er bekjendt, hensætte vi kun $2a = 6$ under det første Ciffer af den nedflyttede Classe; den hensatte Factor divideres i det Ovenforstaaende, og Qvotienten 7, som saaledes findes, er andet Ciffer eller b; vi multiplicere nu med dette Tal det ovenforstaaende 2a eller 6 og finde $2ab = 42$; $b^2 = 49$ stilles et Ciffer længere frem; de to saaledes fundne Dele adderes, og Summen 469 drages fra. Havdes flere Classer, fortsættes Regningen saaledes, som følgende Exempler vise.

$$\sqrt{13|98|76} = \overbrace{\overbrace{3\ 7}^{a+b}\ 4}^{a+b}$$

$$a^2 = \left\{\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ \quad 498 \\ (2a) = (6) \\ 2ab = 42 \\ b^2 = 49 \\ \quad 469 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 2976 \\ (2a) = (74) \\ 2ab = 296 \\ b^2 = 16 \\ 2976 \\ \hline 0. \end{array}$$

$$\sqrt{14|03|25|16} = \overbrace{\overbrace{\overbrace{3\ 7}^{a+b}\ 4}^{a+b}\ 6}^{a+b}$$

$$a^2 \left\{\begin{array}{l} a^2 = \left\{\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ \quad 503 \\ (2a) = (6) \\ 2ab = 42 \\ b^2 = 49 \\ \quad 469 \end{array}\right. \\ \quad 3425 \\ (2a) = (74) \\ 2ab = 296 \\ b^2 = 16 \\ \quad 2976 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 44916 \\ (2a) = (748) \\ 2ab = 4488 \\ b^2 = 36 \\ 44916 \\ \hline 0. \end{array}$$

Her er Regningen fortsat, i det den tredie Classe er nedflyttet. Vi betragte den Deel, der er fundet, som a, og udregne altsaa først, ligesom forhen, $2a = 74$, som vi sætte under det første Ciffer af den nedflyttede Classe; ved Divisionen hermed i de ovenstaaende Ciffre faaes $b = 4$, som saaledes bliver 3die Ciffer. Regningen fortsættes, og, forsaavidt flere Classer findes, nedflyttes disse, som i sidste Exempel er viist, og behandles paa lignende Maade.

Bev. Rigtigheden af den her fulgte Fremgangsmaade bliver indlysende ved at sammenligne Exemplerne med de i forrige Paragraph, overeensstemmende med Formlen (§ 71) dannede Qvadrattal. Hvad angaaer Ciffrenes Stilling, da indsee vi, at, eftersom det første Ciffer er Tiere, Hundreder, Tusinder o. s. v. vil dets Qvadrat faae efter sig 2, 4, 6 ... Nuller, altsaa de betydende Ciffre ikkun blive at fradrage fra første Classe. Næste Deel $2ab$ faaer et Nul mindre; den skal altsaa staae med sidste Ciffer under det første Ciffer af den nedflyttede Classe; her stilles ogsaa derfor Divisoren $2a$; b^2, som ender med et lige Antal Nuller, vil derimod naae hen under sidste Ciffer af den nedflyttede Classe. Inden vi gaae over til at bestemme næste Ciffer, hvis flere Classer findes, vil man ansee de fundne to Ciffre, som betegnedes med a og b, som a; da det forrige $(a+b)^2$ er fradraget, er altsaa nu a^2 fradraget, vi begynde derpaa atter paa Formlens anden Deel eller $2ab$, hvilken beregnes paa den anførte Maade.

Till. 1. Derved, at man dividerer med det Dobbelte af Rodens første Deel for at faae b, uden at tage Hensyn til Formlens sidste Deel b^2, skeer det ofte, at b tages for stor. F. Ex. vi ville i de to sidste Exempler let tage b liig 8 i Stedet for 7, hvis vi ikke forud havde vidst, hvad der skulde komme ud; Feilen viser sig dog strax. Derimod mærker man mindre let, om man har taget b en Eenhed for liden; thi vel bliver Resten da for stor; men dette opdages først, enten ved at bestemme det næste Ciffer eller udregne Forskjellen imellem det fundne Qvadrat og det følgende Tals, der er det dobbelte af hiint, dertil lagt 1. Betegne vi nemlig et hvilketsomhelst Tal med n, det derpaa følgende altsaa med $n+1$, finde vi Forskjellen mellem disses Qvadrater liig $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

Till. 2. Er det dobbelte Product af Rodens første Deel saa stort, at det indeholdes ingen heel Gang i det Ovenforstaaende, bliver den anden Deel 0, og den følgende Classe nedflyttes da strax, i det den i Parenthes hensatte Størrelse $(2a)$ udslettes.

Till. 3. Regningen forkortes noget, ved at anvende følgende Methode, som oplyses ved det sidste Exempel.

$$\sqrt{14|03|25|16} = 3746$$

	9
67	503
	469
744	3425
	2976
7486	44916
	44916
	0.

Regningen er her ført saaledes: I Stedet for at stille $2a$ under det første Ciffer af den nedflyttede Classe, er det stillet foran samme, og Divisionen foretaget; endvidere stilles det fundne Tal b ved Siden af $2a$; multiplicere vi $2a+b$ med b, faae vi $2ab+b^2$ eller begge Formlens Dele; Regningen fortsættes let paa lignende Maade, og ethvert følgende $2a$ dannes ved til det ovenstaaende $2a+b$, i disse Bogstavers forrige Betydning, ene at tilføie b eller fordobble det sidste Ciffer.

73 Opg. At uddrage Qvadratroden af et Decimaltal.

Opl. Her skeer Inddelingen i Classer fra Høire til Venstre kun i de Hele, om disse findes; men Decimalerne derimod inddeles fra Kommaet mod Høire, og, skulde i den sidste Classe kun komme eet Ciffer, føies 0 til. Roden uddrages nu efter de sædvanlige Regler og faaer saamange Decimaler, som der ere Decimalclasser.

F. Ex. $\sqrt{9|39{,}42|25} = 30{,}65$

$$\begin{array}{lr}
 & 9 \\
606 & 3942 \\
 & 3636 \\
6125 & 30625 \\
 & 30625 \\
 & 0.
\end{array}$$

$$\sqrt{0{,}00|05|97|30} = 0{,}0244$$

$$\begin{array}{lr}
 & 4 \\
44 & 197 \\
 & 176 \\
484 & 2130 \\
 & 1936 \\
 & 194.
\end{array}$$

Bev. For at uddrage Roden af en Brøk, uddrage vi Roden af Tælleren for sig og af Nævneren for sig. Hvis vi altsaa stille de to Decimaltal under Brøks Form, vilde

$$\text{I.}\quad \sqrt{939{,}4225} = \frac{\sqrt{9394225}}{\sqrt{10000}}$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{0{,}0005973} = \frac{\sqrt{5973}}{\sqrt{10000000}}$$

Men, da Roden af ethvert Tal, der bestaaer af 1 med et lige Antal Nuller, bliver 1 med det halve Antal Nuller, af 1 med et ulige Antal Nuller derimod er irrational, maa man gjøre Nævneren i sidste Tilfælde rational, ved at tilføie et Nul, eller gjøre Decimalernes Antal lige. Altsaa bliver

$$\text{I.}\quad \sqrt{939{,}4225} = \frac{3065}{100}.$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{0{,}0005973} = \frac{\sqrt{59730}}{\sqrt{100000000}}$$

$$= \frac{244}{10000} = 0{,}0244.$$

Herved er tillige godtgjort Reglen for Komma.

Till. 1. Qvadratroden af et ufuldkomment Qvadrat bestemme vi ved at tilføie Nuller til samme, og da uddrage Qvadratroden, efter de for Decimaltal givne Regler. F. Ex.

$$\sqrt{30} = \sqrt{30{,}00|00|00} = 5{,}477$$

$$\begin{array}{lr}
 & 25 \\
104 & 500 \\
 & 416 \\
1087 & 8400 \\
 & 7609 \\
10947 & 79100 \\
 & 76629.
\end{array}$$

Denne Regning kan nu fortsættes, saa langt man vil.

Till. 2. Qvadratroden af en sædvanlig Brøk uddrages, som oftest, beqvemmest ved at forvandle den til Decimalbrøk; bliver Decimalbrøken periodisk, tages et lige Antal Decimaler. Eller ogsaa behandles Brøken paa følgende Maade. Man efterseer først, om Nævneren er et fuldkomment Qvadrattal; hvis ikke, kan den dog stedse gjøres dertil, ved at multiplicere i Tæller og Nævner med Nævneren; af denne saaledes forandrede Brøk uddrages Roden af Tælleren for sig, og af Nævneren for sig. Denne Methode bliver især beqvem ved Brøker hvis Tæller og Nævner ikke ere for høie. F. Ex.

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{0{,}42857143} = 0{,}6546$$

eller

$$\sqrt{\tfrac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4{,}5825}{7} = 0{,}6546.$$

74. Læres. Kubus af en toledet Rod bestaaer af den første Deels Kubus, det tredobbelte Product af den første Deels Qvadrat og den anden Deel, det tredobbelte Product af den første Deel og den anden Deels Qvadrat, og den anden Deels Kubus.

Bev. Kaldes Delene a og b, have vi $(a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$; udføres denne Multiplication efter § 58, Till., faaes

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \underline{a+b} \\ a^3+2a^2b+\ ab^2 \\ \underline{\qquad\quad a^2b+2ab^2+b^3} \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

hvorved Sætningen er beviist.

Till. 1. Denne Formel kunne vi anvende for at kubere en tocifret Størrelse, i det vi betegne Tierne med a, Enerne med b. F. Ex.

$$46^3 = \overset{a\,+\,b}{(40+6)^3} = \left\{\begin{array}{lr} 40^3 & = 64000 \\ 3\times40^2\times6 & = 28800 \\ 3\times40\times6^2 & = 4320 \\ 6^3 & = \underline{216} \\ & 97336. \end{array}\right.$$

Till. 2. Ogsaa anvendes Formlen til at kubere et fleercifret Tal, i det vi behandle dette, som forhen (§ 71, Till. 2). F. Ex.

$$462^3 = \overset{a\,+\,b}{(460+2)^3} = \left\{\begin{array}{l} 460^3 = \overset{a\,+\,b}{(400+60)^3} = \left\{\begin{array}{lr} 400^3 & = 64000000 \\ 3\times400^2\times60 & = 28800000 \\ 3\times400\times60^2 & = 4320000 \\ 60^3 & = 216000 \end{array}\right. \\ 3\times460^2\times2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1269600 \\ 3\times460\times2^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 5520 \\ 2^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ = \underline{8} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 98611128 \end{array}\right.$$

Till. 3. Vi indsee let, at Kubiktallet af Enere ligger mellem 1 og 1000, har altsaa 1, 2 eller 3 Ciffre, Kubiktallet af Tiere har 4, 5 eller 6 Ciffre, Kubiktallet af Hundreder 7 til 9 Ciffre. Vi bestemme altsaa omvendt Antallet af Ciffrene i Roden af et Kubiktal, naar vi dele det i Classer fra Høire til Venstre, 3 Ciffre i hver Classe; i første Classe kan være 1, 2 eller 3 Ciffre.

75 Opg. At uddrage Kubikroden af et heelt Tal.

Opl. Er Tallet under 1000, opsøg det i Tabellen (§ 64, Till. 2), hvorved Roden findes, hvis det er et fuldkomment Kubiktal, eller, hvis ikke, den nærmest mindre Rod. Bestaaer Tallet af flere end tre Ciffre, da deles det i Classer fra Høire til Venstre, tre Ciffre i hver, og de Regler følges endvidere, som oplyses ved efterstaaende Exempel.

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad a+b \\
 & \sqrt[3]{97|336} = 4\ \ 6 \\
a^3 & \ \ 64 \\
 & \ \ 33|336 \\
3a^2 = & (48) \\
3a^2b = & 288 \\
3ab^2 = & \ \ 432 \\
b^2 = & \ \ \ \ 216 \\
 & \ \ 33336 \\
 & \qquad\ 0.
\end{array}
$$

Her er fra første Classe draget det nærmeste Kubiktal 64, hvis Rod 4 er det første Ciffer, hvilket betegnes med a; næste Classe nedflyttes, og $3a^2 = 48$ beregnes, hvilket stilles under det første Ciffer af den nedflyttede Classe, med dette divideres i de ovenforstaaende Tal, saaledes findes det andet

Ciffer 6, hvormed multipliceres; derpaa beregnes $3ab^2 = 432$, som stilles med sidste Ciffer en Plads længere hen; tilsidst stilles $b^3 = 216$ atter en Plads videre frem, eller under sidste Ciffer. De tre nævnte Dele adderes, og Summen drages fra det Ovenforstaaende.

Findes flere Classer, nedflyttes til Resten næste Classe, og Regningen fortsættes, som følgende Exempel nærmere viser.

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad\quad \overline{a+b} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad a+b \\
 & \sqrt[3]{98|611|128} = 4\ 6\ 2 \\
 & a^3 = 64 \\
 & \qquad 34611 \\
 & (3a^2) = (48) \\
a^3 \Big\{ & 3a^2b = 288 \\
 & 3ab^2 = \ \ 432 \\
 & b^3 \qquad\ \ 216 \\
 & \qquad 33336 \\
 & \qquad 1275128 \\
 & (3a^2) = (6348) \\
 & 3a^2b = 12696 \\
 & 3ab^2 = \quad 552 \\
 & b^3 = \qquad\ \ 8 \\
 & \qquad 1275128 \\
 & \qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Det Fundne 46 betragtes som a; dog gaae vi her over til andet Leed af Formlen eller $3a^2b$ og udregne derfor $3a^2$, der sættes som Divisor hen med sidste Ciffer under det første af den nedflyttede Classe; saaledes findes b(=2), og efter de forhen givne Regler udføres og henstilles nu Delene $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, hvis Sum drages fra. Saaledes fortsættes Regningen, om flere Classer findes.

Bev. Rigtigheden bliver her ogsaa indlysende ved at sammenligne Exemplerne med de i forrige Paragraph overeensstemmende med Formlen dannede Kubiktal. Hvad angaaer Ciffrenes Stilling, indsee vi, at, hvis det høieste Ciffer er Tiere, bliver dets Kubus Tusinder, faaer altsaa tre Nuller efter sig, er det Hundreder, faaer det 6 Nuller efter sig, o. s. v.; altsaa komme de egentlige Ciffre kun under den forreste Classe. Næste Leed $3a^2b$ har et Nul mindre end a^3, da b er det følgende Ciffer, staaer altsaa med sit sidste betydende Ciffer under det første Ciffer af den følgende Classe. Det følgende Leed træder atter et Ciffer frem, og b^3 har 3 Nuller mindre end a^3, eller kommer under det Sidste af den anden Classe. I det vi nu saaledes have fradraget $(a+b)^3$, vil, naar vi, efter at have flyttet næste Classe ned, kalde det a, sammes Kubus eller a^3 være fradraget; vi begynde derfor atter med $3a^2$, for at bestemme det nye b.

Till. 1. Her tage vi ligeledes, og endnu lettere end ved Qvadratroden, ved at bestemme b, samme en Gang for høi; dog mærkes dette strax og snarere, end om vi havde taget den for lav. Nogen Øvelse bringer dog snart til at vælge det rigtige Ciffer.

Till. 2. Ogsaa ved Kubikroden kan den praktiske Regning lettes paa den Maade, der oplyses ved efterstaaende Exempler; men som iøvrigt kræver nogen Opmærksomhed.

$$\sqrt[3]{98|611|128} = 462$$

		64
		34 611
126	48	
	$\frac{756}{5556}$	33 336
		1 275 128
1382	6348	
	$\frac{2764}{637564}$	1 275 128
		0.

Efterstaaende Exempel viser endnu bedre den forkortede Regning.

$$\sqrt[3]{208|591|160|224|616} = 59306$$

		125
159	75	83 591
	$\frac{1431}{8931}$	80 379
1773	10443	3 212 160
	$\frac{5319}{1049619}$	3 148 857
177906	105494700	63 303 224 616
	$\frac{1067436}{10550537436}$	63 303 224 616
		0.

Her er særskilt henstillet $3a$ og $3a^2$, efter at første Classe er behandlet paa sædvanlig Maade; i det første Exempel altsaa $3a = 12$, og $3a^2 = 48$; efter at $b = 6$ er fundet, er dette henskrevet ved Siden af $3a$; $3a + b$ er multipliceret med b, og Productet $3ab + b^2 = 756$, efter at være rykket to Ciffre frem, er henstillet under $3a^2$; begge Dele, som adderede udgjøre 5556, ere $3a^2 + 3ab + b^2$; multipliceres nu med $b = 6$, faaes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ eller alle tre Dele, som henstilles under den nedflyttede Classe og fradrages. Det følgende $3a$ og $3a^2$ dannes let af det Foregaaende; thi, da vi allerede have $3a + b$, og skulle have $3(a+b)$ eller det nye $3a$, tage vi blot det sidste Ciffer 6 3 Gange, faae saaledes 138; ligeledes dannes $3a^2 = 3(a+b)^2 = 3a^2 + 6ab + 3b^2$ ved at tage de to Linier 756 og 5556 tilsammen (hiin er $3ab + b^2$, denne $3a^2 + 3ab + b^2$, begge altsaa $3a^2 + 6ab + 2b^2$) og tilføie b^2 ɔ: sidste Ciffers Qvadrat; vi addere saaledes de to Linier og lægge, uden videre Opskrivning, dertil 81, og have saaledes $6348 = 3a^2$.

Det andet Exempel, til hvis Udregning ligeledes ikke bruges et eneste Ciffer flere end de henskrevne, viser endnu bestemtere Fordelen ved denne forkortede Regning.

76. Opg. At uddrage Kubikroden af et Decimaltal.

Opl. Her skeer Inddelingen fra Kommaet, altsaa i de hele Tal, som sædvanligt; i Decimalerne fra Venstre til Høire. Forsaavidt Decimalernes Antal ikke lader sig dele med 3, tilføies Nuller. Roden uddrages nu, og i det Udkomne sættes saamange Decimaler, som der ere Decimalclasser.

$$\sqrt[3]{833,237|621} = 9,41$$

		729
274	243	104 237
	1096	
	25396	101 584
2821	26508	2 653 621
	2821	
	2653621	2 653 621
		0.

$$\sqrt[3]{0,684|327|500} = 0,881$$

		512
348	192	172 327
	1984	
	21184	169 472
2641	23232	2 855 500
	2641	
	2325841	2 325 841
		529 659.

Bev. Dette Beviis føres paa lignende Maade, som ved Qvadratroden. Skrives Brøken som sædvanlig Brøk, bliver Nævneren kun et fuldkomment Kubiktal, hvis den er 1 med et Antal Nuller, der er deelbart med 3; altsaa for det sidste Exempel.

$$\sqrt[3]{0,6843275} = \sqrt[3]{\frac{6843275}{10000000}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{684327500}{1000000000}} = \frac{\sqrt[3]{684327500}}{\sqrt[3]{1000000000}}$$

$$= \frac{881}{1000} = 0,881.$$

Till. 1. Vi bestemme ogsaa nærmere en kubisk Irrationalstørrelse, som fremkommer ved at uddrage Kubikroden af et ufuldkomment Kubiktal, ved at betragte den som et Decimaltal, i det vi tilføie Nuller, 3 ad Gangen. F. Ex.

$$\sqrt[3]{551} = 8,1981$$

		512
241	192	39000
	241	
	19441	19441
2439	19683	19559000
	21951	
	1990251	17912259
24578	2012283	1636741000
	196624	
	2014249 24	1611399392
245941	201621612	25341608000
	245941	
	20162407141	20162407141

Till. 2. Skal Kubikroden uddrages af en Brøk, vil Uddragningen skee af Tæller for sig og Nævner for sig. Forsaavidt Nævneren ikke er noget fuldkomment Kubiktal, vil man kunne bringe den dertil, ved at multiplicere i Tæller og Nævner med Qvadrattallet af Nævneren. Saaledes bliver i det Mindste Nævnerens Rod rational. I de fleste Tilfælde vil man dog rettest forvandle Brøken til Decimalbrøk, hvorved man tager et Antal Decimaler, der er deelbart med 3, og uddrager dernæst Roden.

F. Ex. $\sqrt[3]{\frac{8}{13}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 13^2}{13^3}} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 169}}{13}$

$169 \times 8 = 1352$

$\sqrt[3]{1|352} = 11{,}0575$

		1
31	3	352
	31 331	331
3305	36300	21000000
	16525 3646525	18232625
33157	3663075	2767375000
	232099 366539599	2565777193
331715	366771747	204597807000
	1658575 36678833275	183394166375
		8203640625.

Altsaa $\sqrt[3]{\frac{8}{13}} = \frac{11{,}0575}{13} = 0{,}85058.$

Eller ogsaa

$\sqrt[3]{\frac{8}{13}} = \sqrt[3]{0{,}615|384|615|384|615} = 0{,}85058$

		512
245	192	103 384
	1225 20425	102 125
25505	2167500	1 259 615 384
	127525 216877525	1 084 387 625
255158	217005075	175 227 759 615
	20441264 21720948764	173 767 590 112
		1 460 169 503.

77. Forkl. Naar vi sammenligne to ligeartede Størrelser med hinanden saaledes, at vi spørge, hvormange Gange den ene indeholder den anden, kalde vi denne Sammenligning

et **Forhold**. De to Størrelser kaldes **Forholdets Lede**, og det Leed, vi stille først, kaldes **Forledet**, det andet **Efterledet**.

Till. 1. At to Størrelser staae i Forhold, betegnes med :, saaledes, at Forledet stilles foran, Efterledet efter Tegnet. For ikke at forvexle dette med Divisionen, der betegnes paa lignende Maade, angive vi i Proportionslæren denne ved at henstille Dividendus som Tæller, Divisor som Nævner i en Brøk. (Jvfr. § 32, Till. 4).

Till. 2. Det Tal, der angiver, hvorofte Forledet indeholder Efterledet, kaldes **Forholdets Exponent**.

