Deres Hoifyrstelige Durchlauchtighed

Frederik Christian,

Hertug til Slesvig Holsteen Sønderborg Augustenborg,

Videnskabers høie Beskytter,

Skolevæsenets ivrige og virksomme Talsmand,

helliges

dette Forsøg

med den sandeste Ærefrygt og dybeste Erkiendtlighed

underdanigst

af

Forfatteren.

Forerindring.

Her følger Slutningen eller anden Deel af det Forsøg til en Lærebog, hvoraf omtrent det Halve eller første Deel udkom i Aaret 1799. For dette lange Ophold beder jeg om mine Læseres Tilgivelse. Jeg kunde anføre mange baade vigtige og mindre vigtige Aarsager til dette Ophold; men jeg troer, bedre slet ingen at anføre, og i det Sted bede om en gunstig Modtagelse for min Bog, nu da den endelig kommer, at den ikke endnu skulde komme for tidlig.

Angaaende Planen, jeg har fulgt i at udarbeide dette Forsøg, tillades det mig blot at giøre opmærksom paa Følgende: Jeg har fremsat de forskiellige enkelte Stykker eller Dele af Videnskaben i den Orden, som jeg efter min Overbeviisning troer at de bør foredrages, uden derfor at paastaae, at det er

den

den bedste. Enhver Lærer kan derfor efter eget Skiønnende forandre denne Orden, uden at Bogen derfor bliver mindre brugbar. At undersøge nøie og med Grunde godtgiøre, hvorfor jeg troer, at den af mig i nærværende Bog fulgte Orden i Materiernes Fremsættelse ogsaa er den, som jeg anseer for rigtigst at følge ved Underviisningen, vilde lede mig videre, end de her foreskrevne Grændser tillade; jeg vil derfor opsætte denne Undersøgelse til en anden Tid og paa et andet Sted.

Om Udarbeidelsen selv har jeg intet videre at sige, end at jeg derpaa har anvendt al muelig Flid, og at de fleste Afsnit ere flere Gange omarbeidede. Jeg har giennemlæst de fleste mig bekiendte Skrifter i samme Materie og benyttet mig deraf. Læseren vil vel ikke forefinde her noget egentligt Nyt, og det er nok neppe at vente i en Bog af den Art; dog haaber jeg at enhver upartisk Læser vil finde, at jeg ikke blindt hen har fulgt Nogen, men selv nøie giennemtænkt og prøvet Alt, for at fremsætte det med muligste Orden og Tydelighed; og hvis dette kun nogenledes er lykkedes mig, troer jeg ikke denne lille Bog overflødig.

I Hen-

I Henseende til Bogens Indhold, da har min Hensigt været, at den skulde indfatte det af den rene Mathematik, som foredrages i de forandrede lærde Skoler efter den for disse Skoler allernaadigst approberede Plan. For disse Skoler, hvor den efter Skole-Commissionens Forslag er indført, er den især skrevet; dog troer jeg, at den kan bruges i ethvert Institut og ved enhver Underviisning. Ligesom det og har været mig en ikke ringe Opmuntring at erfare, at den første Deel allerede mange Steder er brugt.

Da begge Dele beqvemt kan indbindes samlede, som jeg og ønskede for Kobbernes Skyld, da nogle faa Figurer paa de Kobbere i første Deel høre til Sætninger, der forekomme først i anden, og omvendt (en Feil, som bedes undskyldt, og som er foraarsaget af Textens oftere Omarbeidelse efterat Pladerne vare stukne), saa har Forlæggeren, efter min Anmodning, besørget forskiellige Titelblade, nemlig baade til begge Dele under eet og til anden Deel for sig selv.

At her intet findes om Keglesnittene og den sphæriske Trigonometrie, er, fordi jeg ikke er ganske

eenig

eenig med mig selv, hvorvidt disse Dele af Mathematiken bør foredrages i de lærde Skoler; og jeg vilde, at min Bog intet Andet skulde indeholde, end hvad der bør læses. Imidlertid er en Afhandling om Keglesnittene allerede trykt og Pladerne stukne; dertil skal jeg føie de første Grunde af den sphæriske Trigonometrie, da dette, der vil udgiøre 5 à 6 Ark, kan ansees som et Supplement eller Anhang til Bogen, hvori jeg muligt tillige kan faae Leilighed at anføre en eller anden Rettelse eller Tillæg til det i Bogen selv foredragne.

Jeg har nu intet videre at tillægge, uden at anbefale min Bog til Læsernes gunstige Dom.

Kiøbenhavn d. 7 Septbr. 1803.

Forfatteren.

Indhold.

Første Deel.

Anden Deel.

Videre Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

Om Æqvationer eller Ligninger og deres Opløsning.

III. Om

Geometrie. Anden Deel.
Stereometrie eller Lære om Legemer.

III. Om

Plan-Trigonometrie.

A l g e b r a.

Første Deel.

Videre Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

(See 1 Deel §. 46.)

Om Brøkregning med Bogstaver.

§. 1.

Da Bogstaver ere almindelige Tegn hvorved alle Arter af Størrelser kan betegnes og en Brøk (Arithmetik §. 29.) ikke er andet end een eller flere Dele af en vis som Eenhed betragtet Størrelse, der udtrykkes ved Tæller og Nævner; saa følger at Udtrykkene $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, kan betegne enhver Brøk i Almindelighed; og da Regningen med disse algebraiske eller Bogstav-Brøk skeer efter samme Regler, som i Arithmetiken om Talbrøk ere givne (fra hvilke de ogsaa kun i Udtrykket ere forskiellige) vil enhver der har lært at regne med Talbrøk og tillige hvad om hele algebraiske eller Bogstav-Størrelser er lært (1 D. §. 46.) ogsaa uden videre Anviisning forstaae at behandle disse Brøk. Dog vil jeg for større Tydeligheds Skyld og til Øvelse fremsætte Exempler paa de med Brøk sædvanlig forekommende Tilfælde; hvorved tillige de i Arithmetiken givne Regler paa det almindeligste kan foredrages og bevises.

§. 2.

Bogstav-Brøk kan som Tal-Brøk (Ar. §. 31) forkortes, det er udtrykkes med færre Bogstaver naar Tæller og Nævner divideres med samme Bogstav f. Ex. $\frac{am}{bm}$ forkortes ved at dividere med m og bliver da $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Saaledes er og $\frac{mxy}{zmy} = \frac{x}{z}$ thi opløst er $\frac{mxy}{zmy} = \frac{m \times x \times y}{m \times z \times y}$ naar nu de fælles Factorer udslættes i Tæller og Nævner (hvilket er det samme som at dividere Tæller og Nævner med samme Størrelser) bliver Brøken $\frac{x}{z}$. Brøken $\frac{x+y}{x}$ kan derimod ikke saaledes forkortes, som maaskee ved første Øiekast kunde synes for en uøvet at den skulde være $= y$ (hvilket vilde været Tilfældet om der stod $\frac{xy}{x}$) men $\frac{x+y}{x}$ er $= \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$.

Ved Brøken $\frac{nx}{my}$ kan aldeles ingen Forkortning finde Sted.

Anm. Ved flere Exempler at øve Begyndere i disse og lignende Forandringer med Bogstav-Brøk, overlades til det mundtlige Foredrag.

§. 3.

Bogstav-Brøk adderes og subtraheres efterat de ere bragte til eens Benævning (Ar. § 32) ved at addere og subtrahere deres Tællere ligesom Tal-Brøk (Ar. § 33.)

Ex. 1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf}$

$= \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$.

Undertiden gives hele Størrelser Brøks Form, og bringes til samme Benævning ligesom Brøker for at forkorte Udtrykket.

Ex. 2) $m + \frac{n}{x} = \frac{m}{1} + \frac{n}{x} = \frac{mx}{x} + \frac{n}{x}$

$= \frac{mx+n}{x}$.

Ex. 3) at addere: $\left(b + \frac{c}{d}\right) + \left(f - \frac{q}{p}\right) + \left(g + \frac{c}{p}\right)$ er $= \frac{bd+c}{d} + \frac{fp-q}{p} + \frac{gp+c}{p} =$

bdpp

$$\frac{bdpp+cpp}{dpp}+\frac{dfpp-dpq}{dpp}+\frac{dgpp+cdp}{dpp}=$$
$$\frac{bdpp+cpp+dfpp-dpq+dgpp+cdp}{dpp}$$

og da den Factor p findes i ethvert Led af Tælleren og tillige i Nævneren, saa kan Brøken forkortes (§. 2.) ved at dividere Tæller og Nævner med p, og bliver da $=\dfrac{bdp+cp+dfp-dq+dgp+cd}{dp}$

$$=b+f+g+\frac{cp-dq+cd}{dq}$$

Ex. paa Subtraktion: 1) $\dfrac{a}{m}-\dfrac{c}{p}=\dfrac{ap}{mp}$

$$-\frac{cm}{mp}=\frac{ap-cm}{mp}$$

2) $\dfrac{ab}{f}-\dfrac{gh}{k}=\dfrac{abk}{fk}-\dfrac{fgh}{fk}=\dfrac{abk-fgh}{fk}$

3) Fra $\dfrac{a+c}{b+d}$ at subtrahere $a+\dfrac{d}{p}=\dfrac{ap+d}{p}$

$$=\frac{a+c}{b+d}-\frac{ap+d}{p}=\frac{ap+cp}{bp+dp}-\left(\frac{abp+bd+adp+dd}{bp+dp}\right)=\frac{ap+cp-abp-bd-adp-dd}{bp+dp}.$$

§. 4.

Algebraiske Brøk multipliceres med hinanden naar Tæller multipliceres med Tæller og Nævner med Nævner (Arith. §. 35.)

1 Ex. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ et almindeligt Beviis kunde føres saaledes sæt $\dfrac{a}{b}=m$ | $\dfrac{c}{d}=n$

saa er (Ar. §. 38.) $a=bm$ $c=dn$

og $ac=bm\times dn=bdmn$

altsaa $\dfrac{ac}{bd}=mn=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}$.

Anm. Dette Bevlis vil maaskee for Begyndere synes fremmet, men vil let af Læreren kunde oplyses, at det ikke er andet end en Anvendelse af de i Arith. anførte Grundsætninger.

2 Ex. $\dfrac{ab-d}{c}\times\dfrac{de-f}{g}=\dfrac{(ab-d)\times(de-f)}{cg}$

$$=\frac{abde-dde-abf+fd}{cg}.$$

§. 5.

En algebraisk Brøk divideres med en anden, naar Divisors Tæller og Nævner omsættes (inverteres) og Dividenden dermed multipliceres.

Ex. 1) $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$

Almindeligt Beviis: sæt $\frac{a}{b} = m$; $\frac{c}{d} = n$

$$\begin{array}{ll} \text{saa er} & a = bm \\ & c = dn \\ \hline \text{og} & \frac{a}{c} = \frac{bm}{dn} \end{array}$$

Multipliceer med d saa er $\frac{ad}{c} = \frac{bm}{n}$ (Arih. § 30)

divideer med b saa er $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$ (Arith. § 30) og

saaledes $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

2) $\frac{abd}{cf} : \frac{-ab}{c} = \frac{abd}{cf} \times \frac{c}{-ab} = \frac{abcd}{-abcf} = -\frac{d}{f}$ (§. 2.)

§. 6.

Enhver Brøk kan ansees som en Quotient, hvor Dividenden er Tæller og Divisor Nævner; ligesom og i det Tilfælde, at der ved Divisionen bliver noget tilovers der ikke videre lader sig dividere (Arith. §. 46.) udtrykkes det som Brøk. I det Tilfælde at Tælleren i en saadan Brøk eller Dividenden er en enkelt algebraisk Størrelse og Nævneren eller Divisor en sammensat, kan Brø-

kens

kens Værdie eller Quotienten udtrykkes ved en uendelig Række. Foruden det i Arithm. §. 46. herpaa anførte Exempel, vil jeg her endnu for den Anvendelse deraf kan giøres anføre et Par Exempler.

Saaledes er $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{aa} + \frac{cbb}{aaa} - \frac{cbbb}{aaaa} + \frac{cbbbb}{aaaaa}$ o. s. f.

Divisionen seer saaledes ud

Divisor Dividenden Quotienten

$$\begin{array}{l} a + b \,)\; c \;\left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} - \frac{bbbc}{aaaa}\right. \\ \quad c + \frac{bc}{a} \\ \quad - \;\; - \\ \hline \quad - \frac{bc}{a} \\ \quad - \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} \\ \quad + \;\; + \\ \hline \quad \frac{bbc}{aa} \\ \quad \frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaa} \\ \quad - \;\; - \\ \hline \quad - \frac{bbbc}{aaa} \\ \quad - \frac{bbbc}{aaa} - \frac{bbbbc}{aaaa} \\ \quad + \;\; + \\ \hline \quad \frac{bbbbc}{aaaa} \end{array}$$

og

og ved at vedblive vilde man finde den ovenanførte Qvotient, der ogsaa kunde udtrykkes saaledes (Arith. §. 40.)

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4} + \frac{cb^4}{a^5}$$

o. s. v.

Da c findes i alle Qvotientens Tællere som Factor, saa kan Qvotienten ogsaa udtrykkes paa denne Maade:

$$\frac{c}{a+b} = c \times \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}\right)$$

Anm. I den anførte Rad afvexlede Tegnene $+$ og $-$ som vil skee naar begge Divisors Led ere bekræftende: tages derimod i Divisor det eene Led nægtende som $a - b$ da vilde alle Ledene i Raden blive bekræftende og Exemplet blive saadant:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaaa} \text{ o. s. v.}$$

eller $\frac{c}{a-b} = c \times \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} \text{ o. s. v.}\right)$

§. 7.

Vil man anvende denne almindelige Form paa mere enkelte Tilfælde, da sætte man i Stædet

det for de almindelige Tegn bestemte Værdier. Lad være f. Ex. $c = 1$ og Raden bliver da efter Formen fra $\frac{c}{a+b}$ saaledes

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \text{ꝛc.}$$

Lægges den i forrige §. nævnte Form $\frac{a}{a-b}$ til Grund, og man tage $a = 1$, $b = 1$, saa faae man $\frac{c}{1-1} = \frac{c}{0} = c + c + c + c + c + \text{ꝛc.}$

ɔ: $\frac{c}{0}$ giver en Qvotient som bestaaer af c uendelig mange Gange igientaget (som allerede er anmærket §. 25. Arithm.) og som pleier at betegnes saaledes $\frac{c}{0} = \infty$.

Enhver Tal-Brøk kan ogsaa efter en af disse Former udtrykkes ved en uendelig Rad

f. Ex. $\frac{1}{5} = \frac{1}{3+2}$ her er $c = 1$, $a = 3$, $b = 2$

altsaa $\frac{1}{3+2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \frac{16}{243}$

man seer let at naar man i denne Rad standser med et bekræftende Led og summerer Raden, da faaer man en Værdi større end den givne Brøk; er derimod

imod det sidste Led nægtende faaer man Værdien for liden, men Differencen imellem den fundne og sande er stedse mindre, og først naar Raden bliver uendelig vil dens Summa netop udgiøre $\frac{1}{5}$.

En saadan Rad der stedse nærmer sig til den sande Værdi, kaldes en convergerende Rad som stedse erholdes efter Formen $\frac{c}{a+b}$ naar det første Led i Divisor er større end det andet $a > b$.

Vilde man derimod efter samme Form sætte $a < b$ og sætte $\frac{1}{5} = \frac{1}{1+4}$ da vilde vi faae en divergerende Rad, der stedse vige mere af fra den sande Værdie, den anførte Brøk $\frac{1}{5}$ vilde da blive $\frac{1}{1+4} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1024$ rc.

Anm. Det indsees let at jo større a er med b i de anførte Exempler, desto hastigere convergerer Raden, og man kan lade sig nøie med faa Led uden at begaae nogen mærkelig Feil.

Om Potenser og Rodstørrelser og deres Forandringer.

§. 7.

I Almindelighed forstaaes ved en Potens eller Værdighed (dignitas) et Produkt af ligestore Fak-

Faktorer (Arith. §. 52.) og den som Faktor brugte Størrelse kaldes Potensens Rod. Det øverst ved høire Side af Roden satte Tal kaldes Potensens Exponent, og tilkiendegiver hvor mange enkelte Faktorer der ere multiplicerede med hinanden; eller hvad Potens det er, f. Ex. $a^3 = aaa$ er den 3die Potens af a der er Potensens Rod og 3 er Exponenten. $8^3 = 512 = 8 \times 8 \times 8$ den tredie Potens af 8 som er Potensens Rod, og i Almindelighed betegner a^n at a skal multipliceres n Gange med sig selv. Enhver Rod tilkiendegives ved det i Arithmetiken (§. 52.) ved Qvadratroden anførte Tegn, og ved et Tal eller Bogstav som sættes i Tegnet og kaldes Rod-Exponent tilkiendegives hvad Rod der søges, f. Ex. $\sqrt[6]{64}$ betegner at der søges et Tal som ophøiet til siette Potens er 64 hvilket er 2, thi $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ naar den anden Rod skal tilkiendegives, sættes ingen Rod-Exponent (Arith. §. 52.). Er Størrelsen for hvilken Rodtegnet sættes sammensat, da indsluttes den i en Parenthes f. Ex. $\sqrt[4]{(ab+c)}$ betyder at til Produktet ab skal adderes c og af Summen søges den femte Rod, det kunde og skrives saaledes $\sqrt[4]{\overline{ab+c}}$. $\sqrt[4]{(a+m+(a+b)c)} = \sqrt[4]{(a+m+ac+bc)}$ kan og staae saaledes $\sqrt[4]{\overline{a+m+\overline{a+b}\times c}} = \sqrt[4]{\overline{a+m+ac+bc}}$

§. 8.

§. 8.

Addition og Subtraction med Potenser skeer efter samme Regler som i Arithmetiken (§. 41 og 42.) ere forklarede; have de samme Røder og samme Exponenter ansees de som ligeartede Størrelser, og saavel Additionen som Subtractionen kan virkelig foretages. Ere derimod Rødderne forskiellige, om end Exponenterne ere de samme, eller Exponenterne forskiellige naar Rødderne ere de samme, da ere de uligeartede Størrelser og de nævnte Regnings Arter kan allene skee ved Hielp af Tegn.

1 Exemp. $2a^5 + 4a^5 = 6a^5$; $7a^2 - 3a^2 = 4a^2$

$$\text{at addere} \left\{ \begin{array}{l} a^3 - 3b^4 + 5c^6 - 3g^7 \\ -2a^3 + b^4 - 2c^6 + 3h^7 - 3g^6 \end{array} \right.$$

$$\text{Summa} = -a^3 - 2b^4 + 3c^6 - 3g^7 + 3h^7 - 3g^6$$

2 Exempel

$$\text{at subtrahere} \left\{ \begin{array}{l} 4x^2 - 3y^5 + 6z^4 - 5u^2. \\ 2x^2 - y^5 - 3z^4 + 4u^3 \\ - \quad + \quad + \quad - \end{array} \right.$$

$$\text{Differencen} \quad 2x^2 - 2y^5 + 9z^4 - 5u^2 - 4u^3.$$

§. 9.

Potenser af samme Rod multipliceres med hinanden naar deres Exponenter adderes, saa at

at Produktet er en Potens, hvis Exponent er Summen af Factorernes Exponenter.

Beviis: $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa$ (Arith. §. 44.) $a^5 = a^{3+2}$

Anm. Ere Potenserne af forskiellige Rødder, kan Multiplicationen allene tilkiendegives ved Tegn eller efter Vedtægt at skrive dem umiddelbar ved hinanden f. E. $a^3 \times b^2 = a^3 b^2$.

Exempel paa Multiplication med sammensatte Størrelser:

$$\begin{array}{l} \quad 2a^2 + 3b^3 \\ \quad 2a^2 + 3b^3 \\ \hline 4a^4 + 6a^2b^3 \\ \qquad\quad 6a^2b^3 + 9b^6 \\ \hline 4a^4 + 12a^2b^3 + 9b^6 \end{array}$$ (conf. Ar. §. 44. No. 2)

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - y^3 + 4y^5 \\ \qquad\qquad - 3y^2 \\ \hline -3y^2x^2 + 3y^5 - 12y^7 \end{array}$$

§. 10.

Division med Potenser af samme Rod skeer, naar Divisors Exponent subtraheres fra Dividendi Exponent; da Forskiellen er Qvotientens Exponent. Ex. $a^5 : a^3 = a^2$.

Be-

Beviis: $a^5 = aaaaa$; $a^3 = aaa$, altsaa

$$a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$$

(Arithm. §. 45.)

Ere Potensernes Rødder forskiellige, da tilkiendegives Divisionen allene ved Tegn

Ex. $a^5 : b^2 = \frac{a^5}{b^2}$

Naar dette iagttages skeer Divisionen med sammensatte Størrelser, der indeholde flere Potenser saavel af samme som af forskiellig Rod, ligesom om Bogstaver er forklaret (Arithm. §. 46.)

Divisor	Dividenden	Qvotienten
$2a^3+3b^5)$	$4a^6+12a^3b^5+9b^{10}+2a^3c^4+3b^5c^4$	$(+2a^3+3b^5+c^4$
	$4a^6+6a^3b^5$	
	$6a^3b^5+9b^{10}$	
	$6a^3b^5+9b^{10}$	
	$2a^3c^4+3b^5c^4$	
	$2a^3c^4+3b^5c^4$	

Tillæg 1) Skal nu a^3 divideres med a^2 bliver Qvotienten a^1 som er det samme som a, thi $a^3 = aaa$ og $a^2 = aa$, altsaa $\frac{a^3}{a^3} = a^1$ det samme som $\frac{aaa}{aa} = a$. Enhver Størrelse er altsaa den første Potents af sig selv, og Exponenten behøves ikke at skrives.

Tillæg 2) Have Dividenden og Divisor samme Exponenter, bliver Qvotientens Exponent 0, f. Ex. $a^3 : a^3 = a^0$ hvilket Udtryk (man sætte i Stæden for a hvad Størrelse man vil) er lige med 1, thi $\frac{a^3}{a^3} = \frac{aaa}{aaa} = 1$ (Arith. §. 45.) saaledes er $x^0 = 1$; $100^0 = 1$.

Tillæg 3) Er Divisors Exponent større end Dividendens, da bliver Qvotientens Exponent nægtende (negativ) f. Ex. $a^3 : a^5 = a^{-2}$; $x^3 : x^4 = x^{-1}$. Enhver saadan Potens med en negativ Exponent er ligegieldende med en Brøk, hvis Tæller er 1 og hvis Nævner er samme Potens med en positiv Exponent. Thi $x^3 : x^5 = x^{-2}$ men $x^3 : x^5$ er $= \frac{xxx}{xxxxx} = \frac{1}{x^2}$ og saaledes $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ (Arith. §. 38. 4.) og i Almindelighed $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$. Ligeledes $mn^{-2} = m \times \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n^2}$

Anm. Det er af megen Vigtighed at øve Begyndere vel i disse Sætninger; da det i algebraiske Substitutioner ofte er nødvendigt at sætte et saadant Udtryk i Stæden for et andet.

§. 11.

En given Potens ophøies til en bestemt høiere Grad, naar dens Exponent multiplice-res med Exponenten af den forlangte Grad. F. E. $(a^3)^4 = a^{12}$. $(2^3)^2 = 2^6$.

Beviis: $(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3}$ (§. 9.) $= a^{3 \times 4} = a^{12}$, saaledes $(x^m)^n = x^{mn}$. $(x^{-4})^3 = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$ (§. 10).

§. 12.

En forlangt Potens af et givet Product findes ved at ophøie hver enkelt Faktor til den forlangte Potens og tage deres Produkt; ligeledes af en Qvotient ved at ophøie Dividenden og Divisor hver for sig til den forlangte Potens.

Ex. $(ab)^3 = a^3b^3$; $(xy)^m = x^m y^m$. $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$.

Beviis: $(ab)^3 = ab \times ab \times ab = aaabbb = a^3b^3$ $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$.

Anm. Skal en Samling af flere Størrelser forenede med + eller — (ved Addition eller Subtraction) ophøies til en Potens, saa indslutter man dem i en Parenthese, eller slaaer en Linie over Roden, og sætter bag Parenthesen eller efter Linien Exponenten til den forlangte Potens, Ex. $(a + b + c)^2$ eller $\overline{a + b + c}^2$ betyder at Summen af a, b og c skal ophøies til 2den Potents og er ikke $a^2 + b^2 + c^2$, men $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$ (Arith. §. 55. 2 T.). $((a + b)^2 + (c + b)^3)^4$ betyder 1) at $a + b$ skal qvadreres, 2) at $c + b$ skal kuberes, og at Summen af dette Qvadrat og denne Kubus skal ophøies til fierde Potens.

§. 13.

En forlangt Rod udtrækkes af en given Potens; naar Potensens Exponent divideres med Rod-Exponenten. Ex. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

Beviis: At uddrage den 3die Rod af a i siette Potens, er at finde en Størrelse som multipliceret 3 Gange med sig selv frembringer a i siette Potens, nu er ingen anden Størrelse end a^2 som ophøiet til 3 Potens kan frembringe a^6 thi $(a^2)^3$ er $= a^6$ og i Almindelighed er $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ thi $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n$ er $= x^{\frac{nm}{n}} = x^m$.

eller saaledes (§. 11.) $x = x^1 = x^{\frac{m}{m}} = x^{\frac{1}{m} \times m} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^m$ saaledes er nu

x opløst i m ligestore Factorer, hvoraf enhver er $= x^{\frac{1}{m}} = y$, saa at $x = y \times y \times y$ &c. Følgelig $\sqrt[m]{x} = y = x^{\frac{1}{m}}$; $\sqrt[m]{x^2} = y \times y = x^{\frac{2}{m}}$ og i Almindelighed $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Da m og n kan tillægges alle mulige Værdier, saa følger at m kan antages større end n eller ikke at kunde gaae op i n; man faaer saaledes Potenser med Brøk-Exponenter, som ogsaa kaldes Brøk-Potenser. F. Ex. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Ogsaa er $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^2$. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (Arith. §. 44. Anm. og §. 52. 2 Till.). Alle Rodstørrelser kan altsaa udtrykkes som Brøk-Potenser, og denne Maade at betegne dem paa bruges ogsaa meget ofte. Imidlertid beholder man i mange Tilfælde hellere Rodtegnet, som ogsaa kort og tydelig viser hvad en Brøk-Potens egentlig betyder: nemlig at man af et Tal ophøiet til en Potens hvis Exponent er Brøkens Tæller, skal uddrage en Rod hvis Exponent er Nævneren. F. Ex. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Tillæg 1) Heraf lader sig udlede mange Forandringer i Udtrykkene som best sees ved Exempler, saaledes er: $a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \times a^{\frac{1}{2}} = a^2 \times \sqrt{a}$; $a^{\frac{10}{3}} = a^{3\frac{1}{3}} = a^3 \times a^{\frac{1}{3}} = a^3 \times \sqrt[3]{a}$; $a^{\frac{15}{4}} = a^{3\frac{3}{4}} = a^3 \sqrt[4]{a^3}$. Lige-

saa $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ sæt $a = 4$ saa er $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$ $(\frac{1}{2})$ videre er $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a\sqrt[4]{a}$ thi $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}} = a^2 \times \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = a^2 \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{1\frac{1}{4}} = a \times a^{\frac{1}{4}} = a\sqrt[4]{a}$.

Tillæg 2) En Rodstørrelse bliver uforandret i sin Værdie, naar begge Exponenter (Potensens og Rodtegnets) multipliceres eller divideres med et og samme Tal. Thi da $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n \times r}{m \times r}}$ (Arithm. §. 30. 4.) saa er $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \times r]{a^{n \times r}}$, og $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:r]{a^{n:r}}$.

Tillæg 3) I Følge heraf lader en Rodstørrelse sig bringe til en ringere Grad, naar begge Exponenterne (i Rodtegnet og under Rodtegnet) have en fælles Divisor f. Ex. $\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[6:2]{a^{8:2}} = \sqrt[3]{a^4}$. $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{8^2} = \sqrt{8}$.

§. 14.

To eller flere forskiellige Rodstørrelser bringes under eens Benævning (o: forandres saa-

saaledes at de alle faae samme Rod-Exponent, eller at samme Rod skal uddrages af dem alle) naar 1) enhver Rod-Exponent multipliceres med Produktet af de øvrige Rod-Exponenter, og 2) enhver Potens Exponent under Rodtegnet multipliceres med de samme Tal eller Bogstaver hvormed Rod-Exponenten er multipliceret.

F. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[s]{y^r}$ man faaer da $\sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[ms]{y^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$ (§. 13.) Ligeledes være givne $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{y^q}$, og $\sqrt[s]{z^r}$, saa er $\sqrt[mps]{x^{nps}} = \sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[mps]{y^{mqs}} = \sqrt[p]{y^q}$ og $\sqrt[mps]{z^{mpr}} = \sqrt[s]{z^r}$.

Rigtigheden i denne Fremgangsmaade indsees af §. 13. Till. 2.

Tillæg. Det samme skeer, ved at udtrykke Rodstørrelserne som Potenser med Brøk-Exponenter, bringe disse til eens Benævning (Arithm. §. 32) og sætte derpaa den for dem alle fælles Nævner i Rodtegnet for dem alle. F. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$; $\sqrt[s]{y^r}$ saa er $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{r}{s}}$ Brøkene $\frac{n}{m}$ og $\frac{r}{s}$ bragte til eens Benævning blive $\frac{ns}{ms}$ og $\frac{mr}{ms}$ Saaledes $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{ns}{ms}}$ og

og $y^{\frac{r}{s}} = y^{\frac{mr}{ms}}$ udtrykkes nu disse Brøk-Exponenter ved Rodtegnet, saa er $x^{\frac{ns}{ms}} = \sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$; og $y^{\frac{mr}{ms}} = \sqrt[ms]{y^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$.

§. 16.

En forlangt Rod uddrages af et givet Produkt, ved at uddrage denne Rod af enhver Faktor og tage Produktet af disse Røder; ligeledes af en given Qvotient (Brøk) ved at uddrage den forlangte Rod af Dividenden og Divisor, og tage disses Qvotient.

Ex. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$. $\sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x} \times \sqrt[m]{y}$. $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$. $\sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}$.

Beviis. $\sqrt[3]{ab}$ maa være $= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ efterdi $(\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})^3$ er $= ab$ (§. 12.) og $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ da $\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n$ er $= \frac{x}{y}$.

Tillæg 1) En Rodstørrelse udtrykkes kortere, naar Størrelsen under Rodtegnet har en eller flere Faktorer (eller og kan opløses i saadanne Fak-

Faktorer) der have samme Exponent som Rodtegnet, da disse bringes foran Rodtegnet som Coefficienter.

Ex. $\sqrt[n]{a^n b^m} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} = a\sqrt[n]{b^m}$. $\sqrt[m]{a^m b^m c^n} = \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b^m} \times \sqrt[m]{c^n} = a \times b \times \sqrt[m]{c^n} = ab\sqrt[m]{c^n}$. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. $\sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$.

Tillæg 3) Bliver efter denne Forandring under samme Rodtegn samme Størrelser tilbage med forskiellige Coefficienter; saa forholde de irrationale Rodstørrelser sig som deres rationale Coefficienter.

F. Ex. $\sqrt{4 \times 11} : \sqrt{9 \times 11} = 2\sqrt{11} : 3\sqrt{11} = 2 : 3$. $\sqrt[n]{x^n y} : \sqrt[n]{z^n y} = x\sqrt[n]{y} : z\sqrt[n]{y} = x : z$.

Anm. En algebraisk rational Størrelse kaldes den, som kan tilkiendegives og betegnes uden Rodtegn eller ved virkelig Brøk-Exponent; irrational derimod, naar den ikke uden paa en af de nævnte Maader kan udtrykkes og dens Værdie følgelig ikke nøie angives (Arithm. §. 54. Tillæg 1.)

Tillæg 3) Coefficienten ved en Rodstørrelse lader sig bringe under Rodtegnet; naar den op-

høies

høies til en Potens, der har samme Exponent som Rodtegnet. Ex. $3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \times 7} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{63}$. $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \times b^m} = \sqrt[n]{a^n b^m}$.

§. 16.

Rodstørrelser adderes og subtraheres, naar de, efter at være forkortede saavidt muligt (§. 15 Till. 1), have samme Rod-Exponent og samme Størrelse under Rodtegnet, og følgelig kan ansees som Ting af eens Art ved at addere og subtrahere deres Coefficienter.

Ex. $\sqrt[n]{x^n c} \pm \sqrt[n]{y^n c} = x\sqrt[n]{c} \pm y\sqrt[n]{c} = (x \pm y)\sqrt[n]{c}$. $3\sqrt{8} + \sqrt{4^2 \times 8} = 3\sqrt{8} + 4\sqrt{8} = 7\sqrt{8}$.

Till. Ere derimod Størrelserne under Rodtegnene eller Rod-Exponenterne forskiellige, da tilkiendegives Additionen og Subtractionen allene ved Tegn.

Ex.

Ex. at addere.

$$\begin{array}{l} \sqrt{4a^2b} + \sqrt{9a^2bc} + \sqrt{4x} = 2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{bc} + 2\sqrt{x} \text{ (§. 15. Till.)} \\ \sqrt{16a^2b} - \sqrt{a^2bc} - \sqrt{16x} = 4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc} - 4\sqrt{x} \\ \hline \text{Summen} = 6a\sqrt{b} + 2a\sqrt{bc} - 2\sqrt{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{a} + m\sqrt{n} & 2\sqrt{7} - 3\sqrt{4} \\ -\sqrt{b} + m\sqrt{g} & 3\sqrt{7} - 5\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{a} - \sqrt{b} + m\sqrt{n} + m\sqrt{g} & 5\sqrt{7} - 3\sqrt{4} - 5\sqrt{2}. \end{array}$$

at subtrahere.

$$\begin{array}{l} 5a\sqrt{bg} - 3c\sqrt[3]{b^2} + 2\sqrt[4]{a} \\ -8a\sqrt{bg} + 7c\sqrt[3]{b^2} + 5\sqrt[4]{a} \\ + \qquad\quad - \qquad\quad - \\ \hline 13a\sqrt{bg} - 10c\sqrt[3]{b^2} - 3\sqrt[4]{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 4\sqrt{ab} + 2\sqrt[3]{a} & 3\sqrt{5} + 3\sqrt{6} \\ \underline{6}\sqrt{ab} \,\underline{\pm}\, 3\sqrt{a} & 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \\ & - \qquad + \\ \hline -2\sqrt{ab} + 2\sqrt[3]{a} - 3\sqrt{a} & -6\sqrt{5} + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{5}. \end{array}$$

§. 17.

§. 17.

Rodstørrelser, der enten have, eller ere bragte til at have (§. 14) eens Benævning ɔ: samme Rod-Exponenter, multipliceres og divideres med hinanden, naar 1) Størrelserne under Rodtegnet multipliceres og divideres med hinanden og foran det udkomne Produkt eller Qvotient sættes Rodtegnet med den fælles Exponent; 2) Coefficienterne (om der ere saadanne) multipliceres og divideres med hinanden og Produktet eller Qvotienten hensættes foran Rodtegnet.

Ex. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$. $\sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$
$\sqrt[m]{x^p} \times \sqrt[m]{y^q} = \sqrt[m]{x^p y^q}$. $\sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[s]{b^r} = \sqrt[ms]{a^{ns}} \times \sqrt[ms]{b^{mr}}$ (§. 14) $= \sqrt[ms]{a^{ns} b^{mr}}$ Ligeledes $\sqrt[m]{a^n} : \sqrt[s]{b^r} = \sqrt[ms]{\frac{a^{ns}}{b^{mr}}}$.

$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{7} = 6\sqrt{35}$; og $2\sqrt{5} : 3\sqrt{7} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$. $c\sqrt[m]{x^p} \times d\sqrt[m]{y^q} = cd\sqrt[m]{x^p y^q}$. $x\sqrt[m]{a^n} : y\sqrt[s]{b^r} = x\sqrt[ms]{a^{ns}} : y\sqrt[ms]{b^{mr}} = \frac{x}{y}\sqrt[ms]{\frac{a^{ns}}{b^{mr}}}$.

Anm. 1. I Henseende til Tegnene gielde de i Arithmetiken forklarede Regler; og Regningen med sam-

sammensatte Rodstørrelser er kun Anvendelsen af de i denne §. fremsatte Regler.

F. Ex. $2\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \underline{2\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ 4\sqrt{aa} + 2\sqrt{ab} \\ \underline{\qquad\quad - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}} \\ 4\sqrt{aa} - \sqrt{b^2} = 4a - b. \end{array}$$

$(4-\sqrt{3}) \times (3-\sqrt{2}) = 12 - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{6} = 12 - \sqrt{32} - \sqrt{27} + \sqrt{6}$.

Anm. 2. I Henseende til Rodstørrelsers Division skrives best Divisor og Dividendus naar de ere bragte til eens Benævning i Form af en Brøk. En Rodstørrelse kan da bortskaffes af Nævnerne naar Tæller og Nævner multipliceres med samme, men med modsat Tegn.

Ex. 1) $10 : \sqrt{a} - \sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{10\sqrt{a} + 10\sqrt{x}}{(\sqrt{a} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{x})} = \frac{10\sqrt{a} + 10\sqrt{x}}{a + x}$.

2) $\frac{3+\sqrt{5}}{2} : \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5}).(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}).(1-\sqrt{5})}$

$= \frac{3+\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{25}}{1-5} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}$

$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Till.

Till. 1. $(\sqrt{a})^3$ er $= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ (§. 7) $= \sqrt{a^3}$ (§. 16), følgelig $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$.

Till. 2. $\sqrt[3]{(\sqrt{a})} = \sqrt[3\times2]{a} = \sqrt[6]{a}$; thi $(\sqrt[3\times2]{a})^3$ er $= \sqrt[3\times2]{a^3}$ (Till. 1.) $= \sqrt{a}$ (§. 13), eller almindelig $\sqrt[m]{(\sqrt[r]{a})} = \sqrt[mr]{a}$, da $(\sqrt[mr]{a})^m = \sqrt[mr]{a^m} = \sqrt[r]{a}$.

Till. 3. Lader Exponenten til en given Rodstørrelse sig opløse i Faktorer, saa lader den givne Rodstørrelse sig dele i ligesaamange enkelte. F. Ex. $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3\times2]{a} = \sqrt[3]{(\sqrt{a})}$. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2]{(\sqrt[3]{8})} = \sqrt{2}$. $\sqrt[8]{a} = \sqrt[2\times2\times2]{a} = \sqrt{(\sqrt{(\sqrt{a})})}$.

§. 18.

Alle Potenser af en bekræftende Rod ere bekræftende; men af en nægtende Rod ere alle de, hvis Exponenter ere lige Tal, bekræftende, men de, hvis Exponenter ere ulige Tal, benægtende.

Beviis. Qvadratet (anden Potens) af $\pm a$ er $+ a^2$ (Arith. §. 43 og 52). Nu er i Almindelighed $A^{2n} = (A^2)^n$ (§. 15), følgelig $(\pm a)^{2n} = (+a^2)^n$ et Produkt af lutter bekræftende Faktorer og følgelig bekræftende.

Fremdeles er $A^{2n+1} = A^{2n} \times A$, følgelig $(+a)^{2n+1} = +a^{2n} \times +a$, altsaa bekræf-

kræf-

kræftende; men $(-a)^{2n+1} = +a^{2n} \times -a$, altsaa nægtende.

Anm. n antages at betyde ethvert heelt Tal, følgelig $2n$ ethvert lige og $2n + 1$ ethvert ulige Tal.

Till. 1. Enhver Rod, hvis Exponent er et ulige Tal (ulige Rod) af en bekræftende Størrelse, kan allene være bekræftende, og af en nægtende Størrelse allene nægtende; saaledes er $\sqrt[3]{+27} = +3$ og $\sqrt[3]{-27} = -3$, men ikke $\sqrt[3]{+27} = -3$; thi $(-3)^3 = -27$.

Till. 2. Enhver lige Rod (hvis Exponent er et lige Tal) af en bekræftende Størrelse kan være baade bekræftende og nægtende, men af en nægtende Størrelse ingen af Delene.

Till. 3. En lige Rod af en nægtende Størrelse, som almindelig betegnes ved $\sqrt[2n]{-a}$, kaldes en umuelig eller indbildt Størrelse (quantitas impossibilis seu imaginaria) i Modsætning af en muelig eller reel Størrelse (possibilis seu realis).

Anm. De i dette Afsnit om Potenser og Rodstørrelser fremsatte Sætninger tiene egentlig til at forkorte Slutningerne i det analytiske Foredrag; da det kan ansees som et Algebraisterne eget hemmelig Sprog, udfordres der nogen Øvelse deri, naar man uden Anstød vil læse mathematiske Skrifter. Har man denne Færdighed, vil man af det Foregaaende let indsee Grunden til Ligheden imellem følgende Udtrykke:

$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[10]{x^9}$; $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[2m]{x^{m+2n}}$;

$y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{y}$; $\sqrt{y} : \sqrt[3]{y^{-2}} = y\sqrt[6]{y}$;

$(z - \frac{1}{2})^6 = \sqrt{\frac{1}{z^6}}$;

Anvendelsen af Læren om Potentenser paa Decimalbrøk. (Arithm. §. 47.)

§. 19.

Af Decimalbrøks Natur følger, at Udtrykke som disse: $\frac{a}{10^n}$, $\frac{b}{10^m}$, kan betegne enhver Decimalbrøk, naar a og b betyde de virkelige Zifre, hvoraf Brøken bestaaer, anseete som hele Tal eller Brøkens Tæller; og n og m maa være saa store som Antallet af Decimalstederne i Brøken naar den skrives efter Arithm. §. 47.

Da nu $\frac{a}{10^n} = a \times \frac{1}{10^n} = a \times 10^{-n}$ og $\frac{b}{10^m} = b \times 10^{-m}$, saa kan og enhver Decimalbrøk ansees som et heelt Tal multipliceret med en Potents af 10 med en negativ Exponent.

Nu er $(a \times 10^{-n}) \times (b \times 10^{-m}) = ab \times 10^{-(m+n)} = \frac{ab}{10^{m+n}}$, som just er den

(Arithm.

(Arithm. §. 50) for Multiplicationen med Decimalbrøk givne Regel, naar det betænkes, at saamange Decimalsteder afskieres i Produktet som $m+n$ angiver; hvilken Exponent er Summen af Faktorernes Exponenter og altsaa Summen af deres Decimalsteder.

Fremdeles er $(a \times 10^{-n}) : (b \times 10^{-m}) = \frac{a}{b} \times \frac{10^{-n}}{10^{-m}} = \frac{a}{b} \times 10^{-n \mp m}$. Man antage nu $\frac{a}{b} = q$, saa er $\frac{a}{b} \times 10^{-n \mp m} = q \times 10^{-(n \mp m)} = q \times \frac{1}{10^{n-m}} = \frac{q}{10^{n-m}}$; det er: man dividerer de virkelige Zifre eller Tællerne som betegnedes ved a og b; men i Qvotienten q rykkes Decimaltegnet saa mange Zifre mod venstre som Tallet $n-m$ angiver, d. e. saa mange som der ere flere Decimaler i Dividenden end i Divisor. I det Tilfælde at m var $> n$ og altsaa $n-m$ en nægtende Mængde, da maa Decimaltegnet rykkes saa mange Zifre mod høire, d. e. der maa føies Nuller til. See Arithm. §. 51.

Anm. Hvad der om de saa kaldte **tredsindstyvende Deels Brøk** (fractiones sexagenales) ɔ: Brøk, hvis Nævner er 60 eller en Potens af 60, kunde være at sige, har jeg med Flid forbigaaet, da deres Anvendelse er saa saare sielden, og det desuden let kan forstaaes af det som om Decimalbrøk er sagt.

Om

Om Æqvationer (Ligninger) og deres Opløsning.

I. Om Ligninger i Almindelighed.

§. 20.

To forskiellige Udtryk for een og samme Størrelse forbundne med Ligheds-Tegnet kaldes en Ligning. F. Ex. 1 Rdlr. = 6 Mk. | $8 = 5 + 3$. Størrelsen kan være udtrykt ved Tal eller Bogstaver; disse kan betegne bekiendte eller ubekiendte Størrelser. Efter almindelig Vedtægt bruges de første smaa Bogstaver af det latinske Alphabet til at betegne de givne eller bekiendte Størrelser (naar man ikke vil udtrykke dem ved Tal), og de sidste Bogstaver af samme Alphabet x, y, z o. s. v. til at betegne de søgte eller ubekiendte Størrelser. Ex. $a + c = x - d$ vil sige, at der søges en Størrelse x som er af den Beskaffenhed, at naar en given Størrelse d fradrages, bliver det Tilbageblevne liig Summen af to bekiendte Størrelser a og c; med Tal $8 + 5 = x - 3$. De to lige store Udtrykke kaldes Æqvationens Sider (membra), og de forskiellige med $+$ eller $-$ forbundne Tal eller Bogstaver paa hver Side kaldes Æqvationens Leed (termini); saaledes ere i det anførte Exempel to

Leed

Leed paa hver Side, derimod i dette Exempel $\frac{ab}{c} = x$ er kun eet Leed paa hver Side, da $\frac{ab}{c}$ kun er een algebraisk Størrelse.

Anm. 1. Algebra (i en indskrænket Bemærkelse) er den Deel af de analytiske Videnskabrr, som lærer af givne Betingelser at finde ubekiendte søgte Størrelser ved Hielp af Ligninger. Navnet Algebra er af arabisk Oprindelse, uvist om efter en Mand Geber, der har dyrket denne Videnskab, eller efter et arabisk Ord, der efter Golius skal betyde reductionem partium ad totum.

Anm. 2. De Ligninger, som her især handles om og som almindelig forstaaes naar man taler om Ligninger (maaskee man kunde kalde dem egentlige Ligninger), ere de, hvori der forekomme een eller flere ubekiendte Størrelser, da de andre, hvori Alt er bekiendt, saa at sige opløse sig selv, og dertil ingen videre Forklaring behøves.

§. 21.

At opløse en saadan Ligning er at forandre den saaledes, at man derved finder Værdien af den ubekiendte Størrelse, som skeer naar den bringes allene paa den ene Side af Liigheds-Tegnet, saa at paa den anden Side ere lutter bekiendte.