Till. 3. Ligesom Exponenten bestemmes ved at undersøge, hvor ofte Forledet indeholder Efterledet, eller ved at dividere Forledet med Efterledet, vil omvendt Forledet stedse lade sig omskrive ved Efterledet Gange Exponenten; have vi altsaa Forholdet

$$a : b$$

og Exponenten deri er $c = \frac{a}{b}$, vil omvendt $a = bc$.

Till. 4. Et Forholds Størrelse er afhængig af dets Exponent; to ligestore Forholde ere altsaa de, hvis Exponenter ere ligestore.

Till. 5. Ere to Forholde ligestore med eet og samme tredie, ere de indbyrdes ligestore; thi Exponenterne ere da ligestore. (§ 62, Grundf. 5).

78. Forkl. Et Forhold siges at være **aftagende**, naar Efterledet er mindre end Forledet, **tiltagende**, naar det Omvendte finder Sted.

Till. Ere Ledene positive, er Exponenten i det aftagende Forhold stedse større end 1, altsaa et heelt Tal eller en uegentlig Brøk, i det tiltagende Forhold mindre end 1, altsaa en egentlig Brøk. Ere Ledene negative, finder det Modsatte Sted. Ere begge Ledene ligestore, er Exponenten liig 1; et saadant Forhold kaldes stundom et **Liighedsforhold**. Er eet af Ledene positivt, det andet negativt, er Exponenten negativ.

F. Ex. I det **aftagende Forhold** $13:5$, er Exponenten $\frac{13}{5} > 1$; i det **tiltagende Forhold** $5:13$ er den $\frac{5}{13} < 1$; $-13:-5$ er derimod et tiltagende Forhold; thi $-13 < -5$; men Exponenten $\frac{13}{5}$ er her større end 1, ligesom den i det aftagende Forhold $-5:-13$ er $\frac{5}{13} < 1$. Forholdet $7:7$ er et Liigheds-Forhold og deri Exponenten 1; $24:-8$; eller $-24:+8$ har som Exponent -3.

79. Forkl. To ligestore Forholde, forbundne med Liigheds-Tegn, kaldes en **Proportion**; de fire Størrelser eller Lede, der danne Proportionen, siges at være **proportionale**.

Begge Forledene eller begge Efterledene siges at være Proportionens **eensstaaende** Leed. Det første og fjerde Leed kaldes **Yderlede**, det andet og tredie **Mellemlede**.

En **sammenhængende** Proportion er den, hvori begge Mellemledene ere ligestore. Et saadant Mellemleed siges at være en **Mellemproportionalstørrelse** mellem de to Størrelser, der danne Proportionens Yderlede.

Have vi saaledes Proportionen

$$a:b = c:d$$

eller

$$24:8 = 15:5$$

ere a og c, som begge ere Forlede, eller b og d, som begge ere Efterlede, Proportionens eensstaaende Lede, ligeledes 24 og 15, eller 8 og 5; Yderledene ere a og d, eller 24 og 5, Mellemledene b og c, eller 8 og 15.

$$a:b = b:c$$
$$32:8 = 8:2$$

ere sammenhængende Proportioner; og b er altsaa Mellemproportionalstørrelsen mellem a og c, 8 mellem 32 og 2.

Till. 1. Ere to eensstaaende Lede i en Proportion ligestore, ere de to andre ogsaa ligestore. F. Ex.

$$a:b = a:d$$

her er $b = d$; thi, da Exponenten er den samme, maa, hvis denne betegnes med e, $a = be$ og $a = de$; altsaa $b = d$. Proportionen bestaaer altsaa egentligen af samme Forhold, blot gjentaget.

Till. 2. Ere tre Lede, som have samme Plads i en Proportion, ligestore, er det fjerde det ogsaa.

$$\begin{array}{c} a:b = c:d \\ a:b = c:g \\ \hline d = g \end{array}$$

Thi, da

$$\begin{array}{c} a:b = c:d \\ a:b = c:g \\ \hline c:d = c:g \end{array} \quad (\S\ 77,\ \text{Till. } 4)$$

Altsaa $d = g$. (Till. 1)

80. Forkl. To Størrelser siges at være **omvendt proportionale** med to andre, naar Forholdet, som findes mellem disse, er saadant, at, hvis dets Forleed ombyttedes med Efterledet, det da var ligestort med Forholdet mellem de to andre Størrelser.

F. Ex. 18 og 8 ere omvendt proportionale med 4 og 9; thi, omvende vi Forholdet $18:8$, faae vi Forholdet

$$8:18 = 4:9.$$

Reciprokt proportionale ere derimod to Størrelser med to andre, naar en rigtig Proportion opstaaer, i det disse tages som Mellemlede, hine som Yderlede.

F. Ex. 24 og 8 ere reciprokt proportionale med 16 og 12; thi

$$24 : 16 = 12 : 8.$$

Till. Forholdet mellem to Brøker er stedse omvendt mod Forholdet af to andre Brøker, der ere dannede, ved i hine at ombytte Tæller og Nævner. F. Ex. $\frac{18}{5}$ og $\frac{9}{10}$ ere omvendt proportionale mod $\frac{5}{18}$ og $\frac{10}{9}$; eller

$$\tfrac{18}{5} : \tfrac{9}{10} = \tfrac{10}{9} : \tfrac{5}{18}.$$

Ogsaa ere to hele Tal omvendt proportionale med to Brøker, der have 1 til Tæller og disse Tal til Nævner.

$$7 : 9 = \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{7}$$

eller almindeligen

$$a : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

81. Forkl. Have to Størrelser et fælleds Maal, saa er Forholdet mellem samme *commensurabelt*, og Størrelserne selv siges at være *commensurable*. Saaledes ere hvilkesomhelst hele Tal commensurable; thi Eenheden er deres fælleds Maal. Ligeledes ere to Brøker, som lade sig udtrykke med hele og endelige Tal, commensurable; thi en Brøk med 1 til Tæller og deres Nævneres fælleds delelige Tal til Nævner, bliver deres fælleds Maal. F. Ex. Brøkerne $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{9}$ have saaledes, som fælleds Maal $\frac{1}{72}$ og ere altsaa commensurable.

Det *irrationale* Forhold, hvis Exponent er en irrational Størrelse, og som stedse opstaaer, naar en irrational Størrelse sammenlignes med en rational, er saaledes et incommensurabelt Forhold.

Till. 1. I et commensurabelt Forhold findes Exponenten let; indeholdes nemlig det fælleds Maal m Gange i Forledet, n Gange i Efterledet, bliver Exponenten $\frac{m}{n}$. F. Ex. 576 : 306 er saaledes et commensurabelt Forhold, da 18 er det fælleds Maal; men 18 indeholdes 32 Gange i 576, 17 Gange i 306; altsaa er Exponenten $\frac{32}{17}$; det lader sig altsaa let afgjøre, om dette Forhold er liigt et andet, f. Ex. 416 : 221, i det vi ligeledes her søge Exponenten, ved at dividere begge Lede med det fælleds Maal 13. Derimod lader Exponenten i det incommensurable Forhold sig ikke saaledes bestemme, da samme ikke kan angives med hele og endelige Tal. Imidlertid kan man tage et saa lidet Maal af Efterledet, at dette Maal indeholdes et vist Antal Gange i Forledet, og giver kun en liden Rest, mindre end selve Maalet; Exponenten nærmer sig da $\frac{m}{n}$, hvis vi antage, at $\frac{1}{n}$ af Efterledet indeholdes paa det Nærmeste m Gange i Forledet; men ved at tage n saare stor, kunne vi gjøre Resten saa liden, som vi ville, og altsaa Tilnærmelsen saa stor, vi ønske. Have vi nu et andet Forhold, og kunne godtgjøre, at, naar vi ogsaa af dettes Efterled tage $\frac{1}{n}$, hvor n kan være et hvilketsomhelst stort Tal, dette Maal da indeholdes i Forledet m Gange, med en Rest ligeledes mindre end Maalet: altsaa Exponenten ligeledes nærmer sig til samme $\frac{m}{n}$, hvor store end m og n monne være, ville vi slutte, at disse to Forholde ogsaa maae være ligestore.

Till. 2. Saadanne to incommensurable Forholde kunne altsaa, naar de ere ligestore, danne en Proportion, der kaldes ogsaa *incommensurabel*; den er *irrational*, hvis Forholdene ere irrationale.

$$\sqrt{2} : 1 = \sqrt{8} : 2$$

er saaledes en incommensurabel og tillige irrational Proportion;

thi vi finde, naar vi udregne Qvadratrødderne $\sqrt{2}$ og $\sqrt{8}$, at, hvilken Deel vi tage af Efterledet 1, f. Ex. $\frac{1}{1000}$, vil samme indeholdes ligesaa mange Gange i $\sqrt{2} = 1,414\ldots$, som $\frac{1}{1000}$ af 2 indeholdes i $\sqrt{8} = 2,828\ldots$

82. Læres. I enhver geometrisk Proportion er Productet af Yderledene liigt Productet af Mellemledene.

Bev. Proportionen være

$$a : b = c : d.$$

Exponenten i begge Forholdene maa være den samme; vi ville betegne den med e; altsaa er

$$a = be;\quad c = de$$

eller Proportionen bliver

$$be : b = de : d.$$

Sammenstille vi her Producterne af Yderledene og Mellemledene, faae vi

$$be \times d \qquad b \times de$$

men disse bestaae af samme Factorer, ere altsaa ligestore; eller

$$bed = bde.$$

Men, ved at indsætte $be = a$; $de = c$, faaes

$$ad = bc.$$

Till. Haves en sammenhængende Proportion, er Productet af Yderledene liig Qvadratet af Mellemledet

$$\frac{a : b = b : d}{ad = bb = b^2.}$$

83. Læres. Have vi to Producter, hvert bestaaende af to Factorer, vil en Proportion kunne dannes, i det vi tage Factorerne af det ene Product til Yderlede, af det andet Product til Mellemlede.

Er $ab = cd$, have vi Proportionen

$$a : c = d : b.$$

Thi, er $ab = cd$, og vi dividere med c, haves

$$\frac{ab}{c} = d$$

divideres dernæst med b, faae vi

$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}.$$

Men disse to Qvotienter ere Exponenterne i Forholdene $a : c$ og $d : b$; altsaa

$$a : c = d : b.$$

Paa samme Maade bevises, ved at dividere med andre Factorer,

$$a : d = c : b$$
$$b : d = c : a$$
$$d : a = b : c.$$

Till. 1. Haves $ac = b^2$, dannes den sammenhængende Proportion

$$a : b = b : c.$$

Till. 2. En Proportions Rigtighed prøves, naar Productet af Yderledene sammenlignes med Productet af Mellemledene; hvis begge findes ligestore, er Proportionens Rigtighed godtgjort. Haves nemlig Forholdene

$$a : b \qquad c : d$$

og vi ikke kunne undersøge Exponenterne; men derimod finde

$$ad = bc$$

vilde disse Producter jo give

$$a : b = c : d$$

altsaa ere de to Forholde ligestore.

84. Opg. Til tre Størrelser at søge 4de Proportionalstørrelse.

Opl. De to Størrelser, der skulle være Mellemlede, multipliceres, og Productet divideres med det bekjendte Yderleed.

Er altsaa Proportionen

$$a : b = c : x$$

faae vi

$$x = \frac{bc}{a}.$$

F. Ex. $a = 13$, $b = 48$, $c = 117$, da er

$$x = \frac{48 \times 117}{13} = 432$$

og Proportionen altsaa $13 : 48 = 117 : 432$.

Bev.

$$\frac{\frac{a : b = c : x}{ax = bc}}{x = \frac{bc}{a}.}$$

85. Opg. Til to Størrelser at søge en Mellemproportional Størrelse.

Opl. Productet af begge Størrelser tages, og deraf uddrages Qvadratroden; altsaa, hvis vi have a og b, er Mellemproportional-Størrelsen $x = \sqrt{ab}$.

F. Ex. $a = 375$; $b = 15$ saa er

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{375 \times 15} \\ &= \sqrt{5625} \\ &= 75 \end{aligned}$$

altsaa Proportionen

$$375 : 75 = 75 : 15.$$

Bev. Haves Proportionen

$$a : x = x : b$$

da er $\quad x^2 = ab$

altsaa $\quad x = \sqrt{ab}$

Till. I de fleste Tilfælde vil en saadan Mellemproportional-Størrelse blive irrational. F. Ex. 3 og 5 have som Mellemproportional-Størrelse

$$x = \sqrt{15}.$$

Forholdene blive altsaa begge irrationale; men Rigtigheden af denne irrationale Proportion

$$3 : \sqrt{15} = \sqrt{15} : 5$$

der i det Ovenstaaende er godtgjort, kan prøves ved at bestemme $\sqrt{15} = 3{,}873\ldots$

Exponenten er her i første Forhold

$$\frac{3}{3{,}873} = 0{,}7746\ldots$$

men i det andet Forhold ligeledes

$$\frac{3{,}873\ldots}{5} = 0{,}7746\ldots$$

86. Læref. Ved en geometrisk Proportion kan, ved at omstille Ledene, foretages flere Forandringer, nemlig:

1) Forholdene kunne ombyttes, saa det første Forhold bliver det andet, det andet stilles først.
2) Ledene i begge Forholdene kunne ombyttes, saa at Forledene blive Efterlede, Efterledene Forlede.
3) Mellemledene kunne ombyttes, eller ogsaa Yderledene.

Bev. Have vi Proportionen

$$a : b = c : d,$$

da er

$$1)\quad c : d = a : b$$
$$2)\quad b : a = d : c$$
$$3)\quad a : c = b : d$$

eller
$$d : b = c : a.$$

Hvis Exponenten, der maa være i begge Forholde den samme, betegnes med e, kunne vi omskrive Forledene, hvor fornødent gjøres, eller sætte $a = be$, ligeledes $c = de$. Vi finde saaledes efter første Forandring Exponenten uforandret.

2) ved anden Forandring er Exponenten i første Forhold

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{be} = \frac{1}{e}$$

i andet Forhold

$$\frac{d}{c} = \frac{d}{de} = \frac{1}{e}$$

altsaa Exponenten den samme i begge Forhold, nemlig $\frac{1}{e}$.

3) ved tredie Forandring er Exponenten i første Forhold $a : c$

$$\frac{a}{c} = \frac{be}{de} = \frac{b}{d}$$

men saa stor er ogsaa Exponenten i det andet Forhold $b : d$.

I Proportionen

$$d : b = c : a$$

er Exponenten i første Forhold $\frac{d}{b}$,

i andet Forhold $\frac{c}{a} = \frac{de}{be} = \frac{d}{b}$.

Ogsaa kan Rigtigheden bevises ved at tage Productet af Yderledene og sammenligne det med Productet af Mellemledene.

Af den oprindelige Proportion

$$a : b = c : d$$

finde vi, at

$$ad = bc.$$

Men i Forandringen 1) befindes disse Producter at være ligestore, nemlig

$$cb = da$$
$$2)\quad bc = ad$$
$$3)\quad ad = cb$$

eller
$$da = bc.$$

87. Læres. Vi forandre en geometrisk Proportion ved at forandre Ledenes Størrelse saaledes:

1) Summen eller Differentsen af Forledet og Efterledet i det ene Forhold forholder sig enten til Forledet eller Efterledet, som Summen eller Differentsen af Forleed og Efterleed i det andet Forhold forholder sig enten til Forledet eller Efterledet.

2) Summen eller Differentsen af begge Forholdes Forlede til Summen eller Differentsen af begge Forholds Efterlede, som eet af Forholdene.

Bev. Have vi altsaa Proportionen

$$a : b = c \quad d$$

Saa er:

$$1)\quad a \pm b : a = c \pm d : c$$

eller
$$a \pm b : b = c \pm d : d$$

$$2)\quad a \pm c : b \pm d = a : b$$

eller
$$= c : d.$$

Vi indsee, at, hvis Exponenten er i den oprindelige Proportion e; vil Exponenten i Forandringen 1) findes i første Forhold at være

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{be \pm b}{be} = \frac{e \pm 1}{e}$$

i det andet Forhold

$$\frac{c \pm d}{c} = \frac{de \pm d}{de} = \frac{e \pm 1}{e}.$$

Eller, hvis Efterledene b og d ere tagne, er Exponenten af første Forhold liig

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{be \pm b}{b} = e \pm 1$$

i andet Forhold

$$\frac{c \pm d}{d} = \frac{de \pm d}{d} = e \pm 1.$$

I Forandringen 2) er i første Forhold Exponenten

$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{be \pm de}{b \pm d} = e$$

altsaa den samme, som i Forholdene $a:b$ eller $c:d$, hvilke tages som sidste Forhold i den forandrede Proportion.

Undersøge vi Producterne af Yderledene og Mellemledene, faae vi

1) $ac \pm bc$ $\quad$ $ac \pm ad$

eller $\quad ad \pm bd$ $\quad$ $bc \pm bd$

men, da $ad = bc$, eftersom disse to Producter udledes af den oprindelige Proportion, ere ogsaa her Producterne af Yderledene og Mellemledene ligestore.

2) Haves $a \pm c : b \pm d = a : b$, da er Productet af Yderledene

$$ab \pm cb$$

Productet af Mellemledene

$$ba \pm da$$

hvilke Producter ere ligestore.

Havde vi taget som sidste Forhold $c:d$, vilde vi ligeledes have

$$ad \pm cd = bc \pm cd.$$

88. Læres. En geometrisk Proportion forandres.

1) Ved at multiplicere eller dividere Proportionen heelt igjennem med een og samme Størrelse.
2) Ved at multiplicere eller dividere det ene Forhold med een Størrelse, det andet enten aldeles ikke eller med en anden Størrelse.
3) Ved at multiplicere to eensstaaende Lede med een Størrelse og de to andre eensstaaende Lede enten aldeles ikke eller med en anden Størrelse.

Bev. Haves altsaa Proportionen

$$a:b = c:d$$

ville vi saaledes faae

1) $ma : mb = mc : md$

2) $ma : mb = nc : nd$

3) $ma : nb = mc : nd$

I Forandringerne 1) og 2) bliver Exponenten uforandret; thi, sætte vi $a = be$, altsaa tillige $c = de$, indsee vi, at Forledet bliver liig e Gange Efterledet, at altsaa e er Exponenten i begge Forholde. I 3) derimod er Exponenten i første Forhold

$$\frac{ma}{nb} = \frac{mbe}{nb} = \frac{me}{n}$$

det andet ligeledes

$$\frac{mc}{nd} = \frac{mde}{nd} = \frac{me}{n}$$

altsaa ere Exponenterne ligestore.

Havde vi, i Stedet for at multiplicere med Størrelserne m og n, divideret med samme eller andre Størrelser, vilde man paa lignende Maade have indseet Rigtigheden af Sætningen.

Till. Især bliver herved en Forkortning for den praktiske Regning mulig, ligesom man ogsaa hensigtsmæssigen ophæver Brøker, ved at multiplicere med Nævneren eller med Nævnernes fælleds delelige Tal.

F. Ex. $160 : 168 = 2\frac{11}{12} : 3\frac{1}{16}$.

Som i første Forhold divideres med 8, i sidste Forhold multipliceres med 48; altsaa

$$20 : 21 = 140 : 147.$$

89. Læres. To eller flere Proportioner, som have ligestore Exponenter, kunne adderes, Leed for Leed, og de saaledes fremkomne Summer danne en rigtig Proportion.

Bev. Haves følgende Proportioner, i hvilke Exponenten sees at være den samme,

$$ae : a = be : b$$
$$ce : c = de : d$$

da er

$$ae + ce : a + c = be + de : b + d$$

Forledet indeholder nemlig Efterledet e Gange, i det

$$ae + ce = e(a + c)$$
$$be + de = e(b + d).$$

Till. 1. Paa lige Maade vilde vi kunne have subtraheret Proportionerne:

$$ae - ce : a - c = be - de : b - d$$

her er nemlig Exponenten ligeledes uforandret, da

$$ae - ce = e(a - c)$$
$$be - de = e(b - d).$$

Till. 2. Ere flere Forholde givne, der alle ere ligestore med eet Forhold, dannes saaledes Proportioner, der have ligestore Exponenter, f. Ex.

$$a : b = c : d$$
$$a : b = f : g$$
$$a : b = h : i.$$

Addere vi her Leed for Leed, have vi:

$$3a : 3b = c + f + h : d + g + i$$

forkorte vi dernæst med Tallet 3, faae vi det ene Forhold som Summen af alle de øvrige Forholdes Forlede til Summen af deres Efterlede.

90. Læres. Naar to eller flere Proportioner multipliceres med hinanden, Leed for Leed, vil det Udkomne danne en rigtig Proportion.

Bev. Havde vi først de to Proportioner:

$$a : b = c : d$$
$$f : g = h : i$$

vilde

$$af : bg = ch : di$$

thi, betegne vi Exponenten i den første Proportion med e, i den anden Proportion med m, ville vi have

$$a = be \qquad c = de$$
$$f = gm \qquad h = im$$

altsaa

$$af = bgem; \quad ch = diem$$

men i Forholdet

$$af : bg = bgem : bg$$

er saaledes em Exponenten, og samme Exponent findes i Forholdet

$$ch : di = diem : di$$

Ligeledes kunne vi bevise Rigtigheden ved at sammenligne Productet af Yderledene med Productet af Mellemledene. Af den første Proportion følger

$$ad = bc$$

af den anden

$$fi = gh$$

altsaa

$$adfi = bcgh$$

men disse Producter indeholde samme Factorer, som Producterne af Yderledene og Mellemledene i den omhandlede Proportion.

Haves endnu en Proportion eller i Alt følgende tre

$$a : b = c : d$$
$$f : g = h : i$$
$$k : l = n : p$$

er ligeledes

$$afk : bgl = chn : dip;$$

thi, af de to første følger, som forhen

$$af : bg = ch : di$$

endvidere haves

$$k : l = n : p$$

altsaa

$$afk : bgl = chn : dip.$$

Till. 1. To Proportioner, dividerede med hinanden, Leed for Leed, danne ligeledes en rigtig Proportion.

altsaa, hvis vi have

$$a : b = c : d$$
$$f : g = h : i$$

er

$$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{i}$$

Ogsaa her ere Exponenterne ligestore; nemlig, da $a = be$, $f = gm$, og ligeledes $c = de$, $h = im$, ere Exponenterne i begge Forholde $\frac{e}{m}$.

Ligeledes bevises Rigtigheden ved at undersøge Producterne af Yderledene og Mellemledene; samme ere ligestore, thi, da $ad = bc$ og $fi = gh$, er

$$\frac{ad}{fi} = \frac{bc}{gh}.$$

Till. 2. Hvis alle Lede i en Proportion enten qvadreres, kuberes eller ophøies til samme Potens, fremkommer ogsaa en rigtig Proportion. Er saaledes

$$a : b = c : d$$

saa er

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2.$$

Denne Potensation er nemlig kun en Anvendelse af Sætningen paa samme Proportion gjentagen; thi

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \\ a : b = c : d \\ \hline a^2 : b^2 = c^2 : d^2 \end{array}$$

Føie vi hertil endvidere

$$a : b = c : d$$

have vi

$$a^3 : b^3 = c^3 : d^3$$

og saaledes for høiere Potenser.

Till. 3. Vi kunne ogsaa uddrage Qvadrat-, Kubikroden eller hvilkensomhelst høiere Rod af alle Ledene i en Proportion og faae da en rigtig Proportion. Saaledes

$$a : b = c : d$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$$

thi, sæt at denne Proportion ikke er rigtig, maatte vi dog stedse til $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ kunne søge fjerde Proportionalstørrelse (§ 84); denne være x, eller

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : x$$

følgeligen omvendt

$$(\sqrt{a})^2 : (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{c})^2 : x^2$$

ɔ: $\quad a : b = c : x^2$

men

$$a : b = c : d$$

altsaa (§ 78, Till. 2)

$$x^2 = d$$

hvoraf $\quad x = \sqrt{d}$

saa at $\sqrt{d}$ er fjerde Leed, eller Proportionen rigtig.

91 Læres. Ere Forledene af een Proportion liig Efterledene af en anden, danne de øvrige Lede i deres Orden en rigtig Proportion.

Bev. $\quad a : b = c : d$

$$\frac{f : a = g : c}{f : b = g : d}$$

multiplicere vi nemlig Leed for Leed, haves

$$af : ab = cg : cd$$

men denne Proportion forkortes i første Forhold med a, i andet med c (§ 88), hvorved den nye Proportion fremkommer.

Till. Ere de eensstaaende Lede i een Proportion liig samme eensstaaende Lede i en anden Proportion, danne de øvrige Lede en rigtig Proportion, naar Forledene tages af den ene Proportion, Efterledene af den anden. F. Ex.

$$a : b = c : d$$

$$f : b = g : d$$

hvoraf udledes

$$a : f = c : g$$

vi forandre nemlig blot den sidste Proportion (§ 86) til

$$b : f = d : g$$

92. Læres. Ere Yderledene af een Proportion liig Mellemledene af en anden, danne de øvrige Lede i deres Orden en rigtig Proportion.

Bev. Haves

$$a : b = c : d$$

$$\frac{b : g = h : c}{a : g = h : d.}$$

Her er nemlig ogsaa

$$ab : bg = ch : cd$$

der, forkortet i første Forhold med b, i andet med c, giver

$$a : g = h : d.$$

Till. Haves to Proportioner, der have samme Yderlede, eller samme Mellemlede, dannes en ny Proportion, hvortil tages som Yderlede de to Lede af den ene Proportion, som Mellemlede de to Lede af den anden Proportion. F. Ex.

$$a : b = c : d$$

$$a : h = i : d$$

forandre vi den sidste Proportion (§ 86), have vi begge saaledes:

$$a : b = c : d$$

$$\frac{h : a = d : i}{h : b = c : i.}$$

altsaa

93. Forkl. Et Forhold siges at være sammensat af flere andre, naar dets Forleed er Productet af Forledene i disse Forholde, dets Efterleed Productet af samme Forholdes Efterlede. F. Ex. haves Forholdene

$$a : b$$
$$c : d$$
$$f : g$$

da er Forholdet $acf : bdg$ sammensat af disse tre Forholde.

Till. 1. Vi betegne, at saadanne flere Forholde skulle sammensættes, ved at slutte de enkelte Forholde i Parentheser og forbinde disse Parentheser med $+$; f. Ex. ovenstaaende sammensatte Forhold betegnes

$$(a : b) + (c : d) + (f : g).$$

Till. 2. Exponenten i det sammensatte Forhold er liig Producterne af de enkelte Forholds Exponenter. F. Ex. $(9:8) + (5:2) + (7:3) = 9 \times 5 \times 7 : 8 \times 2 \times 3 = 315 : 48$. I sidste Forhold er Exponenten $\frac{315}{48} = \frac{9}{8} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{3}$.

94. Forkl. Et multipliceret Forhold er et Forhold, der er sammensat af samme Forhold, taget flere Gange.

Till. 1. Det multiplicerede Forhold betegnes ved at skrive det enkelte Forhold, sluttet i Parenthes, og foran, som Coefficient, Tallet af Gangene, samme skal tages. F. Ex. $2(a : b)$, $3(m : n)$ o. s. v.

Till. 2. Er i det multiplicerede Forhold det enkelte Forhold taget to Gange, kaldes det dupliceret, er det taget tre Gange, kaldes det tripliceret.

Till. 3. To Tals Qvadrater staae i dupliceret Forhold af Tallene. Saaledes er

$$16 : 9 = 2(4 : 3).$$

Ligeledes staae to Tals Kuber i tripliceret Forhold af Tallene

$$27 : 8 = 3(3 : 2).$$

95. Læres. Naar vi have to Proportioner, i hvilke eet Forhold af den ene er saaledes beskaffent, at dets Efterleed er liig Forledet af det tilsvarende Forhold i den anden Proportion, ville de to andre Lede af disse Forholde danne et nyt Forhold, der er liigt det sammensatte Forhold, der er dannet af Proportionernes andre Forholde.

Bev. Have vi saaledes

$$a : b = c : d$$
$$b : f = g : h$$

er
$$a : f = (c : d) + (g : h).$$

Thi, i Følge § 90, er

$$ab : bf = cg : dh$$

naar det første Forhold forkortes med b, faaes $a : f = cg : dh = (c : d) + (g : h)$.

Till. 1. Paa lignende Maade vil af Proportionerne

$$a : b = c : d$$
$$b : f = g : h$$
$$f : i = k : l$$

dannes
$$a : i = (c : d) + (g : h) + (k : l).$$

Till. 2. Saadanne to Størrelser, hvis Forhold er liigt Forholdet, sammensat af flere andre Størrelsers Forholde, siges at staae i sammensat Forhold til disse; saaledes staaer i Hovedsætningen a og f i sammensat Forhold til c og d, g og h, a og i i sammensat Forhold til c og d, g og h, k og l.

Till. 3. Er Forholdet mellem to Størrelser liigt det af flere andre Forholde sammensatte Forhold, kunne vi ombytte hvilketsomhelst af disse enkelte Forholde med et andet, som dermed er ligestort. F. Ex.

$$512 : 35 = (96 : 15) + (112 : 49)$$

da $96 : 15 = 32 : 5$, er

$$512 : 35 = (32 : 5) + (112 : 49).$$

96. Læref. Haves to Størrelser, der staae i sammensat Forhold til fire andre, og disse fire ere omvendt proportionale, ere hine to Størrelser ligestore.

Bev. Haves

$$a : b = (c : d) + (f : g)$$

og tillige

$$c : d = g : f$$

saa er $a = b$

thi $a : b = cf : dg$ (§ 93)

men $cf = dg$

altsaa $a = b$.

Till. Ere de to Størrelser, der staae i sammensat Forhold til fire andre, ligestore, ere disse fire omvendt proportionale. Er

$$a : b = (c : d) + (f : g)$$

og $a = b$

$$c : d = g : f.$$

thi da

$$a : b = cf : dg$$

er $cf = dg$

altsaa

$$c : d = g : f.$$

Proportionslærens Anvendelse i den praktiske Regning.

97. I saare mange Tilfælde forekomme i det Praktiske Størrelser, som blive Gjenstand for Beregning, hvilke staae i Forhold til hinanden, og ved hvilke vi have at løse den Opgave, til tre Størrelser at søge den fjerde Proportionalstørrelse. Der er saaledes samme Forhold mellem to forskjellige Mængder af samme Vare og Betalingen for disse Mængder; f. Ex. 3 ℔ og 7 ℔, som mellem 12 ß og 28 ß, forsaavidt 1 ℔ koster 4 ß. Vidste vi nu, at 3 ℔ koste 12 ß, men derimod ikke hvad 7 ℔ koste, vilde vi i Proportionen

$$3 \text{ ℔} : 7 \text{ ℔} = 12 \text{ ß} : x$$

søge x eller fjerde Proportionalstørrelse.

Dog det er ikke blot ved Kjøb og Salg, men i mange andre Tilfælde at saadanne Proportioner opstaae; skulle vi saaledes reducere Maal eller Vægt efter et Lands Regning til samme, gjældende i et andet Land, da skeer denne Reduction ogsaa ved en Proportion. F. Ex. 16 franske Metres udgjøre 51 danske Fod, hvormange Fod udgjøre da 13,8 Metres. Her er Proportionen

16 Metres : 13,8 Metres = 51 danske Fod : x, og vi finde $x = 43,9875$ Fod.

Iligemaade ville Renter i lige Tid og med lige Rentefod, staae i Forhold til Capitalerne, eller for lige Capitaler og ulige Tider, i Forhold til Tiden; endvidere vil Arbeide af samme Art kræve Arbeidskræfter, der staae i Forhold til Arbeidsmængderne; eller, hvis Arbeidskraften forbliver uforandret, vil Tiden staae i Forhold til Arbeidsmængden o. s. v. Her opstaaer altsaa ligeledes en Proportion, hvori vi kunne søge fjerde Leed, forsaavidt dette maatte være ubekjendt.

98. Vi indsee saaledes, hvor ofte der vil være Anledning til at anvende Regula-Detri, eller Tretals-Regningen, og anføre her de Regler, der ved samme almindeligen følges.

Vi opsætte Stykket sædvanligen ikke aldeles i Form af en Proportion. F. Ex. 1 ℔ koster 3 Rbdlr. hvad da 7 ℔ skrives

1 ℔ — 3 Rbdlr. — 7 ℔

medens Proportionen er

1 ℔ : 7 ℔ = 3 Rbdlr. : x

saaledes er, hvis vi følge denne Opsætning for et Regula-Detri-Stykke, sammes første og tredie Leed de to Lede af det ene Forhold; Mellemledet udgjør derimod Forledet i det andet Forhold, hvis Efterleed vi søge. De Regler, som ved Udregningen iagttages, blive saaledes en nødvendig Følge af Proportionens Natur.

1) Stykkets første og tredie Leed maae være af eens Navn, eller, ere de det ikke, saa maae de gjøres dertil.

Da der næmlig kun er Forhold mellem eensartede Størrelser, maae disse Stykkets to Lede, der udgjøre det første Forholds tvende Lede, være eensartede, inden et egentligt Forhold kan finde Sted.

2) Facit eller det Leed, vi søge, bliver ligeartet med Stykkets Mellemleed.

Dette er Forledet i det andet Forhold, men eensartet dermed bliver det søgte Efterleed.

3) Stykkets Mellemleed multipliceres med sammes tredie Leed, hvorpaa divideres med første Leed.

Efter at første og tredie Leed, i Følge Reglen 1), ere bragte til at være eensartede, betragtes de som aldeles ubenævnte; thi det kommer blot an paa Forholdet mellem disse

Tal, ei paa deres Navn; saaledes kan multipliceres med dette Forholds Efterleed, divideres med dets Forleed, og fjerde Proportionalstørrelse bliver saaledes søgt efter § 84.

4) Stykkets første og tredie Leed, ligesom dets første og andet Leed, kunne multipliceres eller divideres med samme Tal, uden at dette forandrer Facit.

Dette, som skeer, enten for at bortskaffe Brøker, eller for at forkorte Stykket, er overeensstemmende med § 88.

Til disse Regler, der ere en nødvendig Følge af Proportionen, føies sædvanligen flere, som tjene især Begynderen til en sikker og bestemt Regnemaade. Disse, ligesom Exempler, hentede fra Beregning af Varer og deres Priis, giver Regnebogen. (Se Ursins Regnebog S. 39—75).

99. Men, ligesom der saaledes forelægges os Stykker, grundede paa den almindelige Proportion, ville vi ogsaa ofte anvende den omvendte Proportion (§ 80). F. Ex. Have vi to ligestore Rectangler, men med forskjellige Grundlinier, ere deres Høider omvendt proportionale med Grundlinierne; kjende vi altsaa disse og tillige den ene Høide, finde vi den anden Høide ved en omvendt Proportion. Er Arbeidet det samme, ville Arbeidskræfterne forholde sig omvendt, som Tiden; ligeledes, naar Betalingen er den samme, staaer Daglønnen i omvendt Forhold til Tiden. Hastighederne ere omvendt proportionale med Tiden; d. e. naar to Legemer gjennemløbe ligestor Vei, ville deres forskjellige Hastigheder staae i omvendt Forhold til den Tid, de have anvendt for at tilbagelægge Veien.

Den Regning, som grunder sig paa saadanne Forholde, kaldes omvendt Regula-Detri, for paa samme at anvende de sædvanlige Regula-Detri-Regler, maae Stykkets første og tredie Leed ombyttes d. e. det bekjendte Forholds to Lede.

F. Ex. 6 Mand kunne udføre et Arbeide i 4 Dage, hvor lang Tid bruge da 12 Mand. Dette Stykke opsættes

6 Mand — 4 Dage — 12 Mand

men, ligesom i Forholdet

6 Mand : 12 Mand,

Forleed og Efterleed maae ombyttes, vil ogsaa i Stykket første og tredie Leed ombyttes, hvorpaa Regningen udføres efter de sædvanlige Regler for Regula = Detri, i det ogsaa her søges Proportionens fjerde Leed.

100. De sammensatte Forholde begrunde den *sammensatte Regula=Detri*, som anvendes, naar vi skulle bestemme en Størrelse, der staaer i samme Forhold til en given, som det Forhold, der sammensættes af flere andre Forholde. F. Ex. To Parallelogrammer eller to Trekanter staae i sammensat Forhold af Grundlinier og Høider. Vide vi altsaa, at en Alen Tøi af $5\frac{1}{2}$ Qvarteers Brede koster 88 Rb/ß, kunne vi udregne, hvormeget Tøiet, der vil behøves til at bedække en Flade af 11 Alens Brede og 15 Alens Længde koster. Thi her skal Efterledet søges i et Forhold, der er ligestort med det Forhold, der sammensættes af Forholdet mellem Længderne d. e. 1 Al. : 15 Al. og Forholdet mellem Brederne d.e. $5\frac{1}{2}$ Qvarteer : 11 Al. $= 5\frac{1}{2} : 44$. Man opsætter ogsaa disse Stykker paa særegen Maade, nemlig Exemplet saaledes

$$\begin{array}{r}\text{1 Alens Længde}\\ 5\tfrac{1}{2}\text{ Qv. Brede}\end{array} > \text{88 Rb/ß} < \begin{array}{l}\text{15 Alens Længde}\\ \text{11 Alens Brede}\end{array}$$

hvor paa første Plads staae alle Forlede, paa tredie Plads alle Efterlede af de bekjendte Forholde, og paa anden Plads er stillet Forledet i det Forhold, hvortil vi skulle søge Efterledet.

Regningen udføres nu, efter at de tilsvarende Størrelser ere bragte til samme Navn, altsaa i Exemplet Breden 11 Alen

er forvandlet til 44 Qvarteer. For nu behørigen at sammensætte det bekjendte Forhold, multipliceres alle Ledene paa første Plads og ligeledes paa tredie Plads. Forkortninger kunne i Forveien foretages, i Følge Reglerne for den enkelte Regula=Detri.

101. Forsaavidt blandt de sammensættende Forholde er eet eller flere, som maae vendes om, skeer dette, inden Regningen begynder. Saaledes opstaaer den *omvendt sammensatte Regula=Detri*. Herhen høre Exempler, som efterstaaende. Med 2 Miils Fart i Timen tilbagelægges med Heste en Strækning paa en Sporvei, i 40 Minuter, hvor hurtigt kan samme Strækning tilbagelægges med en Dampvogn, som gjør en Miil i 12 Minuter. Opsætningen er saaledes.

$$\begin{array}{r}\text{2 Miil}\\ \text{1 Time}\end{array} > \text{40 Minuter} < \begin{array}{l}\text{1 Miil}\\ \text{12 Minuter.}\end{array}$$

Her maae 12 Minuter paa tredie Plads forvandles til $\frac{1}{5}$ Time, for at blive eensartet med Ledet paa første Plads, endvidere, da jo større Hastighed d.e. jo længere Vei i samme Tid, desto kortere Tid behøves for at tilbagelægge samme Veistrækning, maae 2 Miil og 1 Miil ombyttes. Behandles nu Stykket saaledes, og Størrelserne paa første og tredie Plads multipliceres, faae vi

$$1 \times 1 \text{ — 40 Min. — } 2 \times \tfrac{1}{5}$$

$$\text{ɔ:} \quad 1 \text{ — 40 Min. — } \tfrac{2}{5}$$

Altsaa $x = 16$ Minuter.

For denne Regning finde vi Anvendelse i flere Tilfælde, saasom: Volumen eller Rumfang af samme Materier staae i Forhold til deres Vægt; af forskjellige Materier i *ligefremt* Forhold af deres Vægt, men i *omvendt* Forhold af deres specifiske Vægt eller Vægtfylde d. e. den Materie, der er tungest, har mindst Rumfang. Vide vi saaledes, at 62 ℔ Vand, hvis Vægtfylde sættes 1, rumme 1 Kubikfod eller 1728 Kubiktommer, Hvormeget rummer da 46½ ℔ støbt Jern, hvis Vægtfylde er 7,2 ɔ: det støbte Jern er 7,2 Gange tungere end Vandet; her vendes ogsaa Tallene for Vægtfylden, 1 og 7,2 om, og Facit findes saaledes 180 Kubiktommer. Maal af samme Navn, f. Ex. Fod, har i de forskjellige Lande forskjellig Længde, og saadanne forskjellige Fodmaal sammenlignes derfor i Almindelighed ved at bestemme, hvormange Pariser-Linier gaae paa een Fod. Men, skal et Antal Fod, f. Ex. 317 engelske Fod, reduceres til danske, og vi vide, at 1 eng. Fod = 135,114 Par. Linier, 1 dansk Fod liig 139,13 Par. Linier, vil Antallet af Fod, efter forskjelligt Fodmaal, forholde sig omvendt som Tallene, der udtrykke Fodmaalets forskjellige Længde. Altsaa have vi

139,13 : 135,114 = 317 eng. Fod : x

eller, som Regula-Detri

139,13 — 317 eng. Fod — 135,114.

Men, ligesom her opstaaer en enkelt omvendt Reguladetri, opstaaer ved Qvadratmaalene eller Kubikmaalene en sammensat omvendt Reguladetri. Skulle vi saaledes forvandle 807 danske Kubikfod til engelskt Maal, og opsætte

$$\left.\begin{array}{l}139{,}13\\139{,}13\\139{,}13\end{array}\right\}\text{807 danske Kubikf.}\left\{\begin{array}{l}135{,}114\\135{,}114\\135{,}114.\end{array}\right.$$

Da blive alle Tallene paa første Plads ombyttede med Tallene paa tredie Plads; thi; baade jo længere, og jo bredere, og jo dybere Kubikmaale er, desto mindre bliver Antallet af saadanne Maal-Eenheder for samme Rumstørrelse. Vi regne altsaa

$135{,}114^3$ — 807 danske Kubikf. — $139{,}13^3$

og finde saaledes:

807 danske Kubikf. = 881,12 eng. Kubikfod.

102. Ved Stykker, der kunne henføres til den sammensatte Regula-Detri, enten den ligefremme eller omvendte, anvendes i Almindelighed en Regnemaade, som kaldes den Reesiske Regel. Denne opsættes saaledes, at paa venstre Side af en Streg opsættes x eller det endnu ubekjendte Efterleed i det sidste Forhold, modsat Forledet af samme; dernæst stilles under x alle Forlede af de bekjendte Forholde; modsat alle Efterlede i samme Forholde. Man undersøger dernæst, om nogle af Forholdene skulle omvendes, i hvilket Tilfælde de lige overfor hinanden staaende Lede ombyttes. Efter at behørige Multiplicationer og Divisioner ere foretagne med samme Tal paa begge Sider, for at ophæve Brøkerne eller forkorte, multipliceres alle Ledene paa hver Side. x faaer saaledes en Coefficient, hvormed tilsidst divideres, for at faae selve x eller Facit. F. Ex. Hvormange Procent vil Bekostningen for Muurstenene til en Bygning forøges, naar man, i Stedet for sædvanlige Flensborger-Steen, som ere 9 Tommer lange, 4¼ Tommer brede og 1¾ Tom. tykke, bruger Klinker, der ere 8 Tommer lange, 3¾ Tommer brede og 1¼ Tommer tykke, og som koste 6 Rbd. 64 ß Tusind, medens Flensborger-Steen koste 7 Rbd. 32 ß. Her sætte vi op

x	100 Rbd.
2 8 (9 Tom. lang)	(8 Tom. lang) 8 3
15 3¾ (4¼ Tom. bred)	(3¾ Tom. bred) 4¼ 17
5 1¼ (1¾ Tom. tyk)	(1¼ Tom. tyk) 1¾ 7
11 22 7⅓ Rbd.	6⅔ Rbd. 20 10
22 x	$\underbrace{3 \times 17 \times 7 \times 10}_{3570}$

x = $162\frac{4}{11}$ Rbd.

I dette Stykke maatte, efter at det var opsat, overeensstemmende med de anførte Regler, Stenenes Dimensioner ombyttes;

thi, jo længere, bredere eller tykkere Stenene ere, desto mindre vil Bekostningen være; derimod ombyttes ikke det sidste Forhold; thi Bekostningen i det Hele vil blive desto større, jo mere hvert Tusind koster. Brøkerne ere dernæst ophævede ved at multiplicere paa begge Sider, og Forkortninger ere endvidere foretagne. Rigtigheden af Regnemaaden indsees let.