Den hele Opløsning grunder sig allene paa de i Arithmetiken §. 38 fremsatte almindelige Grundsætninger, hvis Anvendelse i de ved Ligningers Opløsning forekommende Tilfælde (da den maaskee ikke ellers vilde falde Begyndere saa let) jeg her vil vise og henføre under følgende Regler:

1) Ethvert enkelt Leed i en Ligning kan flyttes fra den ene Side til den anden (§. 20) med forandret Tegn. F. Ex. $3x - 12 = 20 + 8$ kan forandres til $3x = 20 + 8 + 12$, thi ved denne Omflytning er 12 egentlig lagt til paa begge Sider; ligeledes kan $3x + 8 = 30 + 18$ forandres til $3x = 30 + 18 - 8$, hvor 8 egentlig subtraheres fra paa begge Sider, og Ligningen bliver altsaa i begge Tilfælde uforandret. (Arithm. §. 38 No. 4).

2) Tegnene ved alle Ledene i en Ligning kan forandres til de modsatte. For Ex. Ligningen $2x + 12 - 8 = 54 - 3x$ kan udtrykkes saaledes: $-2x - 12 + 8 = -54 + 3x$. Rigtigheden indsees af No. 1, da alle Ledene flyttes og derpaa hele den anden Side sættes først og den første sidst.

3) Enhver Ligning lader sig bringe til at være liig Nul ɔ: at alle Ledene bringes paa een Side, f. Ex. den No. 2 anførte Ligning $2x + 12 - 8 = 54 - 3x$ bliver $2x + 12 - 8 - 54 + 3x = 0$.

4) Ved at dividere hele Ligningen med en fælles Faktor udtrykkes Ligningen simplere, og den ubekiendte Størrelse befries fra sin bekiendte.

kiendte Coefficient, naar hele Ligningen dermed divideres. F. Ex. $15bc = 24ab + 3bx$ udtrykkes, ved at dividere overalt med b, saaledes $15c = 24a + 3x$; ved igien at dividere med den fælles Faktor 3 (som tillige er den ubekiendte x's Coefficient), faaer man $5c = 8a + x$.

5) Enhver Divisor bortskaffes ved at multiplicere alle Ledene i Æqvationen dermed. Ex. $\frac{x}{5} = 20$ bliver, ved at multiplicere med 5, $x = 20 \times 5$.

Till. Brøk bortskaffes af en Ligning ved at multiplicere hele Ligningen med Produktet af Brøkenes Nævnere. Ex. Af Ligningen $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = a - \frac{3}{4}b$ bliver, ved at multiplicere med $3 \times 2 \times 4 = 24$, følgende Ligning: $16x - 12x = 24a - 18b$.

Anm. Her kunde det samme været opnaaet ved at multiplicere med 12, som er fælles Nævner for Brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. (Arithm. §. 32.)

6) For at formindske Ledenes Antal i en Ligning, og især for at kunde skille den ubekiendte Størrelse ved sine Coefficienter, trækker man de forskiellige enkelte Coefficienter, som samme Størrelse kan have, sammen i en Parenthese. Ex. $2x + 3x = 20$ forandres $(2+3)x = 20$, eller $5x = 20$. $ax - bx + cx = fh + gh$ forandres saaledes: $(a - b + c)x = (f+g)h$, og efter No. 4 $x = \frac{(f+g)h}{a-b+c}$.

7) En Potents (af en vis Exponent) bortskaffes af en Æqvation ved at bringe den allene paa den ene Side og udtrække den Rod paa begge Sider, som Exponenten angiver. Ex. $x^2 - 8 = 17$, efter No. 1, $x^2 = 17 + 8 = 25$, altsaa $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$, og $x = 5$. Ligeledes bortskaffes Rodtegnet eller en irrational Størrelse ved at bringe den allene paa den ene Side, og derpaa ophøie begge Sider til den Potents, som Exponenten i Rodtegnet angiver. Ex. $\sqrt{x} + a - b = c$ bliver $\sqrt{x} = c - a + b$ og $(\sqrt{x})^2 = (c - a + b)^2$ $x = (c - a + b)^2 = c^2 - 2ca + a^2 - 2(c-a)b + b^2$. (Arith. §. 55 Till. 2).

For strax at see Anvendelsen af disse Regler tilføies et Par Exempler.

Lad til Opløsning være givet

$$\frac{a}{x} - b = c - 1$$

saa er efter No. 5) $a - bx = cx - x$

No. 1) $x - cx - bx = -a$

No. 2) $-x + cx + bx = a$

No. 6) $(-1 + c + b)x = a$

No.

No. 4) $x = \frac{a}{-1 + c + b}$ og nu er Ligningen opløst.

Fremdeles være $ax + bn - bx = cn$ saa er efter No. 1) $ax - bx = cn - bn$

6) $(a-b)x = (c-b)n$

4) $x = \frac{(c-b)n}{a-b}$

Anm. At reducere en Ligning er egentlig intet andet end ved Anvendelse af de her foredragne Regler at forkorte den og fremstille den saa simpel som muligt.

§. 22.

Ligningerne pleie at inddeeles med Hensyn til den eller de ubekiendte Størrelser, der findes i dem:

1) I bestemte, som kun have een ubekiendt Størrelse, hvis Værd altsaa ved de bekiendte fuldkommen er bestemt og kan opløses; Ex. $2x = 30 - 7$, hvor $x = \frac{30-7}{2}$, og ubestemte, der have to eller flere ubekiendte Størrelser, hvis Værdie ved den ene Ligning ikke kan bestemmes og Ligningen ikke opløses (§. 21). Ex. $x + y = 20$, hvor x og y kan tillægges 20 forskiellige Værdier.

2) I enkelte (eller af første Grad), hvor den eller de ubekiendte Størrelser allene forekomme i første Potens; dog maa de ikke være multiplicerede med hinanden, og heller ikke forekomme baade som Divisor og Faktor. Ex. $\frac{3x}{4} + 12 - 8 = 100 - x$, men $(100 - x)x = a$ er ikke længer en enkelt Ligning, heller ikke $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{100}{x}$; og sammensatte (maaskee rettere høiere), hvor den ubekiendte Størrelse forekommer i noget enkelt Leed anderledes end i første Potens, og kaldes da af 2den, 3die eller 4de Grad, eller qvadratisk, cubisk, biqvadratisk, eftersom den ubekiendte forekommer i 2den, 3die eller 4de Potens.

En sammensat (høiere Ligning) er igien enten reen (pura), naar den ubekiendte Størrelse forekommer overalt i Ligningen i samme Potens; eller ureen (forviklet, impura affecta), naar den i samme Æqvation forekommer i flere forskiellige Potenser.

Anm. Algebra (i en ængere Forstand) indskrænker sig allene til at lære Opløsningen af de enkelte og qvadratiske saavel reene som ureene Ligninger; Ligninger derimod af 3die, 4de o. s. v. Grad (der sædvanlig indbefattes under Navnet høiere Ligninger) opløses efter Theorier, der foredrages i den almindelige Analyse, som og kaldes Algebra i en vidtløftig Bemærkelse.

II. Om enkelte Ligningers Opløsning og deres Anvendelse paa arithmetiske Problemer.

§. 23.

Opgave. At opløse en enkelt Ligning med een ubekiendt Størrelse (bestemt).

Opløsn. Man bortskaffer Brøkene hvormed den ubekiendte kunde være multipliceret, eller de hele Tal hvormed den kunde være divideret efter §. 21 No. 5, (forekommer den ubekiendte selv som Divisor, maa med den og multipliceres); derpaa bringes efter §. 21 No. 1 de ubekiendte Størrelser paa den eene og de bekiendte paa den anden Side. Nu samles den ubekiendte Størrelses Coefficienter i en Parenthes (No. 6), og dermed divideres hele den anden Side af Ligningen, der bestod af lutter bekiendte (No. 4).

Ex. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = 28 - \frac{3}{4}x$

Brøken bortskaffes ved at multiplicere med 12, og man faaer $\Big\}$ $8x - 3x = 336 - 9x$

de ubekiendte bringes paa een Side, og der bliver $\Big\}$ $8x - 3x + 9x = 336$

den ubekiendtes Coefficienter bringes i en Parenthes, og man faaer $\Big\}$ $(8 - 3 + 9)x = 336$

man dividerer med den ubekiendtes Coefficienter, og $\Big\}$ $x = \frac{336}{8 - 3 + 9}$

Anm. Da Coefficienterne ved den ubekiendte her vare Tal, kunde man strax adderet og subtraheret dem uden at bringe dem i Parenthes.

§. 24.

Et algebraisk Problem (Opgave) er egentlig en Fordring, af nogle givne bekiendte Størrelser at kunde finde Værdien for een eller flere ubekiendte, som derved bestemmes. Saavidt saavel de bekiendte som ubekiendte Størrelser ere Tal eller kunde udtrykkes ved Tal, kan Problemet kaldes arithmetisk; ere de derimod Linier, geometrisk.

Det første og vigtigste ved et Problems Opløsning, er af de i Problemet anførte Betingelser og Forbindelser imellem de bekiendte og ubekiendte Størrelser at kunde udlede eller danne en Ligning. Dette kalder man at formere (danne) en Ligning. Maaden, hvorpaa den første Ligning (fundamental eller Grund-Ligning) af ethvert Problems Betingelser skal udledes, lader sig ikke bestemme i Almindelighed, men overlades til enhvers egen Dømmekraft, som ved mange Exempler bør øves; alt hvad derom i Almindelighed kan foreskrives, er efter mit Skiønnende dette: Man skielne først nøie hvad Spørgsmaals-Tingen (quæsitum) eller

eller den ubekiendte Størrelse er; være opmærksom paa alle Betingelser derved; nøie giøre Forskiel paa det Hovedsagen uvedkommende og kun som Biting anførte, og det der til Problemets Opløsning er væsentlig nødvendigt; og endelig at søge at udtrykke i det algebraiske Sprog de imellem de bekiendte og ubekiendte Størrelser i Problemet anførte Forbindelser.

Er nu Grund-Ligningen formeret, da er Problemet opløst naar Ligningen er opløst, hvis der i Problemet kun er een Ting der spørges om eller en ubekiendt Størrelse; og om saadanne Problemer er det her først handles.

§. 25.

1ste Opgave: En Mand giver den første Fattige han møder Halvparten af de Penge han har hos sig; den anden Fierdeparten af de Penge, han fra Begyndelsen havde; den tredie Ottendeparten af samme Penge, og den fierde Tolvteparten; nu finder han at han har 3 Skilling tilbage. Der spørges, hvor mange Penge han fra Begyndelsen havde, og hvad hver Fattig fik.

Opløsn. Det sees let, at her kun er een ubekiendt Størrelse, nemlig hvor mange Penge han

havde;

havde; thi hvad hver Fattig fik, følger ved simpel Regning.

Wi kalde altsaa det Tal, der udtrykker Mængden af hans Penge i Skillinger, x, og finde Fundamental-Ligningen saaledes:

Med Ord:	Med algebraiske Tegn:
Der søges et Tal	x
hvis Halvpart og	$\frac{1}{2}x$
Fierdepart og	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x$
Ottendepart og	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x$
$\frac{1}{12}$part og 3 Sk.	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x + 3$
udgiør Tallet	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x + 3 = x$

Wi have nu Grundligningen:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x + 3 = x.$$

Brøken bortskaffes ved at multiplicere med Brøkens mindste fælles Nævner 24 (§. 21 No. 5), og vi har $12x + 6x + 3x + 2x + 72 = 24x$

Ligningen forkortes, og er $23x + 72 = 24x$

De ubekiendte bringes paa een Side (§. 21 No. 1) $72 = 24x - 23x$

deraf efter No. 6; $72 = (24 - 23)x$

$72 = 1x = x.$

Det søgte Tal er altsaa 72, og han havde hos sig 72 Skilling. Første Betler fik $\frac{1}{2} \times 72 = 36$ ß., anden fik $\frac{1}{4} \times 72 = 18$ ß., tredie fik $\frac{1}{8} \times 72 = 9$ ß., fierde fik $\frac{1}{12} \times 72 = 6$ ß.; lægges nu disse Summer sammen, udkommer 69, som, forøget med

med de 3 Skilling, han beholdt tilbage, udgiør 72 ß., der saaledes er Prøve-Regning, hvoraf sees, at det fundne Tal 72 er det rette.

Till. Ved at betragte saavel Fremgangsmaaden ved at formeere Fundamental-Ligningen som Prøve-Regningen i foregaaende Problem, kunde og udledes følgende Regel for at faae et arithmetisk Problem bragt i en Ligning: Man forestiller sig at Problemet allerede var opløst og at man vilde giøre Prøve; man seer da, at der med det til Problemets Opløsning fundne Tal maatte foretages visse Forandringer (Regnings-Operationer) for at udbringe et vist Tal, der efter Problemets Bestemmelse maa udkomme, hvis Problemet er rigtig opløst. Nu vælger man et Bogstav, f. Ex. x, og behandler det paa samme Maade som man ved Prøven behandlede det Tal, der var fundet at skulde opløse Problemet, og hvad der ved denne Behandling udkommer, sættes paa den eene Side af Ligheds-Tegnet, og paa den anden Side det som skulde udkomme, hvis Problemet var rigtig opløst.

Anm. Videre Anviisning, især for dem der vilde lære sig selv Algebra, af Problemets Betingelser at danne Fundamental-Ligningen, findes i **Kahr's Veiledning i Algebra**. Kiøbenh. 1802.

§. 26.

§. 26.

2den Opgave. At finde et Tal, hvis Halvpart, Trediepart og Fierdepart tilsammenlagte ere een større end Tallet selv.

Fundamental-Ligningen dannes let ved at ansee det søgte Tal som fundet og kalde det x, dermed foretages de angivne Forandringer, nemlig tage dets Halvpart, Trediepart og Fierdepart og summere dem, som da sættes paa den eene Side af Ligheds-Tegnet og udgiøre Ligningens eene Side; og paa den anden Side det der skulde udkomme efter Betingelsen, nemlig Tallet x og een.

Algebraisk udtrykt staaer det saaldes:

Tallet $= x$

dets Halvpart $= \frac{1}{2}x$

Trediepart $= \frac{1}{3}x$

Fierdepart $= \frac{1}{4}x$

summende $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$

der er een større end Tallet selv; altsaa Fundamental-Ligningen:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$, der forandret (§. 21 No. 5) er $6x + 4x + 3x = 12x + 12$

og forkortet . . . . . $13x = 12x + 12$

De ubekiendte bringes

paa een Side (§. 21 No. 1) $13x - 12x = 12$

forkortet . . . . $x = 12$

12 er saaledes det fundne Tal, som ved Prøven ogsaa

ogsaa findes at opfylde Betingelsen, da dets Halvpart 6, og Tredievart 4, og Fierdepart 3 sammenlagt udgiør 13, som er een høiere end Tallet selv.

§. 27.

3die Opgave. Een kiøbte en Sabel, en Ring og et Lomme-Uhr; alle tre Stykker kostede 100 Rdlr., men Ringen kostede 4 Rdlr. mere end Sablen, og Uhret 20 Rdlr. mere end Ringen. Sporges: hvad har Kiøberen givet for ethvert Stykke?

Opløsn. Ved første Øiekast synes det som her var tre ubekiendte Størrelser; men ved efter den §. 24 givne Regel nøie at overveie Betingelserne sees, at kun Sablens Priis er den søgte Størrelse, da de øvrige derved bestemmes. Fundamental-Ligningen findes da efter §. 24 og 25 Till. Naar Sablens Priis $= x$

Ringens $= x + 4$ Rdlr.

Uhrets $= x + 24$ Rdlr.

at være: $x + x + 4 + x + 24 = 100$

forkortet . . $3x + 28 = 100$

(§. 21. No. 1) $3x = 100 - 28 = 72$

(§. 21. No. 4) $x = 24$ som er Prisen for Sablen; deraf findes Ringens at være 28 og Uhrets 48, som saaledes udgiør 100 Rdlr.

§. 28.

4de Opgave. En Coureer, der daglig skal reise 8 Mile, er allerede for 9 Dage siden afgaaet; en Anden sendes nu for at indhente ham, og befales at reise daglig 12 Mile. Sporges: hvor mange Dage vil forløbe fra den sidstes Afreise førend han naaer den første?

Opløsn. Fundamental-Ligningen findes let, naar man lægger Mærke til, at den sidste just da har naaet den første, naar de begge have reist lige mange Mile.

Kaldes nu Antallet af de Dage, den sidste reiser (som er den søgte Størrelse) x, saa er Mile-Antallet $= 12x$; den første var reist 6 Dage forud, følgelig i alt $x + 6$ Dage, og Mile-Antallet $= (x + 6)\ 8$.

Saaledes er $12x = (x + 6)\ 8$

og naar Parenthesen hæves . . . . $12x = 8x + 48$

(§. 21. No. 1) $12x - 8x = 48$

forkortet . . . $4x = 48$

(§. 21. No. 4) . . $x = 12$.

Till. 1. Udtrykker man de bekiendte Størrelser ogsaa ved Bogstaver, nemlig de første Bogstaver af Alphabetet (§. 20), saa faaer man ved Ligningens Opløsning en almindelig Form, der gielder for alle lignende Tilfælde, og hvoraf igien kan udledes saa mange forskiellige Ligninger som der findes Størrelser, da enhver kan antages som ubekiendt og bestemmes ved de øvrige.

Kalde vi i nærværende Exempel Mile-Tallet, den første Coureer A reiser daglig, a, de Dage, han har reist forud, b, og Milene, den anden B reiser daglig, c, saa bliver Grundligningen:

$(x+b)a = cx$

og $ax + ab = cx$

(§. 20. No. 6) $ab = cx - ax = (c-a)x$

No. 4) $\frac{ab}{c-a} = x$, som udtrykt med Ord er: Man finder Dage-Antallet x, efter hvilke B vil indhente A, naar man dividerer Milene, som A har forud, med Differencen imellem de Mile, de daglig begge reise.

Till. 2. Af disse fire Størrelser a, b, c, x, som Ligningen indeholder, kan enhver antages som ubekiendt og de øvrige findes. Saaledes findes $b = \frac{(c-a)x}{a}$, thi vi havde $\frac{ab}{c-a} = x$

altsaa (§. 20 No. 5) $ab = cx - ax$

og (§. 20 No. 6) $ab = (c-a)x$

(§. 20 No. 4) $b = \frac{(c-a)}{a}x$ ɔ: Antallet af Dagene, A har reist forud, findes naar Differencen af deres daglige Mile multiplIceres med Antallet af Bs Reisedage og Productet igien divideres med Antallet af de Mile, A reiser daglig.

Paa samme Maade findes $c = \frac{ab}{x} + a$;

og $a = \frac{cx}{b+x}$.

§. 29.

5te Opgave. Man har to Masser af forskiellige givne Værdier; der spørges: hvormeget man skal tage af hver, for at frembringe en Blanding af en vis bestemt Værdi (som dog er imellem de to givne)? Lad Eenheden af den bedre Masse koste a, af den ringere b, og af Blandingen c.

Ved at anvende de forhen givne Regler sees let, at den ubekiendte Størrelse x er den Deel af een af de givne Masser, som vi tage til Blandingen; thi er den bestemt, følger af sig selv, at det, der tages af den anden Masse, maa være hvad x mangler i Eenheden.

Lad her x være det af den ringere Masse der tages, saa maa af den bedre tages $1 - x$; Prisen bliver for begge Dele altsaa $bx + a(1-x) = bx + a - ax$. Dette skal være Værdien af Blandingen, som er bestemt $= c$; vi faae altsaa Fundamental-Æqvationen

$bx +$

$$bx + a - ax = c$$

(§. 21 No. 1) $bx - ax = c - a$

(§. 21 No. 2) $ax - bx = a - c$

(§. 21 No. 6) $(a - b)x = a - c$

No. 4) . . . $x = \frac{a - c}{a - b}$

Det er: Man finder den Deel man skal tage af den ringere Masse for at frembringe Blandingen, naar Forskiellen imellem Værdien for en vis Eenhed af den givne Masse og af Blandingen divideres med Forskiellen mellem Værdien for samme Eenhed af begge de givne Masser.

Ex. Af en bedre Slags Viin som koster 40 ß. Potten og en ringere Slags der koster 24 ß. vil en Viintapper giøre en Blanding som kan sælges for 2 Mk.; hvormeget skal han tage af hver Sort? Efter Formen findes hvad han skal tage af den ringere Sort at være

$$x = \frac{40 - 32}{40 - 24} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

følgelig skal han tage Halvdelen af den ringere Sort og altsaa Halvdelen af den gode for at faae Blandingen til den bestemte Priis.

Sætte vi, at han isteden for ringere Viin blander Vand i den bedre for at kunde sælge den for den bestemte Priis, og der sporges: hvormeget Vand han kan sætte til? da findes det efter samme Form; kun at b sættes $= 0$, da Vand intet koster.

Efter den fundne Form var $x = \frac{a - c}{a - b}$

men $b = 0$, altsaa er $x = \frac{a - c}{a}$ og med

Tal $x = \frac{40 - 32}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$, følgelig maa han til den gode Viin sætte $\frac{1}{5}$ Vand for at kunde sælge den til den bestemte Priis.

§. 30.

6te Opgave. En kiøber nogle Alen Tøi og betaler for hver 2 Alen 7 Rdlr.; han sælger igien hver 3 Alen for 11 Rdlr. og vinder derved 50 Rdlr. Nu spørges, hvormange Alen Tøi han kiøbte.

Ved opmærksomt at betragte Opgaven sees let, at det, han udbragte ved Salg, maa være saameget som baade Indkiøbssummen og Gevinsten.

Antallet af Alen Tøi være x; Prisen for det Solgte findes da saaledes:

$$3 \text{ Alen} : x \text{ Alen} = 11 \text{ Rdlr.} : \frac{11x}{3\text{Rd.}}$$

Indkiøbsprisen saaledes $2 \text{ Al.} : x \text{ Al.} = 7 \text{Rd.} : \frac{7x}{2\text{Rd.}}$

Grundligningen er følgelig $\frac{7x}{2} + 50 = \frac{11x}{3}$

$$(\S.\ 21\ \text{No.}\ 5) \ldots 7x + 100 = \frac{22x}{3}$$

$$\text{deraf} \ldots\ 21x + 300 = 22x$$

$$(\S.\ 21\ \text{No.}\ 1)\quad 300 = 22x - 21x = x,$$

der var 300 Alen.

§. 31.

7de Opgave. At dele et givet Tal a i to Dele saaledes, at den større Deel, forøget med et givet Tal b, skal forholde sig til den mindre, forøget med et givet Tal c, som $m:n$.

Af dette Problems Betingelser lader sig ikke strax umiddelbar udlede nogen Grundligning, men kun en Proportion, hvoraf Ligningen (Arithm. §. 73) let findes. Sættes her den største Deel af Tallet $a = x$, saa er den mindre $a - x$, og Proportionen bliver

$$(x + b) : (a - x + c) = m : n$$

deraf følger $n(x + b) = m(a - x + c)$

som bliver $nx + nb = am - mx + cm$

(§. 21 No. 1) $nx + mx = am + cm - bn$

No. 6) $(n + m)x = am + cm - bn$

$$x = \frac{am + cn - bn}{n + m}$$

Ex. Lad være $a = 24$, $b = 13$, $c = 5$, $m = 10$, $n = 5$, saa er

$$x = \frac{24 \times 10 + 5 \times 10 - 13 \times 5}{10 + 5}$$

$$x = \frac{240 + 50 - 65}{15} = \frac{225}{15} = 15$$

Altsaa er den større Deel 15,
følgelig den mindre ... 9, der ogsaa opfylde Betingelsen, da $(15 + 13) : (9 + 5) = 10 : 5$.

§. 32.

Indeholder en Opgave to eller flere ubekiendte Størrelser, eller der ere to eller flere Ting, hvorom der spørges, da, naar den indeholder tillige saa mange Betingelser, at deraf kan efter de forhen anførte Regler udledes saamange Grundligninger, som Opgaven indeholder ubekiendte Størrelser, findes Værdien for enhver af de ubekiendte paa følgende Maade:

Man søger af de fundne Grundligninger, hvori der efter Ligningernes Antal ere to eller flere ubekiendte Størrelser, at frembringe en eeneste Ligning, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse; dette kaldes at eliminere eller bortskaffe den eller de ubekiendte; og det opnaaes paa een af disse tre Maader:

1) Ved Substitution ɔ: ved at søge af den første Ligning en Værdie for den ubekiendte, man først vil bortskaffe (hvilken kan vælges vilkaarligt) og indsætte denne fundne Værdie i de andre Ligninger; derpaa paa samme Maade søge en Værdie for den anden ubekiendte af den anden Ligning og indsætte den i de andre Ligninger o. s. f.

Lad til Exempel være givne følgende tre Grundligninger:

$$1)\ x + y = 30$$
$$2)\ y + z = 18$$
$$3)\ x + z = 24$$

Man søger af Ligningen No. 1 efter de §. 21 forklarede Regler, en Værdie for x, og finder da $x = 30 - y$. Denne Værdie for x indsat i No. 3 giver No. 4, som bliver

$30 - y + z = 24$, som behørig reduceret bliver 5; $y - z = 6$.

Af No. 2 findes $y = 18 - z$ denne Vædie indsat i No. 5 giver $18 - z - z = 6$, som reduceret og omsat bliver $2z = 18 - 6$

$$2z = 12$$

og følgelig $z = 6$. Indsættes nu denne fundne Værdie i No. 5, findes $y = 12$, og denne Værdie indsat i No. 1 giver $x = 18$.

2) Ved Combination ɔ: af to forskiellige Ligninger, hvori samme ubekiendte Størrelse findes, søger

søger man dens Værdie; disse fundne Værdier maae være ligestore (Arithm. §. 38), og forenede ved Ligheds-Tegn give de en Aeqvation, hvori den ubekiendte Størrelse ikke findes, og saaledes vedblives indtil man faaer en Aeqvation, hvori kun er een ubekiendt.

Lad til Exempel være givne tre Ligninger:

$$A)\ x + y + z = 36$$
$$B)\ x + 3y - 2z = 48$$
$$C)\ x - y + 3z = 30$$

Nu findes af Aeqvation A, $x = 36 - y - z$,

af Aeqvation B, $x = 48 - 3y + 2z$

og af Aeqvation C, $x = 20 + y - 3z$.

Af første og anden faaes (Arithm. §. 38) denne Ligning: $36 - y - z = 48 - 3y + 2z$, hvoraf findes: $2y = 48 - 36 + 3z$

$$y = \frac{12 + 3z}{2}$$

af 2den og 3die faaes $20 + y - 3z = 48 - 3y + 2z$

$$\text{og}\quad 4y = 28 + 5z$$

$$y = \frac{28 + 5z}{4}$$

Ved at combinere de to for y fundne Værdier faaer man

$\dfrac{28 + 5z}{4} = \dfrac{12 + 3z}{2}$, som er en Ligning med een ubekiendt Størrelse, der opløses efter

efter de forklarede Regler og bliver

$$(\S.\ 21\ \text{No.}\ 5) \quad 28 + 5z = \frac{48 + 12z}{2}$$

$$56 + 10z = 48 + 12z$$

$$56 - 48 = 12z - 10z$$

$$8 = 2z$$

$$4 = z$$

Denne Værdie indsat i Æqvationen

$$y = \frac{28 + 5z}{4} \text{ giver}$$

$$y = \frac{28 + 20}{4} = 12 \quad \text{og}$$

disse for y og z fundne Værdier indsatte i Æqvationen

$$x = 36 - y - z \quad \text{giver}$$

$$x = 36 - 12 - 4$$

$$x = 20.$$

3) Ved Addition eller Subtraction ɔ: ved at addere eller subtrahere to Æqvationer, hvori findes flere ubekiendte Størrelser, at bortskaffe den ene, som skeer:

a) Naar den ubekiendte har samme Coefficient i begge Æqvationer, ved at addere Ligningerne sammen naar den har + i den ene og — i den anden, men ved at subtrahere den ene Ligning fra den anden naar den har samme Tegn i dem begge.

Ex.

Ex. $3x - 2y = a$

$$\underline{x + 2y = b}$$

Heraf ved Addition $4x = a + b$

$$3x - 4y = a$$

$$2x - 4y = b$$

$$\underline{- \quad + \quad -}$$

ved Subtraction $x = a - b$

b) Naar den ubekiendte, man vil bortskaffe, har forskiellige Coefficienter i de givne Æqvationer, da forandres Æqvationerne, saa at den faaer samme Coefficient i begge, som skeer ved at multiplicere den ene Æqvation med den Coefficient, som den ubekiendte har i den anden; og derpaa forfares som i forrige Tilfælde.

Ex. $3x + 2y = a$

$$x - 3y = b$$

Skal y bortskaffes, multipliceres

No. 1 med 3, og vi faae $9x + 6y = 3a$

og No. 2 med 2, hvor vi faae $\underline{2x - 6y = 2b}$

Ved Addition findes nu $11x = 3a + 2b$

Den videre Anvendelse af disse Methoder til at bortskaffe (eliminere) de ubekiendte Størrelser paa een nær, naar der ere givne saa mange Æqvationer som der er forskiellige ubekiendte Størrelser, vil bedst sees ved Anvendelsen til Problemers Opløsning.

§. 33.

8de Opgave. Een har to Sølvbægere, men kun eet Laag; det første Bæger veier 12 Lod, men tilligemed Laaget dobbelt saa meget som det andet; det andet veier tilligemed Laaget tre Gange saa meget som det første. Der spørges: hvad veier Laaget? og hvad veier det andet Bæger?

Her er to ubekiendte Størrelser: Vægten af Laaget, som vi vil kalde x, og Vægten af det andet Bæger, som kan være y. Vi finde nu let, ved at overveie Betingelserne, følgende to Grundligninger:

1) $x + 12 = 2y$ ⟨ ɔ: Laagets Vægt x Lod og det første Bægers 12 Lod er det dobbelte af det andet Bægers Vægt $2y$.

2) $y + x = 3 \times 12$ ⟨ ɔ: Vægten af Laaget og det andet Bæger $x + y$ liig det tredobbelte af første Bægers Vægt 3×12.

Ved Substitutions-Methoden (§. 32. I.) søges Værdien for x i den første Æqvation, og findes $x = 2y - 12$. Denne Værdie indsat i den anden Æqvation, faae vi

$y + 2y - 12 = 3 \times 12$, som har kun een ubekiendt, og opløses let efter de (§. 21) givne

givne Regler; og findes

$$3y = (3 \times 12) + 12 = 48$$
$$y = 16$$

men vi havde $x = 2y - 12$

altsaa $x = 32 - 12 = 20.$

Tillæg. Med Fordeel kunde her Subtractions-Methoden været brugt, da x findes i begge Æqvationer med samme Exponent, nemlig 1; man kunde altsaa strax, ved at subtrahere den anden Æqvation fra den første, elimineret x. Opløsningen vilde da blevet saaledes:

De fundne Grundligninger var . . $\begin{cases} 1)\ x + 12 = 2y \\ 2)\ y + x = 3 \times 12 \end{cases}$

subtraheer 2 fra 1 og vi faae $12 - y = 2y - 36$

som omsat giver . . . . $48 = 3y$

og . . . . $16 = y.$

Anm. Additions- og Subtractions-Methoden giver i Almindelighed den hurtigste Elimination, og anvendes med Fordeel naar de ubekiendte Størrelser ikke ere multiplicerede med hinanden, eller i forskiellige Ligninger ophøiede til forskiellige Potenser.

§. 34.

9de Opgave. Ved et vist Arbeide have A og B arbeidet tilsammen i 6 Dage og fortient 480 ß., A og C tilsammen i 9 Dage og fortient 648 ß., B og C i 15 Dage og fortient

tient 960 ß.; spørges: hvad har enhver Arbeider, nemlig A, B og C, fortient daglig?

Kalde vi A's daglige Fortieneste x ß

B's . . . . y

og C's . . . . z

saa have vi følgende tre Grundligninger:

1) $6x + 6y = 480$

2) $9x + 9z = 648$

3) $15y + 15z = 960$

Nu bortskaffes ved en af de (§. 32) nævnte Methoder først den eene og derpaa den anden af de tre ubekiendte Størrelser, saa at man erholder tilsidst en Æqvation med een ubekiendt Størrelse. Combinations-Methoden vil vi her anvende, og finde da

af No. 1) $x = \dfrac{480 - 6y}{6} = 80 - y$

af No. 2) $x = \dfrac{648 - 9z}{9} = 72 - z$

som combinerede giver Æqvationen

No. 4) $72 - z = 80 - y$.

Heraf findes efter de (§. 21) givne Regler

$y = z + 8$, og af No. 3 findes

$y = \dfrac{960 - 15z}{15} = 64 - z$.

Disse Udtryk for y give Æqvationen

$z +$

$z + 8 = 64 - z$

$2z = 56$

$z = 28$.

Denne fundne Værdie af z indsat i Æqvationen No. 4 giver $y = 36$,

og i No. 2 giver den $x = 44$.

Saaledes har A fortient 44 ß., B 36 ß., og C 28 ß. daglig.

§. 35.

10de Opgave. Af to Tals givne Summa $= a$ og deres Differents $= b$ at finde Tallene selv.

Opløsn. Tallene være x det større og y det mindre (thi ere de ligestore, opløses Problemet af sig selv, da ethvert Tal er den halve Summa); vi have da af Betingelserne to Grund-Æqvationer:

1) $x + y = a$

2) $x - y = b$

Ved Additions-Methoden (§. 32 No. 3) $2x = a + b$

$x = \dfrac{a + b}{2} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$

ɔ: det største af to Tal findes naar til deres halve Summa adderes deres halve Difference. Indsættes denne Værdie for x i Ligningen No. 1, saa have

vi

vi $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + y = a$
omsat $y = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$
ↄ: Det mindste af de to ubekiendte Tal findes naar fra deres halve Summa subtraheres deres halve Difference.

Ex. Sæt Summen $a = 70$, Differencen $b = 12$, saa er $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 35 + 6 = 41$
$y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 35 - 6 = 29.$

Anm. Ved at udtrykke de bekiendte Størrelser med Bogstaver fandtes her ved Opløsningen en almindelig Regel, som gielder for alle Tilfælde af den Art.

§. 36.

11te Opgave. Af to Rør løbe Vand i eet og samme Kar; det første Rør løber i to Timer, det andet i tre Timer, og man finder i Karret 195 Potter Vand. En anden Gang løber det første Rør i fem, det andet i fire Timer, og man finder i Karret 330 Potter Vand. Der spørges: hvormange Potter Vand har ethvert Rør givet i een Time?

For at giøre Opløsningen almindelig og til Øvelse i at regne med Bogstaver vil vi udtrykke de bekiendte Størrelser med Bogstaver og sætte $a = 2$ Timer, $b = 3$ Timer, $m = 195$ Potter, $c = 5$ Timer, $d = 6$ Timer og $n = 330$ Potter.

Vi kalde nu de Potter Vand, det første Rør giver i een Time, x, og de Potter, det andet Rør giver, y, og vi faae følgende Fundamental-Æqvationer:

1) $ax + by = m$
2) $cx + dy = n$

Af No. 1 findes $x = \dfrac{m - by}{a}$

Denne Værdie for x indsættes i No. 2 ved Substitution (§. 32), og vi faae

$$c\left(\frac{m - by}{a}\right) + dy = n$$

$$\frac{cm - bcy}{a} + dy = n$$

$$cm - bcy + ady = an$$

$$ady - bcy = an - cm$$

$$(ad - bc)y = an - cm$$

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc}$$

Indsættes nu denne Værdie for y i Æqvationen

$$x = \frac{m - by}{a}$$

saa har vi $x = \dfrac{m}{a} - \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{an - cm}{ad - bc}\right).$

$$x = \frac{m}{a} - \left(\frac{ban - bcm}{aad - abc}\right)$$

Brin-

Bringes Brøkene til eens Benævning,

saa er $x = \frac{mad - mbc - ban + bcm}{aad - abc}$

reduceret er $x = \frac{mad - ban}{aad - abc}$

forkortet $x = \frac{md - bn}{ad - bc}$

Indsættes nu de givne Værdier i Tal, saa

er $y = \frac{(2 \times 330) - (5 \times 195)}{(2 \times 4) - (3 \times 5)}$

$y = \frac{-315}{-7} = 45$

$x = \frac{(4 \times 195) - (3 \times 330)}{(2 \times 4) - (3 \times 5)}$

$x = \frac{-210}{-7} = 30$

Det første Rør giver altsaa 30 Potter Vand hver Time, og det andet 45 Potter i samme Tid.

Till. Efter det fundne almindelige Udtryk for x og y lader følgende Problem sig ogsaa opløse: Man blander to Sorter Sølv A og B saaledes, at 10 Mark af A og 20 Mark af B give en Masse af 30 Mark 6lødig Sølv og følgelig 180 Lod Sølv; en anden Gang saaledes, at 30 Mark af A og 40 Mark af B give en Masse af 70 Mark $6\frac{2}{7}$lødig Sølv, der følgelig indeholder 440 Lod Sølv. Nu spørges: hvor lødig (ɔ: hvor mange Lod reent Sølv Marken af hver har indeholdt) A og B har været?

Sætte vi nu A at være x lødig (ɔ: indeholde x Lod reent Sølv paa Marken) og B y lødig, saa have vi efter forrige Opgave, da her er $a = 10$, $b = 20$, $m = 180$, og $c = 30$, $d = 40$, $n = 440$,

$x = \frac{md - bn}{ad - bc} = \frac{(180 \times 40) - (20 \times 440)}{(10 \times 40) - (20 \times 30)}$

$x = \frac{7200 - 8800}{400 - 600} = \frac{-1600}{-200}$

$x = 8.$

og $y = \frac{an - cm}{ad - bc} = \frac{(10 \times 440) - (30 \times 180)}{(10 \times 40) - (20 \times 30)}$

$y = \frac{4400 - 5400}{400 - 600} = \frac{-1000}{-200}$

$y = 5.$

§. 37.

12te Opgave. En Vert blev spurgt, hvad Viin han havde og hvad Prisen var paa hver Sort; han svarede han havde tre Slags og Prisen var saaledes: at to Potter af den ringeste, to Potter af den mellemste og een Pot af den bedste kostede i alt 120 Skilling; to Potter af den ringeste, tre Potter af den anden

anden og 4 Potter af den beste tilsammen 240 Skilling; endelig ti Potter af den ringeste, fire Potter af den anden og to Potter af den tredie Slags tilsammen 360 Skilling. Hvad koster nu Potten af hver Slags Viin?

Lad Prisen for den ringere Sort være $= x$, for den anden $= y$ og for den tredie $= z$, saa faae vi følgende tre Grundligninger:

$$1)\quad 2x + 2y + z = 120 \text{ Skilling}$$
$$2)\quad 2x + 3y + 4z = 240$$
$$3)\quad 10x + 4y + 2z = 360.$$

Af disse tre Ligninger skal nu søges een, hvor der kun er een ubekiendt Størrelse. Vi vil til Øvelse her søge at opnaae dette ved Substitution (§. 32).

Af den første Ligning søges en Værdie for x, og vi finde $x = \left(\frac{120 - 2y - z}{2}\right)$; denne substitueres i den anden Ligning, og vi har $2\left(\frac{120 - 2y - z}{2}\right) + 3y + 4z = 240$

som reduceret bliver

$$120 - 2y - z + 3y + 4z = 240$$
$$4) \ldots\ldots y + 3z = 120.$$

Den samme Værdie for x indsættes i den 3die Ligning og vi faae $10\left(\frac{120 - 2y - z}{2}\right) + 4y + 2z = 360$

$$600 - 10y - 5z + 4y + 2z = 360$$
$$-6y - 3z = 360 - 600$$
$$5) \ldots 6y + 3z = 600 - 360 = 240$$

Af No. 4 søges en Værdie for y, som findes at være $y = 120 - 3z$;

denne indsættes i No. 5, og vi faae

$$6(120 - 3z) + 3z = 240.$$

Vi have nu erholdt en Æqvation, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse, der opløses efter de givne Regler, og findes:

$$720 - 18z + 3z = 240$$
$$-15z = 240 - 720$$
$$15z = 720 - 240 = 480$$
$$z = \frac{480}{15} = 32 \text{ Skilling.}$$

Anm. Vedbliver man paa denne Maade, at man af den første af de fundne Ligninger, hvis der vare flere, søger en Værdie for den eene ubekiendte Størrelse og indsætter denne Værdie i alle de øvrige Ligninger i Stedet for samme ubekiendte Størrelse, saa faaer man tilsidst en Ligning, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse, hvis Værdie da let kan findes; som her $z = 32$ Skilling.

Indsættes nu denne Værdie i Ligningen $y = 120 - 3z$ saa er $y = 120 - 96$ $y = 24$ Skilling, og disse Værdier for y og z ind-

z indsatte i Ligningen $x = \frac{120 - 2y - z}{2}$

give $x = \frac{120 - 48 - 32}{2} = \frac{40}{2} = 20$ Skill.

Prisen for den ringere Sort var saaledes 20 Skilling Potten, for den anden Sort 24 Skilling, og for den tredie Sort 32 Skilling.

Tillæg. Det samme Problem kunde være hastigere opløst ved Additions- og Subtractions-Methoden (§. 00).

Ligninger var 1) $2x + 2y + z = 120$

2) $2x + 3y + 4z = 240$

3) $10x + 4y + 2z = 360$

No. 1 subtraheres fra No. 2, og vi faae

No. 4) $y + 3z = 120$

No. 2 multipliceres med 3, og vi faae No. 5) $10x + 15y + 20z = 1200$

3 subtraheres fra 5, og vi faae No. 6) . . . $11y + 18z = 840$

No. 4 multipliceres med 6, og vi faae No. 7) . . . $6y + 18z = 720$

denne subtraheres fra 6, og vi have . . . . $5y = 120$

og . . . . $y = 24$.

§. 38.

13de Opgave. Imellem tre Regimenter, som holdte sig tapre i en Træfning, skal 1326 Rdlr. uddeles saaledes, at enhver i det Regiment, der meest udmærker sig, skal erholde een Rigsdaler, og Resten deles lige under de to andre Regimenter. Udmærker nu det første Regiment sig, da faaer enhver Mand i de andre Regimenter $\frac{1}{2}$ Rdlr.; udmærker det andet sig, da faaer hver Mand i det første og tredie kun $\frac{1}{3}$ Rdlr., og udmærker det tredie Regiment sig, da faaer hver Mand i de to første Regimenter kun $\frac{1}{4}$ Rdlr. Nu spørges: hvor stærk var Antallet af Mandskabet i erhvert af disse tre Regimenter?

Vi kalde Antallet i det første Regiment x, i det andet y, og i det tredie z; saa er

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 1326 \\ 2)\ y + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}z = 1326 \\ 3)\ z + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y = 1326 \end{array}\right\}$$

thi naar en Mand faaer 1 Rd. eller $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{4}$ Rd., saa faae x Mænd x Rd. eller $\frac{1}{3}x$ eller $\frac{1}{4}x$.

Vil man nu ved Addition eller Subtraction (§. 36) bortskaffe x, da maae man see at skaffe x samme Coefficient i alle Æqvationer; man multiplicerer

$$\begin{array}{l} \text{den anden med 3} \\ \text{den tredie med 4} \end{array}\left\{ \text{og faae} \begin{array}{l} 4)\ 3y + x + z = 3978 \\ 5)\ 4z + x + y = 5304 \end{array}\right.$$

Nu subtraheres Ligningen 1 fra 4, og 4 fra 5, og vi vi faae $\begin{cases} 6)\ \frac{5y}{2} + \frac{1}{2}z = 2652 \\ 7)\ 3z - 2y = 1326 \end{cases}$

For at y nu kan faae samme Coefficient i begge Æqvationer, multipliceres No. 6 med 4 og No. 7 med 5, og der bliver

No. 8) $10y + 2z = 10608$

9) $10y + 15z = 6630$

8 og 9 adderede, kommer $17z = 17238$

og $z = 1014$, som er Tallet paa det tredie Regiments Mandskab. Af

No. 7 findes $y = \frac{3z - 1326}{2}$ Værdien af z

indsat bliver $y = \frac{3042 - 1326}{2} = 858$

Antallet af det andet Regiments Mandskab.

Af No. 1 findes $x = 1326 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$

$x = 1326 - 429 - 507$

$x = 390$ Antallet af Mandskabet i det tredie Regiment.

Anm. At anføre flere Exempler paa enkelte Ligninger med fire eller flere ubekiendte, overlades til det mundtlige Foredrag. Passende Exempler af dette Slags findes i Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger og i Kahr's Veiledning i Algebra.

III. Om qvadratiske saavel rene som ureene Ligninger med een eller flere ubekiendte Størrelser.

§. 39.

En qvadratisk Ligning (§. 22) kaldes reen (fuldkommen) naar den ubekiendte Størrelse forekommer allene som Qvadrat-Tal eller i anden Potens; ureen eller forviklet naar den ubekiendte forekommer baade som Qvadrat-Tal og Rod eller baade i første og anden Potens.

En reen qvadratisk Ligning behandles efter de om enkelte Ligninger forklarede Regler, indtil man faaer den ubekiendtes Qvadrat allene paa den ene Side og lutter bekiendte Størrelser paa den anden Side ɔ: til Ligningen faaer den almindelige Form $x^2 = a$. Værdien af x (som ogsaa kaldes Ligningens Rod) findes da ved at udtrække Qvadrat-Roden af begge Ligningens Sider (§. 21 No. 6) og man finder $x = \sqrt{a}$. Da Qvadrat-Roden til et positiv Qvadrat-Tal kan være baade bekræftende og nægtende (§. 14), saa bliver $x = \pm\sqrt{a}$ ɔ: der findes ved Opløsningen af en qvadratisk Ligning stedse to Værdier for den ubekiendte Størrelse, baade en bekræftende og en nægtende, hvilket ogsaa udtrykkes saaledes, at enhver qvadratisk

Lig-

Ligning har to Rødder; men da alle Qvadrat-Tal saavel af nægtende som bekræftende Rødder nødvendig maa være bekræftende (§. 13), saa følger, at naar a (de bekiendte Størrelser der udgiøre den eene Side af Ligningen) er nægtende og Formen er $x = \sqrt{-a}$, da er x en umuelig Størrelse, og en Opgave, som leder til et saadant Udtryk, kan ikke opløses og har indeholdt umuelige Betingelser.

§. 40.

1ste Opgave. At finde to Tal, hvis Summa er givet at være 14 og deres Produkt 45.