103. Forskjellig fra den Reesiske Regel er Liigheds-Reglen eller Kjædereglen, hvor Opsætningen er en anden, ligesom ogsaa en anden Art Stykker behandles efter samme. Søge vi en Størrelse, der er liig en given, men hvorved en Række af Sammenligninger tillige ere givne, hvorved Facit lader sig bestemme, udtrykt paa den forlangte Maade, saa opsætte vi, ligesom i den Reesiske Regel, det Søgte, betegnet med x, paa venstre Side af en Streg eller Liighedstegnet, stille ligeover for paa høire Side den Størrelse, som er dermed ligestor, vælge blandt de givne Sammenligninger den, hvori findes samme Navn, som det, der stod paa høire Side; dette Leed sættes paa venstre Side, det tilsvarende paa høire Side af Liighedstegnet, paa venstre Side atter samme Navn, som sidst stilledes paa høire Side o. s. v. indtil paa høire Side udkommer det Navn, hvorom der spurgtes. Den øvrige Regning bliver da, som ved den Reesiske Regel.

F. Ex. En engelsk Miil valsede Jernspor med Steenblokke og Stole koster 5456 Pund Sterling, hvormeget bliver det for en dansk Miil, naar den engelske Miil holder 5280 engelske Fod, den danske Miil 24000 danske Fod, 69 engelske Fod ere liig 67 danske og 1 Pd. Sterl. er $8\frac{12}{17}$ Rbd. Her opsættes

x Rbdlr.	=	1 dansk Miil
1 dansk Miil	=	24000 danske Fod
67 danske Fod	=	69 eng. Fod
5280 eng. Fod	=	1 eng. Miil
1 eng. Miil	=	5456 £Sterl.
1 £Sterl.	=	$8\frac{12}{17}$ Rbd.

eller ogsaa kortere

x Rbdlr.	24000 danske Fod 100
67 danske Fod	69 eng. Fod
11 22 5280 eng. Fod	5456 £Sterl.
17 1 £Sterl.	$8\frac{12}{17}$ Rbdlr. 148 74

$$11 \times 17 \times 67 \; x = 100 \times 69 \times 5456 \times 74$$
$$12529 \; x = 2785833600$$
$$x = 222350,834$$
$$= 222350 \text{ Rbd. } 80 \text{ ß}$$

Under Regningen maa man iagttage nøie at holde Kjæden vedlige ɔ: begynde paa venstre Side med samme Navn, hvormed man ophørte paa høire Side. Adskillige Mellemsætninger maae ofte tilføies, f. Ex. hvor høiere Navn reduceres til lavere eller omvendt. Kjæden er sluttet, naar paa høire Side udkommer samme Navn, som det omspurgte.

Rigtigheden af denne Regningsmaade oplyses bedst ved at opløse Stykket i flere enkelte Reguladetri-Stykker. F. Ex. Ovenstaaende giver

I. 1 £Sterl. — $8\frac{12}{17}$ Rbdlr. — 5456 £Sterl.

Facit betegne vi her med m, altsaa

$$m = \frac{8\frac{12}{17} \times 5456}{1}.$$

Men saameget koster ogsaa 5280 eng. Fod.

II. 5280 eng. Fod — m — 69 eng. Fod.

Dette Facit betegne vi med n, altsaa

$$n = \frac{69m}{5280} = \frac{69 \times 8\frac{1}{1}\frac{2}{7} \times 5456}{5280 \times 1}$$

men n maa altsaa ligeledes gives for 67 danske Fod, følgeligen

III. 67 danske Fod — n — 24000 danske Fod

Facit her er x, altsaa

$$x = \frac{24000 \times n}{67} = \frac{24000 \times 69 \times 8\frac{1}{1}\frac{2}{7} \times 5456}{67 \times 5280 \times 1}.$$

Forkortningerne paa begge Sider ere altsaa foretagne i Tæller og Nævner af dette Brøk-Udtryk.

104. Selskabsreglen eller Blandingsreglen (Alligationsreglen) tjener til at dele et givet Tal i Dele, der staae i Forhold til flere givne Tal. Den anvendes, hvor Flere deeltage i eet eller andet Foretagende og altsaa, i Forhold til de af dem indskudte Summer, dele den af samme flydende Fordeel eller Tab; den faaer da Navnet Selskabsreglen; men Regnemaaden er aldeles den samme ved Blandings- eller Alligationsreglen, som anvendes for at danne en Blanding af et givet Maal eller Vægt, hvortil skal tages forskjellige Materier i et bestemt Forhold. Følgende Exempler ville nærmere oplyse dette.

a) A, B, C deeltage i et Handelsforetagende; A med 3500 Rbdlr., B med 1350 Rbdlr., C med 1150 Rbdlr. Gevinsten er 576 Rbdlr. Hvormeget vinder hver?

b) Guld, Sølv og Kobber skulde sammensættes i følgende Forhold, at til 20 Dele Guld tages 1 Deel Sølv og 3 Dele Kobber, hvormeget tager man af hver Sort, naar man vil have 315 Lod?

Disse to Stykker opsættes saaledes:

a) A 3500 Rbdlr.
   B 1350 —
   C 1150 —

Ialt 6000 Rbd. — 576 Rbd. — 3500 Rbd.
Sv. 336 Rbd.

6000 Rbd. — 576 Rbd. — 1350 Rbd.
Sv. $129\frac{3}{5}$ Rbd.

6000 Rbd. — 576 Rbd. — 1150 Rbd.
Sv. $110\frac{2}{5}$ Rbd.

Saaledes findes hvilken Sum tilkommer Enhver.

b) Guld 20 Dele
   Sølv 1 —
   Kobber 3 —

24 Dele — 315 Lod — 20 Dele
Sv. $262\frac{1}{2}$ Lod.

24 Dele — 315 Lod — 1 Deel
Sv. $13\frac{1}{8}$ Lod.

24 Dele — 315 Lod — 3 Dele
Sv. $39\frac{3}{8}$ Lod.

Rigtigheden af den brugte Fremgangsmaade er indlysende; vi have her arithmetiskt løst den Opgave, at dele en Størrelse i Dele, proportionale med en anden Størrelses (her den hele Sums) Dele.

Anm. Ovenstaaende Regningsmaader tjene til at beregne de forskjellige Opgaver, som de sædvanlige Regnebøger fremsætte, og som henføres til de forskjellige Rubriker, som enten Handelen, eller hvad anden Anvendelse vi gjøre af Arithmetiken i det praktiske Liv, kræver. Vi henvise desangaaende til den af Forfatteren udgivne Regnebog.

Det fortjener at bemærkes, at man oftere har bragt i Forslag at henføre Regula-Detri-Reglen til den geometriske Methode at søge fjerde Proportionalstørrelse (Ursins Geometri § 86, Anm.), ligesom Selskabsreglen til den ovenfor nævnte Opgave, der ogsaa geometriskt opløses (Geom. § 87, Till. 1); ja man har endogsaa construeret Instrumenter, beroende paa de her anvendelige geometriske Constructioner, saasom Proportionalcirklen. Dog disse give kun en indskrænket Nøiagtighed og kræve ofte ved deres Anvendelse større Besvær end Regningen.

Arithmetikens Anvendelse paa Geometrien.

Ihvorvel flere geometriske Opgaver lade sig opløse ved Arithmetikens Hjælp, og saaledes endog opstaaer en særegen vigtig Afdeling af Mathematiken, næmlig den analytiske Geometri, indskrænke vi os dog her ene til den Anvendelse af Arithmetiken, som gaaer ud paa ved Regning at finde Indholdet af Flader og Legemer, eller omvendt, hvis disses Indhold ere givne, at finde i Tal deres Dimensioner. Dette Affnit slutter sig altsaa nærmest til de Capitler af Geometrien, der handle om Planfigurers Udmaaling (Planimetriens 10de og 11te Capitel) og om Legemers og deres Overfladers Udmaaling (Stereometriens 5te, 6te og 7de Capitel).

De Regler, hvorefter saadan Udmaaling foretages, indklædes i Almindelighed i en Formel, i det vi ved Bogstavregningens Hjælp angive i et almindeligt Udtryk den Regning, der ved hver Art af Opgaver bliver at udføre.

105. Formlen hvorefter Rectanglet udmaales, og som følger af hvad der er beviist i Geometrien (Ursins Geom. 92), kan saaledes angives.

Kalde vi Grundlinien i et Rectangel . . . . g
Samme Rectangels Høide . . . . h
saa er Rectanglets Fladeindhold, som vi ville betegne ogsaa med et enkelt Bogstav P,

$$P = gh$$

Samme Formel gjælder ogsaa for Parallelogrammet (Geom. 94).

Vi anvende denne Formel paa efterstaaende Exempel.

En Væg skal males; samme er 8 Al. 7 Tommer lang, 3 Alen 19 Tommer høi; hvor stort er dens Fladeindhold?

Her maae g og h udtrykkes paa samme Maade, enten i Alen eller Tommer. Vælge vi Alen, da forvandle vi Tommer til Decimaler af Alen, og have da

$$\begin{array}{lr} g = \ldots\ldots\ldots & 8{,}\dot{2}\dot{9}\dot{2} \\ h = \ldots\ldots\ldots & \underline{3{,}792} \\ & 24\,876 \\ & 5\,804 \\ & 746 \\ & \underline{16} \\ P = \ldots\ldots\ldots & 31{,}442 \end{array}$$

Vi have her taget ved g og h ene 3 Decimaler, som give tilstrækkelig Nøiagtighed, og endvidere anvendt den forkortede Multiplications-Methode (§ 51 Anm.). P er saaledes fundet i Qvadratalen; vilde vi have tillige Tommer, maatte vi multiplicere Decimalerne med 576 og have da

$P = 31{,}442$ □ Al. $= 31$ Al. 255 □ Tom.

hvor Facit kun kan feile et Par Qvadrattommer, forsaavidt nogen Usikkerhed findes i det sidste Decimal.

Er Fladeindholdet P givet og tillige Grundlinien g eller Høiden h, bestemme vi omvendt Høiden eller Grundlinien, i det

$$g = \frac{P}{h}$$

$$h = \frac{P}{g}.$$

Er saaledes Fladeindholdet af Gulvet i et Værelse bestemt til 340 □ Fod; Værelsets Dybde givet liig 17 Fod 3 Tommer, have vi dets Længde, efter den første Formel, eller

$$g = \frac{340}{17{,}25} = 19{,}71 \text{ Fod} = 19 \text{ Fod } 8\tfrac{1}{2} \text{ Tom.}$$

106. Qvadratet er et Rectangel, hvori Grundlinie og Høide ere ligestore, nemlig begge liig Qvadratets Side; betegne vi altsaa denne med s, Qvadratet selv med □, have vi, som Formel for Qvadratets Udregning

$$\square = s^2.$$

Er $s = 3$ Fod 7 Tom. 3 Lin. $= 3{,}6042$, finde vi ved Udregning □ $= 12{,}9902$ □ Fod $= 12$ Fod $142{,}6$ □ Tommer.

Omvendt bestemme vi Sidelinien, hvis Qvadratets Fladeindhold er givet, ved at uddrage Qvadratroden eller

$$s = \sqrt{\square}.$$

F. Ex. Hvis det forhen nævnte Værelse, stort 340 □ Fod, skal være qvadratiskt, hvor stor er Sidelinien?

$$\begin{array}{rr} & \sqrt{3|40} = 18{,}439 \\ & \underline{1} \\ 28 & 2\,40 \\ & \underline{2\,24} \\ 364 & 1600 \\ & \underline{1456} \\ 3683 & 14400 \\ & \underline{11049} \\ 36869 & 335100 \\ & \underline{331821} \\ & 3279. \end{array}$$

Altsaa $s = 18{,}439$ Fod

$= 18$ Fod $5{,}268$ Tom.

eller omtrent 18 Fod $5\frac{1}{4}$ Tom.

Till. Bestemmelsen af Sidelinien i et Qvadrat, hvis Fladeindhold er givet, leder til at finde den tredie Side i en retvinklet Trekant, naar de to andre Sider ere givne. Vi udtrykke den bekjendte Sætning, at Qvadratet paa Hypotenusen i en retvinklet Trekant er ligestort med Summen af Katheternes Qvadrat, (Geom. § 51) saaledes, i det vi betegne Hypotenusen med h, Katheterne med k og k'

$$h^2 = k^2 + k'^2$$

og have altsaa

$$h = \sqrt{k^2 + k'^2}$$

drage vi k'^2 bort paa begge Sider, faae vi

$$h^2 - k'^2 = k^2$$

altsaa

$$k^2 = h^2 - k'^2$$

$$k = \sqrt{h^2 - k'^2}$$

beqvemmere for Regningen bliver dette Udtryk, naar vi opløse det i Factorerne $h + k'$ og $h - k'$ (§ 58 Till. II Ex.), altsaa

$$k = \sqrt{(h + k')(h - k')}.$$

I. Exempel. I et Tagværk er Bjælkens Længde 18 Al. 18 Tom., Tagets Høide 8 Al., hvor langt bliver Spæret? Her er den ene Kathete det Halve af Bjælkens Længde eller 9 Al. 9 Tom. = $9\frac{3}{8}$ Al. = 9,375. Altsaa

$$k = 9{,}375 \text{ Alen}$$
$$k' = 8$$

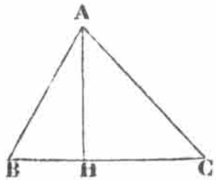
Heraf

$$k^2 = 87{,}890625$$
$$k'^2 = 64$$
$$k'^2 + k^2 = 151{,}890625$$

$$h = \sqrt{1|51{,}89|06|25} = 12{,}324$$

```
           1
           ‾
  22      51
          44
          ‾‾
 243      7 89
          7 29
          ‾‾‾‾
 2462     60 06
          49 24
          ‾‾‾‾‾
 24644    10 82 25
           9 85 76
          ‾‾‾‾‾‾‾‾
             96 49.
```

Spærets Længde er saaledes 12,324 Al. = 12 Al. $7\frac{3}{4}$ Tom.



II. Exempel. Hvor stor er Høiden AH i Trekanten ABC, i hvilken Siden AB = 73,095, og samme træffer i en Afstand fra B, nemlig BH = 23,927; her er

$$h + k' = 97{,}022$$
$$h - k' = 49{,}168$$

```
 388088
  87320
    970
    582
     78
 ‾‾‾‾‾‾‾
4770,38
```

$$k = \sqrt{47|70,38} = 69,067$$

```
           36
129      11 70
         11 61
13806     9 38 00
          8 28 36
138127    1 09 64 00
            96 68 89
            12 95 11.
```

Næste Decimal vil blive over 5, altsaa

$$k = 69,068.$$

107. Da Trekanten er det Halve af Parallelogrammet, gjælder for samme, som vi ville betegne med $\triangle$, Formlen

$$\triangle = \tfrac{1}{2}gh$$

hvoraf omvendt følger

$$g = \frac{2\triangle}{h}$$

$$h = \frac{2\triangle}{g}.$$

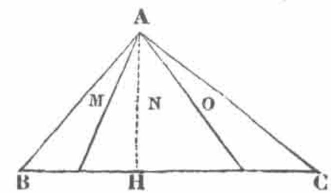
Exempel. Hvor stort er Fladeindholdet af et Overdrev, hvis Side er 3714 Al. og den fra det modsatte Hjørne fældede Perpendiculær eller Høiden er 2931 Al. Her kan g strax divideres med 2; vi have altsaa

```
h . . . . . . . 2931
½g . . . . . .  1857
               20517
              14655
             52758
             5442867 □ Alen.
```


Saadanne Markers Fladeindhold bestemmes i Almindelighed efter Tønder Land à 14000 Qvadratalen, Indholdet er altsaa her

```
14)5442,867
    388,776 Tdr. Land
```

eller omtrent 388 Tdr. 6 Skpr.



II. Exempel. Ifølge Udstiftning skal en trekantet Mark af 113 Tdr. Land 7364 □ Al. fordeles mellem tre Lodseiere. Høiden AH er 901 Al.; Lodderne skulle fordeles saaledes, at første Lodseier M faaer $\frac{3}{16}$, anden Lodseier N faaer $\frac{37}{64}$, tredie Lodseier O $\frac{15}{64}$, hvormange Alen faaer nu M, N, O af BC, hvis deres Lodder skulle være Trekanter, hvis fælleds Høide er AH.

Hele Marken er 113 Tønder Land 7364 □ Alen eller 1589364 □ Alen, altsaa

M's Lod $= \frac{3}{16} \times 1589364$ □ Al. $= 298005\frac{3}{4}$ □ Al.
N's — $= \frac{37}{64} \times$ . . . . $= 918851\frac{1}{16}$ —
O's — $= \frac{15}{64} \times$ . . . . $= 372507\frac{3}{16}$ —

Altsaa for M er

$2\triangle$ . . . . $596011\frac{1}{2}$ □ Al.
h . . . . 901 Alen
Heraf g . . . . . . $661\frac{1}{2}$ Alen.

Ligeledes er for N

$2\triangle$ . . . . $1837702\frac{1}{8}$ □ Al.
h . . . . 901 Alen
g . . . . $2039\frac{5}{8}$ Alen

For O haves

$$\begin{array}{lr}
2\triangle \ldots\ldots\ldots & 745014\tfrac{3}{8}\ \square\ \text{Al.} \\
h \ldots\ldots\ldots & 901\ \text{Alen} \\
\hline
g \ldots\ldots\ldots & 826\tfrac{7}{8}\ \text{Alen.}
\end{array}$$

Imidlertid havde vi her hellere udregnet hele **BC**, som findes paa lignende Maade, nemlig:

$$\begin{array}{lr}
2\triangle \ldots\ldots\ldots & 3178728\ \square\ \text{Al.} \\
h \ldots\ldots\ldots & 901\ \text{Alen} \\
\hline
g \ldots\ldots\ldots & 3528\ \text{Alen.}
\end{array}$$

Dernæst dele vi den fundne Grundlinie **BC**, ved en Selskabs-Regning i Dele, der staae i samme Forhold, som $\frac{5}{16} : \frac{37}{64} : \frac{15}{64}$. Altsaa

$$\begin{array}{ll|l}
\mathbf{M} & \frac{3}{16} & 12 \\
\mathbf{N} & \frac{37}{64} & 37 \\
\mathbf{O} & \frac{15}{64} & 15 \\
\hline
\end{array}$$

64 — 3528 Al. — 12

Sv. **M** $661\frac{1}{2}$ Al.

64 — 3528 Al. — 37

Sv. **N** $2039\frac{5}{8}$ Al.

64 — 3528 Al. — 15

Sv. **O** $826\frac{7}{8}$ Al.

108. For at udmaale et Paralleltrapetsium anvendes følgende Formel:

De to ligeløbende Sider være s og s', Høiden h, saa er Paralleltrapetsiet et

$$h.\ \frac{s+s'}{2}.$$

Exempel. En Byggegrund, som ligger imellem to ligeløbende Gader, er skjevt afskaaret i det ene Hjørne, saaledes at Grunden mod den ene Gade 73 Al. mod den anden 68 Al. $7\frac{1}{2}$ Tom., Grundens Dybde eller Afstanden mellem begge de

ligeløbende Gader er 107 Alen $4\frac{1}{2}$ Tommer. Hvor stor er samme Grund? Her er

$$\begin{array}{lr}
s \ldots\ldots\ldots & 73\ \text{Alen} \\
s' \ldots\ldots\ldots & 68\tfrac{5}{16}\ — \\
\hline
s+s' \ldots & 141\tfrac{5}{16}\ \text{Al.} \\
\frac{1}{2}(s+s') \ldots & 70\tfrac{21}{32}\ — \\
h \ldots\ldots\ldots & 107\tfrac{3}{8}\ — \\
\hline
 & 7586\tfrac{183}{256}\ \square\ \text{Alen.}
\end{array}$$

Anm. For Trekantens Fladeindhold haves følgende Udtryk, naar alle tre Sider ere givne, hvilke vi ville betegne med a, b, c, i det vi tillige sætte

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$$

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Regningen føres nu beqvemt paa følgende Maade, hvis vi have efterstaaende Talværdier for Siderne:

$$\begin{array}{rcr}
a & = & 380{,}72 \\
b & = & 273{,}05 \\
c & = & 198{,}77 \\
\hline
a+b+c & = & 852{,}54 \\
\hline
s & = & 426{,}27 \\
s-a & = & 45{,}55 \\
s-b & = & 153{,}22 \\
s-c & = & 227{,}50
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
s & = & 426{,}27 \\
s-a & = & 45{,}55 \\
\hline
 & & 170508 \\
 & & 21314 \\
 & & 2131 \\
 & & 213 \\
\hline
 & & 19416{,}6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr}
s-b & = & 153{,}22 \\
s-c & = & 227{,}50 \\
\hline
 & & 30644 \\
 & & 3064 \\
 & & 1072 \\
 & & 77 \\
\hline
(s-b)(s-c) & = & 3485{,}7 \\
s(s-a) & = & 19416{,}6 \\
\hline
 & & 20914\ 2 \\
 & & 557712 \\
 & & 139428 \\
 & & 662283 \\
\hline
 & & 676804426{,}2
\end{array}$$

Heraf uddrages Qvadratroden

$$\sqrt{6|76|80,44|26,20} = 26015,2$$

	4
46	2 76
	2 76
5201	80 44
	52 01
52025	27 43 26
	26 01 25
520302	1 42 01 20
	1 04 06 04
	37 95 16

Det fundne Tal er Qvadratmaal; Decimalet kan bortkastes, da Siderne ikke ville give større Nøiagtighed med 5 Ciffre.

Hvad angaaer Beviset for denne Regningsregel, ligesom hvad Fordeel vi i dette og flere Tilfælde kunne have af Logarithmer, derom maa Forfatteren henvise til sin udførlige „Lærebog i den rene Mathematik.“

109. Mangekanter beregnes ved at opløse dem i Trekanter, og Formlen anvendes for hver af disse. Beqvemt sammentrække vi dog Beregningen for to Trekanter, i det vi betragte en Diagonal som Grundlinie og multiplicere denne med den halve Sum af Høiderne (Geom. 94, Till. 2). Formlen bliver saaledes, hvis vi betegne Diagonalen med d, Høiderne med h og h′

$$\text{Trap.} = d.\frac{h + h'}{2}$$

hvorefter Regningen udføres saaledes, som er viist ved Parallel-Trapetsiet.

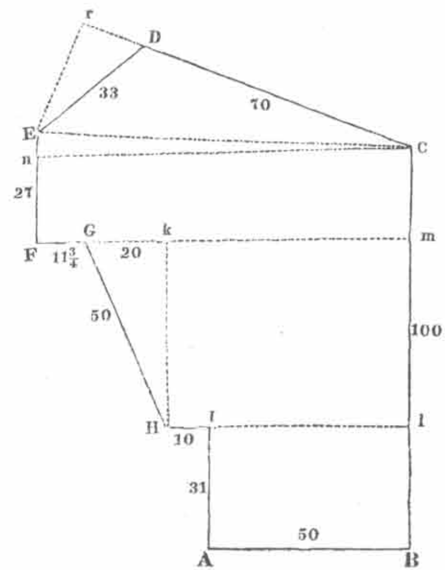
Vi ville i Følge dette udregne efterstaaende

Exempel. Der er givet en Byggegrund paa følgende Maade:

Imod Norden til Gaden er Linien . . . . 50 Alen
Fra det vestlige Punct fra Gaden ad Syden . 100 —

Det østlige Punct fra Gaden mod Syden . . . . 31 Alen
Fra denne Linies sydlige Punct mod Østen er Linien 10 —
Derfra noget mod Øst . . . . 50 —
Denne Linie er udaf Vinkel (afviger fra Perpendiculæren) 20 Alen.
Derfra lige i Øst . . . . $11\frac{3}{4}$ —
Derfra mod Syden . . . . 27 —
Derfra i sydvestlig Retning . . . . 33 —
Bageste Linie mod Sydost . . . . 70 —

Opslaae vi efter disse givne Maal Grunden, vil den have nedenstaaende Figur.



Denne kunne vi nu beregne paa flere Maader. Følgende giver dog den korteste Regning.

Da Delen AIlB er et Rectangel, finde vi samme liig
$AB \times AI =$ . . . . 1550 □ Al.

HlmG er et Paralleltrapetsium, deri er

Siden $Hl = HI + Il = 60$ Alen, $Gm = Gk + km = Gk + Hl = 80$ Al.

Men Høiden Hk er ubekjendt, dog findes den (i Følge § 106 Till.) saaledes

$$GH = 50$$
$$Gk = 20$$
$$GH + Gk = 70$$
$$GH - Gk = 30$$
$$kH = \sqrt{21|00} = 45{,}826.$$

Altsaa $\frac{1}{2}(s + s') = 70$
$$h = 45{,}826$$

Paralleltrapetsiet GHlm = ... 3207,82 □ Al.

Ogsaa er ECmF et Paralleltrapetsium, hvori Høiden er $Cn = FG + Gk + HI + Il = 91\frac{3}{4}$, de ligeløbende Sider $EF = 27$ Al. og $Cm = 100$ Al. $- ml - lB = 100$ Al. $- 45{,}826 - 31 = 23{,}174$.

Altsaa $\frac{1}{2}(s + s') = 25{,}087$
$$h = 91{,}75$$

$ECmF = \frac{1}{2}(s + s')\,h =$ . . . . 2301,73 □ Al.

For at finde △ DEC nedfælde vi Høiden E paa den forlængede CD, samme findes, ved Construction, liig 28.

Altsaa er i △ DEC

$h =$ 28
$g =$ 70
$gh =$ 1960

△ DEC $= \frac{1}{2}gh =$ . . . 980 □ Al.

Altsaa hele Grunden 8039,55 □ Al.

Hvor dog Decimalerne ikke kunne ansees sikkre, saa at vi kunne sætte Grunden liig 8040 □ Alen.

Anm. Den sidste Trekant DEC havde man bestemt nøiagtigere ved Beregning, end ved at construere Høiden. Siden EC findes nemlig af den retvinklede Trekant Enc, hvori Siden $En = EF - Cm = 27 - 23{,}174 = 3{,}826$, $Cn = 91{,}75$; heraf følger $EC = 91{,}831$, og nu udregnes △ DEC af de tre bekjendte Sider, i Følge § 108 Anm.; den findes liig 980,18 □ Al.

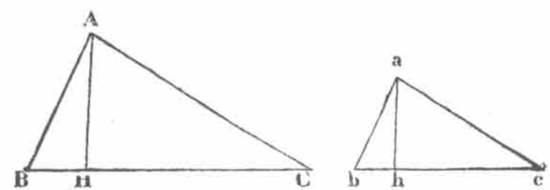
110. *Ligedannede Figurer forholde sig som Qvadraterne paa deres eensliggende Sider.* Denne Sætning ville vi først bevise for Trekanter. Om disse vide vi i Almindelighed, at de staae i *sammensat Forhold af deres Grundlinier og Høider*. Have vi nemlig to Trekanter △ og △' og Grundlinie og Høide i hiin betegnes med g og h, i denne med g' og h', saa, naar vi ville udmaale, finde vi (§ 107).

$$\triangle = \tfrac{1}{2}gh$$
$$\triangle' = \tfrac{1}{2}g'h'$$
$$\triangle : \triangle' = \tfrac{1}{2}gh : \tfrac{1}{2}g'h'$$
$$\triangle : \triangle' = gh : g'h'$$

hvilke to Producter vi atter opløse i Forholde, altsaa

$$\triangle : \triangle' = (g : g') + (h : h').$$

Men have vi saaledes Trekanterne



ABC og abc, fælde deri AH og ah, have vi:

$$\triangle\, ABC : abc = (BC : bc) + (AH : ah).$$

Er nu $\triangle\, ABC \sim abc$, vil ogsaa $\triangle\, ABH \sim abh$; thi $\angle\, A = a$ og Vinklerne ved H og h ere, som rette, ligestore, altsaa er, som Følge heraf

$$AB : ab = AH : ah$$

men, da $\triangle\, ABC \sim abc$, er

$$AB : ab = BC : bc$$

altsaa

$$AH : ah = BC : bc.$$

Vi kunne saaledes, i Stedet for $AH : ah$, indsætte Forholdet $BC : bc$, og have da

$$\triangle\, ABC : abc = (BC : bc) + (BC : bc)$$
$$= 2(BC : bc).$$

Det vil sige, de ligedannede Trekanter forholde sig som Qvadrattallene af deres Siders Maal, eftersom to Qvadrattal staae i dupliceret Forhold af Tallene selv.

To Parallelogrammers Fladeindhold vilde i lige Maade staae i sammensat Forhold af Grundlinierne og Høiderne; og altsaa to Qvadrater, i hvilke Sidelinierne ere baade Grundlinier og Høider, i dupliceret Forhold af Sidelinierne. Eller

$$\square : \square' = 2(s : s').$$

Tænke vi os nu paa Siderne BC og bc af Trekanterne Qvadrater tegnede, hvilke vi ville betegne med BC^2 og bc^2, have vi

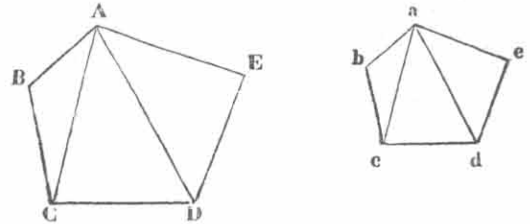
$$BC^2 : bc^2 = 2\,(BC : bc)$$

hvoraf vi atter slutte

$$\triangle\, ABC : abc = BC^2 : bc^2.$$

Altsaa forholde to ligedannede Trekanter sig som Qvadraterne paa de eensliggende Sider.

Men Sætningen strækker sig til alle ligedannede Figurer. Have vi nemlig efterstaaende Femkanter



deles disse Mangekanter i ligedannede Trekanter (Geom. 88) ved de eensliggende Diagonaler AC og ac, AD og ad.

Vi have saaledes

$$\triangle\, ABC : abc = AB^2 : ab^2$$

endvidere

$$\triangle\, ACD : acd = CD^2 : cd^2$$
$$\triangle\, ADE : ade = DE^2 : de^2$$

men, da Mangekanterne ere ligedannede, er

$$AB : ab = CD : cd$$

altsaa, da de duplicerede Forholde ogsaa ere ligestore, eller

$$2(AB : ab) = 2(CD : cd)$$

er $AB^2 : ab^2 = CD^2 : cd^2$

ligeledes

$$AB^2 : ab^2 = DE^2 : de^2.$$

Vi have derfor, ved at indsætte Forholdet $AB^2 : ab^2$, i Stedet for Forholdene $CD^2 : cd^2$ og $DE^2 : de^2$ i Alt

$$\triangle\, ABC : abc = AB^2 : ab^2$$
$$\triangle\, ACD : acd = AB^2 : ab^2$$
$$\triangle\, ADE : ade = AB^2 : ab^2.$$

Men vi slutte (89, Till. 2)

$$\triangle ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = AB^2 : ab^2$$

$$\text{ɔ: } ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2.$$

Saaledes gjælder Sætningen almindeligt for alle ligedannede Figurer.

Anm. Denne Sætning leder os til en almindelig Betragtning af alle ligedannede Figurer, hvortil kan henføres f. Ex. Tegninger af samme Gjenstand, efter forskjellig Maalestok. Reducere vi saaledes en Tegning efter en halv saa stor Maalestok, bliver selve Tegningen 4 Gange mindre. Fremstille vi et Land, som Danmark, efter en Maalestok af 1 Tomme paa Milen, saa, da en Miil holder 24000 Fod = 288000 Tommer, er Kortets Overflade i Forholdet til selve Landets, som

$$1 : 288000^2 = 1 : 82\,944\,000\,000.$$

111. Regelrette Figurer af ligemange Sider ere ligedannede (Geom. 79). Deres Fladeindhold forholde sig altsaa som Qvadraterne paa deres eensliggende Sider. Om saadanne Figurer lade sig endvidere omskrive Cirkler, i det deres største Radier søges (Geom. 68). Figurernes Omtræk forholde sig som disse Radier (Geom. 90); i samme Forhold staae ogsaa de mindre Radier, hvormed indskrevne Cirkler kunne drages. Altsaa staae Omtræk, Sider, største Radier og mindste Radier ved regelrette Figurer af ligemange Sider i samme Forhold til hinanden. Fladeindholdet af saadanne Figurer forholde sig derimod som Qvadraterne af Siderne, eller Qvadraterne af de største Radier, eller Qvadraterne af de mindste Radier.

Vi kunne udregne (dog kun tildeels ved de her forud godtgjorte Sætninger) for regelrette Figurer af et givet Sideantal, og hvori tillige største Radius er given, som vi her sætte liig 1, Sidens Størrelse, mindste Radius og Fladeindhold og ville heraf for enhver Mangekant af samme Sideantal, men med en anden Radius, kunne bestemme Siden,

mindste Radius og Fladeindhold. Efterstaaende Tabel indeholder for regelrette Figurer med Sideantallene 3 til 15 benævnte Størrelser, udtrykte i Decimaler.

Tabel over Mangekanter.

(Største Radius = 1).

Sidernes Antal	Siden Længdemaal	Mindste Radius Længdemaal	Indhold Qvadratmaal
3	1,73205	0,50000	1,29904
4	1,41421	0,70711	2,00000
5	1,17557	0,80902	2,37764
6	1,00000	0,86603	2,59808
7	0,86777	0,90097	2,73641
8	0,76537	0,92388	2,82843
9	0,68404	0,93969	2,89255
10	0,61803	0,95106	2,93893
11	0,56347	0,95949	2,97353
12	0,51764	0,96593	3,00000
13	0,47862	0,97094	3,02070
14	0,44504	0,97493	3,03718
15	0,41582	0,97815	3,05053

Med Hjælp af denne Tabel løses nu flere Opgaver.

a) *Der skal beskrives en Femkant, paa en Side, liig 3 Al. 7½ Tom.; hvor stor Radius skal tages til den Cirkel, hvori samme Femkant vil kunne indskrives?*

Vi tage nu af Tabellen Tallet for Siden eller 1,17557 og opsætte

$$1,17557 : 3,3125 = 1 : r$$

$$r = \frac{3,3125}{1,17557} = 2,81778$$

$$= 2 \text{ Alen } 19,_{6267} \text{ Tom.}$$

$$= 2 \text{ Alen } 19\tfrac{5}{8} \text{ Tom.}$$

Vi beskrive altsaa en Cirkel med Radius 2,81778 Alen og ville finde, at deri lader Siden 3,3125 sig føre fem Gange om.

b) **Hvor stor er mindste Radius i denne Femkant?** Her gaae vi enten ud fra den beregnede største Radius, og opsætte.

$$1 : 2,81778 = 0,80902 : r$$

hvis vi med r betegne mindste Radius; eller ogsaa tage vi den givne Side og bringe den i Proportion med Tabellens to Tal for Siden og mindste Radius.

$$1,17557 : 3,3125 = 0,80902 : r$$

I begge Tilfælde findes

$$r = 2,2796$$

$$= 2 \text{ Al. } 6,_{71} \text{ Tom.}$$

c) Skulle vi beregne **Fladeindholdet**, kan dette skee enten ved at multiplicere det hele Omtræk med mindste Radius og deraf tage det Halve; altsaa

$$5 \times 3,3125 \times 2,2796 \times \tfrac{1}{2}$$

$$= 3,3125 \times 5,699$$

$$= 18,8779 \,\square\, \text{Al.}$$

$$= 18 \text{ Al. } 505,_{66} \,\square\, \text{Tom.}$$

Eller ogsaa, da vi vide, at Fladeindholdet af denne Mangekant maa forholde sig til Fladeindholdet af den regulære Femkant, hvis største Radius er 1, som Radiernes Qvadrater ɔ: $r^2 : 1$, haves Fladeindholdet ved at anvende Tabellen, liig

$$r^2 \times 2,37764$$

$$= 2,81778^2 \times 2,37764$$

$$= 18,87815.$$

En tredie Opløsning findes endnu ved at tage Forholdet mellem Mangekanterne, hvilket er ligestort med Forholdet mellem Sidernes Qvadrater; altsaa, kalde vi den givne Side s, have vi:

$$1,17557^2 : s^2 = 2,37764 : M$$

hvor **M** betegner det søgte Fladeindhold af Mangekanten, altsaa

$$M = \frac{3,3125^2}{1,17557^2} \times 2,37764$$

$$= \left(\frac{3,3125}{1,17557}\right)^2 \times 2,37764$$

$$= 18,87815.$$

De to sidste Opløsninger maae ansees, som de paalideligste, forsaavidt her fleest Decimaler ere anvendte.

d) **Fladeindholdet af en Mangekant være givet, da at finde dens Sidelinie.** Hvor stor er saaledes Siden i den Femtenkant, hvis Fladeindhold er 527 □ Fod. Her er

$$3,05053 : 527 = 0,41582^2 : s^2$$

altsaa

$$s^2 = \frac{527 \times 0,41582^2}{3,05053}$$

$$= 29,8706$$

Ved at uddrage Qvadratroden, findes

$$s = 5,4654 \text{ Fod}$$

$$= 5 \text{ Fod } 5,_{5848} \text{ Tom.}$$

112. Der er et **bestemt Forhold mellem en Cirkels Peripheri og dens Diameter**, hvilket vi tilnærmende udtrykke med Tallene

$$22 : 7$$
$$355 : 113$$

Anvende vi Decimaler til at udtrykke dette Forholds Exponent, som vi ville betegne π, da er

$$\pi = 3{,}1415926536$$

eller med 6 Decimaler

$$\pi = 3{,}141593$$

med 4 Decimaler

$$\pi = 3{,}1416$$

af hvilke Tal hiint eller dette anvendes, eftersom der skal gives Regningen en større eller mindre Nøiagtighed.

Vi have saaledes, naar vi betegne en Cirkels Peripheri med p, dens Tværlinie med d

$$p : d = \pi : 1$$

altsaa

$$p = d\pi$$

Exempel. Hvor stor er Peripherien i den Cirkel, hvis Tværlinie er 23 Al. 7 Tommer.

$$\begin{array}{rr} \text{Her er } d = & 23{,}2917 \\ \pi = & 3{,}1416 \\ \hline & 69{,}8751 \\ & 2\,3292 \\ & 9317 \\ & 233 \\ & 139 \\ \hline p = & 73{,}1732 \\ = & 73 \text{ Al. } 4{,}157 \text{ Tom.} \end{array}$$

Tværlinien findes, naar Peripherien er given, efter Formlen

$$d = \frac{p}{\pi} = p \times \frac{1}{\pi}$$

Vi udregne her

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{\pi} & = 0{,}318309886 \\ & = 0{,}318310 \\ & = 0{,}3183 \end{array}$$

eftersom vi ville anvende 6 eller 4 Decimaler.

I. Exempel. Jordklodens Æqvator ansættes til 5400 geographiske Miil, af hvilke 15 gaae paa en Grad af Æqvatoren, hvor stor er da Æqvators Tværlinie

$$\begin{array}{rl} p & = 5400 \\ \frac{1}{\pi} & = 0{,}318310 \\ \hline d & = 9 \times 6 \times 31{,}831 \\ & = 9 \times 190{,}986 \\ & = 1718{,}874 \end{array}$$

II Exempel. Hvor stor er Tværlinien af en Søile, som maaler rundt om 5 Fod $9\frac{3}{8}$ Tomme.

$$\begin{array}{rr} p = & 5{,}78125 \\ \frac{1}{\pi} = & 0{,}3183 \\ \hline d = & 1{,}734375 \\ & 57813 \\ & 46250 \\ & 1734 \\ \hline d = & 1{,}840172 \\ = & 1 \text{ Fod } 10{,}082 \text{ Tom.} \\ = & 1 \text{ Fod } 10\tfrac{1}{12} \text{ Tom.} \end{array}$$

113. En Deel af Cirklens Peripheri eller en Cirkelbue bestemmes, naar vi have Buen givet i Grader, og Cirklens Radius eller Tværlinie (Geom. 96), i det vi udregne hele Cirklens Peripheri, og tage heraf samme Andeel, som Buens Grader udgjøre af 360°.

Exempel. Hvor stor er en Bue af 107° 36′, hvis Radius er 15 Al.

$r = 15$ Al.
$d = 30$ Al.
$\pi = 3{,}1416.$
$p = 94{,}248$

Qvotienten $\frac{107^\circ\ 36'}{360^\circ}$ forvandle vi til Decimalbrøk

$$\frac{107{,}6}{6 \times 6 \times 10} = \frac{10{,}76}{6 \times 6} = \frac{1{,}7933}{6}$$
$$= 0{,}29889$$

Ved at multiplicere hermed findes Buen

$28{,}16968$
$= 28$ Al. $4{,}0752$ Tom.

Beqvemmere udregne vi Længden af 1° for Radius liig 1, som findes ved at dividere 2π med 360 eller π med 180, ligeledes af 1′, ved at dividere det saaledes fundne Tal med 60, og af 1″ ved at dividere atter med 60. Vi finde saaledes

$1^\circ = 0{,}01745329\ldots$
$1' = 0{,}00029089\ldots$
$1'' = 0{,}00000485\ldots$

Er Buen fundet, ved Hjælp af disse Tal for Radius liig 1, findes dens Længde for en anden Radius ved at multiplicere med samme.

I. Exempel. Regne vi det foregaaende Exempel, hvori Buen er 107°36′ og Radius 15 Al., have vi:

$$\begin{array}{rrr}
1^\circ = & 0{,}017453 & \\
 & 107 & \\ \hline
 & 1{,}7453 & \\
 & 1222 & \\ \hline
 & 1{,}8675 & 1{,}8675 \\
1' = & 0{,}000291 & \\
 & 36 & \\ \hline
 & 873 & \\
 & 175 & \\ \hline
 & 0{,}01048\ \ldots & 105 \\ \hline
 & & 1{,}8780 \\
r = & & 15 \\ \hline
 & & 28{,}1700
\end{array}$$

Buen altsaa 28,17 Al. = 28 Al. 4,08 Tom.

II. Exempel. Hvor stor er en Bue paa 23°16′37″, hvis Radius er liig 0,84325 Fod.

$$\begin{array}{rrr}
1^\circ = & 0{,}01745329 & \\
 & 23 & \\ \hline
 & 0{,}3490658 & \\
 & 523599 & \\ \hline
 & & 0{,}4014257 \\
1' = & 0{,}00029089 & \\
 & 16 & \\ \hline
 & & 0{,}0046542 \\
1'' = & 0{,}00000485 & \\
 & 37 & \\ \hline
 & 1455 & \\
 & 340 & \\ \hline
 & & 0{,}0001795 \\ \hline
\text{Buen for Radius} = 1 & & 0{,}4062594 \\
\text{eller med 5 Decimaler} & & 0{,}40626 \\
 & r = & 0{,}84325 \\ \hline
\text{Buens Længde} = & & 0{,}342578\ \text{Fod.}
\end{array}$$

Omvendt bestemme vi, naar en Bues Længde er given og tillige Radius i Cirklen, dens Gradeantal.

Hvis en anden Radius end 1 var given, dividere vi først med denne, dernæst, naar Buens Længde, for Radius liig 1, saaledes er bekjendt, divideres med det Tal, der svarer til 1°, saaledes findes Antallet af Graderne, Resten divideres med Tallet for 1′, for at finde Minuterne, tilsidst med Tallet for 1″, for at finde Secunderne.

Exempel. Hvormange Grader, Minuter og Secunder holder en Bue, hvis Længde er liig Radius?

Her er Buen, for Radius 1, liig 1.

```
0,01745329)1,0000000|57°
            8726645|
            -------
            1273355
            1221730
            -------
0,00029089)0,0051625|17′
              29089|
              -----
              22536
              20362
              -----
0,00000485)0,0002174|44″8
               1940|
               ----
                234
                194
                ---
                 40
                 38
```

Buen altsaa

57° 17′ 44″,8.