Vidste man foruden Tallenes Summa tillige deres Differents, da fandtes Tallene let (§. 35). Vi søge altsaa Differencen og kalde den z, og vi have da det større Tal $x = 7 + \frac{1}{2}z$, og det mindre $y = 7 - \frac{1}{2}z$ (§. 35), følgelig

$$xy = 45 = (7 + \tfrac{1}{2}z) \times (7 - \tfrac{1}{2}z)$$

reduceret $45 = 49 - \frac{1}{4}z^2$

$$\tfrac{1}{4}z^2 = 49 - 45 = 4$$
$$z^2 = 16$$
$$z = \pm \sqrt{16}$$
$$z = \pm 4;$$

og nu findes $x = 7 + 2 = 9$

$$y = 7 - 2 = 5.$$

Anm. Sætte vi det givne Produkt 50 og Summen som før 14, da finde vi, ved at foretage den nys fremsatte Opløsning tilsidst,

$$\tfrac{1}{4}z^2 = 49 - 50 = -1$$

og $z^2 = -4$

$z = \sqrt{-4}$, som er en umuelig Størrelse, der viser, at der ikke gives to saadanne Tal, hvis Sum er 14 og hvis Produkt 50.

§. 41.

2den Opgave. At finde tvende ulige store Tal af den Beskaffenhed, at deres Sum forholder sig til det største Tal som 7 til 5, og at Summen, multipliceret med det mindste, giver til Produkt 126.

Opløsn. Det større Tal være x, det mindre y; vi have da efter Betingelsen

$(x + y) : x = 7 : 5$ og deraf (§. 31)

Æqvationen A) $7x = 5x + 5y$

Endvidere efter den anden Betingelse

Æqvationen B) $(x + y)\, y = 126$.

Af A findes $x = \frac{5y}{2}$; denne Værdie substitueres i B, og vi faae

$$\text{C)} \left(\frac{5y}{2} + y\right) y = 126$$

$$\frac{5y^2}{2} + y^2 = 126$$

$$5y^2 + 2y^2 = 252$$

$$7y^2 = 252$$
$$y^2 = 36$$
$$y = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Denne Værdie indsat i Ligningen $x = \frac{5y}{2}$ findes $x = \frac{\pm 30}{2} = \pm 15.$

§. 42.

3die Opgave. Nogle Personer indgaae i Compagnie med hinanden for at handle; enhver indskyder 30 Gange saa mange Rigsdaler som der ere Personer, og med 100 Rdlr. vinder enhver tre Gange saa mange Rigsdaler som der ere Personer; endelig giver $\frac{1}{8}$ af hele Gevinsten, multipliceret med $\frac{5}{36}$, Personernes Antal.

Opløsn. Personernes Antal være x, Enhvers Indskud altsaa $30x$, og den hele Kapital $30x^2$; paa 100 Rdlr. vindes $3x$, altsaa ved Proportion findes den hele Gevinst saaledes:

$$100 : 3x = 30x^2 : \frac{90x^3}{100}$$ at være $\frac{90x^3}{100}$, forkortet $\frac{9}{10}x^3$; en ottende Deel deraf $= \frac{9}{80}x^3$, som multipliceret med $\frac{5}{36}$ er $= \frac{45x^3}{2880}$ forkortet $\frac{1}{64}x^3$, der efter Betingelsen er liig Personernes Antal. Grundligningen er altsaa

$\frac{1}{64}x^3 = x$ som opløst efter de givne Regler bliver $x^3 = 64x$

$$x^2 = 64$$
$$x = \pm\sqrt{64} = 8.$$

Der var altsaa 8 Personer og enhver har indskudt 240 Rdlr., i alt altsaa 1920 Rdlr.

Gevinsten $100 : 24 = 1920$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 100)\overline{46080} \\ \hline 460\frac{4}{5} \text{ Rdlr.}; \end{array}$$

deraf en ottende Deel $460\frac{4}{5} \times \frac{1}{8} = 57\frac{3}{5}$, som multipliceret med $\frac{5}{36}$ giver $\frac{288}{36} = 8$, som var Personernes Antal.

§. 43.

En ureen qvadratisk Ligning kaldte vi den (§. 39), hvor den ubekiendte Størrelse forekommer baade som Qvadrattal og tillige som Rod, multipliceret med en bekiendt Coefficient. Den almindelige Form for en saadan Ligning er $x^2 + ax = b$, naar a og b betegne bekiendte og x en ubekiendt Størrelse.

For i en saadan Ligning at finde Værdien for den ubekiendte Størrelse (som og kaldes Ligningens

ningens Rod), ordner man Ligningen (§. 21) saaledes: at Qvadratet af den ubekiendte Størrelse uden nogen Coefficient med Tegnet + bliver det første Leed i Ligningens eene Side (§. 20), og den første Potens af samme ubekiendte med dens Coefficient (der undertiden kan være en sammensat Størrelse, undertiden allene Tallet 1) det andet Leed paa samme Side; men at den anden Side af Ligningen indeholder lutter bekiendte (nægtende eller bekræftende Størrelser). Til Exempel være givet Ligningen $45x^2 = 800000 - 8000x + 20x$ ordnet vil den da staae saaledes:

$$x^2 + 320x = 32000;$$

et andet: $3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$

$$(3a + b)x^2 - cx + bx = ab^2$$

$$(3a + b)x^2 + (b - c)x = ab$$

$$x^2 + \frac{b - c}{3a + b}x = \frac{ab^2}{3a + b}$$

Er Ligningen saaledes ordnet, da sees ved at sammenligne den Side af Ligningen, hvor den ubekiendte Størrelse findes og hvor den almindelige Form er $x^2 + mx$ (da m betyder enhver Coefficient) med det almindelige Udtryk for Qvadrattallet af enhver binomisk Rod (Arithm. §. 55) $a^2 + 2ab + b^2$, at der mangler det tredie Leed, for at den Side kunde blive et fuldkomment Qvadrattal, hvoraf Roden kunde udtrækkes. Da i ethvert

ethvert fuldkomment Qvadrattal af en binomisk Rod det mellemste Leed ($2ab$) er Produktet af Rodens første Størrelse og det dobbelte af den anden ($2ab = a \times 2b$), og følgelig det tredie Leed allertider Qvadratet af det halve af den Coefficient, hvormed den første Rodstørrelse i andet Leed er multipliceret ($b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$): saa udledes let denne almindelige Regel: **Det tredie manglende Leed i enhver ureen qvadratisk Ligning findes, naar, efterat den er ordnet, det Halve af den Ubekiendtes Coefficient i andet Leed qvadreres og lægges til paa begge Sider.**

Saaledes findes i den anførte Ligning

$$x^2 + 320x = 32000$$

det tredie Leed at være $(160)^2 = (160)^2$

og $x^2 + 320x + 25600 = 57600$

Er dette skeet, saa er Ligningens første Side et fuldkomment Qvadrattal. Nu trækkes Roden ud paa begge Sider (§. 21 No. 7), og den qvadratiske Ligning forvandles til en enkelt, som i nærværende Exempel er $x + 160 = 240$,

hvoraf findes let $x = 240 - 160 = 80$.

§. 44.

Af Ligningen $x^2 + mx = b$, der forestiller alle muelige ureene qvadratiske Ligninger, finder man

man efter den i forrige §. forklarede Maade

$$x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2 = b + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \frac{4b + m^2}{4}$$

$$x + \tfrac{1}{2}m = \sqrt{\frac{4b + m^2}{4}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{4b + m^2}{4}}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \frac{\sqrt{4b + m^2}}{2} \quad (\S.15)$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{4b + m^2}}{2}$$

Hvis i denne anførte Form den bekiendte Størrelse $4b$ havde været nægtende og større end m^2, saa er Værdien for den ubekiendte Størrelse umuelig eller indbildt (§. 00), som for Ex.:

At finde et Tal, hvis Qvadrat, forøget med 5, bliver ligestort med det samme Tal to Gange taget.

$$\left\{\begin{array}{l} x \\ x^2 + 5 \\ x^2 + 5 = 2x \end{array}\right.$$

Heraf faae vi efter den §. 43 forklarede Fremgangsmaade: $x^2 - 2x = -5$

og $x^2 - 2x + 1 = -5 + 1 = -4$

fremdeles $x - 1 = \sqrt{-4}$

$$x = 1 \pm \sqrt{-4}.$$

Da Roden af -4 er en umuelig Størrelse, saa vil denne for x fundne Værdie allene tilkiendegive,

at

at intet saadant Tal findes som har den anførte Egenskab, og at Opløsningen af denne Opgave er aldeles umuelig.

§. 45.

4de Opgave. Af to Tals givne Summa 15 og deres Produkt 44 at finde Tallene selv.

Vi have tilforn opløst dette Problem ved at søge Tallenes Difference uden at der fremkom nogen ureen qvadratisk Ligning. Nu ville vi umiddelbar søge Tallene selv. Kalde vi det ene Tal x, saa er det andet $15 - x$, og vi have i Følge Betingelsen følgende Grundligning:

$$x(15 - x) = 44$$

$$15x - x^2 = 44$$

(§. 21 og 43) $x^2 - 15x = -44$

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \frac{225}{4} - 44$$

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \frac{225 - 176}{4}$$

$$x - \frac{15}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{49}{4}}$$

$$x = \frac{15}{2} \pm \frac{7}{2} = \left\{\begin{array}{l} 11 \\ 4 \end{array}\right.$$

Sætte vi med almindelige Tegn Summen $= s$

og

og Produktet $= p$, saa faae vi

$$x\,(s - x) = p$$
$$sx - x^2 = p$$
$$x^2 - sx = -p$$
$$x^2 - sx + \tfrac{1}{4}s^2 = \tfrac{1}{4}s^2 - p$$
$$x - \tfrac{1}{2}s = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 - p}$$
$$x = \tfrac{1}{2}s \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 - p}$$

Anm. Dette Udtryk for x, sammenlignet med §. 35, viser, at to Tals hele Difference er saa stör som Qvadratroden af Fierdeparten af Summens Qvadrat mindre end Produktet o: $\tfrac{1}{2}d = \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 - p}$.

§. 46.

5te Opgave. En blev spurgt, hvormange Penge han havde; han svarede: naar Antallet af mine Rigsdalere qvadreres og multipliceres med 5 og fra dette Produkt subtraheres det Firedobbelte af Rigsdalernes Antal, bliver endnu 105 Rdlr. tilbage. Hvor mange Rigsdaler havde han?

Efter Betingelserne bliver Grundligningen

$$5x^2 - 4x = 105$$
$$x^2 - \tfrac{4}{5}x = 21$$
$$x^2 - \tfrac{4}{5}x + \tfrac{4}{25} = 21 + \tfrac{4}{25}$$
$$x^2 - \tfrac{4}{5}x + \tfrac{4}{25} = \frac{525 + 4}{25} = \frac{529}{25}$$

$$x - \tfrac{2}{5} = \sqrt{\tfrac{539}{25}}$$
$$x = \tfrac{2}{5} \pm \tfrac{23}{5} = \begin{cases} +5 \\ -\tfrac{21}{5} \end{cases}$$

§. 47.

6te Opgave. At dele et givet Tal a i to saadanne Dele, at Delenes Produkt forholder sig til Summen af deres Qvadrater som $m : n$.

Lad den ene søgte Deel være x, saa er den anden $a - x$, og vi have Proportionen:

$$(a - x)x : x^2 + (a - x)^2 = m : n$$
$$ax - x^2 : x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = m : n$$

deraf Grundligningen

$$nax - nx^2 = mx^2 + a^2m - 2amx + mx^2$$

ordnet

$$2mx^2 + nx^2 = 2amx - anx = a^2m$$
$$(2m + n)x^2 - (2am - an)x = a^2m$$
$$x^2 - \left(\frac{2m + n}{2m + n}\right)ax = \frac{a^2m}{2m + n}$$
$$x^2 - ax = \frac{a^2m}{2m + n}$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m + n}$$
$$x - \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m + n}}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m \mp n}}$$

Sæt til Ex. $a = 60$; $m = 2$; $n = 5$, saa findes $x = 30 \pm \sqrt{900 + \frac{7200}{9}} = \sqrt{900 - 800}$

$$x = 30 \pm \sqrt{100} = \begin{cases} 40 \\ 20 \end{cases}$$

§. 48.

7de Opgave. To Bønder A og B udsaaede i alt 24 Tønder Byg; A siger til B: naar enhver udsaaet Tønde giver mig saamange Tønder, som du har saaet, da høster jeg 135 Tønder. Hvormange Tønder har A og hvormange har B saaet?

Lad A have saaet x Tønder, og følgelig B $24 - x$; vi have altsaa efter den anførte Betingelse Grundligningen

$$(24 - x)x = 135$$
$$24x - x^2 = 135$$

ordnet (§. 43) $x^2 - 24x = -135$

det manglende Led

(§. 44) lægges til $12^2 = 12^2$

$$x^2 - 24x + 144 = 144 - 135 = 9$$
$$x - 12 = \pm\sqrt{9}$$

$x =$

$$x = 12 \pm 3 = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$$

A har altsaa saaet enten 15 eller 9 Tønder; i første Tilfælde har B saaet 9 og i sidste 15.

§. 49.

8de Opgave. At finde to Tal, hvis Product er 160 og deres Qvadraters Forskiel 156.

Lad os kalde det ene Tal x, det andet y, og de bekiendte Størrelser $160 = a$ og $156 = b$.

Vi have da $xy = a$

og $x^2 - y^2 = b$.

Anvende vi nu Combinations-Methoden (§. 32),

saa finde vi $x = \frac{a}{y}$

af den første Ligning $x^2 = \frac{a^2}{y^2}$

af den anden $x^2 = y^2 + b$

deraf $y^2 + b = \frac{a^2}{y^2}$

$$y^4 + by^2 = a^2$$
$$(\tfrac{1}{2}b)^2 = (\tfrac{1}{2}b)^2$$
$$y^4 + by^2 + \tfrac{1}{4}b^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$y^2 + \tfrac{1}{2}b = \pm\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$
$$y^2 = -\tfrac{1}{2}b \pm\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$y =$

$$y = \sqrt{-\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2}}$$

Indsættes nu de givne Værdier for a og b, saa have vi $y = \sqrt{-78 \pm \sqrt{25600 + 6084}}$

$$y = \sqrt{-78 \pm \sqrt{31684}}$$

$$y = \sqrt{-78 \pm 178}$$

$$y = 10.$$

Vi havde $x = \frac{a}{y} = \frac{160}{10} = 16.$

Anm. Ved dette Problems Opløsning fik vi en høiere Ligning $y^4 + by^2 = a^2$; men ved at sammenligne Udtrykket $y^4 + by^2$ med den almindelige Form for Qvadrattallet af en binomisk Rod $(a + b)$ $a^2 + 2ab + b^2$ sees let, at dette Udtryk er et ufuldkomment Qvadrattal af en Rod, hvis første Led er y^2 og det andet Led $\frac{1}{2}b$. Dette giortes til et fuldkomment Qvadrattal (§. 46) ved at lægge $\frac{1}{4}b^2$ til paa begge Sider; Roden blev derpaa udtrukket, og i Stedet for den tilsyneladende høiere Ligning fik vi en reen qvadratisk Ligning, der let opløstes.

Paa samme Maade kunde alle høiere Ligninger, hvor den ubekiendte Størrelse forekommer i to forskiellige Potenser saaledes, at dens høieste Exponent er just det dobbelte af den laveste eller som ere af denne Form $x^{2m} \pm ax^m = b$, reduceres til rene qvadratiske Ligninger. Til Øvelse i at opløse saadanne Æqvationer vil jeg endnu anføre et Par Exempler.

§. 50.

96'e Opgave. At finde to Tal, hvis Produkt er 16 og hvis Cubers Difference er 504.

Tallene være det større x, det mindre y, saa er $xy = 16$

$$x^3 - y^3 = 504.$$

Af den første Æqvation findes $x = \frac{16}{y}$ og $x^3 = \frac{4096}{y^3}$; denne Værdie substitueret i den anden Ligning (§. 32) faae vi

$$\frac{4096}{y^3} - y^3 = 504$$

deraf $4096 - y^6 = 504y^3$

ordnet $y^6 + 504y^3 = 4096$

tillagt $(252)^2 = (252)^2$

$$y^6 + 504y^3 + 63504 = 67600$$

$$y^3 + 252 = \pm\sqrt{67600}$$

$$y^3 = -252 \pm 260 = \begin{cases} +8 \\ -512 \end{cases}$$

$$y = \sqrt[3]{\begin{matrix} +8 \\ -512 \end{matrix}} = \begin{cases} +2 \\ -8 \end{cases}$$

Vi havde $x = \frac{16}{y}$, altsaa $= \frac{16}{-8}$ v. $\frac{16}{2}$

følgelig $x = \begin{cases} -2 \\ +8 \end{cases}$

§. 51.

10de Opgave. Naar der gives to Tals Produkt $= a$ og deres Qvadraters Sum $= b$, da at finde Tallene selv.

Det større Tal være x, det mindre y. Vi have da efter Betingelsen

$$xy = a$$
$$x^2 + y^2 = b$$

i den første Ligning $x = \frac{a}{y}$ og ved Substitution

$$\left(\frac{a}{y}\right)^2 + y^2 = b$$
$$\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$$
$$a^2 + y^4 = by^2$$
$$y^4 - by^2 = -a^2,$$

som er den (§. 49) anførte Form, der udfyldes til et fuldkomment Qvadrattal ved paa begge Sider at tillægge $(\frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}b)^2$,

vi faae da $y^4 - by^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - a^2$

og $y^2 - \frac{1}{2}b = \pm\sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}$

$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a^2}}$$

følgelig $x = \dfrac{a}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}}}$

Sætte

Sætte vi $a = 24$; $b = 52$

saa er $y = \pm\sqrt{26 \pm \sqrt{676 - 576}}$

$$y = \pm\sqrt{26 \pm \sqrt{100}}$$
$$y = \pm\sqrt{36} \text{ eller } \pm\sqrt{16}$$
$$y = \pm\begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$
$$x = \frac{24}{\pm 6} \text{ eller } \frac{24}{\pm 4} = \pm\begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

IV. Om ubestemte Problemer, i hvilke de ubekiendte Størrelser skal udtrykkes ved hele bekræftende Tal.

§. 52.

Et Problem kaldes ubestemt, naar det indeholder flere ubekiendte Størrelser end der af dets Betingelser kan udledes Ligninger; og et saadant Problem kan da modtage utallige Opløsninger. For Ex. At finde to Tal, som samlede udgiøre 20.

Her findes to ubekiendte Størrelser x og y, men kun een Grundligning, nemlig

$$x + y = 20$$
$$x = 20 - y$$

Man

Man antager i dette Tilfælde en vilkaarlig Værdie for den ene ubekiendte, som her $y = 1$, og vi faae da $x = 12 - 1 = 11$.
Antages $y = 2$, findes $x = 10$, og saaledes naar $y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, findes $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. Saaledes have vi nu for dette Problem elleve Opløsninger; flere ere ikke muelige, naar de ubekiendte to Tal skal være hele og bekræftende. Ere derimod enten begge disse Betingelser eller og kun een af dem udeladte, da bliver Opløsningernes Antal uendeligt.

Anm. Udførlig at forklare den egne Opløsnings-Methode og de analytiske Kunstgreb, som bruges for at finde Værdierne af de ubekiendte Størrelser i ubestemte Problemer, hvor det er bestemt, at de søgte Størrelser skal være hele og positive Tal, er her efter min Plan ikke Sted til; kun for at give et Begreb derom vil jeg anføre et Par Exempler og derved vise de vigtigste Regler. Udførligt og med megen Tydelighed findes disse Problemers Opløsning udviklet i **Kahr's Veiledning i Algebra.** Kiøbenh. 1802.

§. 53.

1ste Opgave. **En Myntmester har tre Slags Sølv, 15-, 11- og 9lødigt; deraf skal han forfærdige 48 Lod 13lødig Sølv. Hvor mange Lod skal han tage af hver Slags?**

Lad

Lad ham af første Slags tage x, af andet y og af tredie z Lod, saa kan kun udledes to Ligninger, nemlig

1) $x + y + z = 48$

2) $15x + 11y + 9z = 48 \times 13 = 624$

da der er tre ubekiendte og kun to Ligninger, er Problemet ubestemt (§. 52).
Ved Subtractions-Methoden (§. 32), naar Ligningen 1) multipliceres med 9 og subtraheres fra 2,

findes $9x + 9y + 9z = 432$

og 3) $6x + 2y = 192$

deraf 4) $y = 96 - 3x$.

For x antages nu en vilkaarlig Værdie; men skal saavel x som y og z blive hele og bekræftende Tal, da er 24 det mindste og 32 det høieste Tal man kan antage for x; thi sættes $x = 23$, bliver, efter Ligning 4), $y = 27$, som er imod Ligningen 1), og saaledes ved enhver ringere Værdie for x; sættes derimod $x = 33$, bliver y, efter Ligningen 4), $= -3$ imod Betingelsen. Følgende Værdier kan altsaa finde Sted for x, y, z, hvorved alle Betingelser opfyldes.

$x =$	24 --	25 --	26 --	27 --	28 --	29 --	30 --	31 --	32
$y =$	24 --	21 --	18 --	15 --	12 --	9 --	6 --	3 --	0
$z =$	0 --	2 --	4 --	6 --	8 --	10 --	12 --	14 --	16.

§. 54.

§. 54.

2den Opgave. En Kiøbmand skylder til en anden 100 Rdlr; han vil afdrage denne Gield ved at levere tvende Slags Klæde. Alen af det første Slags koster 7 Rdlr. og af det andet 9 Rdlr. Hvor mange Alen skal han levere af hver Slags?

Efter Betingelsen er Grundligningen

$7x + 9y = 100$, deraf

$y = \frac{100 - 7x}{9}$, og naar Divisionen med 9 giøres virkeligt $y = 11 \frac{-7x + 1}{9}$

Skal nu y være et heelt Tal, maae $\frac{-7x + 1}{9}$ ogsaa være et heelt Tal; man sætte det $= - A$, og have da $- A = \frac{-7x + 1}{9}$ og $x = \frac{9A + 1}{7}$ $= A + \frac{2A + 1}{7}$ (A). Skal x være et heelt Tal, maae $\frac{2A + 1}{7}$ ogsaa være et andet heelt Tal; man sætte nu $\frac{2A + 1}{7} = B$, saa er $A = \frac{7B - 1}{2} = 3B + \frac{B - 1}{2}$ (B). Fremdeles

deles sætter man $\frac{B - 1}{2}$ (der ogsaa maae være et heelt Tal) $= C$: og $B = 2C + 1$. Denne Værdie substitueres i Ligningen B, saa er $A = 2C + 3$; denne Værdie indsættes i Ligningen A, og vi faae $x = 9C + 4$. Skal nu x og y blive bekræftende og hele Tal, saa gives for C kun to Værdier 0 og 1, da

i første Tilfælde $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$

i andet $\begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \end{cases}$ som er de to eeneste Opløsninger, Opgaven kan modtage; thi antages C nægtende, bliver x ogsaa nægtende imod Betingelsen; antages den $= 2$, bliver $x = 22$ og $y = - 6$, som ogsaa er imod det antagne.

Anm. At fremsætte flere Exempler paa ubestemte Problemer enten af dette Slags, eller med qvadratiske Ligninger, troer jeg efter min Plan ikke passende; kun de Ligninger, hvor den ubekiendte Størrelse forekommer som Exponent, og som ikke uden ved Logarithmer kan opløses, skal, naar Logarithmernes Theorie er fremsat, kortelig vedrøres.

V.

V. Videre Udførelse af Læren om geometriske Forhold og Proportioner.

(See Arithmet. §. 64-77.)

§. 55.

Ere fire Størrelser geometrisk proportionale $a : b = c : d$, saa forholder ogsaa

1) Summen eller Differencen af de eenstaaende Lede sig, som et foregaaende Leed til et efterfølgende ɔ: $a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$.

Beviis. Efter Betingelse er $a \times d = b \times c$ (Arithm. §. 71), følgelig $a \times d + c \times d = b \times c + c \times d$ ɔ: $(a + c)\, d = (b + d)\, c$, følgelig (Arithm. §. 71. Till. 2) $a + c : b + d = c : d = a : b$.

Anm. For Differencen føres Beviset paa samme Maade, som for Summen.

2) Summen eller Differencen af de to første og de to sidste Leed, som de to eenstaaende (homologe) Leed ɔ: $a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$.

Beviis Efter Betingelsen er $a \times d = b \times c$, følgelig $a \times d + b \times d = b \times c + b \times d$ ɔ: $(a + b)d = (c + d)b$, altsaa (Arithm. §. 71 Till. 2) $a + b : c + d = b : d = a : c$.

§. 56.

Ere i to Proportioner Exponenterne lige store, saa faaer man en rigtig Proportion, naar Ledene efter Ordenen adderes til eller subtraheres fra hinanden.

Ex. Er $a : ma = b : mb$

$c : mc = d : md$

saa er $a + c : ma + mc = b + d : mb + md$

og $a - c : ma - mc = b - d : mb - md$

Beviis. I enhver af de givne Proportioner antages $m = m$, som er Exponenten; men den fundne Proportion kan udtrykkes saaledes:

$$a + c : m(a + c) = (b + d) : m(b + d).$$

Exponenterne er ogsaa her $m = m$, og saaledes Proportionen rigtig.

Till. Er $a : b = c : d$

$e : f = c : d$

$g : h = c : d$

saa er $a + e + g : b + f + h = c : d$; thi (§. 56) $a + e : b + f = 2c : 2d = c : d$

og $g : h = c : d$

følgelig $a + e + g : b + f + h = 2c : 2d = c : d$.

§. 57.

§. 57.

Vil man angive en Størrelses Forhold til en anden, f. Ex. en Ducats til en Rigsort, saa kan man enten giøre det ligefrem (med eet), eller man angiver først Ducatens Forhold til en Rigsdaler, og derpaa Rigsdalerens Forhold til en Rigsort. Saaledes Ducat : Rigsdaler = 1 : 2

Rigsdaler : Rigsort = 1 : 4

Altsaa Ducat : Rigsort = 1 : 8.

Man siger da, at Forholdet mellem Ducaten og Rigsorten er sammensat af Forholdet mellem Ducaten og Rigsdaleren, og Forholdet mellem Rigsdaleren og Rigsorten, eller af Forholdene 1 : 2 og 1 : 4.

Exponenten i det sammensatte Forhold bliver altid Produktet af Exponenterne i de enkelte Forholde.

$$\text{Ex.} \quad 24 \overset{8}{:} 3 = \left\{ \begin{array}{l} 8 \overset{4}{:} 2 \\ 3 \overset{2}{:} 1\tfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

hvor Exponenten i Forholdet $24 : 3$ er Produktet af Exponenterne i Forholdene $8 : 2$ og $3 : 1\frac{1}{2}$. Skriftlig udtrykkes det som det nylig anførte eller og saaledes: $24 : 3 = (8 : 2) + (3 : 1\frac{1}{2})$.

Et

Et sammensat Forhold (ratio composita) kan undertiden være sammensat af tre, fire, og flere Forhold.

Er et Forhold mellem to Størrelser sammensat af to andre lige store Forhold, da siges disse Størrelsers Forhold at være dobbelt saa høit (ratio duplicata) som ethvert af de enkelte.

Ex. $36 : 4$ er i et dobbelt saa høit Forhold som $6 : 2$ og $216 : 8$ i et tregange saa høit Forhold (ratio triplicata).

Till. 1. Qvadrattal ere i et dobbelt og Kubiktal i et tredobbelt Forhold af deres Rødder; Qvadratrødder derimod i et halvt saa høit (ratio subduplicata) og Kubikrødder i et trediepart saa høit (subtriplicata) Forhold som deres Qvadrat- og Kubiktal.

Till. 2. Ophøies derfor alle fire Ledene i en geometrisk Proportion til den samme Potens, eller udtrækkes af dem alle den samme Rod, saa ere disse Potenser og Rødder ogsaa proportionale.

Ex. Er $a : b = c : d$

saa er $a^n : b^n = c^n : d^n$

thi Forholdet $a^n : b^n$ er $n$gange saa høit som Forholdet $a : b$, og ligeledes $c^n : d^n$ $n$gange saa høit som $c : d$.

Paa

Paa samme Maade indsees, at $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Till. 3. Forholdet mellem to Produkter er sammensat af Forholdet mellem deres Faktorer.

Ex. Er $mp : nq = a : c$

saa er $(m : n) + (p : q) = a : c$.

VI. Om arithmetiske Progressioner eller Tal-Rækker.

§. 58.

En fortsat sammenhængende arithmetisk Proportion (Arithmet. §. 65) kaldes en arithmetisk Progression (progresſio arithmetica); den er voxende eller aftagende, eftersom Ledene tage til eller af.

Ex. paa en voxende: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

aftagende: 17, 14, 11, 8, 5, 2, 1.

Anm. Vore almindelige Tal i deres naturlige Orden udgiøre ligeledes en arithmetisk Tal-Række: 1, 2, 3, 4 2c.

Till. Kalde vi i en arithmetisk Progression det første Leed a, Ledenes Antal n, det sidste Leed

Leed u, og Ledenes Forskiel (som og kaldes Forholdsnavn) d, saa er den almindelige Form for en arithmetisk Progression følgende:

$$\overset{1}{a} - \overset{2}{a + d}.\ \overset{3}{a + 2d}.\ \overset{4}{a + 3d}.\ \overset{5}{a + 4d}. - - - \overset{n}{u}$$

Anm. De overskrevne Tal kaldes Angivere (indices), og tilkiendegive Ledenes Tal i Rækken. Lægges nu Mærke til disse Angivere, saa sees, at det andet Leed er $a + d$, det tredie Leed $a + 2d$, og saaledes ethvert Leed i Rækken at bestaae af det første Leed a og Differencen taget saa mange Gange som Ledenes Antal mindre end een. F. Ex.: Det femte Leed at være $= a + 4d$, og følgelig det sidste eller n Leed $u = a + (n - 1)d$. En af n Leed bestaaende Række kunde altsaa saaledes udtrykkes:

$$\overset{1}{a} - \overset{2}{a + d} - \overset{3}{a + 2d} - \overset{n-2}{a + (n-3)d},\ \overset{n-1}{a + (n-2)d},\ \overset{n}{a + (n-1)d}$$

§. 59.

Læresætn. I enhver arithmetisk Tal-Række er Summen af de to yderste Lede $a + u$ ligestor med Summen af ethvert Par Leed i Rækken, der staae begge ligelangt fra de yderste, og, i Tilfælde at Ledenes Antal er ulige, ligestor med det Dobbelte af det midterste Leed.

Beviis. De givne Leed i Rækken være P og Q, deres Afstand, nemlig P fra første Leed og Q fra sidste Leed, være r, saa er efter den almindelige Form (§. 58) $P = a + (r - 1)d$ og $Q =$

$u -$

$u - (r-1)d$, følgelig $P + Q = a + (r-1)d + u - (r-1)d = a + u$. Ved ét ulige Antal Leed lad M være det mellemste, som da er ligelangt fra det første og sidste, og følgelig $M + M = a + (r-1)d + u - (r-1)d = a + u$.

§. 60.

1ste Opgave. At finde Summen af en arithmetisk Progression.

Opløsn. Summen af det første og sidste Leed multipliceres med Ledenes halve Antal; kaldes Summen S, saa er efter de anførte Benævnelser $S = (a+u) . \frac{1}{2}n = \frac{n(a+u)}{2}$.

Beviis. Er n Ledenes Antal, saa er $\frac{1}{2}n$ Antallet af Parrene, men ethvert Par er liig $a + u$ (§. 59), altsaa $\frac{1}{2}n$ Par liig $\frac{1}{2}n(a+u)$.

Anderledes. Er ethvert Par Leed $= a + u$, saa kan man forestille sig ethvert enkelt Leed $= \frac{a+u}{2}$, følgelig, naar den er n Leed, den hele Summa $= n \times \frac{a+u}{2} = \frac{1}{2}n(a+u)$.

Till. 1. Indsætte vi i Udtrykket $s = \frac{1}{2}n(a+u)$ Værdie for $u = a + (n-1)d$ (§. 58), saa faae vi

vi $s = \frac{1}{2}n(a + a + (n-1)d) = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$.

Till. 2. Disse for u og s fundne Værdier ere Grundligninger i den hele Lære om arithmetiske Progressioner; da nu stedse to ubekiendte Størrelser ved to Ligninger kan bestemmes, saa behøves af disse fem Størrelser a, d, n, u og s kun de tre at være givne, da de to manglende ved de anførte Ligninger kan findes. Lad f. Ex. s, a og u være givne; man skal finde n og d.

Vi have $s = \frac{1}{2}n(a+u)$

deraf $\frac{2s}{a+u} = n$

og da $u = a + (n-1)d$, saa er

$\frac{u-a}{n-1} = d$; indsættes heri den for n fundne Værdie, faae vi $d = \frac{u-a}{\frac{2s}{a+u} - 1} = \frac{u^2 - a^2}{2s - (a+u)}$.

Anm. Da af fem Størrelser tre kan tages paa ti forskiellige Maader, saa finder her ti forskiellige Opgaver Sted, hvori stedse to Størrelser bestemmes ved de tre andre. Man erholder ved disse ti Opløsninger tyve forskiellige Værdier, som for enhver af

 de

de fem Størrelser giver fire forskiellige Bestemmelser. Disse tyve Former, hvis Udvikling overlades til det mundtlige Foredrag, kunde i en Tabel saaledes ordnes:

givne Størrelser.	søgte	Formerne.
$u \quad d \quad n$		$a = u + d - dn = u - (n-1)d.$
$u \quad n \quad s$	a	$a = \frac{2s}{n} - u$
$u \quad d \quad s$		$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{u^2 + ud + \frac{1}{4}d^2 - 2ds}$
$d \quad n \quad s$		$a = \frac{2s + dn - dn^2}{2n}$
$a \quad u \quad n$		$d = \frac{u-a}{n-1}$
$a \quad n \quad s$	d	$d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$
$a \quad u \quad s$		$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - (a+u)}$
$u \quad n \quad s$		$d = \frac{2un - 2s}{n^2 - n}$
$a \quad u \quad d$		$n = 1 + \frac{u-a}{d}$
$a \quad u \quad s$	n	$n = \frac{2s}{a+u}$
$a \quad d \quad s$		$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}}$
$u \quad d \quad s$		$n = \frac{1}{2} + \frac{u}{d} + \sqrt{\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}}$

givne Størrelser.	søgte	Formerne.
$a \quad d \quad n$		$u = a + (n-1)d$
$a \quad n \quad s$	u	$u = \frac{2s}{n} - a$
$a \quad d \quad s$		$u = -\frac{1}{2}d + \sqrt{2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}$
$d \quad n \quad s$		$u = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$
$a \quad u \quad n$		$s = \frac{1}{2}n\,(a+u) = \frac{an + un}{2}$
$a \quad d \quad n$		$s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$
$a \quad d \quad u$		$s = \frac{a+u}{2} + \frac{u^2 - a^2}{2d}$
$u \quad d \quad n$		$s = \frac{2un + dn - dn^3}{2}$

§. 61.

2den Opgave. 1) At finde Summen af alle naturlige Tal fra 1 til 100.

Her er $a = 1$. $u = n = 100$, følgelig efter Formen $s = (a+u) \times \frac{1}{2}n$. $s = (1+n) \times \frac{1}{2}n = \frac{n \times (n+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050.$

2) At finde det $n$te ulige Tal fra 1 og Summen af de n første ulige Tal.

 Her

Her er $a = 1$, $d = 2$, følgelig $u = 1 + (n - 1)2 = 2n - 1$. og $s = (1 + 2n - 1) \times \frac{1}{2}n = 2n \times \frac{1}{2}n = n^2$. ɔ: Qvadrat-Tallet af Ledenes Antal, hvoraf Rækken af ulige Tal fra 1 bestod, er liig Summen af den hele Række. Saaledes f. Ex. $1 + 3 = 2^2$. $1 + 3 + 5 = 3^2$.

Till. 1. Vi fandt det $n$te ulige Tal $u = 2n - 1$; altsaa det $(n + 1)$te $= 2n + 1$ (da Differencen i en Række af de naturlig ulige Tal er 2) og det $(n - 1)$te $= 2n - 3$.

Till. 2. Er Qvadratet af et heelt Tal n^2 givet, da findes Qvadratet af det næstfølgende hele Tal $(n + 1)^2$, naar man til det givne Qvadrat n^2 adderer det næstfølgende ulige Tal; thi Differencen imellem n^2 og $(n + 1)^2$ er $2n + 1$ (Arithm. §. 55. Till. 3), men det $(n + 1)$te ulige Tal er (Till. 1) $= 2n + 1$.

Ex. Lad være $n = 112$, saa er det $n$te ulige Tal $2 \times 112 + 1 = 225$. Veed man nu, at $112^2 = 12544$, saa er $113^2 = 12544 + 225 = 12769$.

§. 62.

3die Opgave. For at grave en Brønd accorderes saaledes, at den første Fods Dybde beta-

betales med 3 Mk., den anden med 6 Mk., den tredie med 9 Mk. o. s. v. Naar nu Brønden bliver 32 Fod dyb, hvad koster den da at grave?

Opløsn. Her er $a = d = 3$, $n = 32$; altsaa efter den anførte Form $u = a + (n - 1)a = na$, følgelig $s = (a + na) \times \frac{1}{2}n = (n + 1)a \times \frac{1}{2}n = 33 \times 3 \times 16$ Mark $= 1584$ Mark $= 264$ Rdlr., som er hvad den kostede at grave.

§. 63.

4de Opgave. Imellem to givne Størrelser a og u at finde et vist Antal $= m$ af arithmetiske Mellemproportional-Tal.

Opløsn. Det første og sidste Leed af en Række ere her givne a og u, Ledenes Antal ligeledes, thi det bliver her $m + 2$ (de søgte Tal ere $= m$ og dertil lægges det første og sidste Leed); altsaa er $n = m + 2$. og $n - 1 = m + 1$; Ledenes Forskiel d er det som søges: denne findes efter Formen $d = \frac{u - a}{n - 1}$ (§. 61), naar i Stedet for $n - 1$ substitueres den derfor fundne Værdie $m + 1$, og vi faae $d = \frac{u - a}{m + 1}$.

Ex.

Ex. Imellem 5 og 59 søges sex arithmetiske Mellemproportional-Tal, saa er $a = 5$, $u = 59$, $m = 6$, og vi finde $d = \frac{59 - 5}{6 + 1} = \frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}$, og Progressionen bliver 5. $12\frac{5}{7}$. $20\frac{3}{7}$. $28\frac{1}{7}$. $35\frac{6}{7}$. $43\frac{4}{7}$. $51\frac{2}{7}$. 59.

VII. Om geometriske Progressioner og Tal-Rækker.

§. 64.

Forkl. En fortsat sammenhængende geometrisk Proportion (Arithmet. §. 70) kaldes en geometrisk Progression eller Tal-Række; den kan være voxende eller aftagende, eftersom det følgende Leed er et Produkt eller Qvotient af det næstforegaaende og Forholds-Exponenten, (det Tal, som angiver hvormange Gange det efterfølgende Leed er større eller mindre end det foregaaende).

Till. 1. Kaldes det første Leed i saadan en Række a, det sidste Leed u, Forholds-Exponenten m, da er den almindelige Form for en saadan Række følgende:

$$\overset{1}{a}\quad \overset{2}{am}\quad \overset{3}{am^2}\quad \overset{4}{am^3}\quad \overset{5}{am^4}\quad \overset{6}{am^5} \;—\; \overset{n-2}{m^{n-3}}\quad \overset{n-1}{m^{n-2}}\quad \overset{n}{m^{n-1}}$$

Anm. De ovenskrevne Tal kaldes Angivere, og vise Ledenes Antal.

Till. 2. Ved at betragte den anførte Form, sees, at hvert Leed i Rækken er et Produkt af det første Leed og Forholdsnavnet ophøiet til en Potens, hvis Exponent er Ledets Tal mindre end een; saaledes er fierde Leed am^3, femte Leed am^4, og det almindelige eller $n$te Leed $u = am^{n-1}$.

Till. 3. Ere N og R to virkelige Leed i en saadan Række, hvis Afstand fra hinanden er r, saa er $R = Nm^{r-1}$, og følgelig $N = \frac{R}{m^{r-1}}$.

Till. 4. Fire Leed i en saadan Række, P. Q. N. R., hvoraf de to og to have samme Afstand r fra hinanden, udgiøre en geometrisk Proportion; thi (Till. 3) $Q = Pm^{r-1}$ og $R = Nm^{r-1}$, følgelig $P : Pm^{r-1} = N : Nm^{r-1}$, som er en rigtig geometrisk Proportion (Arithm. §. 70).

Till. 5. Er m et heelt Tal eller en uegentlig Brøk, saa faaer man en voxende Række; er m derimod en egentlig Brøk, faaer man en aftagende.

Till.

Till. 6. Divideres ethvert Leed i en saadan Række med det første Leed eller a, faaer man stedse en Række, hvis første Leed er 1 og de øvrige Leed Potenser af Forholdsnavnet m. Den anførte Form a, am, am^2, am^3, am^4 forvandles da til følgende: $1, m, m^2, m^3, m^4$ rc.

§. 65.

Læresætn. I enhver geometrisk Progression er Produktet af første og sidste Leed au ligestort med Produktet af tvende fra hine ligelangt værende Lede $P\ Q$, og, naar Ledenes Antal i Rækken er ulige, ligestort med Qvadratet af det midterste Leed M.

Beviis. Formedelst den lige Afstand er $a : P = Q : u$ (§. 64 Till. 4.) og $a : M = M : u$, følgelig $au = PQ$ og $au = M^2$ (Arithm. §. 71 og Till.)

Anderledes. Den lige Afstand af P og Q fra a og u være r, saa er $P = a \times m^{r-1}$ og $Q = \frac{u}{m^{r-1}}$ (§. 64 Till. 3), følgelig $P \times Q$ $= a \times m^{r-1} \times \frac{u}{m^{r-1}} = au$.

§. 66.

1ste Opgave. At finde Summen (som vi vil kalde s) af alle Ledene i en geometrisk Progression.

Opløsn. Efter den anførte Form (§. 64 Till. 1) er $s = a + am + am^2 + am^3 + am^{n-2} + am^{n-1}$; multipliceres nu begge Sider af Ligningen med m, saa er $ms = am + am^2 + am^3 + am^{n-2} + am^{n-1} + am^n$; subtraheres den øverste Ligning fra den nederste, faae vi $ms - s = am^n - a$

og $(m - 1)s = am^n - a$,

$$s = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{(m^n - 1)a}{m - 1}$$

Nu er $u = am^{n-1}$

og $mu = am^n$

indsættes nu i Værdien for s, mu for am^n, saa er $s = \frac{mu - a}{m - 1}$.

Till. 1. Efter denne Form findes Summen saavel af voxende som aftagende Rækker. Lad være f. Ex. $a = 1$, $m = 3$ og $u = 729$, og altsaa Rækken voxende, saa er $s = \frac{3 \times 729 - 1}{3 - 1}$ $= \frac{2187 - 1}{2} = \frac{2186}{2} = 1093$. Var derimod $a = 729$, $u = 1$, $m = \frac{1}{3}$, og saaledes Rækken aftagende, saa er $s = \frac{\frac{1}{3} \times 1 - 729}{\frac{1}{3} - 1}$ $= -\frac{2168}{3} : -\frac{2}{3} = \frac{-2186}{-2} = +1093$.

Till. 2. Til Øvelse og Anvendelse af den fundne Form for Summen af en geometrisk Talrække kan søges Antallet af de Korn, som Opfinderen af Skakspillet siges at have udbedet sig til Belønning, nemlig eet Korn for det første Tavl paa Skakbrettet, 2 for det andet, 4 for det tredie o. s. fr. for ethvert følgende af de 64 Tavl dobbelt saa mange som for det foregaaende; her er $a = 1$, $m = 2$, $u = 64$, og $s = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1}$ $= 2^{64} - 1$, som, naar det enten opsøges i Tavler eller beregnes ved Logarithmer (hvorom i det Følgende), udgiør den uhyre Summe 18446744073709551616.

§. 67.

Ligesom ved den arithmetiske Progression (§. 60) har man ogsaa her fem Størrelser og to Fundamental-Ligninger, nemlig $u = am^{n-1}$ og $s = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{mu - a}{m - 1}$, altsaa kan ogsaa her fore-

forekomme ti Opgaver af tre givne at finde to ubekiendte Størrelser. Saaledes findes af Ligningen $u = am^{n-1}$, at $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ og af Ligningen $s = \frac{(m^n - 1)a}{m - 1}$, findes $a = \frac{(m - 1)s}{m^n - 1}$; men disse for m og a fundne Værdier vilde ved de hidtil lærte Regnings-Methoder meget vanskelig kunde udtrykkes i Tal, naar n var et nogenlunde høit Tal.

Till. Ligesom i den arithmetiske Progression findes ogsaa her 20 Former for de fem Størrelser, der, ligesom de for den arithmetiske, kunde ordnes i en Tavle; men da nogle af dem ere meget sammensatte, og nogle ikke kan findes uden ved høiere Ligninger (hvorom jeg ikke troer det passende her at handle), vil jeg ikke hensætte dem, men kun ved et Par Exempler vise deres Anvendelse.

§. 68.

2den Opgave. En indsætter i Tallotteriet 8 Skill., og foretager sig at fordobble sin Indsats i ti Trækninger; nu sporges: hvor meget maae han indsætte tiende Gang?

Opløsn. Her er $a = 8$, $m = 2$, og $n = 10$; efter Formen $u = am^{n-1}$ findes her hans

hans sidste Indsats eller $u = 8 \times 2^9 = 8 \times 512 = 4096$ Sk. $= 42$ Rd. 64 Sk.

§. 69.

3die Opgave. Imellem tvende givne Størrelser a og u at finde et vist Antal $= r$ Mellemproportional-Tal i en geometrisk Række.

Opløsn. Man søger først Forholdsnavnet i Rækken efter den (§. 67) anførte Form $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; thi a og u ere givne, n er ogsaa bekiendt, thi Ledene i hele Rækken maae blive de søgte Mellemproportional-Tal tilligemed det første og sidste (ɔ: naar der søgtes tre Mellemproportional-Tal, var $n = 5$), og saaledes $n = r + 2$, følgelig $n - 1 = r + 1$, altsaa $m = \sqrt[r+1]{\frac{u}{a}}$.

Lad f. Ex. 1) forlanges at finde tre Mellemproportional-Tal imellem 10 og 160. Her er $a = 10$, $u = 160$, og $r = 3$; man finder da $m = \sqrt[4]{\frac{160}{10}}$, $m = 2$, og Progressionen at være 10 — 20 — 40 — 80 — 160.

2) Imellem 1 og 2 at indsætte elleve Leed saaledes, at alle tretten Leed udgiøre en geometrisk Progression. Her er $a = 1$, $u = 2$ og $r = 11$; altsaa $m = \sqrt[12]{\frac{2}{1}} = \sqrt[12]{2}$. (Denne Rod kan ikke findes uden ved Logarithmer, hvorom nu strax skal handles.)

§. 70.

4de Opgave. At finde Summen af en uendelig Rekke, hvis Forholdsnavn er en egentlig Brøk.

Opløsn. Lad det første Leed være a, Forholdsnavnet den egentlige Brøk $\frac{b}{c}$, saa er

$$1)\; s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots \text{uendelig}$$

multipliceret med $\frac{b}{c}$ paa begge Sider har vi

$$2)\; \frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} \ldots \text{naar}$$

2den Ligning subtraheret fra første findes

$$s - \frac{b}{c}s = \left(1 - \frac{b}{c}\right) s = a$$

$$s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c - b}$$

Till. 1. Vare Tegnene i Rækken afvexlende, saa bliver $1)\; s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} \ldots$ uendel.

2)

2) $\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4}$ .... uendelig.

1 og 2 adderes, saa er $\left(1 + \frac{b}{c}\right) s = a$ og

$s = \frac{ac}{c + b}$.

Anm. De her for uendelige Rækker fundne Summer kunde ogsaa udledes af den almindelige Form $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ (§. 66), kun at der bemærkes, at $mu = 0$ (da det sidste Leed er en uendelig lille Størrelse), og at, naar Ledene i Rækken have afvexlende Tegn, man anseer det som to Rækker og søger Summen af den positive og negative Række hver for sig, og derpaa subtraherer dem fra hinanden.

Till. 2. Sættes det første Leed i en saadan Række = Forholdsnavnet = $\frac{1}{x}$, da er $s =$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ .... uendelig og $s =$ $\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x - 1}$, og for afvexlende Tegn $s =$ $\frac{1}{x + 1}$ (Till. 1).

Anm. Sammenlignes dette Udtryk med den almindelige Form, saa sees, at det skulde hedde for enhver Progression $s = (1 - u)\,\frac{1}{x - 1}$. Men ved en uendelig Række bliver u en uendelig lille Størrelse $= 0$; Coefficienten $1 - 0$ bliver saaledes $= 1$, og bortfalder.

Till. 3. Paa Grund heraf lade Talrækker af denne Art sig let summere; f. Ex. denne Række: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$. Her er $x = 2$, $u = \frac{1}{32}$, og $s = (1 - \frac{1}{32}) \times \frac{1}{2 - 1} =$ $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

Exempel paa en uendelig Række med afvexlende Tegn: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ... uendel. Her er (Till. 1) $s = \frac{ac}{c + b} = \frac{1 \times 2}{2 + 1} = \frac{2}{3}$.

Efter Formen $s = \frac{1}{x - 1}$ er Summen af den uendelige Række $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ꝛc. i det uendelige; saaledes $= s = \frac{1}{2 - 1} = 1$. For Rækken $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$ ... uendelig er $s = \frac{1}{3 - 1}$ $= \frac{1}{2}$.

(Sammenlign Arithm. §. 46 om de ved Division frembragte Tal-Rækker.)

§. 71.

§. 71.

4de Opgave. At finde Summen af en uendelig aftagende Række, hvis Forholdsnavn $m = x + 1$ og hvis første Leed $a = \frac{x}{x+1}$ og som vilde udtrykkes saaledes: $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^4} + \ldots \ldots \frac{x}{(x+1)^\infty}$

Opløsn. For at finde denne Summa, inverteres eller omsættes Rækken saaledes: $\frac{x}{(x+1)^\infty} \cdots + \frac{x}{(x+1)^4} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)}$ Vi faae da en tiltagende geometrisk Række, hvis Forholdsnavn $m = (x+1)$ det første Leed $a = \frac{x}{(x+1)^\infty} = 0$, det sidste Leed $u = \frac{x}{x+1}$; altsaa efter Formen $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ er her $s = \left(\frac{x}{x+1} \times (x+1) - \frac{x}{(x+1)^\infty}\right) : (x+1)$ $- 1 = \frac{x - 0}{x} = \frac{x}{x} = 1$. Sætte vi til Exempel $x = 1$, saa er Rækken $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ uendel. $= 1$.

Till. Ved at forvandle en simpel Brøk til en Decimal-Brøk (Arithm. §. 48) har man erholdt følgende Udtryk: 0,575757.... i det Uendelige. Hvad har vel den forvandlede Brøk været?

Da 0,575757 er $= \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{1000000} + \ldots \frac{57}{\infty}$, saa er den (§. 71) $= \frac{57}{100^\infty} \ldots + \frac{57}{100^3} + \frac{57}{100^2} + \frac{57}{100}$, og følgelig Brøken $s = (\frac{57}{100} \times 100 - \frac{57}{100^\infty}) : 99 = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$.

VIII. Om Logarithmer og Logarithme-Tavler, samt deres Brug.

§. 72.

Forkl. Naar een og samme Rodstørrelse a, der maae være positiv og større end 1, ophøiet efterhaanden til forskiellige Potenser, hvis Exponenter ere m, n, o, p, q &c., frembringer Størrelserne b, c, d, e, f &c., saa kaldes Exponenterne m, n, o, p, q, r, Logarithmer til Størrelserne b, c, d, e, f. Saaledes at naar $a^m = b$, $a^n = c$, $a^o = d$ o. s. fr., saa kaldes m Logarithmen til b, n Logarithmen til c, o Logarithmen til d, hvilket skriftlig udtrykkes saaledes: $m = \text{Log.}\, b$, $n = \text{Log.}\, c$ o. s. f. F. Ex. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$; altsaa $1 = \text{Log.}\, 2$, $2 = \text{Log.}\, 4$, $3 = \text{Log.}\, 8$ o. s. fr.

Anm. Man finder forskiellige Forklaringer paa Logarithmer efter det forskiellige Sted i Systemet, hvor Logarithmernes Theorie afhandles. Saaledes findes i Hr. Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger Logarithmerne afhandlet i Arithmetiken, uden foregaaende Kundskab om Bogstav-Regning, efter den Forklaring, at en arithmetisk og geometrisk sammenhængende Proportion, Leed for Leed skreven under eller ved Siden af hinanden, udgiøre et Logarithme-System, da Tallene i den arithmetiske Række bliver Logarithmer for de modstaaende i den geometriske Række. Uagtet Logarithmerne efter denne Theorie let og fattelig lade sig forklare, har jeg dog hellere vildet holde mig til den her anførte mere almindelige Forklaring, som jeg paa dette Sted ikke troer at kunne være utydelig.

Till. 1. Opsætte vi en saadan Række, hvor samme Rod udtrykt i Tal er ophøiet til forskiellige Potenser, saa sees, at Exponenterne blive Tallene i deres naturlige Orden, der altid udgiøre en arithmetisk Tal-Række (§. 58 Arithm.), da de frembragte Tal derimod udgiøre en geometrisk Tal-Række (§. 10 Till. 2); f. Ex. $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ er

Potenserne	1,	2,	4,	8,	16
Exponenterne ere	0	1	2	3	4

Og saaledes ere ogsaa efter den anførte Forklaring Logarithmerne Leed i en arithmetisk Progression, og Tallene, hvis Logarithmer de ere, ere Leed i en geometrisk Progression.

Till. 2. Betragte vi de i forrige Tillæg anførte Rækker, saa da $1:2 = 2:4$ og $2:4 = 4:8$, saa er $1:4 = 2\,(1:2)$ og $1:8 = 3\,(1:2)$ o. s. v. (§. 57). Logarithmerne (her Tallene 2, 3) kan saaledes ogsaa siges at tilkiendegive hvormange Gange ethvert Forhold i Rækken er høiere end Grundforholdet, som her er $1:2$ (hvortil ellers kan vælges ethvert vilkaarligt Forhold).

Navnet Logarithme (λογων αριθμος ɔ: Forholdenes Antal) viser ogsaa denne Logarithmernes første oprindelige Bemærkelse.

Till. 3. Den Størrelse, der, ophøiet til forskiellige Potenser efter anførte Forklaring, giver Tallene, hvortil Potens-Exponenterne ere Logarithmer, kaldes **Grundtallet** for Logarithme-Systemet; dens Logarithme er alletider $= 1$ og Logarithmen for $1 = 0$, da ethvert Tal i o Potens er $= 1$. I det anførte Exempel er 2 Grundtallet, dets Logarithme $= 1$.

§. 73.

Hvad enten vi nu vil ansee Logarithmerne som Exponenter efter den givne Forklaring (§. 71) eller som Forholds-Tal (§. 72. Till. 2), saa sees let, at ethvert Grundtal eller Grundforhold lader sig i det Uendelige saavel formeere som formindske; saaledes i det anførte Exempel, hvor 2 er Grundtallet, formeeres det saaledes: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ꝛc.
$= 1, 2, 4, 8, 16$ ꝛc.
formindskes: $2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$ ꝛc.
(§. 10. Till. 3) $= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ꝛc.
Her er Log. $1 = 0$, Log. $\frac{1}{2} = -1$, Log. $\frac{1}{4} = -2$ ꝛc.
Opsættes nu disse fundne Logarithmer og de dertil svarende Tal saaledes: $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32$
Logarithm. $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,$

da

da sees, at den øverste Rad er en geometrisk Række, hvis Forholdsnavn er 2, og den underste eller Logarithmerne en arithmetisk, hvis Forholdsnavn er 1. (§. 72. Till. 1).

Till. 1. Ved at søge Mellemproportional-Tal mellem ethvert Par af disse Tal saavel i den geometriske som arithmetiske Række (Arithm. §. 73) og igien mellem de fundne i det Uendelige, maae der findes uendelig mange Mellemproportional-Tal imellem 1 og 2, 2 og 4, 4 og 8 ꝛc., og iblandt disse maae og findes alle de hele Tal, der falde imellem ethvert Par af disse Tal, eller i det mindste Tal der nærmer sig saa meget til dem, at Feilen er umærkelig; hvorved altsaa Logarithmerne til alle disse Mellem-Tal lade sig finde.

Till. 2. Har man for et antaget Grundforhold fundet Logarithmerne for Tallene i deres naturlige Orden, saa kaldes det Hele et Logarithme-System, hvoraf der følgelig gives utallige, da man kan antage utallige Grundtal eller Grundforhold.

§. 74.

Læresætn. Logarithmen til ethvert Produkt er Summen af Faktorernes Logarithmer, og Logarithmen til enhver Qvotient Forskiellen imellem Divisors og Dividendens Logarithmer.

Beviis

Beviis 1) Lad i et Logarithme-System, hvis Grundtal er a, være $p = a^m$ og $q = a^n$, følgelig (§. 72) $m =$ Log. p og $n =$ Log. q, saa er $pq = a^m \times a^n = a^{m+n}$ (§. 9), altsaa $m + n =$ Log. pq; men nu var $m =$ Log. p og $n =$ Log. q, følgelig Log. p + Log. q = Log. pq. For Ex. da $2 \times 8 = 16$, saa er og Log. 2 + Log. 8 = Log. (2×8), nemlig $1 + 3$ = Log. 16 = 4.

2) Ligeledes er $\frac{p}{q} = a^m : a^n = a^{m-n}$ (§. 10) og Log. $\frac{p}{q}$ = Log. $a^{m-n} = m - n$ = Log. p — Log. q. For Ex. Log. $\frac{8}{2}$ = Log. 8 — Log. $2 = 3 - 1 = 2$ = Log. 4.

Till. 1. Denne Sætning er ogsaa rigtig, naar et Produkt bestaaer af flere end to Factorer; saaledes er Log. pqr = Log. p + Log. q + Log. r; thi sæt $qr = x$ Log. pqr = Log. px = Log. p + Log. x; nu er Log. x = Log. qr = Log. q + Log. r, altsaa Log. pqr = Log. p + Log. q + Log. r.

Till. 2. Ere ved Divisionen m og n positive Tal og $m > n$ (Dividendens Logarithme større end Divisors), saa er og $(m - n)$ et positiv Tal og $\frac{p}{q} > 1$. Logarithmer for alle Tal, der ere større end Eenheden, ere derfor positive. (§. 72).

Till. 3. Er $m = n$, saa er $(m - n) = 0$ og $\frac{p}{q} = 1$, da $a^{m-n} = \frac{p}{q} = a^0 = 1$ (§. 10 Till. 2). Logarithmen for Eenheden er derfor alletider = 0.

Till. 4. Er $m < n$; saa er $(m - n)$ en nægtende Størrelse og $\frac{p}{q}$ en ægte Brøk. Logarithmerne til egentlige Brøk ere derfor altid nægtende Størrelser. (§. 73).

§. 75.

Læresætn. Logarithmen til enhver Potens findes, naar Rodens Logarithme multipliceres med Potensens Exponent; og Logarithmen til enhver Rod, naar Potensens Logarithme divideres med Rod-Exponenten.

Beviis 1. Er $a^m = p$, saa er ogsaa $(a^m)^x = p^x$, altsaa (§. 11) $= a^{m \times x} = p^x$, følgelig $x \times m$ = Log. p^x; men nu er m = Log. p (§. 72), og saaledes $x \times$ Log. p = Log. p^x. F. Ex. Log. $2^3 = 3 \times$ Log. $2 = 3 \times 1 = 3$.

2. Da $a^m = p$, saa er ogsaa $\sqrt[x]{a^m} = \sqrt[x]{p}$

og (§. 13) $a^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{p}$; følgelig $\frac{m}{x} =$ Log. $\sqrt[x]{p}$ (§. 72), men $m =$ Log. p, altsaa $\frac{\text{Log. } p}{x} =$ Log. $\sqrt[x]{p}$. F. Ex. efter det anførte System er Logarithmen til Cubikroden af 8 $= \frac{\text{Log. } 8}{3} = \frac{3}{3} = 1$, som er Logarithmen til 2, der er Cubikroden af 8.

Till. 1. Lad et givet Tal $N = n^y$, saa er Log. $N = y$ Log. n (§. 75) og $\frac{\text{Log. } N}{\text{Log. } n} = y$ (§. 21) d. e. man finder Exponenten y til en Potens naar man dividerer Logarithmen til Potensen N med Logarithmen til Roden n.

Till. 2. Ved Hielp af Logarithmer bliver, i Følge de nu forklarede Sætninger, al Multiplication og Division med Tal forvandlet til Addition og Subtraction af deres Logarithmer. Logarithmer ere saaledes for store Regninger overmaade beqvemme, men aldeles uundværlige, naar, som i 1ste Tillæg, et Tal N gives ligestort med et andet Tal n, ophøiet til en ubekiendt Værdighed, hvis Exponent er y, og Exponenten y søges.

§. 76.

For at beregne Logarithmer til alle naturlige Tal, behøver man allene at sætte: $a^m = 2$, $a^n = 3$, $a^o = 5$, $a^p = 7$, $a^q = 11$, og $a^u = 199991$, og derefter beregne Værdien for Størrelserne m, n, o, p ꝛc., saa faaer man paa eengang Logarithmerne for alle Primtal fra 1 til 100000; og af disse Logarithmer kan Logarithmerne for alle de øvrige mellemliggende Tal findes ved blot Addition, da alle sammensatte Tal ere ved Multiplication frembragte af de enkelte (Prim) Tal. Indfører man disse Logarithmer i en ordentlig Tavle og sætter ligeover for de dertil hørende Tal, saa faaer man en meget beqvem Tavle, ved hvis Hielp man kan erholde den (§. 75 Till. 2) omtalte Fordeel. Disse Værdier for m, n, o ꝛc. kunde ved uendelige Tal-Rækker lettest beregnes; men denne Maades Forklaring ligger udenfor denne Bogs bestemte Grændse, og nævnes derfor kun.

Anm. De paa denne Maade søgte Logarithmer (naar Modellen, det er, det almindelige Tal, hvormed de fundne Logarithmer multipliceres, antages $= 1$) kaldes naturlige eller hyperboliske (Anledningen til det sidste Navn kan her endnu ikke forklares) Logarithmer, og som ikke maa confunderes med de saa kaldte gemene eller Briggiske Logarithmer, hvis Model er $= 0{,}4342945$, og hvorom nu skal handles.

§. 77.

Forkl. Af de mulige Logarithme-Systemer kaldes det, hvis Grundtal er 10 eller hvis Grundforhold er 1 : 10, det gemene eller Briggiske Logarithme-System.

Dette System blev strax efter at Logarithmerne af Johan Naiper vare opfundne beregnet af Henrich Brigg og fuldført af Adrian Blacq. For dette System, som bestaaer af disse to Rækker

$$1, \quad 10, \quad 100, \quad 1000, \quad 10000$$

$$\text{eller } 10^0, \quad 10^1, \quad 10^2, \quad 10^3, \quad 10^4$$

$$\text{Logarithm. } 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

har Brigg beregnet Logarithmer til alle Primtal paa den (§. 73) forklarede Maade, nemlig ved at søge utallige Mellemproportional-Tal saavel i den geometriske som arithmetiske Tal-Række; paa den i §. 76 nævnte Methode kunde de derimod lettere findes; ligesom og de naturlige Logarithmer nu meget let kan forandres til Briggiske, og omvendt, efter det (§. 76 Arithm.) anførte.

Till. 1. Det Briggiske System har, foruden de forhen anførte, den særdeles Fordeel, at man af Cifrenes Antal i det Tal, hvis Logarithme man søger, strax kan vide Logarithmens hele Tal (eller det første Tal i Logarithmen), som derfor og kaldes Logarithmens Kiendetal eller Caracteristik (de øvrige eller Brøkerne kaldes Mantissen), og altid indeholder saa mange Eenheder som Tallet har Cifre mindre end een. Saaledes er Logarithmen for alle Tal fra 1 til 10 0 og en Brøk, for Tallene fra 1 til 100 (der bestaae af to Cifre) 1 og en Brøk o. s. fr. Omvendt kan man af Logarithmens Kiendetal vide hvor mange Cifre det til Logarithmen svarende Tal har.

Till. 2. At beregne et fuldstændigt Logarithme-System vilde, efter det Forklarede, vel ikke være noget vanskeligt, men dog et overmaade vidtløftigt Arbeide; men vi kunde nu spare os denne Umage. Vore Forgiængere have heri sørget for os, og paa den ommeldte besværlige Maade længst fuldført dette Arbeide. Vi behøve kun at giøre os Brugen ret bekiendt af de allerede tilværende logarithmiske Tavler.

Till. 3. Disse Tavler indeholde dog allene kun Logarithmer for hele bekræftende Tal; thi Logarithmer for Brøk (som ere nægtende) kan vides af Logarithmerne for hele Tal (som siden skal vises), og for nægtende Tal gives aldeles ingen Logarithmer, da ingen Potens af det antagne bekræftende Grundtal (§. 11) kan blive nægtende, men bliver stedse bekræftende (§. 18).

Till. 4. Ved mindre Tavler forstaaes almindelig saadanne, som kun indeholde Logarithmer for de de naturlige Tal fra 1 til 10000 eller mindre, og hvor Logarithmerne kun have syv eller endog færre Decimalbrøk; ved større Tavler derimod deels saadanne, som gaae i det ringeste til 100000, og deels saadanne, hvor Logarithmerne have flere end syv Decimalsteder.

Anm. 1. Af de mindre gives der en stor Mængde, som, uagtet de mange Gange ere oplagte, dog ere fulde af Trykfeil og slet ikke beqvemt indrettede, med hvilke man møisommelig have hiulpet sig, da de store af Sherwin og Gardener ere for dyre til at enhver Mathematiker kan anskaffe sig dem; først for tyve Aar omtrent have større og beqvemt indrettede, i Tydskland udgivne Tavler været at erholde for en taalelig Priis. Det er meget at tilraade enhver Begynder, strax at betiene sig af en af disse velindrettede Tavler, hvorved de logarithmiske Regninger kan føres med Nøiagtighed.

Anm. 2. De vigtigste af disse ere følgende:

I) Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln von Johan Carl Schulze. Berlin 1778. 8vo. (Koster i Tydskland 4 Rdlr.)

II) Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, von **Georg Vega**. 2te Auflage. Leipzig 1794. 4to. (Priis 5 Rdlr.)

III) Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, von **Georg Vega**. Leipzig 1793. (Koster i Tydskland 1 Rdlr. 4 Gr.)

Af disse fortiener No. II at anbefales til alle som agte at giøre Fremgang i Mathematik, naar de ikke allerede eie No. I; hvem denne er for kostbar, skaffe sig i det mindste No. III.

IV) Ved afdøde Prof. Geuss's Omsorg have vi ogsaa en Samling af Logarithme-Tabeller her udgivne, som kan faaes i den Gyldendalske Boghandling for 3 Mk.

At besørge en dansk Udgave af Logarithmer efter de Vegalske Tavler med de muelige Forbedringer, er et Ønske, jeg længe har næret, naar Tid forundes mig og en Forlægger kunde dertil findes.

Anm. 3. Indretningen i alle disse Tavler som og i de i Engelland og Frankerig hidtil udkomne er i Hovedsagen den samme; saa at den her følgende Underretning om Brugen af trigonometriske Tavler og deres Indretning, hvorved jeg især har Hensyn til og citerer Vega's logarithmiske Haandbog, kan let anvendes paa alle de andre.

§. 78.

Efter det Forklarede (§. 72) er Logarithmen for ethvert givet Tal N, multipliceret med 10 i en vis Potens, Log.$(N \times 10^n) =$ Log. $N + n$ Log. 10; men da i det Briggiske System Log. $10 = 1$ (§. 77), saa er efter samme Log.$(N \times 10^n) =$ Log. $N + n$, og findes altsaa, naar man til Kiendetallet i Logarithmen for N adderer Exponenten n uden at forandre Mantissen.

N være

N være for Ex. 3 og $n = 2$, saa er Log. $(3 \times 10^2) =$ Log. $3 + 2$ Log. $10 =$ Log. $3 + 2$, men Log. $3 = 0{,}4771212$ og Log. $300 = 2{,}4771212$. Ligeledes er Log.$(N : 10^n) =$ Log. N — n Log. 10; og da Log $10 = 1$, saa er Log.$(N : 10^n) =$ Log. $N - n$, og findes naar man fra Kiendetallet i Logarithmer for N subtraherer Exponenten n uden at forandre Mantissen. N være f. Ex. $= 874$ og $n = 2$, saa er Log. $(874 : 10^2) =$ Log. $874 - 2$ Log. $10 =$ Log. $874 - 2 =$; nu er Log. $874 = 2{,}9415114$, altsaa Log. $\frac{874}{100} = 0{,}9415114$.

Anm. I det sidst anførte Tilfælde er det i Regninger særdeles beqvemt, blot at tilkiendegive Subtractionen ved Tegn uden virkelig at foretage den, saaledes at man paa høire Side af Log. N sætter Exponenten n med Tegnet (—) foran; som Log. $\frac{874}{100} = 2{,}9415114 - 2$. En saadan Logarithme bestaaer altsaa af to Dele, nemlig en bekræftende (den egentlige Logarithme) og den tilføiede benægtende Deel $-n$, der skal subtraheres fra Kiendetallet (i den bekræftende Deel), og viser, at det Tal, der svarer til den bekræftende Deel, skal divideres med den $n$te Potens af 10.

Till. Denne anførte Egenskab giør, at det Briggiske System, med Hensyn til vores decadiske Tal-System, forskaffer i Regningen en overmaade stor Lettelse, da man af Logarithmen for ethvert givet Tal kan, blot ved at formeere eller formindske Kiendetallet, finde Logarithmer til alle Producter eller Qvotienter, der kan frembringes ved at multiplicere eller dividere dette Tal med Potenser af 10. For Ex. er Log. $874 = 2{,}9415114$

saa er Log. $8740 = 3{,}9415114$

Log. $87400 = 4{,}9415114$

og Log. $\frac{874}{10} =$ Log. $87{,}4 = 2{,}9415114 - 1$

$= 1{,}9415114$

Log. $\frac{874}{100} =$ Log. $8{,}74 = 0{,}9415114$

Log. $0{,}874 = 0{,}9415114 - 1$.

§. 79.

1ste Opgave. **At finde i Tavlerne Logarithmer til ethvert givet Tal, der ikke bestaaer af mere end fem Cifre.**

Opløsn. 1. Bestaaer det givne Tal af eet, to eller 3 Cifre, saa finder man det i den §. 77 under No. III nævnte Vegas Haandbog fra Side 2 til 5 i den Spalte, som for oven er betegnet med N (numerus) og dets Logarithme lige for i den næste Spalte, som er betegnet for oven med Ordet Log. Saaledes findes Side 5 Log. 874 $= 2{,}9415114$.

2. Bestaaer det givne Tal af fire Cifre, saa finder man det paa en af de følgende Sider i den første

første for oven med N betegnede Spalte, og dets Logarithme, men uden Kiendetal, lige for i den næste Spalte, som for oven er betegnet med O, saaledes at de tre første Cifre af Mantissen, saa længe de blive uforandrede, ikke igientages, men maa tilføies.

Saaledes findes f. Ex. S. 12 Tallet 1345 lige for Mantissen 1287223 uden Kiendetal; men efter det (§. 78) Anførte veed man, at Kiendetallet er 3, og altsaa Log. 1345 = 3,1287223

og (§. 78) Log. 134500 = 5,1287223

Log. 13,45 = 3,1287223 — 2

= 1,1287223

3. Har det givne Tal fem Cifre, saa søger man paa samme Maade de fire første i Spalten betegnet med N, og lige for i Spalten O de tre første Cifre af Mantissen, og i en af de andre Spalter, som for oven er betegnet med det Ciffer, der er det femte i det givne Tal, de fire øvrige Cifre af Mantissen.

Lad f. Ex. det givne Tal være 13457; man finder Side 12 i første Spalte de fire første Cifre 1345, lige for i den med o betegnede Spalte de tre første Cifre af Mantissen 128; og da det femte Ciffer i det givne Tal er 7, saa findes de fire øvrige Cifre af Mantissen lige for i den for oven med 7 betegnede Spalte at være 9483. Altsaa er

Log. 13457 = 4,1289483; thi at Kiendetallet skal være 4, sees af Cifrenes Antal i det givne Tal (§. 77 Till. 1.)

Af denne fundne Logarithme kan uden videre Opsøgning findes

Log. 1345700 = 6,1289483 (§. 74)

Log. 13,457 = 1,1289483

Anm. Ere de paa den nu forklarede Maade fundne sidste fire Cifre af Mantissen foran betegnede med (*), saa skal til de tre første Cifre i Mantissen af den med o betegnede Spalte ikke tages de foregaaende, men de efterfølgende; hvilket endog uden dette Tegn kunde kiendes derpaa, at disse fire sidste Cifre ere mindre end de næst foregaaende. Saaledes er for Tallet 13336, som findes S. 12, Mantissen ikke 1240256, men 1250256.

§. 80.

Læresætn. Uden mærkelig Feil kan man antage, at Differencen af Logarithmer voxer ligesom Differencen af de dertil svarende Tal, og altsaa at Delene af Logarithme-Differencen for to Tal, hvoraf det ene er een Eenhed høiere end det andet, forholde sig til hinanden ligesom Delene af denne Eenhed.

Beviis. Da Logarithme-Differencerne for de nær efter hinanden følgende Tal (hvilke Differencer

 fra

fra Side 6 findes angivne i den sidste Spalte, der for oven er betegnet PP og for neden diff.) hele Sider igiennem, især ved høie Tal, blive uforandrede de samme, saa kan man uden mærkelig Feil antage, at disse Logarithme-Differencer ere proportionerede med disse Tals Difference; det er, at Logarithmen for et Tal for enhver Eenhed, hvormed Tallet forøges, voxer saa meget som den enkelte Difference er imellem to paa hinanden følgende Logarithmer; og at følgelig ogsaa (ja end mere vist) et Tals Logarithme for hver Tiendedeel eller Hundrededeel, hvormed Tallet forøges, stedse bør forøges med en Tiende- eller Hundrededeel af Logarithme-Differencen.

For Ex. Side 61. For Tallet 37785 og det næstfølgende er Logarithme-Differencen 115 (hvilken man finder naar man subtraherer allene de sidste Cifre af Logarithmen for 37785 fra de sidste Tal af den næstfølgende Logarithme). Forøges nu Tallet 37785 med Decimalbrøken 0,47, da maae Logarithmen forøges med ligesaa mange Dele af Differencen der findes ved denne Regning:

$1 : 0{,}47 = 115 : x$, og bliver, $x = 54$, som er det der skal lægges til Log. 37785 for at finde Log. 37785,47.

For at spare denne Regning findes i den sidste Spalte under enhver Logarithme-Differents de logarithmiske Proportional-Dele, der svare til alle Tiendedele, og følgelig divideret med 10 ogsaa til alle Hundrededele. Saaledes i det anførte Exempel:

$$\begin{array}{rl} (\text{for } 0{,}4)\ PP = & 46 \\ \text{og } (\text{for } 0{,}07)\ PP = & 8{,}1 \\ \hline \text{følgelig } (\text{for } 0{,}47) \text{ som tilforn} = & 54 \end{array}$$

Nu er Log. 37785 $= 4{,}5773149$,
altsaa Log. 37785,47 $= 4{,}5773203$.

Anm. Var den tilkommende Brøk 0,07, saa tage man (for 0,0) $PP = 00$
(for 0,07) $PP = 8{,}1$

Till. Lad n være et af fem Cifre bestaaende heelt Tal og a en Decimalbrøk der skal adderes dertil, saa at $n + a$ falder imellem n og $n + 1$. Antages nu Log. $(n + 1)$ — Log. $n = D$ og Log. $(n + a)$ — Log. $n = d$, saa er den nylig forklarede Proportion $1 : a = D : d$, hvorved den logarithmiske Proportionaldeel d findes, der maae adderes til Log. n for at finde Log. $(n + a)$.

Af samme Proportio $D : d = 1 : a$ findes ogsaa $\dfrac{d}{D} = a$ ɔ: den Decimalbrøk som maae adderes til n for at finde Tallet der svarer til Log. $(n + a)$.

Saaledes i det nylig anførte Exempel var

Differencen imellem Log. 37285 og den næstfølgende = 115 og dens Difference fra en given Logarithme, der var større end den, men mindre end den følgende, = 54. Qvotienten $\frac{54}{115}$ = 0,47 er derfor den Decimalbrøk, der skal adderes til 37285.

Denne Regning spares, naar man Side 61 i den sidste Spalte ved Differencen 115 opsøger Proportionaldelen 46, som nærmer sig meest til 54. Det derved staaende Tal 4 giver Tiendedelene og det ved det tidobbelte af Resten (80) staaende Tal 7 Hundrededelene; og følgelig udgiøre begge Decimalbrøken 0,47 som tilforn.

§. 81.

2den Opgave. Ved Hielp af Tavlerne at finde Logarithmen til et givet Tal, der bestaaer af mere end fem Cifre.

Opløsn. 1. Bestaaer det givne Tal af sex eller syv Cifre, saa søger man (§. 79) Logarithmen for de fem første Cifre, og adderer dertil Proportionaldelene af Logarithme-Differencerne for det siette og syvende Ciffer, som findes i den sidste med *PP* betegnede Spalte (§. 80 Till.) og bestemmer Kiendetallet efter §. 77. Saaledes findes f. Ex. (§. 80)

(§. 80) Logar. 3778547 = 6,5773248

Log. 37785470 = 7,5773248

Log. 37,785470 = 1,5773248.

Anm. Hvis i den sidste med *PP* betegnede Spalte den tilhørende Logarithme-Differents ikke findes, maa man tage den næstforegaaende større.

2. Bestaaer det givne Tal af mere end syv Cifre, saa kan til at finde Logarithmen bruges de S. 186 og 187 anførte Logarithmer for Tallene til 101000 paa følgende Maader:

1) Bestaaer Tallet kun af otte Cifre og er saaledes, at de sex første Cifre udgiør et Tal der er mindre end 101000, saa finder man dets Logarithme efter første Opløsning. F. Ex.:

Log. 10030627 = 7,0013281.

2) Bestaaer Tallet af otte eller flere Cifre der ere af vilkaarlig Størrelse, saa bringer man det til første Tilfælde ved at dividere det med to eller flere af dets høieste Cifre, søger derpaa Logarithmen til Divisor og til Qvotienten og adderer dem sammen.

F. Ex. Der søges Logarithm. 290888209; dette Tal divideret med 29 giver Qvotienten 10030627, saa er Log. 10030627 = 7,0013281

Log. 29 = 1,4623980

Log. 290888209 = 8,4637261.

Anm.

Anm. Kan et givet, af mange Cifre bestaaende Tal oploses i Faktorer, da findes dets Logarithme ved at søge Faktorernes Logarithme og addere dem; hvilket ogsaa kan tiene til Prøve paa den forrige Methode.

§. 82.

3die Opgave. At finde Logarithmen til enhver Brøk eller Qvotient.

Opløsn. Man opsøger Logarithmen for Brøkens Tæller og Nævner (Dividend og Divisor), og (§. 74) subtraherer Nævnerens Logarithme fra Tællerens. Er Brøken uegentlig (Arithm. §. 74), har dette ingen Vanskelighed; men er den egentlig, og følgelig Nævneren større end Tælleren, kan man gaae frem paa to Maader:

1) Man subtraherer Tællerens Logarithme fra Nævnerens, og man faaer en nægtende Logarithme (§. 74. Till. 4.).

Til Ex. søges Log. $\frac{3}{4}$ og Log. 0,09436

Log. 3 = 0,4771213
Log. 4 = 0,6020600
Log. $\frac{3}{4}$ = —0,1249387
Log. 9436 = 3,9747879
Log. 100000 = 5,0000000
Log. 0,09436 = —1,0252121

2) Man forhøier Kiendetallet i Tællerens Logarithme (§. 74), saa at Nævnerens Logarithme kan subtraheres derfra. Saaledes ved de anførte Brøk:

Log. 3 = 1,4771213 — 1
Log. 4 = 0,6020600
Log. $\frac{3}{4}$ = 0,8750613 — 1

Den fundne Logarithme viser, at fra 0,8750613 skal subtraheres 1,0000000; giøres dette, faaes samme Logarithme som før, nemlig —0,1249387.

Ligeledes: Log. 9436 = 5,9747879 — 2
Log. 100000 = 5,0000000
Log. 0,09436 = 0,9747879 — 2

Forrettes her den tilkiendegivne Subtraction, faaes som før Log. 0,09436 = 1,0252121.

Anm. Logarithmen for enhver gemeen Brøk kan findes ved at forvandle den til en Decimalbrøk og søge dens Logarithme, da man blot søger Tællerens Logarithme og føier Kiendetallet i Nævnerens Logarithme (der efter det Briggiske System vides uden at søges) med Nægtelses-Tegn til ved høire Side. F. Ex. Log. $\frac{3}{4}$ = Log. 0,75 = 1,8750613. — 2. = 0,8750613 — 1. Faaer man ved at forvandle den simple Brøk til en Decimalbrøk alt for mange Decimalsieder, eller og Brøken ikke fuldkommen nøiagtig kan udtrykkes, saa er det bedre at beholde den simple Brøk. F. Ex. $\frac{13}{24}$ kan findes nøiagtig; men forvandles den til Decimalbrøk, faaer man 0,5416... i det uendelige.

Till.

Till. 1. Har en Decimalbrøk sit første betydende Ciffer i den første, anden, tredie, eller $n$te Plads efter Commaet (Nullerne ansees som ikke betydende og tiene blot til at fylde Pladsen), saa har dens Logarithme til positiv Kiendetal 0 og til nægtende 1, 2, 3 eller n, som angiver, at det Tal, hvortil den bekræftende Logarithme hører, skal divideres med 10^1, 10^2 eller almindelig med 10^n. Saledes findes (§. 80)

$$\text{Log. } 0{,}13457 = 0{,}1289483 - 1$$
$$\text{Log. } 0{,}01345 = 0{,}1287223 - 2$$
$$\text{Log. } 0{,}00874 = 0{,}9415114 - 3$$

Till. 2. Forlanges Logarithmen til et saa kaldet blandet Tal (et heelt Tal med en tilføiet Brøk), da forvandles det Hele til en uegentlig Brøk og Logarithmen søges til Tæller og Nævner paa den nu forklarede Maade, og den sidste subtraheres fra den første, saa vil Differencen være Logarithmen til det givne Tal (§. 74.)

F. Ex. $\text{Log. } 471\frac{5}{7} = \text{Log. } \frac{3302}{7} = \text{Log. } 3302 - \text{Log. } 7 = 3{,}5187771 - 0{,}8450980 = 2{,}6736791.$

Anm. Findes der ved Tallet en Decimalbrøk, saa søger man Logarithmen til det givne Tal, som om det bestod af lutter hele Tal (uden at lægge Mærke til Kommaet, der skiller Brøkerne fra de hele Tal), og giver den fundne Logarithme det Kiendetal som de for Stregen værende hele Tal fordre (77).

F. Ex. Naar der søges Logarithmen til 785,43, saa søger man i Tavlerne Log. 78543 som findes uden Kiendetal = 8951075, de for Stregen værende hele Tal 785 fordre Kiendetallet 2; altsaa er Log. 785,43 = 2,8951075. Aarsagen til denne Fremgangsmaade indsees let, thi $\text{Log. } 785{,}43 = \text{Log. } \frac{78543}{100} = \text{Log. } 78543 - \text{Log. } 100$; men Kiendetallet for den første Logarithme er 4, og til den anden Logarithme er Kiendetallet 2 uden Mantisse; følgelig er Differencen Kiendetallet 2 med den første Logarithmes Mantisse.

§. 83.

4de Opgave. At finde Logarithmen til en vis Potens eller Rod af en Brøk.

Opløsn. Man søger Logarithmen til den givne Brøk (§. 82) og multiplicerer den med Exponenten af den forlangte Potens, eller dividerer den med Exponenten til den forlangte Rod (§. 75). Dette har i Almindelighed ingen Vanskelighed; kun naar der forlanges Logarithmer for Roden af en egentlig Brøk, da man, for at kunde dividere med Rod-Exponenten, maae, ved at forøge baade Logarithmens bekræftende og nægtende Kiendetal, ind-

indrette den saaledes, at Rod-Exponenten kan gaae op i det negative Kiendetal.

F. Ex. Om der forlanges ved Logarithmer at finde den femte Rod af Brøken $\frac{3456}{5963}$, saa er

$$\begin{aligned} \text{Log. } 3456 &= 4{,}5385737 - 1 \\ \text{Log. } 5963 &= 3{,}7754648 \\ \hline \text{Log. } \tfrac{3456}{5963} &= 0{,}7631089 - 1 \end{aligned}$$

Denne Logarithme bringes, ved at forøge saavel det bekræftende som nægtende Kiendetal med 4, til at Rodexponenten, hvormed der skal divideres, kan gaae op i det nægtende Kiendetal; den faaer nemlig denne Form: Log. $\frac{3456}{5963} = 4{,}7631089 - 5$ og Log. $\sqrt[5]{\frac{3456}{5963}} = \frac{4{,}7631089 - 5}{5} =$ $0{,}9526218 - 1$.

§. 84.

Det decadiske Complement (complementum arithmeticum) til en given Logarithme kaldes det, som bliver tilovers, naar man subtraherer ethvert Tal i Logarithmen fra 10.

Eller naar n betyder et vilkaarligt Tal, saa er det decadiske Complement til dets Logarithme $=$ Log. 10^{10} — Log. n. For Ex. det decadiske Complement for Logarithmen til $n = 139{,}13$ er

$$\begin{aligned} \text{er} = \text{Log. } 10^{10} &= 10{,}0000000 \\ - \text{Log. } 139{,}13 &= 2{,}1434208 \\ \hline \text{Decadisk Complement} &= 7{,}8565791 \end{aligned}$$

hvor det sidste Ciffer 8 ikke subtraheres fra 10, men i det Sted fra 9, da man formedelst Mantissens Ufuldstændighed kan antage, at det sidste Ciffer kan formodes at være 9 i Stedet for 8.

Till. Bruges ved Regning den decadiske Opfyldning, maae man altid ved høire Side tilføie — 10.

§. 85.

5te Opgave. At finde Logarithmen til en Brøk af den Form $\frac{ac}{b}$.

Opløsn. 1. Man adderer Logarithmerne for Tællerens Faktorer og subtraherer derfra Nævnerens Logarithme. F. Ex. der forlanges Log. $\frac{144 \times 3576}{139{,}13}$.

$$\begin{aligned} \text{Log. } 3576 &= 3{,}5410798 \\ \text{Log. } 144 &= 2{,}1583625 \\ \hline \text{Log. } (3576 \times 144) &= 5{,}6994423 \\ \text{Log. } 139{,}13 &= 2{,}1434208 \\ \hline \text{Log. } \left(\frac{3576 \times 144}{139{,}13}\right) &= 3{,}5560215 \end{aligned}$$

Opl.

Opl. 2. Man adderer Faktorernes Logarithmer og den decadiske Opfyldning til Nævnerens Logarithme og den udkomne Sum tilføies — 10 paa høire Side (ɔ: dens Kiendetal formindskes ved at tage 10 derfra). Det anførte Exempel vilde da staae saaledes:

$$\text{Log } 3576 = 3{,}5410798$$
$$\text{Log. } 144 = 2{,}1583625$$
$$\text{decadisk Opf. til Log. } 139{,}13 = 7{,}8565791$$

$$\text{Log. } \frac{3576 \times 144}{139{,}13} = 13{,}5560214 - 10$$

$= 3{,}5560214$ som tilforn.

Bev. Log. a + Log. c — Log. b = (Log. a + Log. c — Log. b) + 10 — 10 = Log. a + Log. c + (10 — Log. b) — 10; men (10 — Log. b) er just den decadiske Opfyldning til Log. b (§. 84).

Till. Bliver a og b uforandrede, medens c tillægges mange forskiellige Værdier, da gives Brøken denne Form $\frac{a}{b} \times c$; og naar $a > b$, søges eengang for alle Log. a — Log. b, og denne bestandige Logarithme adderes til Log. c (efter den c hvergang tillagte Værdie) eller subtraheres derfra naar Brøkens Form var $\frac{b}{a} \times c$, og a dog var som før større end b.

Anm.

Anm. Det hidtil Anførte om Tavlernes Brug angik den første Hoved-Opgave: at finde Logarithmen for ethvert givet Tal; vi komme nu til den anden Hoved-Opgave: at finde hvad Tal der svarer til enhver given Logarithme.

§. 86.

6te Opgave. At finde Tallet der svarer til en given, i det Hele eller for en Deel positiv, Logarithme.

Opløsn. Man opsøger i Tavlerne den givne Logarithmes Mantisse uden at bekymre sig om Kiendetallet, mærker det derudfor staaende Tal, hvis decadiske Værd let efter den der givne Logarithmes Kiendetal bestemmes (§. 77). Den givne Logarithme være f. Ex. 4,5773194; man opsøger da fra S. 6 i Tavlerne den Side, paa hvilken man efter den for oven paa Siden ved Bogstavet L givne Anviisning finder de tre første Cifre af Mantissen i den med o betegnede Spalte. Saaledes i det anførte Exempel findes S. 61 577, men de fire sidste Cifre søges i denne eller een af de følgende Spalter; og man finder her i den med 5 betegnede Spalte de fire sidste Cifre (3194) af den anførte Mantisse; findes ikke disse fire sidste Cifre nøiagtig, da tages de der nærme sig meest dertil. Af den første med N be-

N betegnede og af denne (med 5 betegnede) Spalte tages de til Mantissen svarende Tal, som her er 37785.

Till. 1. Findes den givne Mantisse nøiagtig i Tavlerne, da er det fundne Tal nøiagtigt det søgte, og dets decadiske Værd behøves blot at bestemmes (§. 77).

Saaledes er 4,5773194 = Log. 37785
6,5773194 = Log. 3778500
2,5773194 = Log. 377,85
0,5773194 = Log. 3,7785
0,5773194 — 1 = Log. 0,37785
0,5773194 — 2 = Log. 0,037785.

Till. 2. Nærmer den fundne Mantisse 577,3194 (som vi vil kalde m) sig blot den givne 5773248 (som antages $= M$), saa gielder ogsaa det fundne Tal 37785; men da den givne Mantisse M var større end den fundne m, faaer Tallet endnu to Cifre, som findes paa følgende Maade:

Man subtraherer den fundne Mantisse m fra den i Tavlen næstfølgende høiere, og ligeledes fra den givne M, og lægger Mærke til den første Differents D, som i nærværende Exempel er = 115, og den anden d, som findes her = 54. Nu findes i den med PP betegnede Spalte ved Proportionaldelene 46 og 81 de to Tal 4 og 7, som endnu maae føies til det givne, da saaledes Tallet 3778547 svarer til den givne Mantisse 5773248. Den decadiske Værd af det fundne Tal bestemmes som i første Tilfælde (Till. 1).

Till. 3. Endnu maae mærkes:

1) Fandtes Logarithme-Differencen D af en Hændelse ikke i den med PP betegnede Spalte, saa tager man den næste mindre.

2) Var d mindre end den i sidste Spalte under D ved 1 staaende Proportionaldeel, saa er af de omtalte to Tal det første 0, men det andet det ved Proportionaldelen, som er $= 10d$ staaende Tal.

3) Var den givne Mantisse 5770090, saa indseer man let, hvorfor de fire sidste Cifre 0090 maa søges imellem de til de tre første 576 henhørende med (*) betegnede Cifre.

§. 87.

7de Opgave. At finde det Tal der svarer til en given nægtende Logarithme.

Opløsn. 1. Vil man finde det tilsvarende Tal i Decimalbrøk (at det maae være en Brøk, er klart), saa adderer man til den givne Logarithme, som kunde være f. Ex. —2,4226805, Logarithmen til 1000, 1 Mill. eller 1000 Mill., for Ex. den

den sidste, som er 9, og man faaer 6,5773194, og søger paa den (§. 86) forklarede Maade det tilsvarende Tal 3778547. Dette divideres med 1000,000000, og man faaer 0,003778547.

Beviis. Ved at addere den nægtende Logarithme til Logarithmen for 1000 Millioner, er det fundne Tal blevet tusind Millioner Gange større end det skulde; for altsaa at give det fundne Tal sin sande Værd, maae det divideres med 1000 Mill.

2. Vil man have en simpel Brøk, saa søger man det, til den givne Logarithme, positiv tagen, svarende Tal (§. 86) 264,6352, og sætter en Brøk, hvis Nævner er dette Tal og hvis Tæller er Eenheden. Altsaa $\frac{1}{264,6522} = \frac{10000}{2646552} = \frac{1250}{330819}$.