Vi bestemme endvidere Radius, forsaavidt Buens Længde og Gradeantal ere givne, ved at søge Buens Længde, for Radius liig 1, og dividere det saaledes fundne Tal i Buens givne Længde.

Exempel. Hvor stor er Radius i den Cirkel, hvoraf en Bue, liig 37°40′, holder 20 Fod.

```
1° = 0,01745329
             37
     ----------
      0,5235987
        1221730
     ----------0,6457717
1′ = 0,00029089
             40
     ----------0,0116356
               ---------
```

For Radius liig 1, 37°40′ = 0,65741.

Hvilket Tal divideres i 20 Fod, saaledes findes

r = 30,4225 Fod
= 30 Fod 5,07 Tom.

114. For at beregne **Cirklens Fladeindhold** anvende vi den Sætning, at Cirklens Fladeindhold er liig en Trekant, hvis Grundlinie er Peripherien, Høide Cirklens Radius. Vi have altsaa Cirklens Fladeindhold eller Areal, som vi ville betegne med A, liig

$$\tfrac{1}{2}r \times p = \tfrac{1}{4}dp$$

indsætte vi her Værdierne

$$p = 2r\pi = d\pi$$

have vi

$$A = r^2\pi = \tfrac{1}{4}d^2\pi.$$

Vi multiplicere altsaa Qvadratet af Radius med π, eller Qvadratet af Tværlinien med

$$\tfrac{1}{4}\pi = 0{,}785398$$
$$= 0{,}7854$$

eller ogsaa anvendes følgende Tal, der tilnærmende udtrykke Forholdet mellem Cirklen og Tværliniens Qvadrat

11 : 14
172 : 219
355 : 452.

I. **Exempel.** Hvor stor er Fladeindholdet af den Cirkel, hvis Radius er 5 Fod 3,7 Tom.

Her er $r = \ldots\ldots\ 5{,}3083$

$r^2 = \ldots\ldots\ 28{,}1780$

$\pi = \ldots\ldots\ 3{,}1416$

$A = r^2\pi = \quad 88{,}5240.$

Altsaa er Arealet

88,5240 □ Fod = 88 Fod 75,5 □ Tom.

II. **Exempel.** Hvor stor er Fladeindholdet af Jordens Æqvator, hvis Tværlinie er 1718,874 geogr. Miil

$d = 1718{,}874$

$d^2 = 2954527$

$\frac{1}{4}\pi = 0{,}785398$

$A = 2320479{,}6$ □ Miil.

Da Peripherien her er bekjendt, nemlig liig 5400, regne vi i dette Tilfælde beqvemmere efter Formlen

$$A = \tfrac{1}{4}dp$$

Her er $\frac{1}{4}d = \ldots\ 429{,}7185$

$p = \ldots\ 5400$

$A = \quad 2320479{,}9$ □ Miil.

Omvendt finde vi Radius eller Tværlinien, naar Arealet er givet; vi have

$$A = r^2\pi$$

$$\frac{A}{\pi} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$$

Ligeledes

$$\sqrt{\frac{4A}{\pi}} = d.$$

Vi anvende her ogsaa beqvemt det forhen (§ 112) fundne Tal for $\frac{1}{\pi}$, og have saaledes

$$r = \sqrt{A \times \tfrac{1}{\pi}}$$

$$d = \sqrt{4A \times \tfrac{1}{\pi}}.$$

Exempel. En Rotunde i en Bygning skal rumme 700 Mennesker; til hvert Menneske regnes $3\frac{1}{2}$ □ Fod, hvor stor bliver Tværlinien i samme?

$A = 700 \times 3\frac{1}{2} = 2450$

$4A = \ldots\ldots\ 9800$

$\frac{1}{\pi} = \quad 0{,}3183$

$d^2 = 3119{,}34$

Heraf er Qvadratroden 55,851.

Altsaa $d = 55{,}851$ Fod

$d = 55$ Fod 10,21 Tom.

II. **Exempel.** Hvor stor bliver Radius i den Cirkel, hvis Areal er 57,3854 □ Tommer.

$A = 57{,}3854$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}318310$

$r^2 = 18{,}266330$

$r = 4{,}27391.$

115. Skulle vi beregne en Cirkelring, eller Forskjellen mellem to Cirklers Fladeindhold, udvikle vi derfor en særegen Formel. Kalde vi Radius i den udvendige Cirkel . . . . . R
Radius i den indvendige Cirkel . . . . r
betegne Ringen med . . . . ○

saa er, hvis vi udregne Arealet for begge Cirkler

$$\begin{aligned} \bigcirc &= R^2\pi - r^2\pi \\ &= (R^2 - r^2)\pi \\ &= (R+r)(R-r)\pi. \end{aligned}$$

Exempel. Den Rotunde, hvis Tværlinie vi fandt liig 55,851, skal omgives af en Søilegang af $5\frac{1}{2}$ Fods Brede. Hvor stor bliver sammes Fladeindhold?

$$\begin{aligned} \text{Her er} \qquad r = \tfrac{1}{2}d &= 27{,}9255 \\ & \quad\ \ 5{,}5 \\ R = \ldots &\ \ 33{,}4255 \\ \text{altsaa} \qquad R+r = \ldots &\ \ 61{,}351 \\ R-r = \ldots &\ \ \ \ 5{,}5 \\ (R+r)(R-r) &= 337{,}4305 \\ \pi &= \ \ \ 3{,}1416 \\ \bigcirc = (R+r)(R-r)\pi &= 1060{,}0716 \ \square \text{ Fod.} \end{aligned}$$

Altsaa vil i denne Gang, hvis vi ikke regne Pladsen, Søilerne indtage, rummes over 300 Mennesker.

116. En Cirkel-Sector eller Udsnit udregnes, naar Buen er given i Grader og tillige Cirklens Radius, ved følgende Proportion. (Geom. § 97).

Buens Grader være . . . . n^0

Radius . . . . r.

Vi have da

$$360^0 : n^0 = r^2\pi : \text{Sector}.$$

Altsaa

$$\text{Sect.} = r^2\pi \frac{n^0}{360^0}.$$

Eller ogsaa beregne vi Buen og multiplicere denne med $\frac{1}{2}r$, i det vi betragte Sectoren som en Trekant, hvori Radius er Høiden.

Betegne vi Buen, for Radius liig 1, med β, for Radius r, med b, have vi saaledes

$$\text{Sect} = \tfrac{1}{2}rb = \tfrac{1}{2}r^2\beta.$$

Exempel. Hvor stor er en Sector, hvis Bue holder $107^0 36'$, og hvis Radius er 15 Al.?

$$\begin{aligned} \text{Hele Cirklen er } & 15^2 \times 3{,}1416 \\ &= 706{,}86 \ \square \text{ Al.} \end{aligned}$$

$$\frac{n^0}{360^0} = \frac{107{,}6}{360} = 0{,}29889$$

$$\begin{aligned} \text{Sector} &= 211{,}271 \ \square \text{ Al.} \\ &= 211 \text{ Al. } 156 \ \square \text{ Tom.} \end{aligned}$$

Ove (§ 113 Exempl.) fandt vi

$$\begin{aligned} b &= 28{,}1700 \\ \tfrac{1}{2}r &= \ \ 7{,}5 \\ \text{Sector} = \tfrac{1}{2}rb &= 211{,}275 \ \square \text{ Al.} \end{aligned}$$

Var b ikke given, havde vi

$$\begin{aligned} \text{for } 107^0 - 107 \times 0{,}0174533 &= 1{,}86750 \\ \text{for } \ 36' - 36 \times 0{,}0002909 &= \quad\ 1047 \\ \beta &= 1{,}87797 \\ \tfrac{1}{2}r^2 &= \ \ 112{,}5 \\ \text{Sector} = \tfrac{1}{2}r^2\beta &= 211{,}273 \ \square \text{ Al.} \end{aligned}$$

Vi bestemme omvendt Graderne af Buen til den Sector, hvis Radius er bekjendt, af sammes Fladeindhold enten ved Formlen

$$n^0 = \frac{\text{Sector}}{r^2\pi} \, 360^0$$

eller ved af Sectoren at søge β, i det

$$\beta = \frac{2 \text{ Sector}}{r^2}$$

og af β atter Antallet af Grader, Minuter og Secunder ved Tallene § 113.

Exempel. En Sector er 500 □ Fod, dens Radius 28 Fod, hvor mange Grader holder dens Bue?

$$360 \times \text{Sector} \; . \; . \; . \; . \; . \; 180000$$
$$r^2\pi = 28^2 \times 3{,}1416 = 2463{,}01$$
$$n^0 = 73^0{,}0813$$
$$= 73^0\,4'\,52''\,68.$$

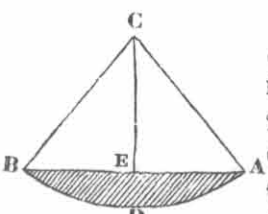
Eller ogsaa føres Regningen saaledes:

$$2 \times \text{Sector} = 1000 \;\square\; \text{Fod}$$
$$r^2 = 28^2 = 784$$
$$\beta = 1{,}27551.$$

Vi dividere nu efterhaanden

0,0174533)1,27551(73⁰
1 22173
5378
5236
0,0002909)0,000142(4′
116
0,0000049)0,000026(52″
25
1

Buen holder altsaa $73^0\,4'\,52''$.



Till. Man vilde kunne udregne et Affnit, Segment, **ABD**, ved først at beregne Sectoren **ADBC**, og dernæst Trekanten **ACB**, som fradrages fra Sectoren eller, forsaavidt Affnittet skulde være større end Sectoren, føies til samme. Men, for at udregne Trekanten, maae vi kjende Chorden, hvilken enten bestemmes ved en Construction, eller ved en Chorde-Tabel. En saadan

er given i Geometrien, dog i anden Hensigt og ikke med saamange Decimaler, som en særdeles skarp Regning vilde kræve. Vi ville dog ikke her, for denne sjeldnere forekommende Opgaves Skyld, meddele en særegen udførligere Tabel; men betjene os ene af den nævnte, hvis Anvendelse oplyses ved efterstaaende

Exempel. Hvor stor er et Segment, hvis Bue er $32^0\,24'$ for en Radius liig 7 Fod 4 Tom. Altsaa Cirkelarealet

$$7\tfrac{1}{3}^2 \times 3{,}1416 = 168{,}95$$

$$\text{Sectoren er } \frac{32{,}4}{360} \times 168{,}95$$
$$= 0{,}09 \times 168{,}95$$
$$= 15{,}21 \;\square\; \text{Fod.}$$

Af Tabellen findes Chorden for $32^0\,20'$ . . . 557
for $32^0\,30'$ . . . 560
(Radius liig 1000) for $32^0\,24'$ . . . 558
(Radius liig 1) 0,558
Radius $7\frac{1}{3}$
Chorden . . . . 4,092.

Heraf findes Høiden **CE**, af △ **ACE**, hvor **AC** liig Radius og **AE** = ½ **AB** ere bekjendte, i Følge § 106 Till.

$$AC = 7{,}333$$
$$\tfrac{1}{2}AB = 2{,}046$$
$$AC + \tfrac{1}{2}AB = 9{,}379$$
$$AC - \tfrac{1}{2}AB = 5{,}287$$
$$CE = \sqrt{49{,}586}$$
$$= 7{,}042$$
$$\tfrac{1}{2}AB = 2{,}046$$
$$\triangle ACB = 14{,}41 \;\square\; \text{Fod}$$

Dette draget fra Sector 15,21 —
Segmentet liig 0,80 □ Fod = 115,2 □ Tom.

117. Cirkler er at ansee som ligedannede Figurer; deres Peripherier forholde sig ogsaa som Tværlinierne eller Radierne; thi, betegne vi Peripherierne med p og $\mathfrak{p}$, Tværlinierne med d og $\mathfrak{d}$, Radierne med r og $\mathfrak{r}$, haves

$$p = d\pi = 2r\pi$$
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{d}\pi = 2\mathfrak{r}\pi$$

altsaa

$$p : \mathfrak{p} = d : \mathfrak{d} = r : \mathfrak{r}.$$

Saaledes forholde sig ogsaa to Cirkelbuer af lige mange Grader, efterdi de ere samme Deel af Peripherierne.

Cirklers Fladeindhold forholder sig som Qvadraterne af deres Tværlinier eller Radier; thi, betegne vi to Cirklers Fladeindhold med A og $\mathfrak{A}$, deres Tværlinier med d og $\mathfrak{d}$, deres Radier med r og $\mathfrak{r}$, have vi

$$A = \tfrac{1}{4}d^2\pi = r^2\pi$$
$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4}\mathfrak{d}^2\pi = \mathfrak{r}^2\pi$$

altsaa

$$A : \mathfrak{A} = d^2 : \mathfrak{d}^2 = r^2 : \mathfrak{r}^2.$$

Sectorer eller Cirkeludsnit af lige mange Grader forholde sig ligeledes som Tværliniernes eller Radiernes Qvadrater. Sætningen (§ 110), der gjælder om retlinede ligedannede Figurer, strækker sig altsaa ogsaa til Cirklerne og Dele af samme.

Anm. Den til § 110 føiede Anmærkning gjælder saaledes mere almindeligt, nemlig ogsaa om krumlinede Figurer, der ere Cirkler eller Dele af samme.

118. For alle Prismers Kubikindhold gjælder følgende Formel (Geom. 138).

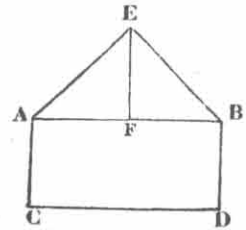
$$\text{Prisme} = G \times h$$

hvor G betyder Prismets Grundflade, h dets Høide.

Grundfladen udregnes altsaa i Qvadratmaal, efter de forhen anførte Regler; men multipliceres dernæst med Høiden, som maa være af samme Længdemaal som Grundfladens Qvadratmaal, eller reduceres dertil.

Exempel. Det hele kubiske Indhold af en Ladebygning skal bestemmes; den er $27\frac{1}{4}$ Al. lang, 15 Al. 8 Tom. dyb, er 7 Al. høi til Taget og har Vinkeltag.

Betragte vi her Gavlen som Grundflade, saa er



$$AB = CD = 15\tfrac{1}{3} \text{ Al.}$$
$$AC = 7 \text{ —}$$
$$\text{Rect. } BC = 107\tfrac{1}{3} \,\square\, \text{Al.}$$

I Trekanten AEB er Høiden $EF = \frac{1}{2}AB = 7\frac{2}{3}$ Al. altsaa

$$\triangle AEB = 7\tfrac{2}{3} \times 7\tfrac{2}{3} = 58\tfrac{7}{9} \,\square\, \text{Alen.}$$

Altsaa $ACDBE = G = 166\frac{1}{9}$
Ladens Længde . . . $h = 27\frac{1}{4}$
$4526\frac{19}{36}$ Kub. Alen.

Et Parallelopipedon beregnes efter Hovedreglen for Prismet; men, forsaavidt dets Grundflade er retvinklet og det selv er ret, multipliceres dets tre Dimensioner, Længde, Brede og Høide umiddelbart.

Exempel. I et Fængsel ere Celler, for de enkelte Fanger, af 7 Fod 3 Tom. Længde, 5 Fod $2\frac{1}{2}$ Tom. Brede og 5 Fod 8 Tom. Høide. Hvor stort er en saadan Celles Kubikindhold?

Længden 7 Fod 3 Tom. = 87 Tom.
Breden 5 — $2\frac{1}{2}$ — = $62\frac{1}{2}$ —
Høiden 5 — 8 — = 68 —

Kubikindholdet $87 \times 62\frac{1}{2} \times 68 = 369750$ Kub. Tom.
= 213 Fod 1686 Tom. Kubikm.

Till. Omvendt bestemme vi i et Prisme, hvis Kubikindhold er os givet, Qvadratindholdet af sammes Grundflade, naar sammes Høide er given, eller denne, naar Grundfladen er given, i det

$$G = \frac{\text{Prisme}}{h}$$

$$h = \frac{\text{Prisme}}{G}.$$

Exempel. Et Fangeaflukke bør, for at være uskadeligt for den Indesluttedes Sundhed, holde 600 Kubikfod; naar nu i en Fængselsbygning Høiden er 9 Fod $4\frac{1}{2}$ Tom., hvor stor bør Gulvet være i hvert enkelt Aflukke?

Prisme = 600 Kubikfod

Høiden h = 9 Fod $4\frac{1}{2}$ Tom. = 9,375

G = 64 □ Fod.

119. En Kubus eller Tærning udregnes, naar dens Sidelinie kuberes. Formlen er altsaa

$$\text{Kub} = s^3$$

hvis vi med s betegne Sidelinien.

Omvendt maa Kubikroden uddrages af det Tal, der angiver Kubikindholdet, for at finde Siden, i det

$$s = \sqrt[3]{\text{Kub}}.$$

Exempel. Hvor stor er Sidelinien i den Kubus, der er 2 Kubikfod?

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599.$$

= 1 Fod 3,12 Tom.

120. En Cylinder er ogsaa at ansee som et prismatiskt Legeme. For at beregne samme, maa Grundfladens Tværlinie eller Radius være given, endvidere Cylinderens Høide. Vi have saaledes Grundfladen $G = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi$.

Altsaa Cylinderens Kubikindhold

$$hr^2\pi = \tfrac{1}{4}hd^2\pi.$$

I. Exempel. Det astronomiske Taarn ved Trinitatis Kirke her i Staden er 63 Alen høit, dets Tværlinie er 24 Alen 8 Tommer, hvormange Kubikfod indtager samme?

$r = 24\frac{1}{3}$ Fod

$r^2 = 592\frac{1}{9}$ □ Fod

$h = 126$ Fod

$hr^2 = 74606$

$\pi = 3{,}1416$

Cylinder = $hr^2\pi$ = 284382 Kubikfod.

II. Exempel. Hvormeget veier hver Fod af Rundjern af $\frac{3}{4}$ Tommes Tværlinie, naar en Kubiktomme veier 8,942 Lod dansk Vægt?

$d = \frac{3}{4}$ Tom.

$d^2 = \frac{9}{16}$ □ Tom.

h = 1 Fod = 12

$\frac{1}{4}hd^2 = \frac{27}{16}$ Kubiktom.

$\pi = 3{,}1416$

$\frac{1}{4}hd^2\pi$ = 5,30145 Kubiktom.

En Kubiktomme veier 8,942 Lod

En Fod veier 47,4056 Lod

altsaa næsten $1\frac{1}{2}$ Pund.

Till. Omvendt udregne vi af en Cylinder, hvis Indhold er given, sammes Høide, naar Tværlinien eller Radius er given, eller sammes Tværlinie eller Radius, naar Høiden er given.

$$d = \sqrt{\frac{4\text{Cyl}}{h} \times \frac{1}{\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{\text{Cyl}}{h} \times \frac{1}{\pi}}$$

$$h = \frac{4Cyl}{d^2} \times \frac{1}{\pi}$$
$$= \frac{Cyl}{r^2} \times \frac{1}{\pi}.$$

I. Exempel. En Cylinders Kubikindhold er fundet liig 3084 Kubiktommer; sammes Høide er 49 Tommer, hvor stor er dens Tværlinie?

$$\begin{array}{rl} Cyl = & 3084 \\ & 4 \\ \hline 49) & 12336 \\ \hline & 251{,}755 \\ \frac{1}{\pi} = & 0{,}31831 \\ \hline d^2 = & 80{,}1361 \\ d = & 8{,}9519 \text{ Tommer.} \end{array}$$

II. Exempel. En Cylinder holder 113 Kubiktommer og er $\frac{5}{8}$ Tommer tyk, hvor lang er den?

$$4Cyl = 4 \times 113 = 452$$
$$d^2 = (\tfrac{5}{8})^2 = \tfrac{25}{64}$$
$$452 \times \tfrac{64}{25} = 452 \times 256 = 1157{,}12$$
$$\tfrac{1}{\pi} = 0{,}3183$$
$$h = 368{,}31 \text{ Tom.}$$

121. Et cylindriskt Rør udregnes ved at tage Forskjellen mellem to Cylindre, den udvendige og den indvendige. Hiins Radius være R, dennes r, saa er Røret

$$R^2h\pi - r^2h\pi$$
$$= (R^2 - r^2)\,h\pi$$
$$= (R + r)(R - r)\,h\pi$$

Exempel. Jernrørene til en Vandledning af 123 Fods Længde holde $4\frac{1}{2}$ Tom. i indvendigt eller Lysnings-Maal, ere

$\frac{3}{8}$ Tomme tykke i Jernet. Hvormeget veier samme, naar 1 Kubiktomme støbt Jern veier 8,281 Lod.

$$\begin{array}{rl} \text{Her er } 2r = & 4\tfrac{1}{2} \\ R - r = & \tfrac{3}{8} \\ \hline R + r = & 4\tfrac{7}{8} \\ R - r = & \tfrac{3}{8} \\ \hline (R+r)(R-r) = & 1\tfrac{53}{64} \\ h = 123 \text{ Fod} = & 1476 \\ \hline & 2698\tfrac{5}{16} \\ \pi = & 3{,}1416 \\ \text{Røret} & 8477{,}0 \text{ Kubiktom.} \\ \text{1 Kubiktomme veier} & 8{,}281 \\ \hline \text{Røret veier} & 70198 \text{ Lod} \\ = & 2193 \text{ ℔ } 22 \text{ Lod} \end{array}$$

122. For Pyramider gjælder den almindelige Regel, at deres Kubikindhold er liig $\frac{1}{3}$ af det tilsvarende Prismes Kubikindhold (Geom. 139); altsaa er Formlen

$$Pyram = \tfrac{1}{3}Gh.$$

Exempel. En fiirsidet Pyramide har et Qvadrat til Grundflade; dettes Sidelinie er 13 Fod 4 Tommer, Pyramidens Høide er $50\frac{1}{4}$ Fod; hvor stor er denne Pyramide.

Qvadratets Sidelinie $13\frac{1}{3}$ Fod
Qvadratet . . . . . $177\frac{7}{9}$ □ Fod
$\frac{1}{3}$ Høide . . . . . . $16\frac{3}{4}$ Fod
Pyramiden . . . . $2977\frac{7}{9}$ Kubikfod.