Beviis. Den givne negative Logarithme være $= -L$ og $L =$ Log. n; saa da L er antagen $=$ Log. n, saa er og $-L =$ Log. $-n$, altsaa ogsaa Log. $1 - L =$ Log. $1 -$ Log. n; men nu veed vi, at Log. $1 -$ Log. n er Log. $\frac{1}{n}$, altsaa Log. $1 - L =$ Log. $\frac{1}{n}$, men Log. $1 = 0$, følgelig $-L =$ Log. $\frac{1}{n}$; ɔ: det til Logarithmen $-L$ svarende Tal er $= \frac{1}{n}$, naar ellers Tallet n hører til Logarithmen L.

Saaledes finder man f. Ex., at til Logarithmen $-1,3262234$ svarer Tallet 0,04718, naar man til $-1,3262334$ adderer Logarithmen for 100000, som er 5; ɔ: naar man subtraherer 1,3262334 fra 5 (Arithm. §. 33) og til den da fundne positive Logarithme 3,6737666 opsøger det nærmest svarende Tal 4718, og dividerer det med 100000.

Anm. I Stedet for Logarithmen til 100000 kunde man adderet enhver anden positiv Logarithme, f. Ex. Log. 144 til den givne nægtende, og derpaa divideret det til frembragte positive Logarithmer svarende Tal med 144.

§. 88.

Uagtet der i den hele Mathematik forekomme idelige Leiligheder til at anvende Logarithmerne, saa har jeg dog troet det passende, her at anføre nogle særdeles Exempler paa deres Brug, for at give Begyndere Anledning til strax at udøve den her meddeelte Underretning, som og for at giøre Forskiellen imellem den gemene og Logarithme-Regningen mere bemærket.

1ste Opgave. At forvandle en simpel (gemeen) Brøk til en Decimalbrøk.

Oploesn. Den givne Brøk være $\frac{1}{7}$. Da Log. $\frac{1}{7} =$ Log. $1 -$ Log. $7 = -$ Log. 7, saa søger man i Tavlerne Log. 7, tager dens decadiske

Op-

Opfyldning 9,1549019 — 10 = 0,1549019; denne opsøgt giver Tallet 0,1428571 = $\frac{1}{7}$ (Arith. §. 45).

2den Opgave. En dansk Fod holder 139,13 Pariser Linier; hvormange Pariser Kubiktommer holder da en dansk Kubikfod?

Opløsn. 1 dansk Fod = $\frac{139,13}{12}$ Pariser Tommer; heraf søges Kubus saaledes (§. 75):

$$\text{Log. } 139,13 = 2,1434208$$
$$\text{Log. } 12 = 1,0791812$$
$$\text{Log. } \frac{139,13}{12} = 1,0642396$$

$3 \times \text{Log. } \frac{139,13}{12} = 3,1927188$, som, opsøgt efter den givne Anviisning, angiver Tallet 1558,507 som er det forlangte.

3die Opgave. Naar Forholdstallet imellem to Maal er givet, da at udtrykke det eene Maal ved det andet.

Opløsn. Sæt at det større forholder sig til det mindre som $a:b$. For Ex. Pariser og dansk Fodmaal 144 : 139,13, og m Eenheder af det større er lige med n Eenheder af det mindre; man skal, naar et af disse to Tal er givet, finde det andet.

andet. F. Ex. efter la Lande er en middel Grad paa Jordkloden = 57030 Toiser = 342180 Pariser Fod = m; hvor mange danske Fod er den da? eller hvad er n?

Da Forholdet $a:b$ bliver uforandret, saa regner man efter den Form $\frac{a}{b}c$ (§.85 Till.); vi finde da her Log. m + Log. $\frac{a}{b}$ = Log. n og Log. n — Log. $\frac{a}{b}$ = Log. m.

$$\text{Log. } \frac{a}{b} = \text{Log. } \frac{144}{139,13} = 0,0149417$$
$$\text{Log. } m = \text{Log. } 342180 = 5,5342546$$
$$\text{Log. } n = 5,5491963$$

som giver Tallet n = 354157 dansk Fod, $\frac{1}{15}$ deraf giver 23610 dansk Fod eller en geographisk Miil.

IX. De geometriske Talrækkers og Logarithmernes Anvendelse til at opløse forskiellige Regnings-Opgaver.

§. 89.

1ste Opgave. Hvor stor vil en vis Capital a være efter n Aar, naar Renten ved ethvert Aars Ende lægges dertil?

Opløsn. Renten af en vis Capital a kan altid ansees som et Produkt af Capitalen og en egentlig Brøk. Er f. Ex. Rentefoden (den lovmæssige Rente), som er 4 Procento (4 Rdlr. af Hundrede), saa er Renten for et Aar $\frac{1}{25}a$; og antage vi i Almindelighed, at det er Brøken $\frac{q}{r}$, hvormed Capitalen skal multipliceres for at finde Renten for eet Aar, saa er det almindelige Udtryk for Renten $\frac{q}{r}a$.

Og saaledes efter	Capital og Rente.	
1 Aar	$a + \frac{q}{r}\,a \quad =$	$\frac{r+q}{r}a$
2 Aar	$\frac{r+q}{r}a + \left(\frac{r+q}{a}\right) \times \frac{q}{r} =$	$\left(\frac{r+q}{r}\right)^2 a$
3 Aar	$\left(\frac{r+q}{r}\right)^2 a + \frac{q}{r}\left(\frac{r+q}{r}\right)^2 a =$	$\left(\frac{r+q}{r}\right)^3 a$
n Aar	$\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} a + \frac{q}{r}\left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} a =$	$\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$

Ved Logarithmer findes Værdien $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$ saaledes: $\text{Log.}\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a = n\,\text{Log.}\,\frac{r+q}{r} + \text{L.}\,a$ $= n\,(\text{Log.}\,(r+q) - \text{L.}\,r)) + \text{L.}\,a.$

Exemp.

Exemp. Hvad er Capital, Rente og Rentes Rente af 10000 Rdlr. efter 10 Aars Forløb, naar Renten er 5 Procent eller $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$? Efter Formen er den søgte Summa, som vi kan kalde $x = \left(\frac{r+q}{r}\right)^{10} a$, altsaa Log. $x = 10$ (Log. $(r+q)$ — Log. r)) + Log. a. Ved at indsætte de givne Værdier er

Log. $x = 10$ (Log. 21 — Log. 20) + Log. 10000

Nu er Log. 21 = 1,3222193
Log. 20 = 1,3010300

Log. 21 — Log. 20 = 0,0211893, som, multipliceret med 10, giver 0,2118930
hertil adderes Log. 10000 = 4,0000000
og Log. x = 4,2118930, som, opsøgt i Tavlerne efter de forklarede Regler, henviser til Tallet 16280, som er den forlangte Capital.

§. 90.

2den Opgave. Naar en Capital a var først forfaldet til Betaling efter n Aar, hvor stor Summa burde Eieren have naar den strax betaltes?

Opløsn. Det er klart, at den, der faaer en Capital udbetalt før han kunde fordre den, maa

være

være fornøiet, naar han faaer saa stor en Sum af Capitalen, at denne, udsat til lovlige Renter og disse Renter igien nyttede, kunde til den bestemte Tid udgiøre den fulde Capital som han da havde at fordre.

Naar vi altsaa i den forrige Form $x = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$ sætte a og x i hinandens Sted, da den Størrelse, der for søgtes, er nu den givne og omvendt, saa have vi:

$$a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n x \quad \text{og deraf}$$

$$x = a : \left(\frac{r+q}{r}\right)^n$$

$$x = a \times \left(\frac{r}{r+q}\right)^n = \frac{r^n}{(q+r)^n} a$$

Følgelig Log. $x = n$ L. r + L. a — n L. $(q+r)$.

Exemp. En Arv af 4000 Rdlr. er bestemt at udbetales til en Person naar han er 20 Aar gammel; til den Tid er fri Raadighed derover og Brug deraf overdraget til en anden, som kunde have 10 Procent aarlig i Fordeel deraf. Hvormeget kan den sidste uden Skade udbetale til Arvingen naar han er 15 Aar, eller fem Aar før den bestemte Tid?

Her er $n = 5$, $a = 4000$. $\frac{q}{r} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ($q = 1$ $r = 10$); vi finde da

$$\text{Log. } x = \begin{cases} 5 \text{ Log. } 10 = 5,0000000 \\ + \text{Log. } 4000 = 3,6020600 \\ \qquad\qquad\qquad\; 8,6020600 \\ - 5 \text{ Log. } 11 = 5,2069635 \end{cases}$$

$= 3,3950965$, som giver Tallet 2484 paa det nærmeste; mere end 2484 Rdlr. kan han følgelig ikke uden Skade accordere Arvingen.

Anm. 1. I den her brugte Form betyder n hele Aar. Er derimod den givne Tid et blandet Tal, f. Ex. $8\frac{1}{2}$ Aar, saa sætter man $n = 8$, og for den da fundne Capital x beregnes den simple Rente for $\frac{1}{2}$ Aar.

Ere i et Land halvaarige eller fierdingaarige Renter brugelige, saa sætter man $\frac{q}{2r}$ eller $\frac{q}{4r}$ i Stedet for $\frac{q}{r}$ og $2n$ eller $4n$ i Stedet for n.

F. Ex. Hvad er Værdien af en Capital til 4 Procent efter n Aar, naar Renterne betales hvert halve Aar? er det samme som: hvad er Værdien af samme Capital til 2 Procent efter $2n$ Aar?

Anm. 2. Man har beregnet Tavler for Størrelsen $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n$ enten ved Logarithmer, eller nøiagtigere

tigere umiddelbar ved at søge Potenser af $\left(\frac{r+q}{r}\right)$

Saadanne Tavler finder man f. Ex. i

1) Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenburg 1781. 4.
2) Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften von Joh. Nicol. Tetens. Leipzig 1785.
3) Anfangsgründe der Staatsrechenkunst von Joh. Wilhelm Christiani. Helmstädt 1793.

Disse tre i dette Fag særdeles brugbare Bøger indholde, foruden de omtalte, endnu flere hertil hørende Tavler.

§. 91.

Læresætn. Bliver en paa Rente udsat Capital a foruden den tillagte Rente og Rentes Rente desuden aarlig forøget med en bestemt Summa b, da er efter n Aar Værdien af den hele Capital $x = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a +$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \frac{r\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}$$

Beviis. Efter dette i Forveien antagne almindelige Udtryk for Renten $\frac{q}{r}a$

er

er efter	Capital, Rente og Tillæg.
1 Aar	$= \frac{q+r}{r}a + b$
2 Aar	$= \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 a + \frac{q+r}{r}b + b$
3 Aar	$= \left(\frac{q+r}{r}\right)^3 a + \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 b + \left(\frac{q+r}{r}\right) b + b$
n Aar	$= \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-1} b + \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-2} b$
	$+ \left(\frac{q+r}{r}\right) b + b.$

Capitalen bestaaer altsaa efter n Aar af to Dele, nemlig 1) $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$, og 2) en geometrisk Række, hvis første Leed er b, Ledenes Antal n, og Forholdsnavnet (Exponenten) $\frac{q+r}{r}$. Summen af denne findes (§. 66) efter Formen $s = \frac{m^n a - a}{m - 1}$

at være $= \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \frac{r\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}$

hertil lægges den første Deel $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$ og vi faae

Vær

Værdien af den hele Capital efter n Aar $=$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + r\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}.$$

Anm. Formindskes Capitalen ved hvert Aar at fratage en bestemt Summa, da er Formen den samme, kun at de to Dele, man tilsidst faaer, forbindes med $-$; og man finder hvad der af den første Capital a bliver til Rest efter n Aar naar hvert Aar en bestemt Summa b fratages $= \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a -$

$$\frac{r\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b + rb}{q}.$$

§. 92.

3die Opgave. Hvormeget er tilovers efter 20 Aars Forløb af 10000 Rdlr. med Rente og Rentes Rente, naar hvert Aar fortæres 600 Rdlr.?

Sætte vi Renten 5 Procent $= \frac{1}{20}$, saa have vi $q = 1$, $r = 20$, $a = 10000$, $n = 20$, $b = 600$; den søgte Rest altsaa efter Formen $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times 20b + 20b =$ $\left(\frac{21}{20}\right)^n \times (a - 20b) + 20b$. Er nu, som i nærværende Exempel, $b > \frac{1}{20}a$, saa er $20b > a$; Resten bliver altsaa $= 20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a)$; følgelig findes den søgte Rest naar man adderer n Log. $\frac{21}{20}$ + Log. $(20b - a)$ og subtraherer det til den fundne Logarithme svarende Tal fra $20b$. Altsaa i nærværende Opgave

$$\begin{array}{rl} 20 \text{ Log. } \frac{21}{20} & = 0{,}4237860 \\ \text{Log. } (20 \times 600 - 10000) & = 3{,}3010300 \\ \hline & 3{,}7248160, \end{array}$$

som findes at være Log. 5306; dette subtraheret fra $20b = 12000$ giver Rest 6694 Rdlr., som er det der bliver tilbage af Capitalen efter 20 Aar.

Till. 1. Forandres Spørgsmaalet saaledes, at der spørges: hvorlænge det vil vare inden Capitalen a er fortæret? da sees let, at n i forrige Form er her den søgte Størrelse, og at Betingelsen fører det med sig, at Resten, i det Øieblik Capitalen er fortæret, er $= 0$, og følgelig

$$20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a) = 0$$

eller $20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a)$

altsaa Log. $20b = n$ Log. $\frac{21}{20}$ + Log. $(20b - a)$

Log. $20b$ − Log. $(20b - a) = n$ Log. $\frac{21}{20}$

Log.

$$\text{Log.}\left(\frac{20b}{20b-a}\right) : \text{Log.}\ \tfrac{21}{20} = n$$

$$\text{Log.}\ (\tfrac{12000}{2000}) = \text{Log.}\ 6 \quad \text{og}\ n =$$

$$\frac{\text{Log.}\ 6}{\text{Log.}\ \frac{21}{20}} = \frac{0,7781512}{0,0211893} = 36\ \text{Aar}\ 8\ \text{Maaneder}$$
22 Dage.

Till. 2. Hvor stor en Capital a maae man udsætte for at sikkre sig en vis aarlig Indtægt b i n Aar?

Af Ligningea $20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n 20b + \left(\frac{21}{20}\right)^n a$ $= 0$ findes $\left(\frac{21}{20}\right)^n a = \left(\frac{21}{20}\right)^n \times 20b - 20b$

$$\text{og}\ a = 20b - \frac{20^n \times 20b}{21^n}.$$

Lad til Ex. være $b = 600$, $n = 20$, saa er

$$\text{Log.}\ 20b = 4,0791812$$
$$20 \times \text{Log.}\ 20 = 26,0206000$$
$$\text{Log.}\ 20b + 20\ \text{Log.}\ 20 = 20,0997812$$
$$20\ \text{Log.}\ 21 = 26,4443860$$

$$\text{Log.}\left(\frac{20^n \times 20b}{21^n}\right) = 3,6553952,$$ som er Log. 4522, der subtraheres fra $20b$, som her er $20 \times 600 = 12000$; og saaledes er $12000 - 4522 = 7478$ Rdlr. den Capital, som der efter den antagne Rentefod udfordres, for i 20 Aar at have 600 Rdlr. aarlig Indkomst.

§. 93.

Forklar. Saaledes som Renten eller den bestemte Indtægt hidtil er anseet, er den noget Vist, og bliver saaledes bestemt, at Capital tilligemed de aarlige Renter derved i et vist Antal Aar fortæres. Den kaldes Rente for en bestemt Tid, og kan arves. Livrente derimod kaldes den, som kun udbetales til Kiøberens Dødsdag, og kan beregnes paa samme Maade som Tid-Rente (§. 92), kun at n ikke er et bestemt Tal, men maae bestemmes efter Kiøberens Alder og Mortalitets-Tabeller. Ved de Interessentere, der døe tidligen, vinder Kassen hvad den taber ved dem, der leve længere end den efter Rimelighed beregnede Tid. Efter Deparcieux er efter Middeltal den Tid, en Person paa 45 Aar endnu kan vente at leve, 20 Aar; hvormeget man kunde give ham aarlig i Livrente for 1000 Rdlr. Indskud beregnes efter §. 92, og man faaer $80\frac{1}{4}$ Rdlr. eller 8 Procent.

En Tontine er ligeledes en Slags Livrente, dog med det Særegne, at Interessenterne arve hinanden, og den Bortdødes Deel fordeeles imellem de endnu Levende, indtil alle Deeltagende ere ud-

uddøde. Navnet har denne Slags Livrente af en Neapolitaner Lorentz Tonti, som først giorde den bekiendt i Frankerig. Den første oprettedes Aar 1689, hver Actie kostede 300 Livres; en Barbeerenke, der blev 96 Aar gammel, fik tilsidst 73500 Livres.

X. Om forskiellige enkelte Tings Omsætninger og Forbindelser (transpositionibus et combinationibus).

§. 94.

1ste Opgave. At finde alle de mulige Ordener, hvori et Antal givne Ting, som Bogstaverne a, b, c, d eller Tallene 1, 2, 3, 4 kan stilles, saaledes, at den ene ikke er fuldkommen og i alle Henseender den samme som den anden.

Opløsn. Var a allene given, saa er kun een Orden mulig; kommer b til, kan det sættes for eller efter a, nemlig ab og ba; her er altsaa 2 eller 2×1 Omsætning; kommer endvidere c til, saa kan det sættes saavel til ab som ba foran, i Midten og ved Enden, og vi have da $b = 2 \times 3$ Om-

sætninger, nemlig:

I) c til ab	II) c til ba
cab, acb, abc.	cba, bca, bac.

Ligesaa naar det fierde Bogstav d kommer til, kan det føies til enhver af disse 6 Ordener paa 4 forskiellige Maader, nemlig foran, imellem første og andet, imellem andet og tredie, samt ved Enden. Dette giver altsaa imellem fire Ting $6 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ Omsætninger. Paa samme Maade indsees, at naar det femte Bogstav kom til, vilde det kunde sættes til enhver af disse 24 Ordener paa fem forskiellige Maader, og man vilde saaledes faae $5 \times 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ Ordener. I Almindelighed vil altsaa n Ting give $1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots n$ Omsætninger eller Ordener. Eller naar man begynder med den høieste Faktor, saa giver n Ting $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \ldots\ldots n-(n-1)$; thi $n-(n-1) = n-n+1 = 1$.

Exemp. Paa hvor mange Maader kunde 8 Toner afvexle med hinanden? Efter den udfundne Form $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ Maader.

I hvormaage forskiellige Ordener kunde 40 Kort lægges? $40 \times 39 \times 38 \ldots\ldots 2 \times 1$, som udgiør et Tal der overstiger 2 Oktillioner.

Till.

Till. 1. Naar imellem de Ting, hvorom man vil vide, i hvormange forskiellige Ordener de kan stilles, ere nogle af een og samme Art; som f. Ex. naar imellem n Bogstaver a kommer m Gange og b kommer p Gange for, bliver Formen til at finde Omsætningernes Antal

$$\frac{m \times (m-1) \times (m-2) \ldots\ldots 3 \times 2 \times 1}{n \times (n-1) \ldots 3 \times 2 \times 1 \times p\,(p-1) \ldots 3 \times 2 \times 1}$$

Thi lad de givne Størrelser være b, a, a, saa skulde a, a, naar de vare forskiellige, give to Omsætninger; men da de nu er eens, saa kan b med dem ikke give $3 \times 2 \times 1$, men allene $3 \times 1 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2}$ Omsætninger. Ligeledes skulde $cbbbaa$, naar alle Bogstaverne vare forskiellige, give $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ Omsætninger; var de to sidste allene de samme, og de øvrige forskiellige, faae vi $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$. Men da nu baade andet, tredie og fierde ere de samme, saa ere i det Hele kun $\frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times 2 \times 1 \times \cancel{2} \times \cancel{1}} =$ 60 Omsætninger mulige.

Exemp. 1) De fire Bogstaver i Ordet *amor* kan omsættes $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ Gange; deraf kan man finde de saa kaldte Anagramer.

2) Ordet *studiosus* har ni Bogstaver, hvorimellem ere tre *s* og to *u*; Antallet af deres Omsætninger er altsaa $= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$

§. 95.

Forkl. Forbindelser (combinationes) kaldes flere Tings Sammenstilling efter et vist Tal, som bestemmer Classen af Forbindelsen og kaldes Classens Exponent; da saaledes 1, 2, 3, 4, 5 og følgende Classer indeholde Unioner, Binioner, Trinioner, Qvaternioner o. s. v. eller enkelte, Amber, Terner, Qvaterner o. s. v., hvori enten enhver Ting maae igientages, eller og ingen Gientagelse maae finde Sted.

§. 96.

2den Opgave. Naar der ere givne n forskiellige Ting, at finde hvormange Binioner eller Amber, hvormange Trinioner eller Terner, hvormange Qvaternioner eller Qvaterner o. s. v., eller, som det og udtrykkes, hvormange Forbindelser af 2den, 3die, 4de rc. Classe man deraf kan giøre.

Opløsn. 1. Sæt at Bogstaverne a, b, c, d, e rc., i alt n, vare givne, og der spørges: hvormange hvor-

Amber eller Forbindelser af 2den Classe deraf kan giøres? Man lader da først *a* være borte og beholder *b*, *c*, *d*, *e*... eller $n-1$ Bogstaver; med ethvert af disse giør *a* en Ambe: man faaer da $(n-1)$ Amber. Lades *b* ligeledes ude, saa beholder man *a*, *c*, *d*, *e*, og *b* giør med ethvert af disse en Ambe, altsaa i alt $(n-1)$ Ambe. Da nu ethvert af de *n* Bogstaver saaledes kan affondres og siden foreenes med de øvrige $n-1$, saa bliver det i Almindelighed $n \times (n-1)$ Amber; saaledes

ab,	*ac*,	*ad*,	*ae*
ba,	*bc*,	*bd*,	*be*
ca,	*cb*,	*cd*,	*ce*
da,	*db*,	*dc*,	*de*
ea,	*eb*,	*ec*,	*ed*

Men da *ab* og *ba*, *ac* og *ca* o. s. v. kun gielder for een Ambe, saa er det klart, at det egentlige Antal af de virkelig forskiellige Amber her er $= \frac{n(n-1)}{1 \times 2}$.

2. Søges de mulige Terner (eller Forbindelser af tredie Classe) af *n* Ting, f. Ex. af de samme Bogstaver *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, saa vilde $(n-1)$ Ting give $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \times 2}$ Amber; saaledes *bcde* give Amber *bc*, *bd*, *be*, *cd*, *ce*, *de*; sætter man nu til

til enhver Ambe Bogstavet *a*, saa faaer man $\frac{(n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$ Terner. Ligesaa faaer man, naar man til Amberne af Bogstaverne *a*, *c*, *d*, *e* sætter *b*, paa ny $\frac{(n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$ Terner; og da dette kan igientages *n* Gange, saa faaer man i alt $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$ Terner. Af de givne Bogstaver *abcde* altsaa følgende:

abc	*abd*	*abe*	*acd*	*ace*	*ade*
bac	*bad*	*bae*	*bcd*	*bce*	*bde*
cab	*cad*	*cae*	*cbd*	*cbe*	*cde*
dab	*dac*	*dae*	*dbc*	*dbe*	*dce*
eab	*eac*	*ead*	*ebc*	*ebd*	*ecd*

Man seer her igien, at da Ternerne *abc*, *bac*, *cab* og saaledes enhver med tre Omsætninger kun kan gielde for een Terne; man maae endnu dividere den fundne Formel med 3, og at *n* Ting giver saaledes $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$ Terner.

3. Paa samme Maade findes, at *n* Ting giver $\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ Forbindelser af 4de Classe eller Qvaterner, og overhovedet at

de

de giver $\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots \times m}$ Combinationer af *mte* Classe.

Till. Heraf udledes denne almindelige Regel: Man søger to arithmetiske Rækker, hvori een er Differencen; først en aftagende, hvor det første Leed er Antallet af de givne Ting; og for det andet en tiltagende, som begynder med 1. Ledenes Antal i begge bliver ligestort med Tallet, der viser, hvormange Stykker der skal combineres (ↄ: som viser, om der søges Amber, Terner ꝛc.). Produktet af Ledene i første Række divideres derpaa med Produktet af Ledene i den anden; og Qvotienten giver Antallet af alle muelige Combinationer.

§. 97.

Disse beregnede Former tiener til derefter at bestemme Rimeligheden af Tab og Gevinst i de saa kaldte Lykke- eller Hazardspil.

F. Ex. I) Hvor stor er Rimeligheden, at man med tre Tærninger kan kaste lutter Sexer? Da hver Tærning har sex Sider, bliver alle muelige forskiellige Kast $= \frac{18 \times 17 \times 16}{1 \times 2 \times 3} = 816$. Imellem disse er og det Forlangte eengang; Rimeligheden til at faae disse Dine er altsaa til Rimeligheden, ikke at faae dem, som 1:816.

II)

II) I det saakaldte Tallotterie bliver, som bekiendt, af 90 Nummere fem udtrukne; hvad Rimelighed er der, naar man har besat fem vilkaarlige Nummere (af de 90) til Udtræk, Ambe, Terne og Qvaterne, at erholde een af disse Gevinster? Rimeligheden til at erholde 1) et Udtræk findes $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ ↄ: Rimeligheden til at faae Udtræk forholder sig til den, ikke at faae, som 1:18.

2. En Ambe: Fem Nummere indeholde $\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ Amber, 90 Nummere inholde $\frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005$ Amber; Rimeligheden er altsaa til Urimeligheden som 10:4005 eller 1:400,5.

3. En Terne: I fem Nummere ere $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ Terner, i 90 ere $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} =$ 117480 Terner; Rimeligheden til Ternen altsaa mod Urimeligheden som 10 : 117480 = 1:11748.

4. En Qvaterne: I fem Nummere ere 5 og i 90 Nummere 2554590 Qvaterner; altsaa er Rimeligheden til, i fem Nummere at faae en Qvaterne, mod Urimeligheden som 5:2554590 eller 1:510918.

III)

III) Hvormange forskiellige Spil ere muelige i L'hombre? Da hver af de Spillende faaer ni Kort, bliver Svaret $= \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = 273438880$. Dette Tal maae endnu multipliceres med 3, som er de Spillendes Antal, efterdi det er ikke ligegyldigt, om man af de Spillende er den første, anden eller tredie.

Fremdeles: da 40 Kort indeholde 780 Amber og 9 Kort 36 Amber (§. 95), saa er Rimeligheden til at erholde en bestemt Ambe, for Ex. Spadillie og Basta samlede i eet Spil, mod Urimeligheden som 36 : 780 eller $1 : 21\frac{2}{3}$ ɔ: man kan omtrent regne i 22 Spil eengang at have disse to Kort samlede.

Anm. Foruden den her viiste Anvendelse finder denne Regel Sted til at bestemme mulige Tilfælde i Videnskaberne, f. Ex. alle de Maader, hvorpaa Middelordet i en Syllogismus kan sættes.

Geo-

Geometrie.

Anden Deel.

Lære om Legemer eller Stereometrie.

I. Om rette Liniers og Planers Beliggenhed mod hinanden.

(See Geometrie, første Deel, §. 108.)

§. 109.

Forklaring. En ret Linie AB siges at staae lodret paa en Plan MN (Fig. XXI. Tab. 4), naar den giør rette Vinkler med alle de rette Linier CB, BG, BK ꝛc., der i Planen kan trækkes igiennem Punktet B, hvor Linien træffer Planen.

§. 110.

Forkl. En ret Linies DF Bøining eller Helding mod en Plan AB (Fig. XIX) bestemmes ved den Vinkel, som den giør med en Linie DG, der trækkes i Planen fra Punktet D, hvor Linien skiærer Planen til det Punkt G, hvor en fra et Punkt i Linien F nedladt Perpendiculair træffer Planen.

Till.

Till. At denne Bøiningsvinkel bliver spids, er klart (Plan-Geometrie §. 18 Till. 3), naar man tænker sig en Plan lagt giennem Punkterne *DFG*.

§. 111.

Forklar. To Planers *MK* og *HK* (Fig. XVIII) Bøining mod hinanden bestemmes ved den Vinkel, der dannes, naar fra et Punkt *N* i deres Skiæringslinier *LK* opreises lodrette Linier i begge Planer *NP* og *NQ*; denne Vinkel *PNQ* kaldes derfor Planernes Bøinings- (Inclinations-) Vinkel.

Till. Er denne Vinkel ret, staaer altsaa den ene Plan lodret paa den anden.

§. 112.

Læres. Naar to Punkter *CD* af en ret Linie (Fig. XIX) ligge i en Plan *AB*, ligger hele Linien i samme Plan.

Beviis. Stykket *CD* er efter Betingelsen i Planen *AB*; sæt nu, at Linien lod sig forlænge uden for Planen, og at *DF* var et saadant uden for Planen forlænget Stykke, og man forlængede Linien *CD* i Planen til *E* (Geom. §. 3), saa havde de to rette Linier *CDF* og *CDE* Stykket *CD* tilfælles, som er umueligt.

Till.

Till. 1. En Plans Beliggenhed bestemmes ved tre Punkter, der ikke ligge i samme rette Linie; og igiennem tre givne Punkter lader sig altid lægge en Plan. Have to forskiellige Planer altsaa tre Punkter tilfælles, som ikke ligge i en ret Linie, da falde de sammen.

Anm. Et Bord paa tre Been staaer derfor altid, endog paa et ujevnt Gulv, uden at rokke.

Till. 2. Skiære to Planer hinanden, som Planen *MK* og *HK* (Fig. XVIII), da er deres Skiæringslinie *LK* en ret Linie.

§. 113.

Læresætn. Staaer en ret Linie *AB* (Fig. XXI) lodret paa to rette Linier *CD* og *EF*, der skiære hinanden i Punktet *B*, hvor Linien berører Planen *MN*, da staaer den ogsaa lodret paa alle de rette Linier, der i samme Plan *MN* kan trækkes igiennem Punktet *B*, d. e. den staaer lodret paa Planen *MN* (§. 109).

Beviis. Man giøre $CB = BD$, $BF = BE$, trække derpaa igiennem *B* en tredie vilkaarlig Linie, og Linierne *EC* og *FD*, som vil skiære den vilkaarlige Linie i *G* og *K*, derpaa fra *A* Linierne *AC*, *AG*, *AE*, *AD*, *AK* og *AF*. Nu ere

No.

1) $\Delta\, CBE = \Delta\, BFD$ (Geom. §. 12), følgelig $CE = FD$; $\angle BCE = \angle BDF$; og $\angle BEC = \angle BFD$.

2) $\Delta\, BGC = \Delta\, BKD$ (§. 15); altsaa $CG = KD$, og $BG = BK$.

3) $\Delta\, EAB = \Delta\, BAF$ (§. 12), derfor $EA = AF$.

4) $\Delta\, ACB = \Delta\, ABD$ (§. 12), og $AC = AD$.

5) $\Delta\, ACE = \Delta\, ADF$; thi $CE = FD$ (No. 1) $AC = AD$ og $AE = AF$ (No. 3 og 4), altsaa $\angle ADK = \angle ACG$.

6) $\Delta\, ACG = \Delta\, ADK$, da $CG = KD$ (No. 2) $CA = AD$ (No. 4) og $\angle ACG = \angle ADK$ (No. 5), følgelig $AG = AK$.

7) Nu er $AG = AK$ (No. 6), $BG = BK$ (No. 2), $AB = AB$, følgelig (§. 14) $\Delta\, AGB = \Delta\, ABK$ og $\angle ABG = \angle ABK = R$ (§. 7) og Linien AB lodret paa GB og BK.

Paa samme Maade kan bevises, at AB er lodret paa enhver igiennem Punktet B i Planen MN trukket ret Linie, og altsaa lodret paa Planen MN.

Anm. Dette er det Euclidiske Beviis, saaledes som det findes i hans Element. (II B. 4 S.), som i mine Tanker er det eeneste strængt mathematisk rigtige; dog tilstaaer jeg, at man gierne kan for Begyndere, hvor Oversigten af dette Beviis maaskee kunde være vanskelig, giøre Sætningen begribelig paa en anden Maade, nemlig ved at tænke sig en Plan lagt igiennem Punkterne ABD, der da vilde blive en retvinklet Triangel, og forestille sig den omført i Planen MN; blev nu Linien BD i samme Plan og AB ubevægelig, vilde BD, naar den efterhaanden kom i Beliggenhederne BE, BG, BC, dog stedse beholde samme Stilling mod AB ɔ: stedse giøre med AB en ret Vinkel.

§. 114.

Læres. Staaer en Linie AB (Fig. XXI) lodret paa tre forskiellige rette Linier BG, BD og BF, der støde sammen i Punktet B, da ligge disse Linier alle i een og samme Plan.

Beviis. Man forestille sig en Plan MN lagt igiennem Punkterne GBD (§. 112. Till.). Var nu BF ikke i denne Plan, men udenfor, saa forestille man sig en anden Plan lagt igiennem ABF, som, tilbørlig forlænget, maatte skiære Planen MN i den rette Linie BK (§. 112. Till. 2). Men efter Betingelsen er AB lodret paa BG og BD, altsaa ogsaa paa BK (§. 113), følgelig $\angle ABK = R = \angle ABF$, som er umueligt. (Arithm. §. 38. No. 2).

Till. 1. Fra et Punkt udenfor en Plan kan kun fældes en eeneste lodret Linie paa Planen; thi sæt

sæt (Fig. XXI), at foruden AB ogsaa AE var lodret paa Planen MN, saa var i Trianglen ABE Vinklen $AEB = R = ABE$, som er umueligt (§. 18. Till. 3).

Till. 2. Den lodrette Linie AB er kortere end enhver anden fra Punktet A paa Planen MN fældet Linie.

§. 115.

Læres. I) Staae to Linier AB og CD lodrette paa een og samme Flade MN, da ere de parallele; II) ere de derimod parallele og den eene staaer lodret paa Fladen MN, da staaer den anden ogsaa lodret paa samme Flade.

Beviis 1. Man drage (Fig. XVII) BD og opreise paa den i Planen MN den lodrette Linie $DG = AB$ og trække BG, AG og AD, saa er $\Delta ABD = GDB$ (§. 12) og $AD = BG$; da nu altsaa $AB = DG$ og AG tilfælles, saa er $\Delta ABG = \Delta ADG$, følgelig $\angle GDA = \angle GBA = R = \angle GDB = \angle GDC$ (§. 109) og Linierne GD, DA, DB i een og samme Plan (§. 114), i hvilken ogsaa AB er.

Saaledes ere Linierne AB og CD i een og samme Plan, og da Vinklerne $ABD + CDB$ ere $= 2R$, ere Linierne AB og CD parallele.

2. Man

2. Man trække de samme Forberedelses Linier som før, og man faaer Vinklen $GDA = R$, følgelig GD lodret paa Planen BDA (§. 109); i samme Plan er ogsaa Parallelen CD, altsaa naar $\angle ABD = R$, er ogsaa $\angle CDB = R$, og saaledes CD lodret paa Planen MN.

§. 116.

Læres. To rette Linier AD og BF (Fig. XXIII), der ere parallele med en tredie CE (om den endog ikke ligger i samme Plan) ere indbyrdes parallele.

Beviis. Man opretter fra et Punkt i Linien CE to lodrette Linier, den ene CA i Planen CD, den anden CB i Planen CF, saa er Linien EC lodret paa en Plan lagt igiennem Punkterne ACB (§. 113), følgelig ogsaa dens Paralleler AD og BF lodrette paa Planen ACB (§. 115. No. 2), og altsaa AD og BF selv parallele (§. 115. No. 1).

§. 117.

Læres. To Vinkler ACB og DEF (Fig. XXIII), der ligge i forskiellige Planer, hvis Sider ere parallele og vende mod samme Side af den Linie EC, der forbinder deres Toppunkter, ere ligestore.

Beviis.

Beviis. Man giøre $DE = AC$, $EF = CB$, og trække Linierne AB, DF, FB og DA, saa ere AD og BF parallele med CE, følgelig selv parallele og ligestore (§. 30), og altsaa $AB = DF$; følgelig $\Delta ACB = \Delta DEF$ og Vinklen $ACB = \angle DEF$.

§. 118.

Opgave. Fra et givet Punkt N udenfor en Plan CD (Fig. XX) at lade falde en lodret Linie paa Planen.

Opløsn. I Planen CD trækker man en vilkaarlig Linie AB og lader derpaa fra det givne Punkt N falde en lodret Linie NP; fra Punktet P oprettes i Planen CD en lodret Linie PM, fra N fældes derpaa en lodret Linie NR paa PM, som da vil være lodret paa Planen CD.

Beviis. Igiennem R trækkes en Linie KL parallel med AB. Efter Constructionen staaer PR lodret paa PR og PN, altsaa ogsaa paa Planen NPR (§. 113), og følgelig KL lodret paa samme Plan; saaledes er Vinklen $LRN = R$, men efter Construction var $NRP = R$, og følgelig NR lodret paa Planen CD.

Till.

Till. Fra et Punkt M i en Plan oprettes en lodret Linie MO, naar man fra et Punkt N udenfor Planen fælder en Linie NR lodret paa Planen og giør Linien MO parallel med NR.

§. 119.

Forkl. Planerne CD og AB (Fig. XXV) kaldes parallele, naar de, i hvor langt de end forlænges, aldrig skiære hinanden.

Till. 1. Skiæres disse parallele Planer med en tredie Plan EF, da ere Giennemsnitslinierne GK og LO parallele, thi de ligge begge i een Plan, nemlig i Skiæringsplanen EF, men de ligge tillige hver i sin af de andre to Planer, og kunde altsaa forlængede aldrig møde hinanden uden at de to parallele Planer stødte sammen, som er imod Forklaringen og Betingelsen.

Till. 2. Staaer een og samme rette Linie lodret paa to forskiellige Planer, da ere de parallele; thi vare de ikke parallele, vilde de forlængede skiære hinanden som Planerne CD og EF (Fig. XX), og da kunde een og samme Linie ikke være lodret paa dem begge. Fra et vilkaarligt Punkt N i den ene Plan EF fældes en lodret Linie NR paa den anden CD, i Planen EF, trækkes fra N til Giennemsnitslinien AB en vilkaarlig Linie NP og i CD Linien PR. Var nu NR ogsaa lodret

paa

paa Planen EF, saa var der i Triangelen NPR to rette Vinkler, som er umueligt.

§. 120.

Opgave. Igiennem et givet Punkt A udenfor Planen BC (Fig. XXVII) at lægge en Plan, paralel med BC.

Opløsn. Fra A fældes paa BC den lodrette Linie AD (§. 118), i BC trækkes de vilkaarlige Linier DF, DE, og igiennem A Linien AH parallel med DF og AG parallel med DE. En Flade, lagt giennem AHG, vil da være parallel med BC (§. 119), thi DA er ogsaa lodret paa HAG (§. 109) (thi da den var lodret paa BC, saa var $\angle ADF = R$, altsaa $\angle DAH = R$; ligeledes var $\angle ADE = R$, følgelig og $DAG = R$).

Till. 1. Igiennem et Punkt kan kun lægges een Plan parallel med en anden.

Till. 2. Er to Planer parallele og en ret Linie er lodret paa den eene af dem, da er den tillige lodret paa den anden; ogsaa ere to lodrette Linier imellem to parallele Planer parallele og ligestore.

§. 121.

Læres. Staaer Linien AD (Fig. XXIV) lodret paa Planen BC, saa er enhver Plan, der lægges igiennem AD, ligeledes lodret paa BC.

Beviis. Lad EF være Linien, hvor den giennem AD lagte Plan skiærer BC; man trækker da i BC Linien DG lodret paa EF, saa er $\angle ADG = R$ (§. 109), men Vinklen ADG er Bøiningsvinklen for Planerne (§. 109. Till.); de ere altsaa lodrette paa hinanden.

Modsætn. Staaer en Plan FH (Fig. XXIV) lodret paa Planen BC, saa er en i Planen FH paa Giennemsnitslinien EF fældet lodret Linie AD ogsaa lodret paa Planen BC.

Beviis. Man trækker den lodrette Linie DG, saa er Vinklen ADG (Planernes Bøiningsvinkel) $= R$ og $\angle ADF = R$ (efter Tegning), følgelig Linien AD lodret paa Planen BC (§. 109).

§. 122.

Læres. Overskiæres to parallele Planer AB og CD (Fig. XXV) af en tredie EF, saa ere Bøiningsvinklerne, som den skiærende Plan giør med begge de parallele Planer, ligestore.

Beviis. Linierne GH og LO ere parallele (§. 119); antag HM at staae lodret paa GH og HP paa LO; nu lægge man igiennem HI en Plan lodret paa EF (§. 121), den vil skiære de to parallele

Planer *CD* og *AB* i Linierne *MN* og *PQ*. Vinklerne *HMN* og *HPQ* blive da den skiærende Plans Bøiningsvinkler mod de parallele Planer, og blive ligestore.

§. 123.

Læres. Naar to Planer *AM* og *CN* (Fig. XXVI), der skiære hinanden i *GH*, ere lodrette paa en tredie *EF*, saa er ogsaa deres Skiæringslinie *GH* lodret paa *EF*.

Beviis. Man opreise paa *HN* (ɔ: Giennemsnitslinien af Planerne *CN* og *EF*) en lodret Linie *HK*, og paa *HM* (Giennemsnitslinien af Planerne *AM* og *EF*) en lodret Linie *HL*, saa er *HK* lodret paa Planen *CN* (§. 121, II), ligeledes *HL* paa Planen *AM*, følgelig $\angle GHK = R = \angle GHL$ og Linien *GH* lodret paa *EF* (§. 209).

II. Om geometriske Legemer i Almindelighed.

§. 124.

Forkl. Et til alle Sider begrændset Rum kaldes et geometrisk Legeme (§. 1); et saadant har en bestemt Figur, som det faaer ved disse Grændser, der ere Flader, rette eller krumme.

Till.

Till. 1. En eeneste ret Flade eller Plan kan ikke indslutte eller begrændse noget legemligt Rum, men behørig udvidet deler den ethvert Rum i to Dele.

Till. 2. Endog to eller tre Planer kunde ikke indslutte noget Legeme. Man tænke sig f. Ex. en Plan *CBD* (Fig. XXVIII. a.), man lægge igiennem dens ene Grændselinie en anden Plan *ACB*, lægge endvidere igiennem Punkterne *ACD* en tredie Plan *DCA*, saa vil endnu denne tilligemed de to forrige ikke indslutte noget Rum, men dertil udfordres endnu en Plan, som maatte overskiære de tre nævnte Planer et eller andet Sted, f. Ex. i Punkterne *A*, *D*, *B*.

§. 125.

Forkl. Ved det saaledes frembragte Legeme *ACDB* (Fig. XXVIII. a.) kaldes dets Grændser, som ere Fladerne *ACB*, *ACD* ꝛc., Sideflader, og Linierne *AC*, *BC* o. s. v. Sidelinier. Er som her alle Sidefladerne Planer, kaldes det et kantet Legeme. En Kant, et Hiørne eller en solid Vinkel dannes i ethvert Punkt paa Legemets Overflade (som her i *C*, *A*, *B*, *D*), hvorigiennem tre eller flere Planer ere lagte.

Till.

Till. En solid eller legemlig Vinkel kunde ogsaa defineres saaledes: at den dannes, naar tre eller flere rette Linier, hvoraf dog kun to ligge i samme Plan, støde sammen i et Punkt, som kan kaldes den solide Vinkels Spidse eller Toppunkt; eller en solid Vinkel dannes, naar tre eller flere plane Vinkler, der dog alle maae ligge i forskiellige Planer, have et fælles Toppunkt.

Anm. 1. Man kan forestille sig den solide Vinkel A (Fig. XXVIII. a.) saaledes, at Punktet A tænkes over Fladen af Papiret og at dersra vare trukne Linierne AC, AD, AB i forskiellige Planer ned paa Papirets Plan; efter Antallet af disse Linier (der tillige bestemme Antallet af de plane Vinkler, der indslutte den solide Vinkel), kaldes den solide Vinkel tresidet, firesidet o. s. v.

Anm. 2. En solid Vinkels Størrelse og Egenskab bestemmes ved Antallet af de plane Vinkler, der indslutte den, og ved deres Bøining mod hinanden.

Anm. 3. Summen af alle de plane Vinkler, der støde sammen for at danne en solid Vinkel, er altid mindre end fire rette Vinkler.

§. 126.

Endnu paa mangfoldig forskiellige Maader kunde Planer lægges saaledes mod hinanden, at de indslutte et legemlig Rum; kun de mærkværdigste, hvis Udmaaling den elementaire Geometrie kan lære, blive her betragtede.

Lad til Ex. $ABCDE$ (Fig. XXVIII. b.) være en i en Plan liggende retlinet Figur. Man opreise Linien Aa under en vilkaarlig Bøining mod Planen MN. Igiennem Aa og B lægge man en Plan, hvori man giør Bb parallel med Aa. Ligeledes lægge man igiennem Bb og C en Plan, hvori man giør Cc parallel med Bb; og ved saaledes at vedblive igiennem alle Vinkelspidserne i den plane Figur $ABCDE$, faaer man Planerne Ab, Bc, Cd, De og Ea og Parallellinierne Aa, Bb, Cc, Dd. Nu lægger man igiennem Punktet a Fladen $abcde$ parallel med $ABCDE$, og der er nu et indsluttet legemlig Rum, der kaldes et **Prisme** (en kantet Pille, Støtte). De parallele Flader $ABCDE$ i Planen MN og $abcde$ i Planen OP kaldes **Grundflader**; de øvrige Flader, som Ab, Bc o. s. v., kaldes **Sideflader**, og efter deres Antal faaer Prismet Navn af et **tresidet**, **firesidet** eller **mangesidet Prisme**. **Høiden** af et Prisme er den lodrette Linie imellem begge Grundfladerne eller Grundfladernes Afstand fra hinanden.

Till. 1. Da Grundfladerne ere parallele, og følgelig deres og Sidefladernes Giennemsnitslinier AB og ab, BC og bc ogsaa parallele (§. 120), og og Giennemsnitslinierne af Sidefladerne *Aa'*, *Bb* 2c. ogsaa parallele, saa ere Sidefladerne i et Prisme altid Parallelogrammer.

Till. 2. Naar de parallele Sidelinier i et Prisme, og følgelig ogsaa Sidefladerne (§. 121), staae lodrette paa Grundfladerne, kaldes det et ret, i modsat Tilfælde et skiævt Prisme.

Till. 3. Ere Grundfladerne i et Prisma Parallelogramer, kaldes det et Parallelepipedon, som altsaa er et af sex Parallelogramer indsluttet Legeme.

Till. 4. Er et Parallelepipedon ret (Till. 2) og alle sex Flader, hvoraf det indsluttes, ligestore, kaldes det en Kubus eller Terning, som følgelig indsluttes af sex ligestore Qvadrater.

§. 127.

Bliver Grundfladen, som antages retlinet (§. 126), til en uendelig mangekantet Polygon ɔ: til en Cirkel (§. 101), hvis Middelpunkt er *F* (Fig. XXVIII), saa trækker man en Linie *FG* under en vilkaarlig Bøining mod Planen *AB* indtil den skiærer den parallele Flade *CD* i *G*. Fra et Punkt i Peripherien af Grundfladen *N* trækker man Linien *CN* parallel med *GF*, saa bliver Giennemsnitslinierne af Fladen *ACGF* og Fladerne *CD* og *NB*

AB ɔ: Linierne *CG* og *AF* parallele (§. 120). Det samme gielder for enhver anden Linie, der trækkes paa samme Maade som *DB*. Alle Endepunkter i Fladen *CD* ere i Omkredsen af en Cirkel, hvis Centrum er *G*, og som er ligestor med Grundfladen. Lægges nu igiennem Peripherien af begge Cirkler en krum Flade saaledes, at alle med *GF* i en Afstand saa stor som Radius *FB* trukne Paralleler falde i denne krumme Flade, saa vil den tilligemed begge Cirklerne indslutte et legemligt Rum, der kaldes en Cylinder eller Rulle (Valse). Begge Cirkler kaldes dens Grundflader, den krumme Flade den cylindriske Overflade. Linien *GF*, der forbinder Centra af begge Cirkler, faaer Navn af Cylinderens Axel. Eftersom denne Axel er lodret paa Grundfladen eller ikke, faaer Cylinderen Navn af ret (Fig. XXXVIII) eller skiæv (Fig. XXXIX).

Till. 1. Man kan forestille sig, at en Cylinder bliver til i det Cirklen *CHD* bevæger sig ned mod Cirklen *AEB* saaledes, at dens Flade stedse bliver parallel med sig selv. En ret Cylinder fremkommer, naar en Rectangel dreier sig om dens ene Sidelinie som en ubevægelig Axel.

Till. 2. Antages *AE* uendelig lille (mindre end enhver nok saa liden given Størrelse), saa kan

kan man antage *AECH* som en uendelig liden Flade, og den cylindriske Overflade at bestaae af lutter saadanne uendelig smaae Flader, d. e. Cylinderen er et uendelig mangesidet Prisme.

§. 128.

Forestiller man sig en solid Vinkels Sideflader (Fig. XXVIII. a.) *ACB*, *BCD* og *ACD* at overskiæres af en Plan *ADB*, saa fremkommer et begrændset legemlig Rum (geometrisk Legeme), der kaldes en Pyramide. Fladen *ABD* kaldes da Grundfladen, og de Flader *ACB*, *BCD* og *ACD* Pyramidens Sideflader. Sidefladernes Antal, der rette sig efter Grundfladens Sider, bestemmer Navnet af tresidet, firesidet og mangesidet Pyramide.

Anm. Er den solide Vinkel, hvis Sideflader overskiæres, kun indsluttet af tre Planevinkler, som i nærværende Exempel, da sees let, at hele Legemet indsluttes af fire Triangler, og at det er ligegyldigt, hvilken der ansees for Grundflade, da man kan tænke sig Pyramidens Toppunkt saavel i *A*, *B* og *D*, som i *C*.

Till. 1. En Pyramide er altsaa et legemligt Rum, der indsluttes af en retlinet plan Figur, som kaldes Grundflade, og saa mange Triangler, Sidefladerne, som Grundfladen har Sider, der alle støde sammen i et Punkt udenfor Grundfladen, der kaldes Pyramidens Spids eller Top. En lodret Linie, fældet fra dette Toppunkt, som *RE* (Fig. XXXII), bestemmer Pyramidens Høide. Er Grundfladen en regulair plan Figur og den perpendiculaire Linie fra Pyramidens Top træffer lige i dens Centrum (§. 55. Anm.), da kaldes Pyramiden ret, i modsat Tilfælde skiæv.

Till. 2. Tænkes Grundfladen i Pyramiden at blive en uendelig mangekantet regulair Figur ɔ: en Cirkel, da vil alle Pyramidens Sideflader, der vilde være uendelig mange smaae Triangler, udgiøre en eeneste krum Flade, hvori alle de rette Linier vil falde, der kan trækkes fra Pyramidens Top til ethvert Punkt i Cirklens Omkreds. Et saadant legemligt Rum kaldes en Kegle (conus) (Fig. XL), Cirklen *AG* Grundfladen, Linier fra Punkter i Cirklens Peripherie til Toppunktet, som *AK*, *GK*, dens Sider eller Sidelinier. Linien *CK* fra Cirklens Centrum til Toppen kaldes Keglens Axel. Staaer denne Axel lodret paa Grundfladen, er Keglen ret, i modsat Tilfælde skiæv. Ved Høiden i en Kegle forstaaes Toppunktets Afstand fra Grundfladen, der i den rette Kegle er Axlen selv, men i den skiæve en fra Toppen paa den

den forlængede Grundflade fældet lodret Linie, der altid er mindre end Axlen.

Till. 3. Den rette Kegle *AKG* (Fig. XL) kan man forestille sig at blive til, naar den retvinklede Triangel *AKC* dreier sig om sin ene Cathete *KC* som en ubevægelig Axel.

§. 129.

Tænkes en Halvcirkel *AFD* (Fig. XLIV) at dreie sig om sin ubevægelige Diameter *AB* indtil den igien kommer i sin første Beliggenhed, saa er det legemlige Rum, igiennem hvilket den har bevæget sig, en Kugle (sphæra). Peripherien af Halvcirklen har beskrevet Kuglens krumme Overflade; alle Punkter i denne, som *KFH*, ligge derfor ligelangt fra Centrum i Halvcirklen, der tillige er Kuglens Center, da deres Afstand er Halvcirklens Radius; enhver saadan Afstand fra Kuglens Centrum til Overfladen kaldes Kuglens Radius, og det dobbelte deraf Kuglens Diameter.

Till. 1. En Kugle kunde ogsaa defineres, at være et legemligt Rum, indsluttet af en eeneste krum Flade saaledes, at ethvert Punkt i denne var ligelangt fra et vist Punkt inde i Kuglerummet, der kaldes Centrum.

Till

Till. 2. Lodrette Linier, som *IG*, *LC*, *NF* (Fig. XLIII). vil ved deres Omdreining om *AB* beskrive Cirkler, der blive parallele med hinanden.

III. Om Prismer og Cylindere og deres Udmaaling.

§. 130.

Læres. Prismer, hvis Grundflader ere ligedanne og ligestore (congruente), hvis Sideflader have samme Boining mod Grundfladerne, og hvis Hoider ere ligestore, passe i hinanden (congruunt).

Beviis. Lægges Grundfladen af det ene paa Grundfladen af det andet, saa falde Sidefladerne, da de ere antagne at have samme Boining mod Grundfladerne, ogsaa sammen; og da de øverste Endepunkter af Sidelinierne alle falde i een Plan, saa falder og den anden Grundflade af det ene sammen med den af det andet Prisme ɔ: alle Grændser af begge Prismer falde sammen eller de passe i hinanden.

§. 131.

§. 131.

Læres. Ethvert Parallelepipedon (§. 126 Till. 3) *PR* (Fig. XXXIV. d.) bliver ved en Plan *RNPS*, der skiærer de to modstaaende Planer efter deres Diagonaler *RS* og *NP* deelt i to ligestore tresidede Prismer.

Beviis. Da de paa Grundfladen staaende Sideflader ere parallele, og altsaa Linierne *NR* og *PS* parallele (§. 121), saa ere Linierne *NP* og *RS* med dem i samme Flade *NRSP*. Er nu 1) Parallelepipedet *OT* ret og Siderne lodrette paa Grundfladen, saa lægges Prismet *PQ* saaledes paa *MR*, at den fælles Flade *NRSP* falder paa sig selv, men i omvendt eller modsat Stilling, saa at Punktet *P* falder paa *N* og *N* paa *P*, *S* paa *R* og *R* paa *S*, saa falder *OQ* paa *MT*, Fladen *OR* paa *PT* og *OS* paa *NT*. Begge Prismer passe saaledes paa hinanden ɔ: ere congruente. 2) Antages derimod Parallelepipedet skiævt, saa har *OQ* den samme Bøining mod den nederste Flade som *MT* har mod den øverste. Lægges derfor igien Prismet *OS* paa Prismet *NT*, saaledes at den fælles Flade *NRSP* falder paa sig selv, men paa den Maade, at *P* falder paa *R* og *N* paa *S*, saa falder *NR* paa *SP*, Fladen *OS* paa *NT*, og *NQ* paa *MS*; og saaledes passe ogsaa her begge Prismer i hinanden ɔ: ere congruente.

Till. Det tresidede Prisme *NOPSRQ* er Halvparten af Parallelepipedet *OP*, der har samme Høide, men dobbelt saa stor Grundflade.

§. 132.

Læres. Skiæres et Prisma *ABCEDF* (Fig. XXIX) med en Plan *acb*, der er lagt parallel med dens Grundflader *DEF* og *ACB*, saa forholde de afskaarne Stykker *aDEFbc* og *AacbBC* sig som deres Sidelinier *Da* og *aA*, og Snittet selv, Planen *acb*, bliver congruent med Grundfladerne.

Beviis 1) Deles *Aa* ind i aliqvote Dele, hvoraf et vist Antal ogsaa indeholdes i *ad*, og der giøres igiennem alle Delingspunkter Snitte, parallele med Grundfladen, da inddeles Prismet *ACBE* derved i saamange smaae Prismer som *AD* indeholder aliqvote Dele; alle disse vilde, naar deres Grundflader lagdes paa hinanden, være congruente, og af disse maatte indeholdes i *ACBc* og i *acbE* saamange som der var Dele i *Aa* og *aD*. Var endog *Aa* og *aD* incommensurable Linier, saa kunde dog den aliqvote Deel tages saa liden, at

Fei-

Feilen blev umærkelig (§. 58. Till. 1), og følgelig Prism. $ACBc$: Prism. $acbE = Aa : aD$.

Beviis 2) Da efter Betingelsen acb er parallel med ACB, og Aa parallel med Bb, saa er Ab et Parallellogram og $AB = ab$; ligesaa $AC = ac$ og $CB = cb$, altsaa $\Delta\, acb = \Delta\, ACB$.

Till. Prismer paa congruente Grundflader, mod hvilke deres Sider have samme Bøining, forholde sig som disse Sider, følgelig ogsaa som de lodrette Linier, der kunde fældes imellem deres Grundflader. Er Prismet ret, ere disse lodrette Linier selv Sidelinier.

§. 133.

Læresætn. Parallelepipeda, der staae paa samme Grundflade $ABCD$ (Fig. XXX) og have samme Høider eller staae imellem to parallele Planer, ere ligestore.

Beviis 1) Antage vi, at Parallelepipederne ere AG og AM, og at deres Sideflader BG og GM, AH og AK ligge i de parallele Planer $BGCM$ og $FADK$, saa sees let, at de tresidede Prismer $FAILEB$ og $HDKMGC$ paa Fladerne FAI og HDK ere ligestore (§. 130 og §. 34). Borttages

tages nu fra begge disse det tresidede Prisme $HOILGN$ og til begge lægges Prismet $AODCNB$, saa har man Parallelep. AG = Parallelep. AM.

Beviis 2) Antages Parallelepipederne over Grundfladen $ABCD$ at være AG og Am, og altsaa Fladerne BG og Bm, AH og Ak ikke at ligge i samme Plan, da tegnes et Parallelepiped AM, hvis Sider BM og AK ligge i samme Planer som BG og AH i Parallelepipedet AG, men Siderne DM og AL i samme Planer som Dm og Al i Parallelepip. Am, saa er det klart af Beviis 1, at Parallelep. AM = Parallelep. AG, og ligesaa Parallelep. AM = Parallelep. Am, følgelig og $AG = Am$.

Till. 1. Saavel for Parallelepipeder som for Prismer i Almindelighed, at de, naar de staae paa samme eller ligestore Grundflader og have samme Høide, ere ligestore, kunde Beviset maaskee fatteligere, skiøndt mindre strengt, føres saaledes: Ethvert Snit i et Prisme, parallel med Grundfladen, frembringer en Plan ligestor med Grundfladen (§. 132), hvor end Snittet skeer; giøres altsaa parallele Snit igiennem to saadanne Prismer eller Parallelepipeder (thi ethvert tresidet Prisme er Halvparten af et Parallelepiped, der har samme Høide og dobbelt saa stor Grundflade (§. 131. Till.)),

 der

der have samme eller ligestore Grundflader, blive alle disse ved Snittene frembragte Flader ligestore, og saaledes de to Udstrækninger af Prismerne ligestore overalt; men Høiden var antaget ligestor, altsaa alle tre Udstrækninger af to saadanne Prismer eller Parallelepipeder ligestore. Men to legemlige Rum, der have alle tre Udstrækninger ligestore, ere fuldkomne ligestore.

Anm. Saaledes findes Beviset ført i Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger.

Till. 2. Ogsaa kunde denne Sætning saaledes bevises: Man tænke sig begge Parallelepipeder eller Prismer giennemskaarne med Planer i en uendelig liden Afstand fra hinanden; derved vilde i dem begge frembringes ligemange uendelig smaae Parallelepepeder eller Prismer, der vilde blive ligestore (§. 130). Men ligemange ligestore Elementer eller Dele maae frembringe ligestore Hele.

§. 134.

Læres. Parallelepipeder paa ligestore, men ikke ligedanne Grundflader ere ligestore (ɔ: indslutte ligestore Rum), naar de have ligestore Høider.

Beviis 1. Lad de ligestore Grundflader i begge Parallelepepeder $ACDB$ og $DEGF$ (Fig. XXX. a.) antages at have ligestore Vinkler, de lade sig da let bringe i en saadan Beliggenhed mod hinanden som Figuren viser; ere nu Sidefladerne over CD og DG og over DB, og DE i samme Planer, og disse forlænges, da vil Prismet over Grundfladen AHI = Prismet over IHF (§. 132); borttages nu fra begge disse de ligestore Prismer over DBI og DIG samt over DCH og DEH, saa bliver tilbage Parallelepipederne over Grundfladerne $ACDB$ og $DEFG$, der saaledes maae være ligestore. (Arithm. §. 38. 4.). Have Sidefladerne i de givne Parallelepipeder ikke den her anførte Beliggenhed, da kan for de givne substitueres andre Parallelepipeda, hvor Sidefladerne have den anførte Beliggenhed (§ 133) og Beviset dog blive gieldende.

Beviis 2. Vare Grundfladerne i de givne Parallelepipeda vel ligestore, men ikke ligevinklede som $KCDL$ og $DEFG$ (Fig. XXX. a.), saa forvandles $KCDL$ til $ACDB$ (§. 36), som er ligevinklet med $DEFG$. Nu er Parallelepipedet over $KCDL$ ligestort med det over $ACDB$, naar de efter Betingelsen have samme Høide (§. 133), og Parallelepipedet over $ACDB$ = Parallelepipedet over $DEFG$, altsaa Parallelepipedet over $KCDL$ = Parallelepipedet over $DEFG$.

§. 135.

Læref. To Parallelepepeda P og Π (Fig. XXXIV. a-b.) forholde sig til hinanden som Producterne af deres Længde, Brede og Høide, eller ere i et sammensat Forhold af deres Længde, Brede og Høide.

Beviis. Da alle Parallelepepida kan forandres til retvinklede (§. 134), saa behøver Beviset allene at føres for disse.

Man construerer et Parallelepepid p (Fig. XXXIV. c.), hvis Høide $KM = AD$, Brede $IK = AC$, Længde $KL = FG$, og et Parallelepepid π (Fig. XXXIV. d.), hvis Høide $OQ = KM = AD$, Brede $NO = EF$, Længde $OP = KL = FG$. Nu sammenlignes først P med p, og da Fladen $CD = IM$ (ved Construction), saa er $P:p = AB:KL$ (§. 132. Till.). Derpaa sammenlignes Parallelepepidet p med π, og da her (ligeledes ved Construction) $OQ = KM$ og $OP = KL$, saa er Fladen $KF = OS$. Antages nu disse for Grundflader, saa er $p:\pi = IK:NO = AC:EF$ (§. 132. Till.).

Frendeles: Sammenlignes Parallelepepediet π med Π, i hvilke $OP = FG$, $NO = EF$ (ved Construction), altsaa Fladen $FN = OM$; antages disse for Grundflader, saa have vi (§. 132 Till.) $\pi:\Pi = OQ:FH = AD:FH$. Vi have altsaa følgende Proportioner:

$$P:p = AB:FG$$
$$p:\pi = AC:EF$$
$$\pi:\Pi = AD:FH$$

altsaa $P:\Pi = (AB \times AC \times AD):FG \times EF \times FH)$ (Arithm. §. 74. Till. 1) ɔ: Parallelepipederne P og Π forholde sig til hinanden som Producterne af deres Længder, Breder og Høider.

Till. 1. Antages nu $AB = FG$, $AC = EF$, saa vilde (Arithm. §. 73. Anm.) $P:\Pi = AD:FH$ ɔ: Parallelepipeda, hvis Længde og Brede ere ligestor, forholde sig som deres Høide (eller, hvis to Dimensioner ere lige, forholde sig som den tredie).

Till. 2. Antages $(AB \times AC) = (FG \times EF)$, saa er $P:\Pi = AD:FH$; eller antages $(AC \times AD) = (EF \times FH)$, saa er $P:\Pi = AB:FG$ ɔ: naar Grundfladerne ere ligestore, forholde Parallelepipeda sig som deres forskiellige Høider; ere derimod Høiderne ligestore, forholde Parallelepipederne sig som deres forskiellige Grundflader; thi vi havde $P:\Pi = (AB \times AC \times AD):(FG \times EF \times FH)$. Antages nu $AD = FH$,

$= FH$, saa er $P : \Pi = (AB \times AC) : (FG \times EF) = AK : FN$.

Till. 3. Antages i Parallelepipedet P, $AB = AC = AD$, og i Π ligeledes $FG = FE = FH$, og begge at være retvinklede, saa ere de Cuber eller Tærninger (§. 126 Till. 4). Da vi have beviist, at $P : \Pi = (AB \times AC \times AD) : (FG \times FE \times FH)$, saa er under dens Betingelse $P : \Pi = AB^3 : FG^3 = AC^3 : FE^3 = AD^3 : FH^3$ ɔ: Cuber eller Tærninger forholde sig til hinanden som Cubiktallene af deres Sidelinier.

Till. 4. Hvad i denne og foregaaende §. er lært om Parallelepipeda gielder om alle Arter af Prismer; thi et tresidet Prisme er Halvparten af et Parallelepipedum (§. 131); hvad der altsaa gielder om det Hele, gielder og om dets Halve. Men et mangesidet Prisme (Fig. XXXVII) kan, naar dets Grundflade $ABCDE$ ved Diagonaler inddeles i Triangler og over Diagonalerne fuldføres Parallelogramer, deles i saamange tresidede Prismer som Grundfladen har Triangler; hvad der nu gielder om ethvert af disse Prismer især, gielder og om deres Summa, som er det mangesidede Prisme. Denne almindelige Sætning er saaledes beviist: at Prismer, der staae over ligestore Grundflader og have ligestore Hoider, ere ligestore.

§. 136.

Forkl. At udmaale en given Størrelse er egentlig at finde Forholdet imellem den og en vis antagen bekiendt Størrelse af samme Art, der kaldes Maal eller Maalestok (§. 93). Til Legemers eller legemlig Rums Udmaaling har man antaget Tærningen til Maal eller Maalestok; og at udmaale et Parallelepipedum, Prisme o. s. v. er intet andet, end at undersøge, hvor ofte en antagen Tærning (der kaldes en Kubikfod, Kubiktomme, Kubikalen o. s. v., eftersom enhver af dens Sidelinier er en Fod, Tomme eller Alen) kan indeholdes eller omlægges deri; eller at finde Forholdet imellem den antagne Tærning og det givne Parallelepipedum.

§. 137.

Opgave. At beregne Indholden af, eller at udmaale et retvinklet Parallelepipedum Π (Fig. XXXIV. a).

Opløsn. Man maaler Grundfladens Længde FG, Brede EF og Parallelepipedets Høide, som er den lodrette Linie FH, med samme Længdemaal; de derved fundne Tal multipliceres med hinanden, og Productet er et Tal, som viser hvor mange

Gange den antagne Tærning, hvis Sidelinie bruges til at udmaale Længde, Brede og Høide, indeholdes i det givne Parallelepiped. Da Productet af Længde og Brede giver Grundfladens Indhold i Qvadratmaal (§. 96), saa kan Opløsningsreglen ogsaa blive denne: man multiplicerer Grundfladens Qvadrat-Indhold med Parallelepipedets lodrette Høide.

Beviis. Maalestokken være Tærningen KE (Fig. XXXI), hvis Side KN antages for Eenheden (Fod, Tomme, Alen), saa have vi følgende Proportion (§. 136):

Tærningen KE : Parallelep. $\Pi = KN \times NM \times ME : EF \times FG \times FH = 1 : EF \times FG \times FH$ ɔ: Productet af Parallelepipedets Længde, Brede og Høide udtrykker, hvor ofte den antagne Tærning kan indeholdes eller omlægges i Parallelepipedet.

Anderledes. Er Tærningens Sidelinie det antagne Længdemaal, saa maae der kunde paa Parallelepipedets Grundflade eller i et Lag sættes saa mange Tærninger som Productet af Linierne FG og EF angiver (§. 96); men af saadanne Lag maae der kunde være saa mange som Høiden FH indeholder Dele; multipliceres derfor det fundne Product (Antallet af Tærninger i et Lag) med Høiden (Antallet af Lag), saa udkommer Mængden af de Tærninger, der opfylde det hele legemlige Rum af det givne Parallelepiped.

Lad f. Ex. Længden af Grundfladen FG være $= 7{,}6^I$, Breden $EF = 4{,}31^I$, Høiden af Parallelepip. $FH = 8{,}9^I$, saa er Indholdet $= 7{,}6^I \times 4{,}31^I \times 8{,}9^I = 291{,}5284$ Kubikfod.

Till. 1. Var det givne Parallelepipedum en Kubus, og altsaa alle dens Sidelinier ligestore ɔ: $FG = FE = FH$, saa vilde, efter den anførte Opløsning, dets Indhold være $= FG \times FG \times FG = FG^3$ d. e. Man finder den legemlige Indhold af en Tærning ved at maale een af dens Sidelinier og kubere det fundne Tal (Arithm. §. 52). Sættes til Ex. Sidelinien $= a$, saa er Indholden a^3; og da $\sqrt[3]{a^3} = a$, saa findes Sidelinien til en Tærning ved at udtrække Kubikroden af den givne Indhold.

Anm. Dette er Anledning til Navnet Kubiktal, der altid udtrykker Indholdet af en Tærning, hvis Sidelinie er Tallets Kubikrod.

Till. 2. Bruges nu Decimal-Inddeling (§. 93), saa sees let af det Anførte, at en Kubikrode bliver 1000 Kubikfod, en Kubikfod 1000 Kubiktommer o. s. v. Derimod efter Duodecimal-Inddeling er en Kubikfod 1728 Kubiktommer, en Kubiktomme 1728 Kubiklinier.

Till.

Till. 3. Ved Kubikmaal har Decimal-Inddelingen samme Fordeel som ved Qvadratmaal (§. 97. Till. 3); det større Maal forvandles til det næstfølgende mindre, blot ved at tilføie tre Nuller, og det mindre til det næstforegaaende større ved at afskiære fra høire Side tre Cifre, eller ved at multiplicere og dividere med 1000. Saaledes er $75^{\circ}394^{I}638^{II}526^{III} = 75394638526^{III} = 75,394638526^{\circ}$. Bruges Duodecimal-Inddeling, maae man ved Forandring af større Maal til næste mindre multiplicere, og af mindre til næstforegaaende større dividere med 1728.

Till. 4. Sammenligning imellem Decimal- og Duodecimalmaal, samt det enes Forvandling til det andet, skeer ganske efter §. 94; kun at, naar Foden antages uforandret, man sætter 1000 Tommer for 10 og 1728 for 12, saa at $1000y = 1728z$.

Till. 5. Til at reducere forskiellige Landes Kubikmaal tages Kubiktallene af de i Tabellen (§. 93) anførte Forholdstal, og Reductionen skeer efter Arithm. §. 77. 3.

§. 138.

Opgave. At beregne Indholdet af ethvert Prisme.

Opløsn. Man beregner Grundfladens Indhold (§. 98, 99 og 100) og multiplicerer den med Prismets Høide.

Beviis 1) Er Prismet tresidigt, som *NOPRSQ* (Fig. XXXIV. d.), da er det Halvparten af Parallelepipedet *OT* (§. 131), som har samme Høide, men Grundfladen $OM = 2 \Delta NOP$. Parallelepipedets Indhold findes ved at multiplicere Grundfladen $2 \Delta NOP$ med Høiden; Prismets altsaa, som er det Halve deraf, ved at multiplicere ΔNOP med Høiden.

2) Er Prismet mangesidet, som *ABCDH* (Fig. XXXVII), kan det, ved at lægge Planer efter Diagonalerne i dets Grundflader, inddeles i saamange tresidede Prismer som Grundfladen faaer Triangler. Ethvert af disse kan beregnes efter No. 1, og deres Summa er hele Prismets Indhold, der ogsaa findes med eet, naar hele Grundfladen multipliceres med Høiden.

Till. 1. Ligedanne Prismer ere de, hvis Grundflader ere ligedanne plane Figurer, og hvis Sidelinier have samme Boining mod Grundfladerne, og hvis Høider forholde sig som Grundfladernes eensliggende Sider; deres Indhold forholde sig derfor som Kubiktallene af deres Høider, eller to eensliggende Sider.

Till.

Till. 2. Have to Prismer ulige Grundflader, som kunde være a, α og ulige Høider b, β, men dog ligestor Indhold, d. e. $ab = \alpha\beta$, saa er $a:\alpha$ $\beta:b$ ɔ: deres Grundflader og Høider ere reciproqve proportionale (Arithm. §. 71. Till. 2).

Till. 3. Sættes Indholdet af et vist Prisme $= A$, Grundfladen $= a$, Høiden $= b$, saa kan, naar af disse tre Stykker de to ere givne, det tredie findes, nemlig $A = ab$, $b = \frac{A}{a}$, $a = \frac{A}{b}$.

Exemp. En Mand indhøster 120 Traver Korn; hvert Neg optager tre Kubikfod Rum. Til at huse dette bygger han en Lade, som han giør 20 Fod bred, 12 Fod høi til Taget; fra Taget til Nykningen er Høiden det Halve af Bygningens Brede. Hvor lang behøves nu Laden at være?

§. 139.

Lære s. Ethvert Snit igiennem en Cylinder $ABCD$ (Fig. XXXIX) med en plan parallel med dens Grundflader frembringer en Cirkel LMN ligestor med Grundfladen, hvis Centrum K er i Cylinderens Axel FG.

Beviis. Enhver Sidelinie (Linie i dens Overflade) i Cylinderen, som AC, er parallel med Axlen FG (§. 127); en Plan, lagt igiennem $ACGF$, vil skiære de parallele Planer af Snittet og Grundfladerne i de parallele Linier AF og LK, der blive ligestore (§. 30): En anden Plan, lagt igiennem EH og FG, vil ligeledes skiære Grundfladen og Snittet i de parallele og ligestore Linier EF og MK. Saaledes er $AF = LK$, $EF = MK$, men $AF = EF$, følgelig $LK = MK$. Punkterne L og M ligge saaledes i Omkredsen af en Cirkel, der har K til Middelpunkt.

Till. Cylindere ere i et sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider; men ligedanne Cylindere (de, hvis Axler have samme Bøining mod Grundfladen) forholde sig som Kubiktallene af deres Høider eller Diameterne i deres Grundflader.

§. 140.

Opgave. At beregne Indholdet af en Cylinder.

Opløsn. Grundfladens Indhold beregnes i Qvadratmaal (§. 105) og multipliceres med Cylinderens Høide.

Beviis. Da Cylinderen kan ansees som et uendelig mangesidet Prisme, saa indsees Opløsningens Rigtighed af det, der er sagt om Prismer §. 138.

Till.

Till. 1. Sætte vi Grundfladens Diameter i en Cylinder $= d$, dens Høide a, saa findes Cylinderens Indhold $= \frac{ad^2}{4}\pi = ad^2 \times \frac{1}{4}\pi =$ (naar $\frac{1}{2}d = r$) $ar^2\pi$ (§. 105).

Till. 2. Tænke vi os en større udvendig Cylinder, hvis Grundflades Radius var $= R$, og en mindre indvendig, hvis Radius $= r$, og der spørges om Indholdet af Røret eller det der bliver tilbage naar den mindre Cylinder som et tomt Rum borttages fra den større, saa er, naar Høiden antages $= a$, det legemlige Indhold af Røret $= aR^2\pi - ar^2\pi = a(R^2 - r^2)\pi$.

Exemp. At udregne det legemlige Rum af et Blyrør som er 20 Fod langt, 8^{III} tyk i Metal, og hvis Aabning er en Fod i Diameter. Her er $R = 6^{I}, 8^{III}$, $r = 6^{II}$, $a = 200^{II}$; efter Formen findes Indholdet $= 200\ (46,24\square^{II} - 36\square^{II}) \times 3,14159 = 6430,72$ Kubiktomme, omtrent 6,43 Kubikfod. Antages nu, efter hydrostatisk Forsøg, Blye elleve Gange tungere end Vand, en Kubikfod, efter dansk Maal og Vægt, altsaa at veie 11×62 Pund, saa kan, naar Prisen af et Pund Blye er bekiendt, Værdien af Roret herefter beregnes.

Till. 3. Sættes en Cylinders Indhold $\frac{ad^2}{4}\pi$ (Till. 1) $= A$, saa er $4A = ad^2\pi$ og $\frac{4A}{d^2\pi} = a$, og $d = \frac{4A}{a\pi}$. Man kan saaledes af en Cylinders Indhold og givne Diameter beregne dens Høide, og ligeledes af Indholdet og Høiden beregne dens Diameter.

Till. 4. Høiden af to Cylindere være a og α, deres Diameter d og δ, saa forholde Cylinderne sig som $ad^2 : \alpha\delta^2$; ere nu Høiderne lige ($a = \alpha$), forholde de sig som $d^2 : \delta^2$; men er $d = \delta$, er Forholdet som $a : \alpha$.

Antager man nu en Cylinder k, hvis Høide er a og Diameter d, til Maalestok, saa at $ad^2 = 1$; er da i en anden Cylinder C, Høiden $\alpha = na$ og Diameterne $\delta = md$, saa er Indholdet af den anden Cylinder $C = nm^2 \times K$, thi $K : C = ad^2 : \alpha\delta^2 = ad^2 : nam^2d^2 = 1 : nm^2$; er altsaa $K : C = 1 : nm^2$, saa er $C = nm^2 \times K$. Sættes til Exempel $\alpha = 3a$ eller $n = 3$, $\delta = \sqrt{13} \times d$ eller $m = \sqrt{13}$, og altsaa $m^2 = 13$, saa er $C = 3 \times 13K = 39K$ ɔ: Den til Maalestok antagne Cylinder K indeholdes i C saa ofte som Eenheden indeholdes i Produktet af C's Høide og Qvadratet af dens Diameter.

§. 141.

Forklar. En Rudestok (virgula pithometrica seu cylindrica) er et Instrument til at udmaale Antallet af et vist Maal (Kander, Potter) af flydende Legemer i cylindriske Kar. Rudekunst (stereometria doliorum) er den Kunst, at kunde ved Hielp af det nævnte Instrument bestemme Antallet af Kander, Potter af et flydende Legeme i et Kar.

Anm. Rudekunst bruges ogsaa for Legemers Udmaaling i Almindelighed.

§. 142.

Opgave. At indrette og bruge en Rudestok.

Oplosn. Man lade sig forfærdige en mindre Cylinder, der holder nøiagtig en Kande eller Pot; en saadan være K (Fig. XLV). Dens Diameter AB afsættes paa Catheterne af en retvinklet Triangel GEF, saa at $EF = EG = AB$; nu afsættes $EH = FG$, $EK = FH$ o. s. v., saa er EG, EH og EK o. s. v. Diameteren til en Cylinder, der med Høide AC holder 1, 2, 3 o. s. v. Kander (§. 140. Till. 3, 4), da $FGq = FEq + EGq$, $FHq = FEq + EHq$ o. s. fr. Paa den ene Side af en Stok, der har Form af et langt og smalt Parallelepiped, afsættes disse Linier EG, EH, EK o. s. v., da ved G sættes Tallet 1, ved H 2, ved K 3 o. s. v., paa den anden Side Maalet AC. Man maaler nu Diameteren af den Cylinder, hvis Indhold man vil vide, med Rudestokken EK og dens Høide med AC; Produktet af begge disse Tal angiver Mængden af Kander eller Potter (eftersom K antages at holde en Kande eller en Pot), som Cylinderen indeholder, man vilde udmaale.

Anm. De Kar, hvori flydende Legemer almindelig befindes, have sielden en fuldkommen cylindrisk Dannelse, men ere almindelig mere ophøiede i Midten og smallere mod Enderne, saa at man skielner imellem Spundsdiameteren og Endediameteren, og antager almindelig Indholden af Karret (Tønde, Oxehoved, Pibe o. s. v.) at være liig Indholdet af en Cylinder, hvis Diameter var en Middelstørrelse mellem Spunds- og Endediameteren, og hvis Længde den samme som Karrets. Begge disse Diametere maales derfor med den Side af Rudestokken, hvorpaa EG, EH o. s. v. ere afsatte, og af de fundne Tal tages Middeltallet.

Nøiere Bestemmelse om at beregne Indholdet af Kar af alle Dannelser læres i Algebra.

§. 143.

Opgave. At beregne Overfladen af et Prisme.

Oplosn.

Opløsn. Prismet være BD (Fig. XXIX), Sidefladerne ere Parallelogramer, deres Fladeindhold beregnes efter §. 96, som sammenlagte udgiøre Sidefladen; hertil lægges Grundfladerne, der beregnes efter §. 100. Alt sammenlagt udgiør hele Prismets Overflade.

Till. Er Prismet ret, da findes Qvadratindholdet af alle dets Sideflader ved at multiplicere Perimetren af Grundfladen med Prismets Høide; thi Prismets Høide kan ansees som Grundlinie i Rectanglerne, der ere Sideflader, og Perimetrene af Grundfladerne som Summen af alle disse Rectanglers Høider.

§. 144.

Opgave. At beregne Sidefladen eller den krumme Overflade af en ret Cylinder.

Opløsn. Da Cylinderen er at ansee som et uendelig mangesidet Prisme (§. 127), er dens Overflade en uendelig Mængde Rectangler, der samlede udgiøre en eeneste Rectangel, hvis ene Side (Grundlinie) er Peripherien af Cylinderens Grundflade, og den anden Side (Høiden) er Cylinderens Axel; Fladens Indhold findes altsaa ved at multiplicere Grundfladens Peripherie med Cylinderens Høide.

Till.

Till. Kalde vi som tilforn Cylinderens Diameter d og Høiden a, saa er dens krumme Overflade $= ad\pi = 2ar\pi$ (§. 104), følgelig ligestor med Fladen af en Cirkel, hvis Radius er en Mellemproportional-Linie imellem Cylinderens Høide og Diameter; thi antag Radius i saadan en Cirkel $= \varrho$, saa skal $\varrho^2\pi = 2ar\pi$, følgelig $\varrho^2 = 2ar$, og altsaa $a : \varrho = \varrho : 2r$ og $a : \varrho = \varrho : d$.

IV. Om Pyramider og Kegler og deres Udmaaling.

§. 145.

Læres. Skiæres en Pyramide $abcr$ (Fig. XXXIII) med en Plan, der er lagt parallel med dens Grundflade, da blive Snittene fgh, lmn plane Figurer, der ere ligedanne med Grundfladen.

Beviis. I Fladen arb er $fg \mp ab$, altsaa $ra : rf = ab : fg$, i Fladen arc er $fh \mp ac$, altsaa $ra : rf = ac : fh$ (§. 60), følgelig $ab : fg = ac : fh$ eller $ab : ac = fg : fh$. Paa samme Maade vises, at $bc : ac = gh : fh$, og følgelig Δfgh (Snittet) $\sim \Delta\, abc$ (Grundfladen) (§. 69). For

ethvert

ethvert andet parallel Snit som lmn føres Beviset paa samme Maade.

Till. 1. Antages rq at være en lodret Linie paa Grundfladen abc og Vinklen $rqa = R$, da er den ogsaa lodret paa det parallele Snit fgh og Vinklen $rzf = R$ (§. 120. Till. 2); denne Linie rq er Pyramidens Høide, og rz, rv bestemme Snittenes Afstand fra Toppunktet, og vi have, naar vi betragte Fladen arq, hvor $fz \# aq$, $rq : rz = ra : rf = ab : fg$.

Till. 2. $\Delta abc \backsim \Delta fgh$, altsaa er $abc : fgh = ab^2 : fg^2$ (§. 91), men $rq : rz = ab : fg$ (Till. 1), altsaa $rq^2 : rz^2 = ab^2 : fg^2$ (Algebra §. 57. Till. 2) og $\Delta abc : \Delta fgh = rq^2 : rz^2$. Paa samme Maade vises, at $\Delta fgh : \Delta lmn = rz^2 : rv^2$ ɔ: Flade-Indholdet af Pyramidens Grundflade og de forskiellige dermed parallele Snitte forholde sig som Qvadraterne af deres Afstand fra Pyramidens Top, eller ere i det dobbelte Forhold (ratione duplicata) af deres Afstand fra Toppunktet. (Algeb. §. 57. Till. 1).

§. 146.

Læresf. Giøres igiennem to Pyramider $ABCDR$ og $abcr$ (Fig. XXXII og XXXIII), hvis Grundflader ere ligestore ($ABDC = abc$) og hvis Høider ere ligestore ($RE = rq$), parallele Snitte i samme Afstand fra Toppunktet ($RZ = rz$), da ere Fladerne af disse Snitte ligestore ($FGHI = fgh$).

Beviis. $ABCD : FGIH = RE^2 : Rz^2$, og $abc : fgh = rq^2 : rz^2$ (§. 144. Till. 2); efter Betingelsen er $RE = rq$, $RZ = rz$, altsaa $RE^2 = rq^2$, $RZ^2 = rz^2$, og følgelig $abc : fgh = ABCD : FGIH$; nu er $abc = ABCD$ (efter Betingelsen), altsaa $fgh = FGIH$ (Arithm. §. 69, 70).

Till. Er saaledes alle i begge Pyramider i samme Afstand skete Snit ligestore, saa er overalt deres Udstrækning i Længde og Brede ligestor; men da deres Høider ogsaa var antaget ligestor, saa er deres Udstrækning baade i Henseende til Længde, Brede og Høide ligestor; men Legemer, der i Henseende til alle tre Dimensioner ere ligestore, opfylde ogsaa ligestore legemlige Rum ɔ: ere selv ligestore. Og vi have saaledes udledt den vigtige Sætning: **Pyramider paa ligestore Grundflader med lige Høider ere ligestore.**

Anm. Samme Slutning kunde ogsaa udledes saaledes: Man tænke sig igiennem begge de paa ligestore Grundflader staaende Pyramider giorte ligemange Snit i en uendelig liden Afstand; derved vilde begge Pyramiderne blive udskaarne i ligemange uendelig smaae Pyramidestykker. Var nu ethvert af disse ligestore, blive Pyramiderne ligestore; men deres Grundflader vare lige (§. 145), deres Høider ligeledes, og et saadant Pyramidestykke imellem to i en uendelig liden Afstand lagte Planer kan antages liigt et Prisme af samme Grundflade og Høide; men Prismer paa samme Grundflade og med samme Høide ere ligestore (§. 133), altsaa og Pyramidestykkerne; og da der af disse maatte i begge Pyramider, der antages at have samme Høide, være ligemange, ere Pyramiderne selv ligestore.

§. 147.

Læres. Enhver tresidet Pyramide er en tredie Deel af et tresidet Prisme *ABCDEF* (Fig. XXXVI), der har samme Grundflade og Høide.

Beviis. Man trække i Sidefladerne Diagonalerne *FC*, *CD* og *DA*. Nu er $\triangle AFD = \triangle ABD$ (§. 30. Till. 3), altsaa Pyramiderne *ABDC* og *ADFC*, der have deres fælles Toppunkt i *C*, ligestore (§. 145); men Pyramiden *ACDF* er den samme som *ADFC*, altsaa Pyramid. *ABDC* = Pyramid. *ACDF*.

Fremdeles er $\triangle AFC = \triangle FEC$, følgelig Pyramiderne *FECD* og *FACD*, der have deres fælles Toppunkt i *D*, ligestore (§. 145). Nu var Pyramiden *ACDF* = *ABDC*, altsaa og Pyramid. *FECD* = *ABDG*. Prismet indeholder saaledes tre Pyramider der ere ligestore, enhver af dem følgelig en tredie Deel af Prismet.

Anm. Ved virkelig at giennemskiære et tresidet Prisme, eller at sammensætte tre Pyramider til et Prisme, giøres denne Sætning mere indlysende.

Till. 1. Da et mangesidet Prisme (Fig. XXXVII) lader sig dele i saa mange tresidede som der ere Triangler i Grundfladen, saa er ogsaa en mangesidet Pyramide Tredieparten af et mangesidet Prisme.

Till. 2. Pyramider ere i et sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider; ere altsaa Høiderne lige, forholde de sig som Grundfladerne, og ere Grundfladerne lige, som Høiderne.

§. 148.

Læres. Ethvert Snit igiennem en Kegle *ADB* (Fig. XLI) med en Plan *FG*, parallel med dens Grundflade *AB*, er en Cirkel, hvis Centrum *N* ligger i Keglens Axel.

Beviis. Fladen *DCB* skiærer de parallele Planer af Snittet og Grundfladen i Linierne *NK* og *CB*, der blive parallele, og altsaa $DN : DC = NK : CB$ (§. 60). Ligeledes skiæres Snittet og Grundfladen af Planen *DCL* i Linierne *NP* og *CL*,

CL, og vi have $DN : DC = NP : CL$, følgelig $NK : CB = NP : CL$; men $CB = CL$, altsaa og $NP = NK$. Fladen FPK er saaledes en Cirkel, der har sit Centrum i N.

Till. 1. Grundfladen i en Kegle forholder sig til Fladen af Snittet som $CB^2 : NK^2$ (§. 92. Till.) $= DC^2 : DN^2 = DI^2 : DG^2$ ɔ: Fladerne af Snittene forholde sig som Qvadraterne af deres Afstand fra Toppunktet.

Till. 2. Da Keglen kan ansees for en uendelig mangesidet Pyramide, ligesom Cylinderen for et uendelig mangesidet Prisme, saa følger, at Keglen er Tredieparten af en Cylinder, der har samme Grundflade og Høide.

Till. 3. Kegler ere i et sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider; er den eene af disse ligestor, forholde de sig som den anden.

§. 149.

Opgave. At beregne Indholdet af enhver Pyramide eller Kegle.

Opløsn. Man beregne Grundfladens Indhold og multiplicere den med Tredieparten af Høiden.

Beviis. Prismets og Cylinderens Indhold er et Produkt af Grundflade og Høide (§. 138 og 140), Pyramiden og Keglen ere Tredieparten af et Prisme og Cylinder af samme Grundflade og Høide (§. 145), altsaa deres legemlige Indhold en Trediepart af Produktet af Grundflade og Høide.

Till. Er Grundfladen i en Pyramide eller Kegle b, dens Høide a, saa er ab Indholden af et Prisme eller Cylinder, der er det Tredobbelte af Pyramiden eller Keglen, og altsaa Pyramidens eller Keglens Indhold $= \frac{1}{3}ab = b \times \frac{1}{3}a$.

§. 150.

Opgave. At beregne Indholdet af en ret afkortet Kegle $ADHG$ (Fig. XL).

Opløsn. 1. Af den største og mindste Diameter AG, DH og Høiden CE, der antages at være givne, beregnes den Høide, Keglen vilde have om den var heel, (her Linien CK) ved denne Proportion $(AG - DH) : AG = CE : CK$. ɔ: Differencen imellem begge Diametre forholder sig til den største, som Høiden af den afkortede til Høiden af den hele Kegle.

Beviis. I Fladen af Trianglen AKC trækkes Linien DB parallel med KC, saa er $AB : AC = BD : CK$ (§. 60), men $AB = AC - DE$ og $BD = CE$, altsaa $(AC - DE) : AC = CE : CK$ og $(2AC - 2DE) : 2AC = CE : CK$, deraf $(AG - DH) : AG = CE : CK$.

2.) Af

2.) Af den fundne Høide CK og Grundfladen beregnes nu Indholdet af den hele Kegle AKG (§. 147), dernæst Indholdet af det borttagne Stykke, som er Keglen DKH (hvis Høide $KE = KC - EC$); denne subtraheres fra den heles Indhold, og man har Indholdet af den affortede.

Till. 1. Sættes $AC = r$, $DE = \varrho$, $EC = a$, og $CK = x$, saa findes $x = \frac{ar}{r - \varrho}$ og $KE = x - a = \frac{ar}{r - \varrho} - a = \frac{ar - ar + a\varrho}{r - \varrho} = \frac{a\varrho}{r - \varrho}$, følgelig Indholdet af den affortede Kegle $= \frac{1}{3}\frac{ar}{r - \varrho} \times r^2\pi - \frac{1}{3}\frac{a\varrho}{r - \varrho} \times \varrho^2\pi = \frac{r^3 - \varrho^3}{r - \varrho} \times \frac{1}{3}a\pi$. Da fremdeles $\frac{r^3 - \varrho^3}{r - \varrho} = r^2 + r\varrho + \varrho^2 = (r + \varrho)^2 - r\varrho$, saa er den affortede Kegles Indhold $= ((r + \varrho)^2 - r\varrho)\frac{1}{3}a\pi$.