123. En Kegle er $\frac{1}{3}$ af den tilsvarende Cylinder. Formlen for samme altsaa

$$Kegle = \tfrac{1}{3}r^2h\pi = \tfrac{1}{12}d^2h\pi.$$

Exempel. En Kegles Tværlinie er 13 Tommer, sammes Høide 11 Fod, hvor stort er dens Kubikindhold?

$d = 13$ Tom.

$d^2 = 169 \,\square$ Tom.

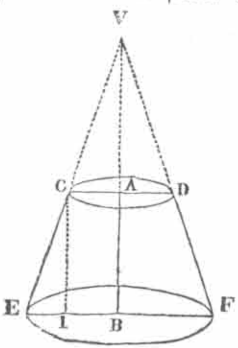
$\frac{1}{12}h = \underline{11}$

1859

$\pi = \underline{3{,}1416}$

Keglen er 5840 Kubiktom.

124. Den affortede Kegles kubiske Indhold bestemmes ved at tage Forskjellen mellem to Kegler, hvortil de fornødne Maal findes paa følgende Maade:



I den affortede Kegle CDEF ere Radierne $AC = r$, $EB = R$ givne, endvidere Høiden $AB = h$. Tilføie vi Stykket CDV, er Høiden i dette AV: i hele Keglen EVF er Høiden VB. Disse to Høider findes saaledes (Geom. 141, Till.)

$$EI : IC = CA : AV$$

$$\text{ɔ: } R - r : h = r : AV.$$

$$\text{Heraf } AV = \frac{hr}{R-r}.$$

Endvidere

$$EI : IC = EB : BV$$

$$R - r : h = R : BV$$

$$\text{Heraf } BV = \frac{hR}{R-r}.$$

Keglen EFV bliver saaledes

$$\tfrac{1}{3}R^2 \times \frac{hR}{R-r}\,\pi = \tfrac{1}{3}h\,\frac{R^3}{R-r}\,\pi.$$

Keglen CAV ligeledes

$$\tfrac{1}{3}r^2 \times \frac{hr}{R-r}\,\pi = \tfrac{1}{3}h\,\frac{r^3}{R-r}\,\pi.$$

Det affortede Kegle er Forskjellen mellem disse to, altsaa

$$\tfrac{1}{3}h\,\frac{R^3}{R-r}\,\pi - \tfrac{1}{3}h\,\frac{r^3}{R-r}\,\pi = \tfrac{1}{3}h\,\frac{R^3-r^3}{R-r}\,\pi.$$

$R-r$ lader sig dividere i R^3-r^3 og Qvotienten bliver R^2+Rr+r^2.

Altsaa er Formlen

$$\tfrac{1}{3}h\,(R^2+Rr+r^2)\,\pi.$$

Exempel. Et Maal er dannet, som en affortet Kegle. Dets nederste Tværlinie eller Bunden er 13 Tommer, den øverste Tværlinie 11 Tommer; Maalet er $8\frac{1}{2}$ Tommer dybt. Hvormange Kubiktommer indeholder samme.

$R = \frac{1}{2}\times 13 = 6\frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}\times 11 = 5\frac{1}{2}$

$h = 8\frac{1}{2}$

Regningen føres nu saaledes

$R = 6\frac{1}{2};\quad R = 6\frac{1}{2};\quad r = 5\frac{1}{2}$

$R = 6\frac{1}{2}\quad r = 5\frac{1}{2}\quad r = \underline{5\frac{1}{2}}$

$r^2 = 30\frac{1}{4}$

$Rr = 35\frac{3}{4}$

$R^2 = \underline{42\frac{1}{4}}$

$R^2+Rr+r^2 = 108\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}(R^2+Rr+r^2) = 36\frac{1}{12}$

$h = \underline{8\frac{1}{2}}$

$306\frac{17}{24}$

$= 306{,}708$

$\pi = 3{,}1416$

Den affortede Kegle 963,555 Kubiktom.

Samme er altsaa næsten saa stor som et Skjeppemaal, der holder

$$\tfrac{9}{16} \text{ Kubikfod} = 972 \text{ Kubiktom.}$$

II. Exempel. Man anvender Formlen ofte til at udregne Træstammer, der, saavidt de ere nogenlunde lige voxne, kunne ansees som affortede Kegler. I dette Tilfælde bestemmes lettest Peripherien af den nederste Cirkel ligesom af den øverste. Dog udregne vi heraf ikke umiddelbart **R** og **r**; men føre Regningen snarere saaledes, som følgende Exempel viser; næmlig vi regne med Peripherierne, som vi ville betegne med **P** og **p**; i Stedet for med **R** og **r**; vi have saaledes Ledene $P^2 + Pp + p^2 = 4R^2\pi^2 + 4Rr\pi^2 + 4r^2\pi^2$. I Stedet for at multiplicere med π, dividere vi altsaa med 4π eller multiplicere med $\frac{1}{4} \times \frac{1}{\pi}$.

En Træstamme af $22\frac{1}{2}$ Fods Høide maaler forneden rundt om $56\frac{3}{4}$ Tomme, foroven $49\frac{1}{4}$ Tomme; hvormange Kubikfod indeholder den?

$$\begin{array}{rrr}
56\frac{3}{4} & 56\frac{3}{4} & 49\frac{1}{4} \\
56\frac{3}{4} & 49\frac{1}{4} & 49\frac{1}{4} \\
\hline
P^2 = 3220\frac{9}{16} & Pp = 2794\frac{5}{16} & p^2 = 2425\frac{9}{16}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 2794\frac{5}{16} \\
 & 3220\frac{9}{16} \\
\hline
 & 3)8441\frac{1}{16} \\
\hline
\frac{1}{3}(P^2 + Pp + p^2) = & 2813\frac{11}{16} \\
h = 22\frac{1}{2} \text{ Fod} = & 270 \\
\hline
 & 759695\frac{5}{8} \\
\frac{1}{4} \times \frac{1}{\pi} = & 0{,}0796 \\
\hline
\text{Træstammen} & 60472 \text{ Kubikt.}
\end{array}$$

hvor vi, i Følge Opgavens Natur, bortkaste Brøken, altsaa have 34 Fod 1720 Kubiktommer eller næsten 35 Kubikfod.

125. En Kugles kubiske Indhold er $\frac{2}{3}$ af den omskrevne Cylinder (Geom. 142). Vi have altsaa for Kuglen følgende Formel.

$$\tfrac{2}{3} \times d \times \tfrac{1}{4} d^2\pi = \tfrac{1}{6} d^3\pi.$$

Eller Tværliniens Kubus multipliceres med

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{6}\pi &= 0{,}523599 \\
&= 0{,}5236.
\end{aligned}$$

Exempel. Hvor stor er den Kugle, hvis Tværlinie er 10 Fod 2 Tommer?

$$\begin{aligned}
d &= 10\tfrac{1}{6} \\
d^3 &= 1050\tfrac{181}{216} \\
\tfrac{1}{6}\pi &= 0{,}5236. \\
\textbf{Kuglen} &= 550{,}219 \text{ Kubikfod} \\
&= 550 \text{ Fod } 378 \text{ Kubiktom.}
\end{aligned}$$

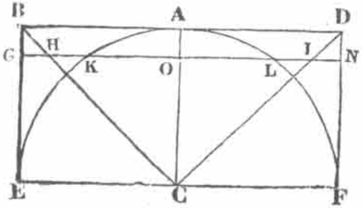
Till. Omvendt finde vi Kuglens Tværlinie, naar dens kubiske Indhold er givet, efter Formlen

$$d = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}} = \sqrt[3]{6K \times \frac{1}{\pi}}.$$

Exempel. Hvor stor er Tværlinien i en 36 Punds Kugle, naar en Kubiktomme støbt Jern veier 8,281 Lod?

$$\begin{aligned}
36 \text{ Pund} &= 1152 \text{ Lod} \\
1 \text{ Kubiktom.} &= 8{,}281 \text{ —} \\
\text{Kuglens Indhold } K &= 139{,}12 \text{ Kubiktom.} \\
6 \times \frac{1}{\pi} &= 1{,}9099 \\
d^3 &= 265{,}71 \text{ Kubiktom.} \\
d &= \sqrt[3]{265{,}71} \\
&= 6{,}4289 \text{ Tom.}
\end{aligned}$$

126. For et Kuglesegment maa Formlen udledes af den Betragtning, at, ligesaa vel som Halvkuglen er liig For-



ſkjellen mellem den omſkrevne Cylinder og den tilſvarende Kugle, er ethvert Segment af ſamme liig Forſkjellen mellem det tilſvarende Stykke af Cylinderen og af Kuglen. Altſaa er Segmentet **AKL** ligeſtort med Forſkjellen mellem Cylinderen **BDNG** og den afkortede Kegle **BHID**; men, kalde vi den fælleds Høide i ſamme eller **AO** h, have vi for Cylinderen, hvis vi endvidere betegne Kuglens Radius med r, $r^2 h \pi$.

I den afkortede Kegle er $AB = r$; men denne have vi i Formlen betegnet med R; $OH = OC = r - h$, ſom vi i Formlen have betegnet med r; hvis vi altſaa udregne efter Formlen

$$R^2 \text{ er ſamme } \quad r^2$$
$$Rr = r(r-h) = r^2 - rh$$
$$r^2 = (r-h)^2 = r^2 - 2rh + h^2$$
$$R^2 + Rr + r^2 = 3r^2 - 3rh + h^2.$$

Den afkortede Kegle er ſaaledes

$$\tfrac{1}{3} h (3r^2 - 3rh + h^2)\pi = hr^2\pi - rh^2\pi + \tfrac{1}{3} h^3 \pi.$$

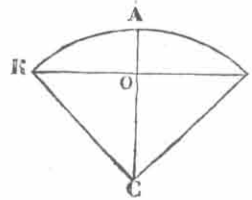
Drage vi nu denne fra Cylinderen $r^2 h\pi$, faaes

$$\text{Segm.} = rh^2\pi - \tfrac{1}{3} h^3 \pi = (r - \tfrac{1}{3} h) h^2 \pi.$$

Exempel. Af en Kugle, hvis Radius er 9 Tommer, er afſkaaret et Segment, 3 Tommer høit; dette er altſaa

$$(9-1)3^2\pi = 72\pi = 226{,}1952 \text{ Kubiktommer.}$$

Till. Var ikke Kuglens Radius os given; men ikkun Radius **OK** eller Tværlinien **KL** af den mindre Cirkel, der begrændſer Segmentet, maatte Kuglens Radius førſt ſøges. Betegne vi **AO** med h, **KO** med m; er



$$KC^2 = KO^2 + OC^2$$
$$r^2 = m^2 + (r-h)^2$$
$$r^2 = m^2 + r^2 - 2rh + h^2$$

Fradrage vi $r^2 - 2rh$ paa begge Sider, haves

$$2rh = m^2 + h^2$$

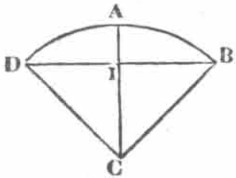
altſaa

$$r = \frac{m^2 + h^2}{2h}$$
$$r - \tfrac{1}{3}h = \frac{m^2 + h^2 - \frac{2}{3}h^2}{2h}$$
$$= \frac{m^2 + \frac{1}{3}h^2}{2h}$$
$$\text{Segm.} = \tfrac{1}{2}(m^2 + \tfrac{1}{3}h^2) h\pi.$$

Exempel. En Kuppel i en Kirke er et Affnit af en Kugle, ſamme Kuppel har 28 Fods Tværlinie og 10 Fods Høide. Hvor ſtor er dens Kubikindhold?

$$m = 14;\quad m^2 = 196$$
$$h = 10;\quad \tfrac{1}{3}h^2 = \underline{33{,}333}$$
$$229{,}333$$
$$\tfrac{1}{2}h = \underline{5}$$
$$1146{,}67$$
$$\pi = \underline{3{,}1416}$$
$$\text{Segm. } 36023 \text{ Kubikfod.}$$

127. Sectorer eller Udſnit af Kuglen forekomme ſjeldnere; ſamme ere enten kegledannede, hvilke vi kunne tænke os frembragte ved, at en Kugles Radius føres rundt om i en kegledannet Flade, eller kileformede, ſom dannes af to Planer, der ſtøde ſammen under en beſtemt Vinkel i Kuglens Midt-



punct. Hine bestaae af et Kuglesegment ADB og den tilsvarende Kegle. Betegne vi, som forhen, Kuglens Radius med r, Høiden i Segmentet AI med h, er

$$\begin{aligned} DI^2 &= DC^2 - IC^2 \\ &= r^2 - (r-h)^2 \\ &= r^2 - r^2 + 2rh - h^2 \\ &= 2rh - h^2 \\ IC &= r - h \end{aligned}$$

altsaa Keglen $ADBC = \frac{1}{3}(2rh - h^2)(r-h)\pi$

$$\begin{aligned} &= (\tfrac{2}{3}r^2h - \tfrac{1}{3}rh^2 - \tfrac{2}{3}rh^2 + \tfrac{1}{3}h^3)\pi \\ &= (\tfrac{2}{3}r^2h - rh^2 + \tfrac{1}{3}h^3)\pi \end{aligned}$$

Føie vi hertil

$$\begin{aligned} \text{Segm.} &= (r - \tfrac{1}{3}h)h^2\pi \\ &= (rh^2 - \tfrac{1}{3}h^3)\pi \end{aligned}$$

haves i Alt $\text{Sector} = (\frac{2}{3}r^2h - rh^2 + rh^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{3}h^3)\pi$

$$= \tfrac{2}{3}r^2h\,\pi.$$

Exempel. Udregne vi Udsnittet eller Sector af den Kugle, hvis Radius er 9 Tommer, hvori den tilsvarende Høide af Segmentet eller Affnittet er 3, haves

$$\begin{aligned} \text{Sector} &= \tfrac{2}{3} \times 9^2 \times 3 \times \pi \\ &= 162 \times \pi \\ &= 508{,}94 \text{ Kubiktommer.} \end{aligned}$$

Et kileformet Udsnit staaer i Forhold til hele Kuglen, som den Vinkel, der er mellem dets Planer, til 360^0; altsaa, hvis vi betegne Graderne af samme med n^0, haves

$$KS : \text{Kuglen} = n^0 : 360^0.$$

Altsaa, da Kuglen er $\frac{1}{6}d^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$,

$$\begin{aligned} KS &= \frac{n^0}{360^0} \times \tfrac{4}{3}r^3\pi \\ &= \frac{n^0}{270^0}\, r^3\pi \end{aligned}$$

Exempel. Hvor stor er et kileformet Udsnit af $13^0\ 30'$ af en Kugle, hvis Radius er 17 Tommer?

$$\begin{aligned} r &= 17 \\ r^3 &= 4913 \\ \pi &= 3{,}1416 \\ r^3\pi &= 15434{,}6 \end{aligned}$$

$$n^0 = 13\tfrac{1}{2};\ \frac{n^0}{270^0} = \tfrac{1}{20}$$

$$KS. = 771{,}73 \text{ Kubikt.}$$

128. To Tærninger forholde sig til hinanden, som Kubiktallene af deres Sider, efterdi Tærningerne udmaales ved at kubere Siderne.

Denne Sætning lader sig udstrække til alle regelrette Legemer, efterdi de ere ligedannede; dog disse forbigaae vi, da de sjeldent blive Gjenstand for praktisk Beregning, hvorimod vi snarere betragte de øvrige, i det Foregaaende afhandlede Legemer.

Da vi ikke have i Stereometrien nærmere undersøgt Legemerne med Hensyn til Betingelserne for, at de ere ligedannede, indskrænke vi os ogsaa her til Følgende:

Haves to Prismer, hvis Grundflader ere ligedannede Figurer, og i hvilke Grundfladernes eensliggende Sidelinier forholde sig som Høiderne, ville saadanne Prismer staae i Forhold til Kubiktallene af Sideliniernes eller Høidernes Maal.

Vi have for Prismet Formlen

$$\text{Prisme} = G \times h.$$

Betegne vi altsaa to Prismer med P og $\mathfrak{P}$, deres Grundflader med G og $\mathfrak{G}$, deres Høider med h og $\mathfrak{h}$, saa er

$$P : \mathfrak{P} = Gh : \mathfrak{G}\mathfrak{h}$$

hvilket vi kunne udtrykke saaledes: Prismer i Almindelighed staae i sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider, saa at vi ogsaa kunne skrive

$$P : \mathfrak{P} = (G : \mathfrak{G}) + (h : \mathfrak{h}).$$

Men, da nu, for disse Prismer, i Følge Antagelsen, Sidelinierne i de ligedannede Grundflader staae i Forhold til Høiderne; vil, hvis Sidelinierne betegnes med s og $\mathfrak{s}$,

$$G : \mathfrak{G} = s^2 : \mathfrak{s}^2$$

og $\quad s^2 : \mathfrak{s}^2 = h^2 : \mathfrak{h}^2$

altsaa $\quad G : \mathfrak{G} = h^2 : \mathfrak{h}^2.$

Men, som Følge heraf, er, hvis vi multiplicere med Proportionen

$$h : \mathfrak{h} = h : \mathfrak{h}$$

$$Gh : \mathfrak{G}\mathfrak{h} = h^3 : \mathfrak{h}^3$$

altsaa $\quad P : \mathfrak{P} = h^3 : \mathfrak{h}^3 = s^3 : \mathfrak{s}^3.$

Sætningen gjælder ligeledes for de Pyramider, hvis ligedannede Grundfladers Sidelinier ere proportionale med Høiderne.

Cylindre, hvis Grundfladers Tværlinier eller Radier staae i Forhold til Høiderne, ville paa lignende Maade forholde sig som Kubiktallene af Maalene for Tværlinierne, Radierne eller Høiderne. Betegne vi nemlig saadanne to Cylindre med C og $\mathfrak{C}$; deres Tværlinie med d og $\mathfrak{d}$ eller Radier med r og $\mathfrak{r}$, deres Høider med h og $\mathfrak{h}$; da forholde i Almindelighed

$$C : \mathfrak{C} = d^2 h\pi : \mathfrak{d}^2\mathfrak{h}\pi.$$

Men, da $\quad d : \mathfrak{d} = h : \mathfrak{h}$

er $\quad d^2 : \mathfrak{d}^2 = h^2 : \mathfrak{h}^2$

og $\quad d^2 h : \mathfrak{d}^2\mathfrak{h} = h^3 : \mathfrak{h}^3$

altsaa

$$C : \mathfrak{C} = h^3 : \mathfrak{h}^3 = d^3 : \mathfrak{d}^3 = r^3 : \mathfrak{r}^3.$$

Sætningen gjælder ligeledes for Kegler, i hvilke Grundfladens Tværlinier eller Radier ere proportionale med Høiderne, og paa samme Maade for ligeligen afkortede Kegler, i hvilke begge Radier ere indbyrdes proportionale og ligeledes proportionale med Høiderne.

Kugler forholde sig som Kubiktallene af deres Tværliniers eller Radiers Maal; thi, betegne vi to Kugler med K og $\mathfrak{K}$, deres Tværlinier med d og $\mathfrak{d}$, deres Radier med r og $\mathfrak{r}$, er

$$K = \tfrac{1}{6} d^3 \pi = {}_{3} r^3 \pi$$

$$\mathfrak{K} = \tfrac{1}{6} \mathfrak{d}^3 \pi = \tfrac{4}{3} \mathfrak{r}^3 \pi$$

altsaa

$$K : \mathfrak{K} = d^3 : \mathfrak{d}^3 = r^3 : \mathfrak{r}^3.$$

Ogsaa Kugleaffnit eller Kugleudsnit ville forholde sig som Kubiktallene af Kuglernes Radier, saafremt Høiderne ere proportionale med Radierne; thi, betegne vi Affnittene med Sg og $\mathfrak{Sg}$, Radierne med r og $\mathfrak{r}$, Høiderne med h og $\mathfrak{h}$, have vi

$$Sg : \mathfrak{Sg} = (r - \tfrac{1}{3}h)h^2 : (\mathfrak{r} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{h})\mathfrak{h}^2$$

men, saafremt

$$r : \mathfrak{r} = h : \mathfrak{h},$$

vil

$$r : h = \mathfrak{r} : \mathfrak{h}$$

$$r : \tfrac{1}{3}h = \mathfrak{r} : \tfrac{1}{3}\mathfrak{h}$$

$$r - \tfrac{1}{3}h : r = \mathfrak{r} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{h} : \mathfrak{r}$$

$$r - \tfrac{1}{3}h : \mathfrak{r} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{h} = r : \mathfrak{r}$$

ligeledes

$$h^2 : \mathfrak{h}^2 = r^2 : \mathfrak{r}^2.$$

Segmenterne, som staae i sammensat Forhold af Høidernes Qvadrater og Radierne — $\frac{1}{3}$ Høide, forholde sig altsaa, under samme Betingelse, som Kubiktallene af Radiernes Maal.

For de kegledannede Kugleudsnit gjælder det samme; thi, naar vi betegne to Udsnit med Sect og $\mathfrak{S}$ect, er

$$\text{Sect} : \mathfrak{S}\text{ect} = \tfrac{2}{3} r^2 h \pi : \tfrac{2}{3} \mathfrak{r}^2 \mathfrak{h} \pi$$
$$= r^2 h : \mathfrak{r}^2 \mathfrak{h}$$

er nu tillige

$$r : \mathfrak{r} = h : \mathfrak{h}$$

faae vi

$$\text{Sect} : \mathfrak{S}\text{ect} = r^3 : \mathfrak{r}^3.$$

Kileformede Udsnit af lige mange Grader forholde sig som Kubiktallene af Kugleradiernes Maal; thi

$$KS = \frac{n^0}{270^0} r^3 \pi$$

et andet kileformet Udsnit, af samme Gradeantal, som vi betegne med

$$\mathfrak{KS} = \frac{n^0}{270^0} \mathfrak{r}^3 \pi$$

altsaa

$$KS : \mathfrak{KS} = r^3 : \mathfrak{r}^3.$$

Ved alle Legemer, der ere ligedannede, finde ovennævnte Forholde, imellem deres Maal eller Dimensioner, Sted, og, ligesom altsaa ligedannede Figurer forholde sig som Qvadrattallene af deres Siders Maal eller af hvilkesomhelst andre af deres eensartede Dimensioner, ville **ligedannede Legemer forholde sig som Kubiktallene af deres Sider eller eensartede Dimensioner.**

Anm. 1. Ligesom altsaa en Tegning af en Planfigur, udført i halv Maalestok eller $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ o. s. v., er i Fladeindhold $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ af Originalen, vil en Model, af en legemlig Gjenstand, udført i en saadan formindsket Maalestok, være $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{64}$ o. s. v. af Originalen. Er Modellen af samme Materiale, som det, hvoraf Originalen skal forfærdiges, er Forholdet mellem sammes og Originalens Vægt 1 : 8, 1 : 27, 1 : 64 o. s. v. eller i Almindelighed $1 : n^3$, naar Originalen skal være efter et 2, 3, 4, eller n Gange saa stort Maal.