Anm. Mange Huusholdnings-Kar og Maal have Form af affortede Kegler og maae beregnes saaledes. Nogenlunde rette Træstammer beregnes ogsaa nøiagtigst, naar de ansees for affortede Kegler, da de blive smallere opad. Lad til Ex. den underste Diameter eller Giennemsnit i en saadan Stamme forneden være 20", foroven eller den mindste Diameter 16", Længden 36', saa findes Indholden efter den anførte Form $= (18^2 - 80) \times 120 \times 3{,}14 = 91939{,}20$ Kubiktommer $= 91{,}9392$ Kubikfødder.

Till. 2. En affortet Pyramide kan ansees som en affortet Kegle af samme Høide og ligesaa stor Grundflade. Man beregner derfor Grundfladernes Indhold i Qvadratmaal og søger Radius til Cirkler af samme Flade-Indhold r og ϱ (§. 105 Till. 3); da Indholden efter hvad der er sagt om den affortede Kegle kan beregnes.

§. 151.

Opgave. At beregne Overfladen af en Pyramide.

Opløsn. Sidefladerne, der alle ere Triangler, beregnes efter §. 98; Grundfladen, der altid er en retlinet Figur, beregnes ligeledes efter den plane Geometrie: disse sammenlagte give hele Pyramidens Overflade.

Till. 1. Er Pyramiden saaledes, at alle de lodrette Linier i enhver af dens Sideflader ere lige lange, da er Summen af alle Sidefladerne et Produkt af Grundfladens Perimeter og det Halve af en af disse lodrette Linier. I en affortet Pyramide ere Sidefladerne Trapezier, og beregnes efter §. 99.

Till.

Till. 2. Da en Kegle er en uendelig mangesidet Pyramide, dens Sideflade altsaa uendelig mange smaae Triangler, hvis Høide er Keglens Sidelinie, saa er Keglens hele Sideflade ligestor med en Triangel, hvis Grundlinie er Peripherien af Grundfladen ABG (Fig. XL), og hvis Høide er Sidelinien AK; den beregnes altsaa efter §. 98 og 105. Grundfladen er en Cirkel, og beregnes efter §. 105. Disse sammenlagte give Keglens hele Overflade.

Till. 3. Sidefladerne af en affortet Pyramide ere Trapezier, og beregnes efter §. 99.

Till. 4. Kalde vi Sidelinien i Keglen l, Radius i Grundfladen r, saa er den krumme Sideflade $= 2r\pi \times \frac{1}{2}l = lr\pi$. Tænke vi os nu en Cirkelflade, hvis Radius er ϱ og hvis Overflade $\varrho^2\pi = lr\pi$, saa er $\varrho^2 = lr$ og $l : \varrho = \varrho : r$. D. e. Keglens krumme Sideflade er ligestor med Fladen af en Cirkel, hvis Radius er en Mellemproportional-Linie imellem Keglens Sidelinie og Grundfladens Radius.

Till. 5. Sidefladen af en affortet ret Kegle $ADHG$ (Fig. XL) er et Produkt af DG og Peripherien af et igiennem Midten af DG parallel med Grundfladen giort Snit (§. 63 og 99).

V. Om Kuglen og dens Udmaaling.

§. 152.

Læres. Skiæres en Kugle med en Plan, bliver Giennemsnittet altid en Cirkel, hvis Centrum er i den lodrette Linie fældet fra Kuglens Centrum paa den skiærende Plan.

Beviis. Paa den skiærende Flade IK (Fig. XLIII) fældes en lodret Linie CG fra Kuglens Centrum, og fra G forskiellige rette Linier GE, GB, GD. Da CG er lodret paa Planen IK, saa er Vinklen $CGD = CGB = CGH = R$; trækkes nu Linierne CB og CD, saa er $CD^2 = CG^2 + GD^2$ og $CB^2 = CG^2 + GB^2$ (§. 37), men $CD = CB$, da de ere Radier i Kuglen, følgelig $CD^2 = CB^2$ og CG er den samme, altsaa $CD^2 - CG^2 = CB^2 - CG^2$; ɔ: $GD^2 = GB^2$ og $GD = GB$. Paa samme Maade vises, at alle de rette Linier fra G til Kuglens krumme Overflade ere ligelange, og altsaa Fladen $IDKB$ en Cirkel og G dens Centrum.

Till. 1. Gaaer Snittet igiennem Kuglens Centrum, som LCM, da ere alle Linier i dets Flade, der trækkes fra C til Omkredsen, som CL CM, tillige Radier i Kuglen, og følgelig ligestore.

Snitte igiennem Kuglens Middelpunkt frembringe derfor Cirkler, hvis Radier ere Kuglens Radier; de ere alle ligestore og faae Navn af Stor-Cirkler.

Till. 2. Ethvert Snit, som ikke gaaer igiennem Kuglens Centrum, frembringer en mindre Cirkel, der er desmindre jo længer den er borte fra Centrum; saaledes er Cirklen IH (Fig. XLIII) mindre end ON, thi $CB^2 = CG^2 + GB^2$ og $CN^2 = CI^2 + IN^2$. Nu er $CB^2 = CN^2$ (da CB og CN er Radier i Kuglen), altsaa $CI^2 + IN^2 = CG^2 + GB^2$, men $CI^2 < CG^2$ og følgelig $IN^2 > GB^2$ (Arithm. §. 38), og $IN > GB$, følgelig Snittet OIN større end IGK.

Till. 3. Giøres flere Snitte i en Kugle parallele med hinanden, som IK, ON, LM (Fig. XLIII), da falde deres Centra G, I, C, F i samme rette Linie AD. Endepunkterne af denne Linie A og D, der staae ligelangt borte fra Stor-Cirklen LM, kaldes Poler saavel til den som til de mindre Cirkler, og Linien AD Axlen.

§. 153.

Læres. Lægges igiennem Polerne AB til flere parallele Cirkler KL, FG, HI (Fig. XLIV) to eller flere Cirkler $ALGB$, AEB og ADB, saa ere de af Parallel-Cirklerne imellem dem liggende Buer ligedanne.

Beviis. Den rette Linie AB er Stor-Cirklernes Giennemsnits-Linie og Axlen for Parallel-Cirklerne; trækkes nu i Fladen AEB Linierne IH og CE og i Fladen ADB Linierne IM og CD, saa ere disse lodrette paa AB, og følgelig parallele. Af samme Grund er ogsaa i Fladen AGB Linierne IL og CG parallele, følgelig ere Vinklerne LIH og GCE ligestore og Buerne HL og EG ligedanne; ligeledes ere Vinklerne HIM og ECD ligestore og Buerne HM og ED ligedanne.

Anderledes. Da AB er lodret paa alle disse Linier, saa er enhver af de nævnte Vinkler Bøinings-Vinkler for begge Planer, og altsaa ligestore.

Till. 1. Ere AG og AE Qvadranter, saa er $FODG$ en Stor-Cirkel, der staaer lodret paa begge Qvadranterne og gaaer igiennem begges Poler, ligesom og begge Qvadranterne gaae igiennem dens Poler.

Till. 2. Begge Cirklernes AGB og AEB Bøining mod hinanden, eller den Vinkel de giøre med hinanden, bestemmes i Grader ved Buerne HL og EG.

§. 154.

§. 154.

Læres. En Kugles Indhold (legemlige Rum) er to Trediedele af en Cylinder, der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Diameter (en omskrevet Cylinder.)

Beviis. Forestiller man sig en Qvadrant ABC (Fig. XLII) at dreie sig om AB saalænge til den falder i den Plan, hvorpaa den fra Begyndelsen stod lodret; en Qvadrat DQ at dreie sig paa samme Maade om $DE = AB$, og en retvinklet Triangel FGT om $FG = DE = AB$, saa vil Qvadranten danne en Fierdedeel af en Halvkugle, hvis Radius er AB, Qvadraten Fierdedelen af en Cylinder, der har til Radius i Grundflade og til Høide den samme Linie AB eller Kuglens Radius, og Trianglen Fierdedelen af en Kegle af samme Høide og samme Radius til Grundflade. Staae nu disse tre Legemer over samme Flade AB og man giennemskiærer dem med en Plan parallel med AB, saa ere alle Snittene LIK, MNO, TVX Qvadranter (§. 139, 152), og følgelig ligedanne Figurer (§. 92. Till. 2), hvis Flader forholde sig som Qvadraterne af deres Radier LK, MO, VX. Tænker man sig nu over samme Flade AB en Qvadrat ac, hvis Sidelinie ab antages $= AB$

$= AB$ og i den en Qvadrant $alkc$, og, ved at trække Diagonalen bt, den retvinklede Triangel abt. Saa vil, naar den med AB parallele Plan ogsaa gaaer her igiennem, yk være $= LK$, $yo = MO$, $yx = TX$. Men $bk^2 = yk^2 + yb^2$ (§. 37), og da $bk = bc = yo$, saa er $bk^2 = yo^2$. Fremdeles er $ba : at = by : yx$ (§. 60), men $ba = at$ (efter Betingelse), altsaa $by = yx$ og $by^2 = yx^2$. Indsættes disse Værdier for bk^2 og by^2 i den første Æqvation, saa faae vi $yo^2 = yk^2 + yx^2$. Efter Constructionen er $yo = MO$, $yk = LK$ og $yx = TX$, altsaa er $MO^2 = LK^2 + TX^2$ og $MO^2 - TX^2 = LK^2$. Deraf end videre $\frac{1}{4}MO^2\pi - \frac{1}{4}TX^2\pi = \frac{1}{4}LK^2\pi$, det er Qvadranten MNO — Qvadr. TVX = Qvadr. LIK. Da dette kan paa samme Maade bevises hvor endog den skiærende Plan tænkes lagt i disse tre Legemer, saa følger, efter hvad der er sagt om Prismer (§. 133. Till. 1) og om Pyramider og Kegler (§. 146), at Fierdedelen af Cylinderen DQ — Fierdedelen af Keglen FTG er = Fierdedelen af Halvkuglen ABC. Kalde vi for Korthеds Skyld Fierdedelen af denne omskrevne Cylinder $\frac{1}{4}C$, af Halvkuglen $\frac{1}{4}K$ og af Keglen $\frac{1}{4}H$, saa have vi $\frac{1}{4}C - \frac{1}{4}H = \frac{1}{4}K$, og deraf $C - H = K$; ɔ: Cylinderen er, naar

Keg-

Keglen er fradraget, ligestor med den halve Kugle. Men Keglen er $\frac{1}{3}$ af en Cylinder der staaer over samme Grundflade og Høide, altsaa $H = \frac{1}{3}C$, men $C - H = K$, altsaa $C - \frac{1}{3}C = K$ og $K = \frac{2}{3}C$; ɔ: den halve Kugle er ligestor i Indhold med to Trediedele af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Radius. Paa samme Maade kan Beviset føres for den anden halve Kugle og en ligedan Cylinder; følgelig er en heel Kugle $= \frac{2}{3}$ af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Diameter.

Till. Kuglen er altsaa det Dobbelte af en Kegle der har til Grundflade dens Stor-Cirkel og til Høide dens Diameter. Forholdet imellem Kegle, Kugle og Cylinder af den anførte Beskaffenhed er altsaa som imellem Tallene 1, 2, 3.

§. 155.

Opgave. At beregne Indholdet eller Rummet af en Kugle, hvis Diameter er givet.

Opløsn. Man beregner Kuglens Stor-Cirkel (§. 105), denne multipliceres med Diameteren, og af dette Product tages de to Trediedele (§. 140 og 154).

Till. 1. Kalde vi Kuglens Diameter d, saa er Stor-Cirklens Flade $= \frac{1}{4}d^2\pi$ (§. 105. Till. 1) og dette multipliceret med $d = \frac{1}{4}d^3\pi$ og deraf $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}d^3\pi = \frac{2}{12}d^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$. Kuglens Indhold findes altsaa ved at multiplicere en sjette Deel af Diameterens Kubus med π eller Diameterens Kubus med $\frac{1}{6}\pi$. Dette sidste Udtryk vilde i Praxis være det beqvemmeste, da $\frac{1}{6}\pi$ er et uforanderligt Tal, der eengang for alle kunde bestemmes.

Lad til Ex. en Kugles Diameter være $= 8''$, dens Indhold er da $\frac{1}{6} \times 8^3 \times \pi = 85\frac{1}{3} \times 3{,}14159 = 268{,}08235$ Kubiktommer. Eller $8^3 \times \frac{1}{6}\pi = 512 \times 0{,}52359 = 268{,}08238$ Kubiktommer.

Till. 2. Kalde vi Kuglens Indhold A og som før dens Diameter d, saa have vi $A = \frac{1}{6}d^3\pi$; deraf $d^3 = \frac{6A}{\pi}$ og $d = \sqrt[3]{\frac{6A}{\pi}}$. Man kan derefter, naar Kuglens Indhold er givet, finde dens Diameter.

Till. 3. Tænke vi os en Kugle A, hvis Diameter er d, saa er $A = \frac{1}{6}d^3\pi$, og en anden Kugle B, hvis Diameter er δ, saa er dens Indhold $\frac{1}{6}\delta^3\pi$; følgelig $A : B = \frac{1}{6}d^3\pi : \frac{1}{6}\delta^3\pi$ og

$A : B = d^3 : \delta^3$ (Arithm. §. 73. Anm.); d. e. Forskiellige Kuglers Indhold forholde sig som Kuberne af deres forskiellige Diametre.

§. 156.

Opgave. At beregne en Kugles krumme Overflade, naar dens Radius eller Diameter er givet.

Opløsn. Af den givne Radius CB (Fig. XLIII. Tab. VI) beregnes Overfladen af Kuglens Stor Cirkel $= CB^2 \times \pi$; denne fire Gange taget udgiør Kuglens Overflade $= 4 \times CB^2 \times \pi$.

Beviis. Antages den rette Vinkel BCD at dreie sig om den ubevægelige lodrette Linie CB, da vil Qvadranten BND beskrive den halve Kugles Overflade og enhver liden Bue af Qvadranten KL beskrive et Stykke af denne krumme Flade; igiennem Middelpunktet af denne Bue N og dens Endepunkter K og L trække man Linierne NP, LH og KF parallele med DC, da de ogsaa blive lodrette paa CB. Lægges nu igiennem N en Tangent LK, som forlænget vilde skiære den forlængede CB i Q, saa vil LQ være Sidelinien, QH Axlen og LH Radius i en lodret Kegle; og KL beskriver et Stykke af denne Kegles Overflade, der (§. 151. Till. 5) findes ved at multiplicere Peripherien af et Snit, giort igiennem Midten af KL parallel med LH, med KL, og altsaa her $= 2\,NP \times \pi \times KL$. Tænke vi os nu Tangenten KL overmaade liden, da er der ingen Forskiel imellem den og Buen KL, altsaa vil det lille Stykke af Kuglefladen, som Buen vil beskrive, ikke være at skiælne fra det Stykke af Keglefladen som Tangenten beskriver, og følgelig dette lille Stykke af Kuglefladen ogsaa være $= 2\,NP \times \pi \times KL$ eller $2\,\pi \times NP \times KL$.

Man trækker nu Linien CN, som er lodret paa Tangenten (§. 46) LK, og fælder fra K paa LH den lodrette Linie KM, som skiærer NP i V og er parallel og ligestor med FH. Efter det Anførte er Vinklen $MNK = R$ og NV lodret paa KM, altsaa $KL : KM = CN : NP$ (§. 68 og 71) og $NP \times KL = KM \times CN$ (Arithm. §. 71) $= CB \times FH$. Det lille Stykke Kugleflade, som beskrives af Buen KL, var $= 2\pi \times NP \times KL$, men $NP \times KL = BC \times FH$, altsaa det nævnte Stykke Kugleflade $= 2\pi \times CB \times FH$, hvor CB er Kuglens Radius og FH en overmaade liden Deel deraf. Forestiller man sig nu Radius CB deelt i lutter saadanne smaae Dele, hvortil høre ligesaamange smaae Buer, saa er er ethvert Stykke af Kuglefladen et Product, hvis ene Faktor er Størrelsen $2\pi \times CB$ og den anden en saadan liden Deel af Radius som FH, følgelig den halve Kugelflade et Product af $2\pi \times CB$ og Summen af alle disse smaae Dele; men Summen af alle disse smaae Dele udgiør Radius CB, og saaledes er den halve Kugelflade $= 2\pi \times CB^2$ og den hele Kugelflade altsaa $= 4\pi \times CB^2$; men en Stor-Cirkels Overflade $= \pi \times CB^2$, altsaa en Kugles Overflade ligestor med Fladerne af fire dens Stor-Cirkler.

Till. Tænke vi os en Qvadrat $DABC$, som dreier sig om CB, saa beskriver AD Overfladen af en omskrevet Cylinder (§. 154), hvis Overflade er, naar dens Høide er CB, $= 2\pi \times CB^2$ (§. 144), og sættes Høiden $= 2CB$, bliver Fladen $= 4\pi \times CB^2$, og følgelig ligestor med Kuglens Overflade.

§. 157.

Opgave. At beregne Kuglens Indhold, naar dens Overflade og Radius ere givne.

Opløsn. Man multiplicerer den givne Overflade med en Trediedeel af Radius, saa har man Kuglens legemlige Indhold i Kubikmaal.

Beviis.

Beviis. Tænker man sig paa en Kugle en stor Cirkel og en af dens Qvadranter ved at halveres deelt i mange smaae Dele, og igiennem Stor-Cirklens Poler og disse Punkter andre Cirkler (hvoraf Stykkerne fra Polen til Stor-Cirklen ogsaa vil blive Qvadranter) lagte, hvorpaa de samme Dele afsættes; imellem disse Punkter trækkes rette Linier eller Chorder, og derpaa rette Linier trukne fra Kuglens Center til ethvert af Delingspunkterne, saa opkommer Pyramider, hvis Toppunkt er i Kuglens Center og hvis Grundflader ere de imellem Korderne til de smaae Buer paa Stor-Cirklerne indsluttede Flader. Gientager man dette ved de øvrige Qvadranter i denne og den anden Halvkugle, saa er i Kuglen beskrevet et Polyheder, der er sammensat af lutter Pyramider, hvis Grundflader udgiøre Polyhedrets Overflade og hvis Toppunkt er Kuglens Centrum. Fortsættes Halveringen af Buerne i det Uendelige, da falde Korder og Buer sammen, og Pyramidernes Grundflader blive Stykker af Kuglefladen og deres Høide Kuglens Radius. Den hele Kugle bestaaer altsaa af Pyramider, hvis Grundflader udgiøre Kuglens Overflade og hvis Høide er Kuglens Radius; men Indholdet af en Pyramide findes ved at multiplicere Grundfladen med en Trediedeel af Høiden (§. 149), altsaa Kuglens

lens Indhold ved at multiplicere dens Overflade med en Trediedeel af Radius eller med en Siettedeel af dens Diameter. Kalde vi Indholden A, Overfladen S, og Diameteren d, saa er $A = \frac{1}{6}dS$.

Till. 1. Vi fandt (§. 155) Kuglens Indhold A af dens Diameter d at være $= \frac{1}{6}d^3\pi$; sammenligne vi dette Udtryk for Kuglens Indhold med det i denne § oven fundne $\frac{1}{6}dS$ (hvor S betyder den krumme Overflade), saa faae vi denne Ligning: $\frac{1}{6}dS = \frac{1}{6}d^3\pi$, og deraf $dS = d^3\pi$ og $S = d^2\pi$; ɔ: Kuglens krumme Overflade findes ved at multiplicere Diametens Qvadrat med π; men en Stor-Cirkels Overflade er $= \frac{1}{4}d^2\pi$ og $d^2\pi = 4 \times \frac{1}{4}d^2\pi$, altsaa Kuglens Overflade ligestor med fire af dens Stor-Cirkler.

Anm. Man kan saaledes finde Kuglens Indhold ved først at beregne Overfladen, og omvendt finde Overfladen ved først at beregne Indholden. Jeg har fremsat begge Demonstrationer, skiøndt jeg ikke holder det for nødvendigt at forklare dem begge for Begyndere, men overlader det til Læreren at vælge, hvilken han troer den fatteligste.

Till. 2. Indholdet af ethvert Kuglestykke (Kuglesegment), som det der dannes ved Omdreining af Figuren alv, findes ved at beregne Indholdet

holdet af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide av, og derfra subtrahere Indholdet af den affortede Kegle imellem at og vs. Ligeledes er det Stykke af Kuglefladen, der dannes af Buen al, saa stort som Overfladen af en Cylinder, hvis Høide er Kuglestykkets av og hvis Grundflade er Kuglens Stor-Cirkel. Herpaa grundes den almindelige Sætning: Tænker man sig en om en Kugle omskrevet Cylinder, og igiennem begge giøres flere Snitte parallele med Cylinderens Grundflade, da vil de imellem to saadanne parallele Snit liggende Dele af Kuglefladen (Belter v. Zoner) være ligestore med den krumme Overflade af det imellem samme Planer liggende Stykke af den omskrevne Cylinder. Ligeledes indsees let, at et Kugle-Udsnit (Kuglesector) er $\frac{2}{3}$ af en Cylinder, hvis Grundflade er Kuglens Stor-Cirkel og Høiden det til Udsnittet hørende Affnits Høide.

Anm. 1. Disse ere de Regler, efter hvilke Legemer, hvis Dannelse kan forklares af den elementare Geometrie, kan udmaales og beregnes. Egentlige regulaire (regelmæssige) Legemer ere saadanne, hvis Hiørner (solide Vinkler) ere ligestore (ɔ: dannes af ligemange ligestore plane Vinkler) og hvis Sideflader err ligestore regulaire plane Figurer. Man indseer let, at de flade Vinkler, som danne et Hiørne, maae tilsammen udgiøre en mindre Sum end 360°,

da

da de ellers vilde falde i een Plan og intet Hiørne danne. Af denne Forklaring sees, at kun fem regulaire Legemer ere muelige, nemlig:

1) Tetraeder (tetraedron), regulair firesidet Legeme, hvor Sidefladerne ere ligesidede Triangler og ethvert Hiørne dannes af tre Vinkler, der hver er 60°, deres Sum altsaa 180°.

2) Octaeder (octaedron), regulair Ottekant, hvis Sideflader ere ligesidede Triangler og hvis Hiørner dannes af fire Vinkler, hver 60°, deres Sum altsaa 240°.

3) Icosaeder (icosaedron), regulair Tyvekant, hvis Sideflader ogsaa ere ligesidede Triangler og fem Vinkler paa 60° danne ethvert Hiørne; deres Sum er altsaa 300°.

Af Triangler kan ingen flere regulaire Legemer dannes, da sex Vinkler, hver paa 60°, vilde udgiøre 360°, og altsaa ingen Hiørne danne.

4) Terningen (Cubus, Hexaeder) regulair Sexkant, hvor Sidefladerne ere Qvadrater og hver Hiørne dannes af tre rette Vinkler, hvis Sum er 270°.

5) Dodecaeder (dodecaedron), regulair Tolvkant, hvis Sideflader ere regulaire Femkanter, og enhver solid Vinkel dannes af tre Vinkler, hver paa 108°, deres Sum altsaa 324°.

Anm. 2. Meget irregulaire Legemers Indhold findes ved følgende Kunstgreb: Man lægger dem i et Kar af en saadan Dannelse, at dets Indhold nøiagtig kan beregnes, fylder Karret derpaa enten med Vand eller tør Sand. Tager man nu Legemet op, vil

vil Vandet eller Sandet synke, og det Rum, det nu optager mindre end før og som let kan beregnes, er det irregulaire Legemes Indhold. I Hydrostatiken læres, hvorledes man af Legemernes specifiqve Vægt kan finde deres geometriske Indhold eller legemlige Rum.

§. 158.

Forklar. At kubere et geometrisk Legeme er at forvandle det til en Tærning (Kubus), eller at finde Sidelinien til en Kubus, der har samme legemlige Indhold som det givne Legeme. Findes denne Linie ved Construction, kaldes det geometrisk Kubatur; derimod er det arithmetisk, naar man finder denne Sidelinie ved Beregning. At forvandle en Figur til en anden, er ved Construction eller Regning af den givnes Dimensioner at bestemme den søgte, hvor kun den ene eller anden Dimension er givet.

§. 159.

Opgave. At finde Siden til en Tærning, som indeholder en given Tærning et vist Antal (n) Gange.

Opløsn.

Opløsn. Lad Siden i den givne Tærning være a, saa er Indholden a^3, den søgtes Indhold altsaa na^3 og dens Sidelinie $l = \sqrt[3]{na^3} = a\sqrt[3]{n}$. Er nu $n = 2$, saa er Siden til den dobbelt saa store Tærning $l = a\sqrt[3]{2}$; er $n = 3$, saa er $l = a\sqrt[3]{3}$ o. s. v.

Till. 1. Da forskiellige Kugler forholde sig som Kuberne af deres Diametre (§. 155. Till. 3), saa er ogsaa, naar en Kugles Diameter er $= d$, Diameteren af en n Gange saa stor Kugle $D = d\sqrt[3]{n}$. Dette anvendes i Artilleriet til at forfærdige Caliberstokke.

Till. 2. Man seer let af denne ene Opgave, hvorledes ethvert Legeme ved Regning kan kuberes. Er f. Ex. Diameteren i en Kugle d, saa er dens Indhold $\frac{d^3\pi}{6}$ (§. 155) og Sidelinien i en ligesaa stor Tærning $= \sqrt[3]{\frac{d^3\pi}{6}} = d\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$.

§. 160.

§. 160.

Opgave. At forvandle en Kegle, hvis Dimensioner er bekiendt, til en Cylinder, hvis Høide er bestemt.

Opløsn. Lad Høiden af Keglen være α, dens Grundflades Diameter δ; og Cylinderens givne Høide a, dens Grundflades søgte Diameter x. Keglens Indhold er da $= \frac{1}{4}\delta^2\pi \times \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{12}\delta^2\alpha\pi$ (§. 149), den søgte Cylinders Indhold $= \frac{1}{4}x^2a\pi$ (§. 140); da Indholden af begge skal være lige, saa er $\frac{1}{4}x^2a\pi = \frac{1}{12}\delta^2\alpha\pi$. Af denne Æqvation søges Værdien for x, og vi faae $x^2a = \frac{1}{3}\delta^2\alpha$ og $x^2 = \frac{d^2\alpha}{3a}$, følgelig x (den søgte Diameter i Cylinderens Grundflade) $= \delta\sqrt{\frac{\alpha}{3a}}$ (Algebra §. 39.).

Till. 1. Paa samme Maade kan en given Cylinder forvandles til en Kugle af lige Indhold. Kalde vi Cylinderens Høide a, dens Diameter d, og Kuglens søgte Diameter x, saa er Cylinderens Indhold $\frac{1}{4}d^2a\pi$ (§. 140) og Kuglens Indhold $= \frac{1}{6}x^3\pi$ (§. 154), altsaa $\frac{1}{6}x^3\pi = \frac{1}{4}d^2a\pi$,

$x^3\pi =$

$x^3\pi = \frac{3}{2}d^2a\pi$, $x^3 = \frac{3}{2}d^2a$, og $x = \sqrt[3]{\frac{3d^2a}{2}}$.

Till. 2. Efter samme Fremgangsmaade kan enhver af disse Figurer forvandles til et Prisme eller Pyramide, og omvendt.

Plan

Plan Trigonometrie.

Indledning.

§. 1.

Geometrien har lært os, hvorledes man af tre Stykker i en Triangel, hvoriblandt der dog maae være een Side, kan ved Tegning, efter en formindsket Maalestok, frembringe den hele Triangel, hvori de øvrige Stykker bestemme sig selv; Vinklerne blive nemlig ligesaastore som de ere i den virkelige Triangel, og Linierne blive efter den antagne formindskede Maalestok hvad de naturlig ere i det større Maal. Men ere i en saadan Triangel en Linie eller Vinkel overmaade liden i Sammenligning med de øvrige, da er denne Tegning i høi Grad underkastet Feil. Til Exempel forestille man sig en Triangel, hvis ene Side er Jordkuglens Radius, og de to andre Sider Linier, der, trukne fra denne Radius's Endepunkter, skulde løbe sammen i Solens Centrum. Endog med den allermindste Maalestok og med den allerstørste Nøiagtighed vilde det være umueligt at tegne den saaledes, at man kunde, endog kun med nogenlunde Vished, bestemme Skiæringspunktet af de næsten parallel med hinanden løbende Linier. Dette blev Anledning for Mathematikerne, da de vilde vove dem til at udmaale hele Verdensbygning, at opfinde en Videnskab, hvorved man, naar de tre Ting, der bestemme en Triangel, nøiagtigen vare udmaalte, blev i Stand til ved sikker Regning med en tilstrækkelig Nøiagtighed at kunde finde de øvrige Stykker endog uden Tegning. Denne Videnskab kaldte man **Trigonometrie** (Prolegom. §. 4.).

Anm. Ligesom Geometrie vel egentlig først er bleven til for Landmaalings Skyld, men siden har viist en langt mere udbredt Nytte, saaledes have Opmaalinger paa Himlen først givet Anledning til Trigonometrie, som dog nu ikke blot i Astronomie, men i alle Dele af den anvendte Mathematik viser den største Nytte og meest udbredte Anvendelse.

§. 2.

I Geometrien have vi udmaalt Vinklerne ved at sammenligne dem med en ret Vinkel; og da der var samme Forhold imellem de fra forskiellige Vinkelspidser med samme Radius beskrevne Cirkelbuer som imellem Vinklerne, saa udtryktes egentlig Vinklernes Størrelse i Buer, og man sammenlignede Buerne i Stedet for Vinklerne. Saa rig-

tig som dette er for at kunde angive alle muelige Vinklers Forhold til hinanden og deres Forhold til en ret Vinkel, saa lidet tiener det til at kunde i alle Tilfælde udtrykke Forholdet imellem Sider og Vinkler i en Triangel, og derved finde en fast Regel, hvorved de i Trigonometrien søgte ubekiendte Ting kunde findes. Ved et Exempel vil jeg oplyse det. I den ligesidede Triangel BFC (Fig. XLVII) vilde det være rigtigt, at Siderne forholde sig som de modstaaende Vinkler;

thi $BF : BC = 1 : 1$

og Vinklen $C : F = 60^\circ : 60^\circ = 1 : 1$

(Geometr. §. 29. Till.), altsaa $BF : BC = C : F$ (Arithm. §. 69 og 70). Fælde vi derimod fra C en lodret Linie paa BF, da bliver Vinklen $FCA = ACB = \frac{1}{2}C$ og $FA = AB = \frac{1}{2}FB$ (Geomet. §. 13). I $\triangle AFC$ er altsaa $FC : FA = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$, men Vinklernne $FAC : FCA = 90^\circ : 30^\circ = 3 : 1$, og følgelig vilde Proportionen $FC : FA = FAC : FCA$ være urigtig, og man vilde her ikke kunde slutte, at Siderne forholdt sig som de modstaaende Vinkler; man søgte derfor at udtrykke Vinklernes Størrelse og Forhold til hinanden ved rette Linier, som almindelig kaldes trigonometriske Linier.

I. Om de trigonometriske Linier.

§. 3.

Forklar. Beskrives fra Toppunktet C af en Vinkel ACB (Fig. XLIV.) med en vilkaarlig Radius en Cirkel, da vil et Stykke af Cirkelpeଅpherien AB ligge imellem Vinklens Sider; fældes nu fra et af denne Bues Endepunkter (det Punkt, hvor den ene af Vinklens Sider skiærer den) B eller A en lodret Linie BD paa den modstaaende Vinkel-Side AC, da kaldes Linien BD Sinus for Buen AB og for Vinklen ACB. Det Stykke Linie AD, Sinus afskiærer af Radius, kaldes den forkeerte Sinus (sinus versus).

Till. 1. Forlænges Sinus BD indtil den skiærer Cirklen i I, saa er $DK = DB$, fordi $BC = CI$, $CD = CD$, og ved D rette Vinkler (Geomet. §. 23), følgelig $BD = \frac{1}{2}BI$; men BI er en Korde der underspender Buen BAI det dobbelte af Buen BA: Altsaa er Sinus til enhver Bue det halve af en Korde til en dobbelt saa stor Bue. For Ex. var Buen GAE (Fig. XLVII) $= 60°$, altsaa $GE = CG = r$ (Geomet. §. 49. Till. 2) saa var $GD =$ Sin. $30° = \frac{1}{2}r$.

Anm.

Anm. Af denne Egenskab ved Sinus, at den er $\frac{1}{2}$ Chorde, har nogle villet udlede Aarsagen, hvorfor denne Linie betegnes med Ordet *sinus*; det skulde nemlig fra Begyndelsen været semis inscriptæ ($\frac{1}{2}$ Chorde), som blev skrevet s. ins., og endelig forkortet til sin., hvoraf ved en latinsk Endelse var blevet sinus. Mig forekommer denne Derivation søgt, og jeg finder det meget rimeligt, at det er det latinske Ord sinus som er valgt, da den rette Linie, det bruges til at udtrykke, vel ikke selv er en Bugt eller Bøining, men tiener dog til at udtrykke Størrelsen af en Bugt eller Bøining.

Till. 2. Sinus til Buen BFK (Fig. XLIV), der er større end $90°$, er ogsaa Linien BD; thi efter Definitionen skal den være en lodret Linie fra B eller K paa den modstaaende Side (som her maa forlænges), men fra B gives ingen anden lodret Linie paa CK end BD. Men Buerne BFK og BA udgiøre $180°$; vilde man derimod fælde den fra K, vilde den falde paa den forlængede BC, og den samme Linie vilde da blive Sinus baade for Buen BFK og Ki, der ogsaa samlede udgiøre $180°$. Altsaa have to Buer, der samlede udgiøre $180°$, een og samme Sinus.

Till. 3. Lader man Punktet B nærme sig efterhaanden fra A til F og tænker sig Chorder igiennem disse forskiellige Punkter lodrette paa AC, da vil Chorderne voxe fra 0, da B var i A, indtil

til B falder i F, da Chorden bliver $=$ Diameteren FL; derfra tage de igien af og blive igien o naar Punktet B falder i K saaledes, at Chorderne i lige Afstand fra Diameteren FL paa begge Sider, som f. Ex. BI og bi, blive ligestore (Geomet. §. 42). Hvad der er sagt om de hele Chorder, gielder ogsaa om de halve; Sinuserne voxe altsaa, naar deres Buer voxe fra A til F ɔ: fra 0° til 90°. I F var Chorden ligestor med Diameteren, Sinus altsaa for Buen AF eller 90° ligestor med Radius. Bliver Buen større end 90°, da bliver Chorderne mindre jo mere Punktet b nærmer sig K eller jo mere Buen nærmer sig til 180°. Sinuser til Buer fra F til K ɔ: 90° til 180°, tage altsaa af, naar Buerne tage til, indtil endelig Sinus for 180° er $=$ o.

Till. 4. Skiærer CB forlænget Cirklens Omkreds i i, saa er di Sinus til Buen $AFKi$, men $di = BD = bd$; en Bue over 180° har altsaa en Sinus, der er ligesaa stor som Sinus til den Bue, der udgiør hvad den første er større end 180°. Saaledes have her Buen $AFKi$ samme Sinus som $Ki = AB$. Det samme gielder for Buen $AFKI$, der er over 270°, der har til Sinus $DI = bd = BD =$ Sin. Buen BFK, der er ligestor med Buen KiI, dens Overskud over 180°.

Till.

Till. 5. Sinus til alle Buer fra 0° til 360° er saaledes mindre end Radius, undtagen Sinus for 90° og for 270°. De voxe i den første Qvadrant fra o til de blive $= r$, tage af i den anden fra r til o, voxe i den tredie fra o til r, og tage af i den fierde fra r til o. Man kan derfor ansee alle Sinuser som Brøk eller Dele af Radius, som derfor kaldes sinus totus (den hele Sinus), da Sinus for 90° og for 270° ogsaa er ligestor med Radius (Till. 3 og 4), bruges ogsaa Udtrykket sinus totus for Sinus 90° og Sinus til 270°.

Till. 6. Da alle Sinuser for Buer imellem 180° og 360° falde paa den modsatte Side af Diameteren AK, saa kan de i Sammenligning med dem paa den anden Side ansees som nægtende (Arithm. §. 39). Det samme sees af Maaden, hvorpaa de fremkomme (Till. 4). Radius eller sinus totus være r, $AB = 60° = Ki = IA$, altsaa $ABFKi = 180° + 60° = 240°$ og $AFKiI = 360° - 60° = 300$, saa er Sin. $60° = + BD$, men Sin. $240° =$ Sin. $300° = - di$ (men $di = BD$). Det Modsatte i de to Sinuser BD og di ligger i deres Direction; der ere modsat, hvad enten man paa enhver gaaer fra det Punkt, hvor de skiære AK til det hvor de støde mod Buen eller fra dette til hiint; men

men ved *di* og *DI* ere Directionerne ikke modsatte, de have derfor eens Tegn.

Sinuserne ere altsaa bekræftende i første og anden Qvadrant, og nægtende i tredie og fierde.

Till. 7. Sinus verſ. voxer for Buer fra 0° til 180°, fra 0 til den bliver ligestor med Diameteren, og tager igien af for Buer fra 180° til 360°, fra Diameteren til 0; den er altid bekræftende.

§. 4.

Forklar. Trækkes til et af Buens Endepunkter *A* eller *B* en Tangent (Geom. §. 46. Till. 1), som *GA*, og den anden Vinkelside eller den Radius som skiærer Buen i *B* forlænges til den overskiærer Tangenten i *G*, da er *AG* Tangent og *CG* Sekant til den bestemte Bue *AB* og til Vinklen *ACB*.

Till. 1. Tangenten til Buen *AFb* er *Ag* = — *AG* efter de antagne Størrelser af disse Buer (§. 3. Till. 1), Tangenten til Buen *AFKi* bliver igien Linien *AG* selv, og Tangenten til Buen *AFKiI* er *Ag* eller — *AG*. Tangenterne er saaledes i første og tredie Qvadrant bekræftende, men i anden og fierde benægtende.

Till. 2. Dreier Linien *CB* sig fra *A* mod *F*, saa bliver Giennemsnitspunktet for Tangenten og Secanten *G* stedse længere borte fra *A*, indtil det endelig, naar *CB* falder sammen med *CF* og bliver parallel med *AG* (Geom. §. 25), bliver uendelig langt borte og ikke kan angives. Dreier *CB* sig videre, indtil *b* f. Ex., saa er det ikke muneligt at den kan skiære *AG* uden saavel den som Tangenten forlænges paa den modsatte Side af Diameteren, da Skiæringspunktet bliver *g*; kommer den derefter til *K*, vil den, forlænget til den modsatte Side, falde sammen med *AC*. Dreier *CB* sig endnu videre indtil *i*, bliver Giennemsnitspunktet igien *G*. Kommer *CB* til *L*, bliver den igien parallel med *AG*; kommer den videre til *I*, saa er Skiæringspunktet igien *G*, og endelig falder den igien sammen med *CA*.

Tangenterne voxe altsaa i den første Qvadrant, og Tangenten til 90° er = ∞; i den anden Qvadrant tage de negative Tangenter af som Buerne voxe, og Tang. 180° = 0; i den tredie Qvadrant voxe igien de bekræftende Tangenter, og Tang. 270° = ∞; i den fierde aftage atter de nægtende, og Tang. 360° = 0.

Till. 3. Secanterne voxe i den første Qvadrant fra *r* til ∞, og ere bekræftende; i den anden tage de af fra ∞ til *r*, og ere nægtende; i den tredie voxe de fra *r* til ∞ og ere bekræftende; i den fierde tage de af fra ∞ til *r*, og ere nægtende.

Anm.

Anm. De hidtil forklarede trigonometriske Linier Sinus, Sinus versus, Tangens og Secans kunde ansees som de trigonometriske Hovedlinier, de følgende derimod som Bilinier.

§. 5.

Forkl. Opreises fra C en Linie CF lodret paa AC, da kaldes Vinklen BCF Opfyldnings-vinkel (Complement) baade til den spidse Vinkel ACB og til den stumpe BCK. Buen BF faaer ogsaa Navn af Complement saavel til Buen AB som til Buen BFK. Sinus til denne Bue BF, som er $DE = DC$, kaldes Cosinus (Complementets Sinus) til Buen AB og til Vinklen ACB.

Till. 1. Cosinus til Buen AFb er Linien $bE = Cd = - CD$ ɔ: Cosinus til en Bue imellem 90 og 180° er ligestor med Cosinus til en Bue, der er ligesaameget under 90° som denne er over, men negativ. Saaledes er her Cosinus for Buen $AB = CD$ og for Buen $ABb = - CD$.

Till. 2. I den første Qvadrant tager Cosinus af naar Buerne voxe indtil den, naar Buen er 90°, bliver $= 0$ eller forsvinder; den er bekræftende. I den anden Qvadrant tager den igien til, indtil Buen er 180°, da Cosinus er $= r$; den er benægtende. I den tredie Qvadrant tager den af som i første, men er benægtende; i fierde Qvadrant voxe den som i anden, og er bekræftende.

§. 6.

§. 6.

Forkl. Complement-Buens eller Vinklens Tangent HF kaldes Cotangent til Buen AB eller Vinklen ACB, og Linien CH Cosecant.

Till. 1. Da Vinklen $AGC = GCF$ (Geom. §. 28) og ved F og A rette Vinkler, saa er $\triangle GAC \sim \triangle HFC$ (Geom. §. 68) og $AG : AC = CF : FH$ eller Tang. $x : r = r :$ Cotang. x og Cotang. $x = \frac{r^2}{\text{Tang. } x}$. For en anden Vinkel y vil Cotangens ligeledes være $= \frac{r^2}{\text{Tang. } y}$; følgelig Cotang. x : Cotang. y = Tang. x : Tang. y. Cotangenterne have derfor i de forskiellige Qvadranter samme Tegn som Tangenterne.

Till. 2. Da $\triangle CBD \sim \triangle CFH$ (Geom. §. 68), saa er $BD : BC = CF : CH$ eller Sin. $x : r = r :$ Cosecans x, altsaa Cosecans $x = \frac{r^2}{\text{Sin. } x}$, og har derfor samme Tegn som Sinus x.

Anm. Benævnes en Bue eller en Vinkel udtrykt i Grader med et Bogstav a, x, y ꝛc., da skrives for Kortheds Skyld sin. x (Sinus for Vinklen eller Buen af x Grader), cos. x (Cosinus), tang. x (Tangenten til Buen eller Vinklen x), cot. x (Co-

tangen-

tangenten), cosec. x (Cosecanten), og sin. vers. x og cos. v. x (Sinus versus og Cosinus versus). Saa ofte Udtrykket sin. x^2, cos. x^2 eller lignende forekomme, da hører Exponenten ikke til Buen x, men til den rette Linie; det skulde derfor egentlig skrives (sin. $x)^2$, (cos. $x)^2$ o. s. v.

§. 7.

Opgave. At bestemme de øvrige trigonometriske Linier for enhver given Vinkel x, naar Radius antages $= r$, og Sin. x er bekiendt.

Opløsn. 1) Den givne Vinkel x være ACB (Fig. XLIV), $CB = r$, og $BD =$ sin. x; vi have da i den retvinklede $\Delta\, BDC$, $DC^2 = BC^2 - BD^2$ (Geom. §. 37), men $DC = DE =$ cos. x (§. 5), altsaa cos. $x^2 = r^2 -$ sin. x^2; deraf cos. $x = \sqrt{r^2 - \text{sin. } x^2}$.

2) sin. vers. x var Linien AD (§. 4), men $CA - CD = AD$, altsaa sin. vers. $x = r -$ cos. x.

3) I den retvinklede $\Delta\, AGC$ er $BD \mathrel{\#} AG$ og (Geomet. §. 60) $CD : DB = CA : AG$ ɔ: cos. x : sin. $x = r$: tang. x og tang. $x = \dfrac{r \times \text{sin. } x}{\text{cos. } x}$. I samme Triangel er CD : $CA =$

$CA = CB : CG$ ɔ: cos. $x : r = r$: sec. x og sec. $x = \dfrac{r^2}{\text{cos. } x}$.

4) I $\Delta\, CHF$ er $BE \mathrel{\#} HF$, og altsaa $CE : EB = CF : FH$ ɔ: sin. x : cos. $x = r$: cot. x og cot. $x = \dfrac{r \times \text{cos. } x}{\text{sin. } x}$. Videre er i samme Triangel $CE : CF = CB : CH$ ɔ: sin. $x : r = r$: cosec. x og cosec. $x = \dfrac{r^2}{\text{sin. } x}$.

5) cosin. vers. $x = FE = CF - CE = r -$ sin. x.

Till. 1. Disse Former vise, at naar Sinus for en Vinkel er givet, lade sig deraf alle de øvrige til samme Vinkel henhørende trigonometriske Linier bestemme. Og skiøndt de vel egentlig kun passe for Buer og Vinkler under 90°, saa kan de, naar blot Tegnene efter de foregaaende §§. forandres, ogsaa anvendes for Buer over 90°. Saaledes er sin. vers. $x = r -$ cos. x; men er det for en Bue over 90°, da er sin. vers. $x = r - (-\text{cos. } x) = r +$ cos. x, thi Cosinus for Buer imellem 90° og 180° ere nægtende (§. 5 Till. 2).

Till.

Till. 2. Ogsaa følger heraf (sammenlignet med §. 3, 4, 5, 6), at to Buer, der samlede udgiøre 180°, have ligestore trigonometriske Linier, naar den eene sin. vers. undtages.

Till. 3. Anvendelsen af de udfundne Former sees tydeligere af et Exempel. Lad Vinklen x være $= 30°$, dens Sinus er da $= \frac{1}{2}r$ (§. 3 Till. 3); og sætte vi $r = 1$ (den almindelige Værdie naar man vil beregne trigonometriske Linier), saa have vi efter den udfundne Form $\text{cos.}\, x = \sqrt{r^2 - \text{sin.}\, x^2}$ her $\text{cos.}\, 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732\ldots}{2} = 0{,}866\ldots$ $\text{sin. vers.}\, x = r - \text{cos.}\, x$, altsaa $\text{sin. vers.}\, 30° = 1 - 0{,}866\ldots = 0{,}134\ldots$ $\text{tang.}\, x = \frac{r \times \text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x}$, følgelig $\text{tang.}\, 30° = \frac{0{,}5}{0{,}866} = 0{,}587\ldots$ o. s. v.

Till. 4. Sættes $x = R$, da er $\text{cos.}\, x = \sqrt{r^2 - r^2} = 0$ (§. 5) og $\text{tang.}\, x = \frac{\text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x} = \frac{1}{0} = \infty$ (§. 4), Secans $x = \frac{r^2}{\text{cos.}\, x} = \frac{1}{0} = \infty$.