Anm. 2. Paa det Forhold, der finder Sted mellem ligedannede Legemer, har man til praktiskt Brug grundet adskillige Udmaalingsmethoder. Saaledes bestemmes i Artilleriet Kuglers Kubikindhold eller Vægt ved **Kaliberstokken**, paa hvilken afsættes deres Tværlinier, maalte med Krumpasseren.

Have vi nemlig beregnet Tværlinien for en Kugle af en vis Vægt, f. Ex. for 36 Pundinger-Kuglen, i Følge § 125 II Exempel, vilde vi, ved at tage dette Tal i Forhold til Kubikrødderne af den forskjellige Størrelse eller Vægt af Kuglerne, kunne bestemme Tværlinien af andre Kugler. F. Ex. hvis en Jernkugle af 36 Pund har en Tværlinie af 6,4289, hvor stor en Tværlinie har da en Jernkugle paa 5 Pund?

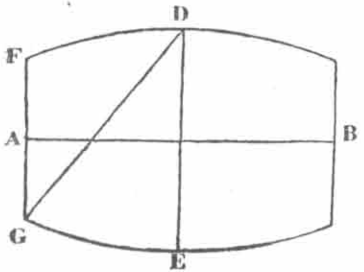
$$36 \text{ Pd.} : 5 \text{ Pd.} = 6{,}4289^3 : x^3$$
$$\sqrt[3]{36} : \sqrt[3]{5} = 6{,}4289 : x$$

altsaa

$$x = \frac{6{,}4289 \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{36}}$$
$$= \frac{6{,}4289 \times 1{,}710}{3{,}301} = 3{,}293.$$

Beregne vi nu saaledes en Række af Tal, for Kugler af 1 Pd., 2 Pd., 3 Punds ... Vægt, hvilke ville forholde sig som Kubikrødderne af de fortløbende Tal 1, 2, 3 ... og afsætte dem paa en Maalestok, have vi den nævnte Kaliberstok, som umiddelbart giver Kuglens Vægt, naar dens Tværlinie er funden.

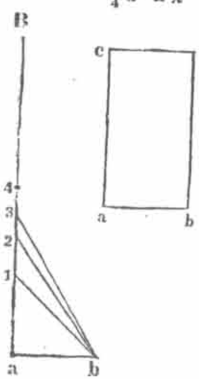
Ogsaa Bestemmelsen af Foustagers Indhold grunder sig paa Forholdet mellem ligedannede Legemer.



Vare alle Foustagers Dimensioner proportionale og Foustagerne overhovedet ligedannede, eller Høiden AB stod i samme Forhold til Spundsdiameteren DE og Bunddiameteren FG ved det ene Foustage, som ved det andet, behøvede man blot at bestemme det kubiske Indhold af et Foustage og tillige en Dimension af samme, f. Ex. GD; bestemme vi nu samme Dimension i et andet Foustage, hvis Indhold var os ubekjendt, ved deri at nedstikke en Stok fra Spundset til Bundens nederste Punct, vilde disse to Foustager forholde sig som Kubiktallene af Maalene for disse Linier, og det andet Foustages ubekjendte Indhold saaledes findes. Endnu beqvemmere for det Praktiske bliver det at afsætte paa en Stok Kubikrødderne af Dimensioner som GD for Foustager af 1, 2, 3 ... indtil et hvilketsomhelst Antal af et givet Maal f. Ex. Potter, og da vil en saadan Maalestok den kubiske Visir- eller Rudestok tjene til umiddelbart at bestemme et Foustages Kubikindhold.

Forsaavidt imidlertid Foustagerne ikke ere ligedannede med Normal-Foustaget, maa man anvende andre Methoder til at bestemme Indholdet. Var et Foustage nøiagtigt en Cylinder, vilde man anvende Formlen

$$\tfrac{1}{4} d^2 h \pi$$



Men, for ikke hver Gang at foretage en vidtløftig Udregning, letter man sig ved Maalestokke samme paa følgende Maade. Var Pottemaalet, eller hvilken anden Maal-Eenhed, vi anvende, en Cylinder, hvis Tværlinien var ab, Høide var ac, construere vi paa følgende Maade en Maalestok. Vi afsætte paa aB Tværlinien ab fra a til 1, og ligeledes lodret fra a; Linien 1b drages; samme er, hvis ab ansees som Eenhed, liig $\sqrt{2}$; den afsættes opad fra a liig a2; Linien b2 drages, nu er i $\triangle$ a2b;

$$b2^2 = ab^2 + a2^2$$
$$= 1 + \sqrt{2}^2$$
$$= 3$$

altsaa $\quad b2 = \sqrt{3}$

samme afsættes opad og betegnes med a3, b3 drages og afsættes atter opad til 4 o. s. v. Maalestokken aB giver saaledes ved Tallene 1, 2, 3, 4 ...

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} \ldots$$

hvis ab ansees for Eenhed.

En anden Maalestok med lige Dele indeholder Høiden ac 1, 2, 3 ... Gange.

Finde vi nu for en os ubekjendt Cylinder Tværlinien, udmaalt med Maalestokken aB, liig 7, Høiden med Høidemaalestokken liig 9, slutte vi, at denne Cylinder indeholder Maalet

$$7 \times 9 = 63 \text{ Gange}$$

thi, ifølge disse Maal, vil den ubekjendte Cylinders Grundflade være 7 Gange større end Maalets, da disse Grundflader forholde sig som Cirklernes Tværlinier qvadrerede; Høiden vil endvidere være 9 Gange Maalets Høide.

Ved denne langt strengere Methode maa dog tages Hensyn til, at saadanne Foustager ingenlunde kunne ansees som nøiagtige Cylindre. Spundsdiameteren er større end Bunddiameteren; almindeligen antages $\frac{2}{3}$ af hiin og $\frac{1}{3}$ af denne som Middeldiameter, ogsaa slutter man sig ikke aldeles nøiagtigt til Foustagens Længde indvendigen fra dens udvendige Maal, især forsaavidt Bundstaverne ofte ere hvælvede.

Angaaende de Methoder, som vise, hvorledes Indholdet af ikke fulde Foustager kan bestemmes, af ovale Fade o. s. v. maae vi henvise til de udførligere Afhandlinger over Rudekunsten.

129. For Overfladen af Legemer, der begrændses af retlinede Planfigurer, behøves ingen særegne Formler; derimod give vi her Formlen for den rette Cylinders Overflade.

Er h Høiden, d Tværlinien

er $\quad$ **Cyl Overfl.** $= hd\pi$.

Ville vi til denne krumme Overflade føie de to Grundflader, ere samme

$$2 \times \tfrac{1}{4} d^2 \pi$$

altsaa hele Overfladen

$$(\tfrac{1}{2} d + h) d \pi.$$

Denne Formel gjælder dog kun for den rette Cylinder. Den skjeve Cylinders Overflade kan ikke findes ved den elementære Mathematiks Hjælp.

For den rette Kegles Overflade haves følgende Formel:

$$\tfrac{1}{2} dl \pi = rl \pi$$

hvor l er den saakaldte Sidelinie d. e. en Linie fra Keglens Top ned til Peripherien. Er denne ikke given, findes

$$l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

altsaa

$$\text{Kegl. Overfl.} = \tfrac{1}{2} d\pi \sqrt{\tfrac{1}{4} d^2 + h^2}$$
$$= r\pi \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Den skjeve Kegles Overflade lader sig ligeledes ikke finde, uden den høiere Mathematiks Hjelp.

Den afkortede rette Kegles Overflade er

$$(R + r) l \pi$$

hvor Sidelinien

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$$

Exempel. Et kegledannet Tag paa et rundt Taarn skal dækkes med Kobber; samme er dog sluttet foroven med en Laterne, saa at Taget danner en afkortet Kegle. Her er Tværlinien af Taarnet forneden liig 11 Alen, af Laternen liig 2 Al. 8 Tom. Den lodrette Høide af Taget er 5 Alen, hvormange Qvadratfod udgjør det Hele?

Tværlinien forneden er 11 Alen

$$\begin{array}{rcl}
\text{Radius } R & & 11 \text{ Fod} \\
r & & 2\tfrac{1}{3} \text{ —} \\
h & = & 10 \\
R - r & = & 8\tfrac{2}{3} \\
(R - r)^2 & = & 75{,}1111 \\
h^2 & = & \underline{100} \\
s & = & \sqrt{175{,}1111} \\
 & = & 13{,}233 \\
R + r & = & \underline{13\tfrac{1}{3}} \\
(R + r)s & = & 176{,}44 \\
\pi & = & \underline{3{,}1416} \\
\end{array}$$

Overfladen 554,31 □ Fod.

130. En Kugles Overflade er liig 4 Gange dens Storcirkel (Geom. § 143), altsaa

$$\text{Kugl. Overfl.} = 4 r^2 \pi = d^2 \pi.$$

Exempel. Hvor stor er Overfladen af en Kugle, hvis Tværlinie er 11 Fod 7 Tommer

d 11,583
d^2 134,17
π 3,1416

421,50 □ Fod.

Till. Ogsaa den krumme Overflade af et Kugleafsnit er liig den tilsvarende Deel af Overfladen af den om Kuglen omskrevne Cylinder. Altsaa er samme

$$dh\pi = 2rh\pi.$$

Udregne vi for det forhen givne Exempel (§ 126 Till.) Overfladen, maae vi først bestemme

$$r = \frac{m^2 + h^2}{2h}$$

$$m = 14; \quad m^2 = 196$$
$$h^2 = 100$$
$$m^2 + h^2 = 296$$
$$r = 14{,}8$$
$$2h = 20$$
$$296$$
$$\pi = 3{,}1416$$
$$929{,}91 \ \square \ \text{Fod.}$$

Bjerring, N. C., tydsk Læsebog med dansk Oversættelse. 1834. 8. indb. 48 ß, uden Oversættelse 28 ß.

Bjerring, B. P., fransk Læsebog med dansk Oversættelse, Anden Udgave. 1836. 8. indb. 48 ß, uden Oversættelse 28 ß.

— Lectures françaises, ou choix de morceaux en prose et en vers, med dansk Oversættelse. Anden Udgave. 1841. st. 8. indb. 2 Rbd. 48 ß, uden Oversættelse 1 Rbd. 32 ß.

— Samling af lette franske Læsestykker til Brug ved Underviisning, med dansk Oversættelse. 1841. st. 8. 72 ß, uden Oversættelse 48 ß

— og N. C., Recueil de morceaux en prose, med dansk Oversættelse. 1837. st. 8. indb. 1 Rbd. 48 ß, uden Oversættelse 76 ß.

Birch, D. S., Udtog af den danske Sproglære, 4de Udgave. 1825. indb. 24 ß.

*— Naturen, Mennesket og Borgeren. En Læsebog, med nærmest Hensyn til Almueskolernes øverste Klasse. 9de Udgave. 1839. 8. indb. 88 ß.

Boiesen, E. F., Haandbog i de romerske Antiqviteter tilligemed en kort romersk Literaturhistorie. 1839. st. 8. indb. 1 Rbd. 8 ß.

— — — i de græske Antiqviteter. 1841. st. 8. indb. 1 Rbd. 8 ß,

Borgen, B. A., latinsk Læsebog for de første Begyndere. 1834. 8. indb. 72 ß.

— Veiledning til Affattelse af Udarbeidelser i Modersmaalet. 1840. 8. indb. 80 ß.

Brammer, G. P., det hellige Land paa Herrens Tid, en statistisk-geographisk Beskrivelse. 1832. 8. heftet 72 ß.

— Lærebog i Didactik og Pædagogik. 1838. 8. heftet 2 Rbd.

Bramsen, P., og S. Drejer, kortfattet Lærebog i Zoologie og Botanik, til Brug for Skoler. 1841. st. 8. indb. 1 Rbd. 8ß

Bredsdorff, J. H., Begyndelsesgrunde af Geognosien. 1827. 8. heftet 48 ß.

Bruhn, J., Geographie für Real- und Bürgerschulen, 2te Ausgabe. 1836. st. 8. indb. 88 ß.

— Kleine Geographie. 5te Auflage. 1839. 8. indb. 40 ß.

Burmeister, H., Grundtræk af Naturhistorien til Brug ved Underviisning, overs. af N. C. N. Larsen. 1840. st. 8. indb. 1 Rbd.

Bøgh, M. F. G., dansk Retskrivningslære, foredraget som selvstændig videnskabelig Lære. 1822. 8. heftet 48 ß.

Ciceronis, *M. T.*, **Tusculanarum disputationum libri quinque ed. P. H. Tregder, 8maj. 1 Rbd. 24 ß.**

Det Vigtigste af det tydske Sprogs Syntax. (Trykt som Manuscript). 1840. indb. 24 ß.

Drejer, S., og P. Bramsen, Lærebog i Naturhistorien for Skoler. 1840. 8. indb. 2 Rbd. 24 ß.

Fallesen, L. S., Begyndelsesgrundene i den rene Mathematik, med Exempler og Tillæg. 1834. st. 8. indb. 1 Rbd. 88 ß, Exempler og Tillæg særskilt 48 ß.

Fénélon, **les aventures de Télémaque. 1835. 8.** indb. 48 ß.

*Frank, H., Forsøg til en Ledetraad ved Underviisning i dansk Sproglære, Retskrivning og Stiiløvelse ꝛc. 1841. 8. indb. 56 ß.

Fries, G., ausführliche deutsche Sprachlehre. 1ster Th. 1834. st. 8. heftet 1 Rbd.

— Substantivernes Declination i det tydske Sprog. 1832. 8. heftet 16 ß.

Frølund, F., Udvikling af Luthers Catechismus. 1839. 8. indb. 1 Rbd. 48 ß.

— Haandbog til Brug ved Religionsunderviisningen, eller Udvikling af Balles Lærebog. 2den Udgave. 1840. 8. 3 Rbd. 8 ß.

Genlis, **Mme., Choix du Théâtre,** tilligemed en Ordbog over de i Bogen forekommende Ord, ved Fr. Schaldemose. 1830. 8. heftet 64 ß.

Henrichsen, R. J. F., Materialier til latinske Stile. 2 Dele. 1832—33. 8. indb. 1 Rbd. 48 ß. Hver Deel særskilt 72 ß.

Hoffmeyer, A. B., Begyndelsesgrunde af Læren om Keglesnitslinierne, med 2de Tavler. 1835. st. 8. heftet 48 ß.

— Naturlære, med Figurer. 1836. st. 8. heftet 2 Rbd.

Holst, H. P., dansk Læsebog for Mellemclasserne og de høiere Classer, 1ste Afdeling: den prosaiske Deel. Anden Udgave. 1841. st. 8. indb. 1 Rbd. 80 ß.

— — 2den Afdeling: den poetiske Deel. 1839. st. 8. indb. 1 Rbd. 48 ß.

— Smaadigte til Udenadslæsning til Brug ved den første Underviisning i Modersmaalet. 1838. 8. heftet 24 ß.

Homer's Iliade, oversat af Chr. Wilster. 2 Dele. 1836. Imperial 8. 3 Rbd.

— Odysseen, overs. af Samme. 2 Dele. 1837. Imperial 8. 3 Rbd.

Jacobi, W., Lærebog i Chemien, med 2 Tavler. 1835. 8. indb. 1 Rbd.

Jensen, B. F., Bibelsprog, samlede til Brug ved den første Religions-Underviisning; tilligemed en kort Beskrivelse over det hellige Land. 1839. 8. heftet 28 ß.

— geographisk-historisk Beskrivelse over Palæstina, udarbeidet som Tillæg til Herslebs større Bibelhistorie. 1841. 8. heftet 32 ß.

Johannsen, J. C. G., Kernsprüche der Bibel, 2te vermehrte Auflage. 1838. indb. 32 ß.

Krossing, N., poetisk Læsebog til Brug for Skoler. 1ste Deel, for Begyndelses- og Mellemclasser. 3die Udgave. 1839. indb. 76 ß.

— poetisk Læsebog til Brug for Skoler. 2den Deel for de høiere Classer. 2den Udgave. 1838. 8. indb. 84 ß.

— Opgaver til Øvelse i dansk Stiil, for Begyndere. 1832. 8. indb. 76 ß.

— Schema til dansk Grammatik. 2den Udgave. 1838. st. 8. heft. 16 ß.

Krøyer, H., naturhistorisk Lærebog for de første Begyndere. 2den Udgave. 1839. 8. indb. 56 ß.

Molbech, C., dansk Læsebog. 2den Udgave. 1837. 8. indb. 1 Rbd. 8 ß.

Nøsselt, F., Verdenshistorie for Pigeskoler. 1841. st. 8. (udkommer i August Maaned).

Oppermann, L., latinsk Sproglære til Skolebrug, udarbeidet især efter Billroth. 1840. 8. indb. 1 Rbd.

Ramus, C., Trigonometrie, indeholdende den elementære Theorie af de trigonomiske Linier. 1837. 4. heftet 1 Rbd. 48 ß.

Rosing, S., engelsk Formlære. 1837. 8. heftet 16 ß.

Rung, G. F. F., tydsk Læsebog for Børn. Til Brug ved den første Underviisning. Anden forøgede Udgave. 1841. st. 8. med Oversættelse indb. 1 Rbd. 56 ß, uden Oversættelse 1 Rbd. 36 ß.

— tydsk Læsebog for Mellemclasserne og de høiere Classer. 1839. st. 8. indb. 2 Rbd.

Rung, G. F. F., det tydske Sprogs Bøiningsformer, tilligemed Regler for Substantivernes Kjøn. 1837. st. 8. indb. 44 ß.

Schram, **G., petites remarques sur la grammaire franç. de Noël & Chapsal, à l'usage de Dannois. 1828. 8.** heftet 24 ß.

Schubert, G. N., Lærebog i Naturhistorien til Brug for Skoler, fordansket af Magister Zeuthen. 1833. 8. indb. 1 Rbd. 12 ß.

Silverberg, A. F., Omrids af Geographien. 2den forbedrede Udgave. 1840. st. 8. indb. 56 ß.

— Lærebog i den mathematiske Geographie, med 2 Tavler. 1832. 8. heftet 48 ß.

Thortsen, C. A., historisk Udsigt over den danske Literatur indtil Aar 1814. 1839. st. 8. heftet 1 Rbd.

Trybe, H. K., Ledetraad ved den første Religionsunderviisning. 2den Udgave. 1838. 24. heftet 20 ß.

— Digte og Riim for Børn til Udenadlæsning. 1840. 8. 24 ß.

Ursin, G. F., Arithmetik udarbeidet med stadigt Hensyn til den praktisk Anvendelse, med Figurer. 1841. 8. indb. 80 ß.

*— Populært Foredrag over Astronomien, andet Oplag 1838, med 4 Kobbertavler. 8. indb. 1 Rbd. 32 ß.

*— Dampmaskinen, fremstillet i 12 populære Forelæsninger med 7 Zinktavler. 1839. st. 8. 1 Rbd. 32 ß.

— Geometrie, udarbeidet med stadigt Hensyn til Anvendelsen i Kunster og Haandværker. Anden Udgave, med Figurer. 1839. 8. indb. 80 ß.

*— **Logarithmer med 6 Decimaler for Tallene fra 1 til 100,000 for Sinus og Tangens for hver 10″, tilligemed forskjellige constante Logarithmer og Tal, der ere af Vigtighed i Mathematiken. 1827. 8. 3 Rbd.**

*— Lærebog i den rene Mathematik, især med Hensyn til dem, der forberede sig til Universitetet. Tredie Oplag 1835. Dette Oplag indeholder en Samling af Øvelses-Exempler af Decimal-Regning, Kjædebrøk, Bogstavregning, Ligninger, Logarithme-Regning, samt Opgaver af Planimetrien 1835. st. 8. indb. 1 Rbd. 16 ß.

*— Samme Lærebogs 2den Deel, indeholdende Stereometrien, Trigonometrien og det Endeliges Analysis. 1835. st. 8. indb. 1 Rbd. 16 ß.

*Ursin, G. F., Øvelses-Exempler af Decimalregning, Kjædebrøk, Bogstav-Regning, Ligninger, Logarithme-Regning, samt Opgaver af Planimetrien. (NB. Et særskilt Aftryk af Tillæget til Lærebogens 3die Oplag). st. 8. indb. 40 ß.

*— Haandbog i den mechaniske Deel af Naturlæren, indeholdende Læren om de faste og flydende Legemers Ligevægt og Bevægelse, og en udførlig Efterretning om Opfindelsen, Uddannelsen og den nærværende Beskaffenhed af Dampmaskinen, bearbeidet efter **Millington's epitome of natural and experimental philosophy** med 14 graverede Steentavler. 1826. 8. indb. i Papbind 3 Rbd.

— Regnebog eller Anviisning hensigtsmæssigen at udføre Huus- og Handels-Regning. Udarbeidet til Nytte især for den danske Ungdom. Tredie Oplag (første Stereotyp-Aftryk). 1840. 8. indb. 72 ß.

Vandborg, C. U., tydsk Primitiv-Lexicon. Anden Udgave. 1831. heftet 32 ß.

Weyse, C. F., Trestemmige Sange til Brug ved Skoleunderviisningen, 1ste Hefte, 1841, 4. heftet 36 ß.

De med * betegnede Artikler ere Commisions Sager.