§. 8.

Læres. De forskiellige eensnævnede trigonometriske Linier til ligedanne Buer, og altsaa til ligestore Vinkler, forholde sig som de forskiellige Radier, hvormed Buerne ere beskrevne.

Beviis. Fra Toppunktet C i Vinklen ACB (Fig. XLV) beskrives med Radierne CA og Ca de ligedanne Buer AB og ab. Man trækker deres Sinuser BD og bd, Tangenterne AG og aG, Cosinuserne blive da CD og Cd, Secanterne CG og CI, Sin. vers. AD og ad. Fuldføres Buen AB til F og ab til f, bliver HF og hf Cotangenter, men CH og Ch Cosecanter for Buerne AB og ab.

I Trianglen AGC ere Linierne GA, IA, BD og bd parallele, og vi have altsaa følgende Proportioner (Geom. §. 25 og 60):

$CB : Cb = BD : bd$, ɔ: Radierne som Sinuserne
$CA : Ca = AG : ag$, ɔ: Rad. som Tangenterne
$CB : Cb = CD : Cd$, ɔ: Rad. som Cosinuserne
$CA : Ca = CG : Cg$, ɔ: Rad. som Secanterne
$CF : Cf = FH : fh$, ɔ: Rad. som Cotangenterne
$CF : Cf = CH : Ch$, ɔ: Rad. som Cosecanterne
$CA : Ca = CD : Cd$ og deraf (Arithm. §. 73, 3)

$CA : Ca = (CA - CD) : (Ca - Cd)$, og
$CA : Ca = AD : ad$, ɔ: Radierne som de forskiellige sin. vers.

Anm. At dette egentlig for spidse Vinkler eller Buer under 90° førte Beviis ogsaa gielder for stumpe Vinkler eller Buer over 90°, sees let af §. 7. Till. 3.

Till. Har man, som §. 8 er viist, beregnet de trigonometriske Linier for en vis Vinkel eller Bue x under den Betingelse, at Radius $= 1$ og man betegner disse sin. x, tang. x &c.; antages da en anden Radius $= r$ og de trigonometriske Linier for den givne Vinkel, svarende til denne Radius, betegnes med de store Bogstaver Sin. x, Tang. x o. s. v.: saa forholde $1 : r =$ sin. x : Sin. x, og Sin. $x = r \times$ sin. x; ligeledes $1 : r =$ tang. x : Tang. x, og Tang. $x = r \times$ tang. x. Man kan saaledes bruge de til Radius 1 beregnede trigonometriske Linier ogsaa for enhver anden Radius, naar de alle multipliceres med denne. Til Ex.: sin. 30° $= 0{,}5$ (§. 7 Till. 3); sættes nu $r = 10000$, saa er sin. 30° $= 0{,}5 \times 10000 = 5000$, cos. 30° $= 0{,}866$, altsaa cos. 30° $= 0{,}866 \times 10000 = 8660$ o. s. v.

Anm. Det er viist, at alle trigonometriske Linier ere afhængige af Sinus og den antagne Radius, og at de alle, naar Sinus er given, lade sig efter de fundne Formeler beregne. Det staaer tilbage at vise, hvorledes Sinus for enhver Bue findes, naar Radius antages for Eenheden (sættes $= 1$). Da Sinus for enhver Vinkel eller Bue er det Halve af Chorden til en dobbelt saa stor Vinkel eller Bue (§. 3 Till. 1), saa findes Sinuserne ved at søge Chorderne til de dobbelte Buer; disse Chorder, der kan ansees som Sider i regulaire Polygoner, findes for en Deel efter den plane Geometrie (§. 102). Dog er for at indsee Muligheden af fuldstændige (saadanne, hvori findes de trigonometriske Linier for hver Bue i den første Quadrant fra Minut til Minut i det mindste) trigonometriske Tabellers Beregning nødvendigt at giøre sig bekiendt med følgende didhenhørende Sætninger.

§. 9.

Læres. I enhver Triangel ABD (Fig. XLVI) forholde Siderne sig til hinanden som Sinuserne af de modstaaende Vinkler ɔ: $AD : BD =$ Sin. ABD : Sin. DAB.

Beviis. Om Triangelen beskrives en Cirkel (Geom. §. 41) og fra Centrum C trækkes Linierne CA, CD og CB, saa er AD Chorde for Vinklen ACD, og altsaa $\frac{1}{2}AD =$ Sin. $\frac{1}{2}ACD$, men Vinklen $ACD = 2ABD$ og $\frac{1}{2}ACD = ABD$, altsaa $\frac{1}{2}AD =$ Sin. ABD. Paa samme Maade sees, at $\frac{1}{2}BD =$ Sin. DAB. Altsaa er $\frac{1}{2}AD$: $\frac{1}{2}BD$

$\frac{1}{2}BD$ = Sin. ABD : Sin. DAB, men $\frac{1}{2}AD$: $\frac{1}{2}BD$ = AD : BD, følgelig AD : DB = Sin. ABD : Sin. DAB.

§. 10.

Opgave. Naar i en ligebenet Triangel ACB (Fig. XLVIII) af de tre Ting, Grundlinien AB, et af de ligelange Been AC, og Sinus for den halve Vinkel ved Toppen (Sin. $\frac{1}{2}ACB$), de to ere givne, at finde det tredie.

Opløsn. Fra Toppunktet fældes CD lodret paa AB, saa er $AD = \frac{1}{2}AB$ og Vinkl. ACD = $\frac{1}{2}ACB$ (Geomet. §. 13), og $AC : AD$ = Sin. ADC : Sin. ACD ($\frac{1}{2}ACB$), men Sin. $ADC = r = 1$ (§. 3. Till. 3), altsaa $AC : \frac{1}{2}AB$ = 1 : Sin. $\frac{1}{2}ACB$. Følgelig er 1) Sin. $\frac{1}{2}ACB$ $= \frac{\frac{1}{2}AB}{AC} = \frac{AB}{2AC}$. 2) $AB = 2AC \times$ Sin. $\frac{1}{2}ACB$. 3) $AC = \frac{AB}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}ACB}$.

Till. 1. Udtrykke vi Linierne med almindelige Tegn og sætte $AC = a$, $AB = b$, Vinklen $ACB = x$, saa have vi 1) Sin. $\frac{1}{2}x = \frac{b}{2a}$. 2) $b = 2a \times$ Sin. $\frac{1}{2}x$. 3) $a = \frac{b}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}x}$.

Till. 2. Sættes Radius i Stedet for Eenheden at være r, saa findes 1) Sin. $\frac{1}{2}x = \frac{rb}{2a}$. 2) $b = \frac{2a \times \text{Sin. } \frac{1}{2}x}{r}$. 3) $a = \frac{rb}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}x}$.

Till. 3. Trækkes AF lodret paa CB, saa er Sin. B = Cos. $\frac{1}{2}x$ (§. 5. Till. 2), altsaa Cos. $\frac{1}{2}x$: Sin. $x = a : b$, og $b = \frac{a \text{ Sin. } x}{\text{Cos. } \frac{1}{2}x}$.

Anm. Disse Former tiene til, af Siderne at finde Vinklerne, eller af Vinklerne og een Side at finde den anden.

§. 11.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for en Vinkel ere givne, da at finde Sinus til en dobbelt saa stor Vinkel; og, naar Cosinus til en Vinkel er givet, at finde Sinus og Cosinus for en halv saa stor Vinkel.

Opløsn. 1) Den givne Vinkel være ACD (Fig. XLVIII). Sættes nu som i forrige §. AC $= a$ og $AB = b$, og Vinklen $ACB = x$, saa er $ACD = \frac{1}{2}x$; men nu var $b = 2a \times$ sin. $\frac{1}{2}x$ (§. 10), ligeledes var $b = \frac{a \times \text{sin. } x}{\text{cos. } \frac{1}{2}x}$ (§. 10

(§. 10. Till.), altsaa $2a \times \sin.\frac{1}{2}x = \frac{a \times \sin. x}{\cos.\frac{1}{2}x}$ altsaa $2 \sin.\frac{1}{2}x = \frac{\sin. x}{\cos.\frac{1}{2}x}$, følgelig $\sin. x = 2 \sin.\frac{1}{2}x \times \cos.\frac{1}{2}x = 2 (\sin.\frac{1}{2}x \times \cos.\frac{1}{2}x)$. Kalde vi nu $\frac{1}{2}x = \alpha$, saa er $x = 2\alpha$ og $\sin. 2\alpha = 2 (\sin.\alpha \times \cos.\alpha)$ ɔ: Sinus for det dobbelte af en Vinkel findes ved at tage det dobbelte Produkt af den enkelte Vinkels Sinus og Cosinus.

2) Antage vi i den nævnte Figur (XLVIII) $\angle ACB = x$, hvis Cosinus er bekiendt, og fælde Linien AF lodret paa CB, saa er $\triangle AFB \sim \triangle CDB$ (Geom. §. 68) og $FB : AB = BD : CB$, men $BD : CB = \sin.\frac{1}{2}x : r$ (og naar $r = 1$) $= \sin.\frac{1}{2}x : 1$. Fremdeles, da $FB = CB - CF$ og $AB = 2BD$, er $CB - CF : 2BD = \sin.\frac{1}{2}x : 1$; men $CB - CF = 1 - \cos. x$, og $BD = \sin.\frac{1}{2}x$, altsaa $1 - \cos. x : 2 \sin.\frac{1}{2}x = \sin.\frac{1}{2}x : 1$, følgelig $2(\sin.\frac{1}{2}x)^2 = 1 - \cos. x$ og $\sin.\frac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \cos. x}{2}$, og $\sin.\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}}$. Af denne Værdie findes (§. 7) $\cos.\frac{1}{2}x = \sqrt{1 - \sin.\frac{1}{2}x^2}$, følgelig, naar den fundne Værdie for $\sin.\frac{1}{2}x$ indsættes,

sættes, faae vi $\cos.\frac{1}{2}x = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \cos. x}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2 - 1 + \cos. x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}$. Vi have saaledes fundet 1) $\sin.\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}}$ og 2) $\cos.\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}$; ɔ: af den givne Cosinus for den hele Vinkel x bestemt Sinus og Cosinus for den halve Vinkel $\frac{1}{2}x$.

§. 12.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for to Vinkler $ACB = a$ og $BCD = b$ (Fig. XLIX) ere givne, da at finde Sinus og Cosinus for deres Summa $\angle ACD = a + b$.

Opløsn. De givne Sinuser og Cosinuser beskrives nemlig $BE = \sin. a$, $CE = \cos. a$, $DG = \sin. b$, $CG = \cos. b$; ligeledes de søgte, nemlig $DF = \sin. (a + b)$ og $FC = \cos. (a + b)$. Linien GK fældes lodret paa AC (Radius, der antages $= 1$) og GH lodret paa FD. Den søgte Sinus for $a + b$ er $DF = FH + HD$, der findes saaledes: I $\triangle CBE$ er $GK \# BE$, altsaa (Geom. §. 60) $CB : BE = CG : GK$;

GK; d. e. $1 : \text{sin.}\, a = \text{cos.}\, b : GK$ og $GK = HF = \text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, b$. Videre er $\triangle DGK \backsim \triangle GKL$ (Geom. §. 71) $\backsim \triangle LFC \backsim \triangle CBE$, altsaa $CB : CE = DG : DH$ ɔ: $1 : \text{cos.}\, a = \text{sin.}\, b : DH$ og $DH = \text{cos.}\, a \times \text{sin.}\, b$; følgelig $HF + HD = \text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, b + \text{cos.}\, a \times \text{sin.}\, b$, men $FH + HD = FD = \text{sin.}\,(a+b)$, altsaa $\text{sin.}\,(a+b) = \text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, b + \text{cos.}\, a \times \text{sin.}\, b$. Den søgte $\text{cos.}\,(a+b)$ er $= CF = CK - KF$, der findes saaledes: I $\triangle CBE$ er $CB : CG = CE : CK$ ɔ: $1 : \text{cos.}\, b = \text{cos.}\, a : CK$ og $CK = \text{cos.}\, a \times \text{cos.}\, b$. Videre er som før $\triangle DGH \backsim \triangle CBE$, altsaa $CB : BE = DG : GH$ ɔ: $1 : \text{sin.}\, a = \text{sin.}\, b : GH$ og $GH = \text{sin.}\, a \times \text{sin.}\, b$, men $GH = KF$, saaledes $KF = \text{sin.}\, a \times \text{sin.}\, b$. Nu var $\text{cos.}\,(a+b) = CK - KF$, altsaa $\text{cos.}\,(a+b) = \text{cos.}\, a \times \text{cos.}\, b - \text{sin.}\, a \times \text{sin.}\, b$.

Till. Sættes $a = b$, saa er $\text{sin.}\, a + b = \text{sin.}\, 2a = \text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, a + \text{cos.}\, a \times \text{sin.}\, a = 2\,(\text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, a)$, som er just hvad der fandtes §. 11.

§. 13.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for to Vinkler ACB og DCB (Fig. L) ere givne, da at finde Sinus og Cosinus for deres Difference ɔ: Vinklen ACD.

Opløsn. Vinklen $ACB = a$ og $DCB = b$, saa er Vinklen $DCA = a - b$. Med Radius $BC = 1$ beskrives Buen ADB, saa er $BE = \text{sin.}\, a$, $EC = \text{cos.}\, a$, $DG = \text{sin.}\, b$, $CG = \text{cos.}\, b$, $DF = \text{sin.}\,(a-b)$ og $CF = \text{cos.}\,(a-b)$. Man trækker $GH \ddagger BE$, forlænger FD og CB til de skiære hinanden i L, og trækker $GK \ddagger AC$. Nu er i $\triangle CBE$, $CB : BE = CG : GH$ ɔ: $1 : \text{sin.}\, a = \text{cos.}\, b : GH$ og $GH = KF = \text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, b$, og $\triangle DKK \backsim KGL$ (Geom. §. 71) $\backsim LFC \backsim CBE$, altsaa $BC : CE = GD : KD$ ɔ: $1 : \text{cos.}\, a = \text{sin.}\, b : KD$ og $KD = \text{cos.}\, a \times \text{sin.}\, b$; men $FK - KD = FD = \text{sin.}\,(a-b)$, altsaa $\text{sin.}\,(a-b) = \text{sin.}\, a \times \text{cos.}\, b - \text{cos.}\, a \times \text{sin.}\, b$. Cos. $(a-b) = FC = CH + HF$ findes ved at betragte de samme Triangler som før, nemlig: i $\triangle CBE$ er $CB : CG = CE : CH$ ɔ: $1 : \text{cos.}\, b = \text{cos.}\, a : CH$ og $CH = \text{cos.}\, a \times \text{cos.}\, b$ $\triangle DKG \backsim \triangle CBE$ og $CB : BE = DG : GK$ ɔ: $1 : \text{sin.}\, a = \text{sin.}\, b : GK$ og $GK = \text{sin.}\, a \times \text{sin.}\, b$, men $GK = FH$ saaledes $FH = \text{sin.}\, a \times \text{sin.}\, b$, og vi havde $CH = \text{cos.}\, a \times \text{cos.}\, b$, følgelig $FH + CH = FC = \text{cos.}\,(a-b) = \text{cos.}\, a \times \text{cos.}\, b + \text{sin.}\, a \times \text{sin.}\, b$.

Till.

Till. Sætte vi $a = b$ og $a - b = 0$, saa er $\sin. (a - b) = \sin. a \times \cos. a - \cos. a \times \sin. a = 0$, og $\cos. (a - b) = \cos. 0 = \cos. a^2 + \sin. a^2 = 1$.

Anm. 1. Ved Hielp af den i Geometrien (§. 102) forklarede Maade, af en Polygon-Side og en given Radius at finde Siden til en Polygon af et dobbelt Antal Sider, kan man, ved at begynde med en regulair Sex- eller Fiirkant, finde Chorden til en Centervinkel af en Second, og deraf ved Hielp af de her forklarede Sætninger finde Sinus for enhver Bue, hvoraf efter de (§. 7) fundne Former de øvrige trigonometriske Linier lade sig bestemme, og, saamange som behøves, bringe i Tabeller, der almindelig kaldes trigonometriske Tavler eller Sinus-Tavler. Dog bruges til at forkorte disse overmaade vidtløftige Beregninger mangfoldige Konstgreb, som her ikke kan forklares.

Anm. 2. Til de i saadanne Tavler beregnede Tal for enhver trigonometrisk Linie kan man søge Logarithmerne i de almindelige Logarithme-Tavler (Algeb. §. 81). Man har, for at spare den dobbelte Umage, ogsaa Tavler, hvor man strax finder de til enhver i Tal beregnet trigonometrisk Linie svarende Logarithmer. Saadanne Tabeller kaldes **konstige** trigonometriske Tabeller i Modsætning af de (Anm. 1) omtalte, der kaldes **naturlige**.

Anm. 3. Ved Trigonometriens Anvendelse eller Opløsning af trigonometriske Opgaver kan man altsaa udføre Beregningerne paa to Maader: enten efter naturlige eller konstige Tabeller; hvilket sidste er i de fleste Tilfælde det fordeelagtigste. Men i begge Tilfælde er det nødvendigt at lære at kiende Indretningen og Brugen af begge Slags Tabeller.

II. Om Indretningen og Brugen af trigonometriske Tabeller.

§. 14.

I de sædvanlige Tabeller findes allene Sinus, Cosinus, Tangens og Cotangens, da disse ere de Linier der oftest bruges, og de øvrige sieldent forekommende af dem ved Hielp af de anførte Former let lade sig bestemme. Ligeledes sees af det hidtil forklarede, at Tabellerne kun behøve at indeholde de trigonometriske Linier for den første Qvadrant, da de for de øvrige have samme Størrelse og kun forandret Beliggenhed. For at have Complementet til enhver Vinkel lige over for den, saa at med eet kan sees baade dens Sinus og Cosinus, Tangens og Cotangens, ere Tabellerne saaledes indrettede, at Graderne fra 0 til 45 ere betegnede øverst paa Siden og deres fortløbende Minuter i den første Pille paa venstre Side fra oven og og ned, derimod Graderne fra 45 til 90 for neden og deres Minuter i den yderste Pille paa høire Side fra neden og opad; saa at naar for oven paa en Side findes f. Ex. 37°, og altsaa i den tiende Linie fra oven Sinus og Tangens for 37° 10′, ... findes forneden 52°, og i samme Linie, hvor de 10′ stod paa venstre, findes paa høire 50′. Man har derved den Fordeel, at den Colonne Tal, der angiver Sinus og Tangens for den ene Vinkel, angiver tillige Cosinus og Cotangens for dens Complement, og omvendt.

§. 15.

I Tabellerne har man ikke, som vi her have, sat $r = 1$, da alle Sinuserne saaledes vilde blive Brøk, men almindelig antaget den = 10000,000000 men af de derefter beregnede Linier (hvorledes de for Radius = 1 beregnede Linier kunde forandres efter enhver Radius, er viist §. 8. Till.) har man i de smaae Udgaver af Tabeller udeladt de tre sidste Zifre, og altsaa egentlig kun antaget Radius = 10,000000.

Logarithmerne for de trigonometriske Linier i alle Tabeller have Hensyn til en Radius af 10000000000. Derfor er Log. $r = 10$ (Algeb. §. 77); denne er følgelig for stor, naar man kun som i de almindelige Tavler sætter $r = 10000000$. Dette

Dette foraarsager imidlertid ingen Feil i de trigonometriske Beregninger, da man ved de i Tal udtrykte Linier, hvortil Logarithmerne svare, ikke see paa deres virkelige Størrelse, men kun paa deres Forhold til hinanden. For Resten kan man let forandre Logarithmerne, saa at de svare til Linier beregnede for $r = 1$, naar man blot subtraherer 10 fra deres Caracteristik; saaledes Log. sin. 90° (naar Radius er ti tusinde Millioner) = 10,00000000 (i de mindre Tabeller anføres kun i Logarithmerne syv Decimaler), men Log. sin. 90° (naar Radius er 1) = 0,00.

§. 16.

De mindre trigonometriske Tabeller indeholde blot Grader og Minuter; de større derimod føie Secunderne til, eller dog Differencen for en Secund, og forskaffer derved saavel større Beqvemmelighed som Nøiagtighed.

I Vegas Haandbog (Algeb. §. 77. Anm. 2) indeholder den anden Tabel Logarithmerne for de trigonometriske Linier; jeg vil, som i Algebra ved Logarithmernes Forklaring, benytte mig af den og citere den. De naturlige Linier (Sinus, Tangens ꝛc.), som her for Rummets Skyld ere udeladte, kunde dog heraf ved Hielp af den første Tabel findes. I Vegas større Tabeller findes disse. Bru-

Brugen af disse Tabeller læres upaatvivlelig lettest ved mundtlig Anviisning og umiddelbar Øvelse. Jeg vil derfor blot med Hensyn til den ommeldte Vegas Haandbog ved et Par Exempler søge at oplyse Maaden, hvorpaa man gaaer frem.

§. 17.

Opgave. At finde Logarithmerne for de trigonometriske Linier der høre til en given Bue eller Vinkel, der er udtrykt allene i Grader og Minuter.

Opløsn. I) Ere de givne Grader under 45°, da søger man dem øverst paa Siden i Tabellen og Minuterne i første Pille paa venstre Haand fra oven og ned ad; ved Siden af Minuterne findes da (fra Venstre mod Høire) Logarithmer for Sinus, Cosinus, Tangens og Cotangens til den givne Bue eller Vinkel. F. Ex.:

1) Den givne Bue være 6° 35′; man finder da S. 239 ved 6° 35′

Log. sin. = 9,0593672 . Log. cos. = 9,9971268
Log. tang. = 9,0622403 . Log. cot. = 10,9377597.

2) Buen være 1° 23′, og man finder S. 203 ved 1° 23′

Log. sin. = 8,3827620 . Log. cos. = 9,9998734
Log. tang. = 8,3828886 . Log. cot. = 11,6171114

II)

II) Ere de givne Grader over 45, og altsaa de førstes Complement til 90°, saa søge man Gradetallet nederst paa Siden og Minuterne i den yderste Pille mod Høire fra neden opad, saa findes ved Siden af Minuterne fra Høire mod Venstre Logarithmerne for den givne Bues Tangent, Cotangent, Sinus og Cosinus. F. Ex.:

1) Den givne Bue være 83° 25′, og man finder S. 239 ved 83° 25′

Log. tang. = 10,9377597 . Log. cot. = 9,0622403
Log. sin. = 9,9971268 . Log. cos. = 9,0593672

2) Buen være 88° 37′; man finder da Side 203 ved 88° 37′

Log. tang. = 11,6171114 . Log. cot. = 8,3828886
Log. sin. = 9,9998734 . Log. cos. = 8,3827620

§. 18.

Opgave. At finde Logarithmer for de trigonometriske Linier til en i Grader, Minuter og Sekunder udtrykt Bue.

Her gives efter de omtalte Tabellers Indretning tvende Tilfælde:

A) Naar den givne Bue er over 5, men dog under 85 Grader.

Opløsn. For Grader og Minuter søges som i forrige Opgave Logarithmerne i Tabellen fra S.

239

239 til Enden; det i den Pille, som for oven er betegnet $D\,1''$ (d. e. Differencen for en Sekund) ved Siden af den fundne Logarithme staaende Tal multipliceres med Antallet af de givne Sekunder, og det Udkomne lægges til den fundne Logarithme eller tages derfra eftersom den ved Buernes Forstørrelse voxer eller aftager. Den med $C\,D\,1''$ (communis differentia) betegnede Pille imellem Log. tang. og Log. cot. hører til begge, efterdi

cot. $x = \frac{r^2}{\text{tang. } x}$ (§. 7) og $r^2 =$ tang. $x \times$ cot x, følgelig 2Log. r = Log. tang. x + Log. cot. x (Algeb. §. 75), altsaa 2Log. r = Log. tang. $x + d$ + Log. cot. $x - d$.

Lad til Exempel den givne Bue være $6^\circ\ 35'\ 3''$; man finder da S. 239 ud for $6^\circ\ 35'$

1) Log sin. = 9,0593672 og $D1''$ = 182,25 $\times 3''$
hertil lægges for $\quad$ 546,75
de 3 Sekunder + 547
og 9,0594219 = Log. sin. $6^\circ\ 35'\ 3''$

2) Log. cos. = 9,9971268 og $D1''$ = 2,43 $\times 3$
− 7 $\quad$ 7,29
9,9971261 = Log. cos. $6^\circ\ 35'\ 3''$

3) Log. tang. = 9,0622403 og $CD1''$ = 184,68 $\times 3$
+ 554 $\quad$ 554,04
9,0622957 = Log. tang. $6^\circ\ 35'\ 3''$

4) Log.

4) Log. cot. = 10,9377597
− 554
10,9377043 = Log. cot. $6^\circ\ 35'\ 3''$

B) Naar den givne Bue er under 5 eller over 85 Grader.

Opløsn. Man finder disse Grader fra S. 193 til S. 238 saaledes, at Logarithmen for hver Minut og hver tiende Sekund med Differencen for een Sekund ere anførte, og man gaaer her frem paa samme Maade som i A.

Den givne Bue være f. Ex. $1^\circ\ 24'\ 53''$, og man finder S. 203

Logsin. $1^\circ\ 24'\ 50''$ = 8,3922486 og $D1''$ = 852,2 $\times 3$
2556,6

og Log. sin. $1^\circ\ 24'\ 53''$ = 8,3922486 + 2557
= 8,3925043.

Till. 1. De fra S. 193 til 202 i den første Pille værende Tal udtrykke Summen af de enkelte Sekunder; saaledes er $1^\circ\ 12'\ 50''$ = 4370, som findes S. 202 i den første Pille ved $1^\circ\ 12'\ 50''$. Hvorledes disse Summer tiene til endnu nøiere at finde Logarithmerne end ved sidste Opløsning, vil tydelig sees af følgende Exempler:

1) Lad den givne Bue være $1^\circ\ 8'\ 56''$; man finder da S. 201 $1^\circ\ 8'\ 50''$ = 4130″, den givne

Bue

Bue altsaa = 4136″. Nu findes i den første Tabel for de almindelige Tal-Logarithmer

Log. 4136 = 3,6165805
Log. 4130 = 3,6159501
Log. Differ. = 6304,

som maae adderes til Logarithmen for Sinus og Tangens, men subtraheres fra Logarithmen for Cotangens; og saaledes bliver

a) Log. sin. 1° 8′ 50 = 8,3014959
+ 6304
Log. sin. 1° 8′ 56″ = 8,3021263

b) Log. tang. 1° 8′ 50″ = 8,3015830
+ 6304
Log. tang. 1° 8′ 56″ = 8,3022134

c) Log. cot. 1° 8′ 50 = 11,6984170
— 6304
Log. cot. 1² 8′ 56″ = 11,6977866

Till. 2. For de fem sidste Grader gielder vel ikke umiddelbar de i første Pille ved venstre Side anførte Sekund-Summer, men dog deres Logarithme-Differencer, som stedse blive de samme for to Buer, der ere hinandens Complementer. For Ex. Buen 88° 51′ 4″ være givet.

Ved den næst foregaaende mindre Bue 88° 51′ finder man S. 201 i den første Pille ved venstre

stre Side Sekund-Summen 4140; den givne Bue er 4″ høiere end 88° 51, dens Complement altsaa 4 Sekunder mindre, eller 4136. Man søger nu i Tabellen over almindelige Tal-Logarithmer

Log. 4140 = 3,6170003
Log. 4136 = 3,6165805
Log. Differ. = 4198, som adderes

til Log. tang. 88° 51′, men subtraheres fra Log. cot. og Log. cos. af samme Bue. Saaledes bliver

a) Log. tang. 88° 51′ 0″ = 11,6973665
+ 4198
Log. tang. 88° 51′ 4″ = 11,6977863

b) Log. cot. 88° 51′ 0″ = 8,3026335
— 4198
Log. cot. 88° 51′ 4″ = 8,3022137

c) Log. cos. 88° 51′ 0″ = 8,3025460
— 4198
Log. cos. 88° 51′ 4″ = 8,3021262

§. 19.

Opgave. At finde Buen eller Vinklen, der svarer til en given Logarithme for en trigonometrisk Linie.

Opløsn. Her møde to Tilfælde: enten findes den givne Logarithme nøiagtig i Tabellerne, eller ikke. Er det første Tilfældet, da søges den lige-

ligefrem i Tabellerne, og de tilhørende Grader findes for oven eller neden efter Colonnens Overskrift, og Minuterne enten i den første eller sidste Pille, saaledes som tilforn er forklaret.

F. Ex. 1) Log. tang. $x = 8,6784573$; denne findes Side 213 og første Pille paa venstre Haand lige for $43' \, 50''$ og oven over Siden $2°$, altsaa er $x = 2° \, 43' \, 50''$. Var derimod den givne Logarithme $8,6784573$ = Log. cot. x, saa findes Graderne neden for samme Side og Minuterne og Sekunderne i sidste Pille mod Høire og $x = 87° \, 16' \, 10''$.

2) Log. sin. $x = 9,0669619$ findes nøiagtig Side 239 ud for $42'$, altsaa er $x = 6° \, 42'$; men var samme Logarithme $9,0669619$ = Log. cos. x, saa var $x = 83° \, 18'$.

Finder derimod det andet Tilfælde Sted, at den givne Logarithme ikke nøiagtigt findes i Tabellerne, da maa man gaae frem paa følgende Maade:

Man søge, som i første Tilfælde, den mindre Logarithme, der nærmer sig meest den givne, tager Differencen mellem den og den givne, og dividerer denne Differents med det Tal, som findes lige ved i den med $D \, 1''$ betegnede Pille; den derved udkomne Qvotient viser, hvormange Sekunder der maae lægges til eller tages fra (eftersom Buen voxer eller tager

tager af) den Bue, der hører til den fundne Logarithme, for at den skal svare til den givne.

F. Ex. Lad være givet Log. tang. $x = 8,6785738$ man finder S. 213 den næst mindre

Log. tang. $2° \, 43' \, 50'' = 8,6784573$

Difference 1165

I Pillen D'' findes $442,3$, hvormed 1165 divideres, Qvotienten $2,6''$ adderes til $2° \, 43' \, 50''$, og den Bue x, som hører til den givne Log. tang., er $= 2° \, 43' \, 52,6''$.

Till. Findes den næste mindre Logarithme fra Side 193 til 202, saa kan man i Stedet for den anførte Opløsning benytte sig af Sekundsummen i første Pille paa følgende Maade:

F. Ex. Lad være givet Log. sin. $x = 7,9347679$, saa findes S. 196 Log. sin. $0° \, 29' \, 30'' = 7,9335428$ = Log. sin. $1770''$ og Logar. Differ. = 12251 som adderes til Log. 1770, der findes $= 3,2479733$

og man faaer Log. $3,2491984$,

der i Tabellen findes at svare til Tallet 1775; x er altsaa $= 1775'' = 0° \, 29' \, 35''$.

§. 20.

Opgave. For enhver given Bue ved Hielp af de kunstige trigonometriske Linier at bestemme de naturlige.

 Op-

Opløsn. Man opsøger i Tabel II den Buen tilhørende Logarithme (§. 17 og 18), reducerer den, ved at formindske Kiendetallet med 10, at den passer til Radius 1, og opsøger i de simple Tal-Logarithmer (Tab. I) det dertil svarende Tal.

F. Ex. Man forlanger $\sin. 13^\circ 30'$, saa findes i Tab. II Log. $\sin. 13^\circ 30' = 9,3861853$ og reduceret til $r = 1$, Log. $\sin. 13^\circ 30' = 0,3681851 - 1$, og hertil findes i Tab. I at svare Tallet 0,2334454, der altsaa er $\sin. 13^\circ 30'$, naar Radius antages $= 1$.

III. Om plane Trianglers trigonometriske Beregning.

A. Om de retvinklede Triangler.

§. 21.

Opgave. Naar i en retvinklet Triangel ACB (Fig. LIX), Hypothenusen CB, og den ene Cathet CA ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Bruges CB som Radius, saa er $CA = \sin. CBA$, og man har (§. 8) $CB : CA = r : \sin. CBA$ og $\sin. CBA = \frac{r \times CA}{CB}$ og

og da Vinklen $BCA = 90^\circ - CBA$, saa er $\sin. CBA = \cos. BCA$, følgelig $\cos. BCA = \frac{r \times CA}{CB}$. Bruges nu, som almindeligst, Logarithmerne, saa er Log. $\sin. CBA =$ Log. $r +$ Log. $CA -$ Log. CB.

F. Ex. Lad $CB = 5$, $CA = 4$, saa er

Log. $r +$ Log. $4 = 10,6020600$
Log. $5 = 0,6989700$

Log. $\sin. CBA = 9,9030900$, som opsøgt i Tab. II (§. 19) giver Buen eller Vinklen $53^\circ 7' 48''$, hvoraf findes Vinklen $BCA = 36^\circ 52' 12''$.

Siden BA (der ellers let findes efter Geom. §. 37) kan ogsaa findes ved følgende Proportion:

$r : \sin. BCA = CB : BA$ og

$BA = \frac{CB \times \sin. BCA}{r}$ og Log. BA $=$ Log. $CB +$ Log. $\sin. BCA -$ Log. r.

Log. $5 = 0,6988343$
Log. $\sin. 36^\circ 52' 12'' = 9,7782870$

Log. 5 + Log. $\sin. 36^\circ 52' 12'' = 10,4771213$
Log. $r = 10,0000000$

og Log. $BA = 0,4771213$, som henviser til Tallet 3.

§. 22.

Opgave. I Triangelen KGB (Fig. LIX) at finde de øvrige Stykker naar Siderne KG og KB ere givne.

Opløsn. Antages BK til Radius, bliver KG Tangent for Vinklen B, og man har følgende Proportion: $BK : KG = r : \text{tang. } B$ (§. 8) ɔ: Radius i Figuren til Tangenten for B i Figuren som Radius i Tabellerne til Tangenten for B i Tabellerne, og $\text{tang. } B = \frac{KG \times r}{BK}$, følgelig $\text{Log. tang. } B = \text{Log. } KG + \text{Log. } r - \text{Log. } BK$. Sættes nu som i forrige Exempel $KG = 4$ og $BK = 3$, saa er $\text{Log. tang. } B = \text{Log. } 4 + 10{,}0000000 - \text{Log. } 3 = \text{Log. tang. } 53^\circ\ 7' + 48''$.

Anm. Af denne Opløsning sees, at naar Vinklen $B = 45^\circ = \frac{1}{2}R$, da er $r\,(BK) = \text{tang. } B\,(KG)$, og følgelig at saalænge en Vinkel er mindre end 45°, er Tangenten mindre end Radius; men fra 45° er den større, til den for 90° er uendelig stor.

Till. 1. Vinklen G findes ved at subtrahere B fra 90°, altsaa her $G = 36^\circ\ 52'\ 12''$, eller og ved at antage KG for Radius, da KB bliver Tangent for Vinklen G, og saaledes $KG : KB = r : \text{tang. } G$ og $\text{tang. } G = \frac{KB \times r}{KG}$.

Till. 2. Hypothenusen BG bliver, naar BK er Radius, Secans for Vinklen B, og kunde altsaa findes ved følgende Proportion: $r : \text{sec. } B = BK : BG$ og $BG = \frac{\text{sec. } B \times BK}{r}$; men da i de fleste Haand-Udgaver af Tabeller ingen Sekanter findes, kan man ogsaa finde den saaledes: $\text{sin. } B : \text{sin. } K\ (\text{sin. tot. v.}: r) = BK : BG$ og $BG = \frac{BK \times r}{\text{sin. } B}$.

Anm. Hypothenusen GB kan desuden, naar Catheterne ere bekiendte, findes efter Geometrien §. 37.

§. 23.

Opgave. Naar i Trianglen ACB (Fig. LIX) Hypothenusen CB og en spids Vinkel B er bekiendt, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Den anden spidse Vinkel ved C findes blot ved at subtrahere B's Grader fra 90° (Geom. §. 29. Till. 4), Siderne AC og AB saaledes: $r\ (\text{sin. tot.}) : \text{sin. } B = BC : AC$ og $AC = \frac{\text{sin. } B \times BC}{r}$; ligeledes $r\ (\text{sin. tot.}) : \text{cos. } B = BC : AB$ og $AB = \frac{\text{cos. } B \times BC}{r}$. Rigtigheden af Opløsningen indsees af §. 8 og §. 21.

§. 24.

Opgave. Naar i Triangelen *GKB* (Fig. LIX) den ene Cathete *BK* og den spidse Vinkel ved *B* er bekiendt, at finde de øvrige Sider og den anden spidse Vinkel.

Opløsn. Vinklen $BGK = 90^\circ - B$ (Geom. §. 29. Till.); tages nu som før (§. 22) *BK* til Radius, saa er r (sin. tot.) : tang. $B = KB : KG$ og $KG = \frac{KB \times \text{tang. } B}{r}$. Fremdeles cos. $B : r = BK : BG$ og $BG = \frac{r \times BK}{\text{cos. } B}$

Anm. 1. Det sees let, at det er ligegyldigt, hvilken af de spidse Vinkler der er givet, da den anden derved tillige er bekiendt, og Opløsningen altsaa den samme.

Anm. 2. I Stedet for Proportionen r : tang. $B = KB : BG$ kunde man (hvis man ikke i Tabellerne havde Tangenterne og deres Logarithmer) ogsaa bruge denne: cos. B : sin. $B = BK : KG$ (§. 8 og §. 21); men hvor det er mueligt, bruger man helst den Proportion, hvori Radius eller sinus totus forekommer, da det forkorter Regningen med Tal og Logarithmer.

Ligesaa kunde i Stedet for Proportionen cos. B : $r = BK : BG$ været sat: r : sec. $B = BK : BG$; men Secanterne findes kun i saa Tabeller, og deres Logarithmer endnu i færre.

Till.

Till. Exempler til Øvelse i det her Foredragne om retvinklede Trianglers trigonometriske Beregning kan beqvemt tages af Astronomien, som af Solens og Maanens horisontale Paralaxis og Jordklodens Radius at beregne disse Himmellegemers Afstand fra Jordens Centrum, og deraf igien og af deres tilsyneladende Størrelse at beregne deres virkelige Diametre.

§. 25.

Opgave. Ved Hielp af den retvinklede Triangel og de naturlige Tabeller noiagtigt at udmaale en Vinkel.

Opløsn. Den givne Vinkel, der skal maales, være *MAO* (Fig. LX); efter en formindsket Maalestok afsætter man $AG = 1000$, fælder den lodrette Linie *GH*, da saaledes *GH* er sin. *MAO* og AH = cos. *MAO*. Nu maaler man efter samme Maalestok enten *GH* eller *AH*, og opsøger i Tabellerne efter en Radius = 1000 de for *GH* eller *AH* fundne Tal, saa findes derved Vinklen i Grader og Minuter.

Anm. Da Sinustavlerne ere beregnede almindelig efter en Radius = 10,000000, maae man, for at de i Tabellerne fundne Sinuser skal svare til $r = 1000$, af enhver bortkaste de fire sidste Cifre mod Høire og kun beholde de tre første; men da Tabellerne

bellerne vise, at de tre høieste Cifre af en Sinus blive for flere efter hinanden følgende Minuter de samme, og at kun de ringeste forandres, at til lige store Forandringer af Buer Forandringerne i Sinuser er stedse mindre og mindre jo mere Buerne nærme sig 90°, saa at Sinuser for 80° og 81° ikke ere saa meget forskiellige som de for 10° og 11°, saa faaer man ved denne Maaling ikke Vinklen fuldkommen nøiagtig, men dog i smaae Vinkler paa 4 til 5 Minuter nær, og altsaa meget nøiagtigere end ved de sædvanlige Transporteurer. Ved større Vinkler kan Feilen være til mod 15 Minuter; men for at undgaae dette bruger man da Cosinus som er Sinus for den mindre Vinkel, og faaer den altsaa mere nøiagtig.

F. Ex. Sæt man fandt $GH = 939$, saa maatte Vinklen falde imellem 69° 53′ og 70° 3′; man maaler da i den Sted Linien AH, som vil være 342, og Vinklen $HGA = ONA$ vil da falde imellem 20° og 20° 3′, altsaa Vinklen A imellem 70° og 69° 57′.

B. Om skiævvinklede Trianglers Beregning.

§. 26.

Læres. I enhver skiævvinklet Triangel forholde Siderne sig til hinanden som Sinuserne for de modstaaende Vinkler.

Beviis 1) Trianglen være spidsvinklet CAB (Fig. LII), BA antages for Radius, og fra Vinkel-

kelspidserne A og B beskrives Buer og fældes de lodrette Linier AH og BG, da $AH = \sin.\ B$ og $BG = \sin.\ A$. Trianglerne CGB og CAH ere ligedanne (Geom. §. 68), altsaa $CB : BG = CA : AH$, og ved at ombytte de mellemste Lede $CB : CA = BG : AH$, d. e. $CB : CA = \sin.\ A : \sin.\ B$.

2) Triangelen være stumpvinklet ABC (Fig. LI), med AC som Radius beskrives fra A og C Cirkelbuer, og fældes paa de forlængede Linier CB AB de lodrette Linier CI og AH, da $CI = \sin A$ og $AH = \sin.\ C$. Nu er $\Delta\ BCI \backsim \Delta\ ABH$, følgelig $BC : CI = BA : AH$ og $BC : CA = CI : AH$ d. e. $BC : CA = \sin.\ A : \sin.\ C$.

Anm. Paa denne Læresætning (der ogsaa gielder og let lader sig bevise i Særdeleshed om retvinklede Triangler, og hvorfor er ført et almindeligt Beviis §. 9) grunder sig den trigonometriske Opløsning af alle Arter af Triangler (§. 1), som giver en langt større Nøiagtighed end ved geometrisk Tegning kan erholdes, og kan anvendes paa alle retlinede Figurer der lade sig dele i Triangler. Da imellem de tre givne Ting, der bestemme en Triangels Størrelse, nødvendig maae være en Side, saa forekomme fire forskiellige Opgaver; der kan nemlig være givet 1) een Side og to Vinkler, 2) to Sider og een modstaaende Vin-

Vinkel, 3) to Sider og een mellemliggende Vinkel, 4) alle tre Sider.

§. 27.

Opgave. I Trianglen BAC (Fig. LVII), naar Siden BC og Vinklerne ved B og C ere bekiendte, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Da den tredie Vinkel altid vides af de to andre givne, saa er det ligegyldigt, hvilken Side der er givet, og man har

$$\left.\begin{array}{l} \sin. A : \sin. B = BC : AC \\ \sin. A : \sin. C = BC : AB \end{array}\right\}$$ Ved disse Proportioner findes de ubekiendte Sider AC og AB.

F. Ex. Lad $BC = 329{,}76'$, Vinklen $C = 20^\circ\ 12'$, $B = 34^\circ\ 18'$, følgelig $C = 180^\circ - (34^\circ\ 18' + 20^\circ\ 12') = 125^\circ\ 30'$, og saaledes $\sin.\ 125^\circ\ 30'$ ɔ: $(\sin.\ 54^\circ\ 30') : \sin.\ 34^\circ\ 18' = 329{,}76 : AC$

og Log. 329,76 = 2,5181980
Log. sin. 34° 18′ = 9,7509140
12,2691120
Log. sin. 54° 30′ = 9,9106860
Log. AC = 2,3584260, som giver $AC = 228{,}258'$.

Fremdeles $\sin.\ 54^\circ\ 30' : \sin.\ 20^\circ\ 12' = 329{,}76 : AB$

og Log. sin. 20° 12′ = 9,5381943
Log. 329,76 = 2,5181980
12,0563923
Log. sin. 54° 30 = 9,7106860
Log. AB = 2,1457063, som giver $AB = 139{,}864'$.

Anm. At $\sin.\ 125^\circ\ 30'$ er det samme som $\sin.\ 54^\circ\ 30'$, er klart af det i Forveien Forklarede (§. 3 Till. 2).

§. 28.

Opgave. Naar i Trianglen BAC (Fig. LV) de to Sider AB, AC og den modstaaende Vinkel B ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Først findes Vinklen C, da vi have (§. 26) $AC : AB = \sin. B : \sin. C$. Sætte vi nu $AC = 139{,}864'$, $AB = 228{,}258'$, og $B = 20^\circ\ 12'$, saa er

Log. 228,258 = 2,3584260
Log. sin. 20° 12′ = 9,5381943
11,8966203
Log. 139,864′ = 2,1457060
Log. sin. C = 9,7509143, som giver Vinklen $C = 34^\circ\ 18'$.

Vink-

Vinklen B var givet; er nu C fundet, saa har man Vinklen A og kan finde Siden BC (§. 27).

Anm. Den fundne Lin. C passer (naar C ikke er en ret Vinkel) baade til en spids Vinkel $= 34°$ $18'$ og til en stump $= 145° \ 42'$. I Henseende til denne Tvetydighed maae Følgende mærkes:

1) Er den givne Vinkel B en ret eller stump Vinkel, da maae C nødvendig være spids (Geometrie §. 18. Till. 3).

2) Er Vinklen B spids og den B lige over liggende Side AC større end den hosliggende AB, saa maae ogsaa C være spids, da ellers AB skulde være større end AC mod Forudsætningen (Geom. §. 22).

3) Er Vinklen B spids, men AC mindre end AB, saa bliver det tvetydigt, da Lin. C kan passe saavel til en stump som til en spids Vinkel, naar man ikke af andre Grunde forud veed, om C skal være spids eller stump.

§. 29.

Opgave. Naar i en Triangel BAC (Fig. LVII) de to Sider BA, BC og den indsluttede Vinkel B ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Man seer let, at den almindelige Sætning (§. 26) ikke umiddelbar her kan anvendes, da man derefter ingen Proportion kunde faae, hvori der var meer end to bekiendte Størrelser, og

og altsaa ikke nok til at finde de ubekiendte; man maae derfor fælde en lodret Linie AD, hvorved man faaer to retvinklede Triangler BAD, og ADC i BAD er Siden BA, Vinklen B og den rette Vinkel ved D givet; den beregnes altsaa efter §. 21, og siden ADC efter §. 23.

Anm. Foruden denne Opløsning gives en anden, der bygges paa følgende Læresætning.

§. 30.

Læres. I enhver Triangel ABC (Fig. LVI) forholde Summen af de to Sider ($BC + AB$) sig til Differencen af de samme to Sider ($BC - AB$) som Tangenten af de Siderne modstaaende Vinklers halve Sum [tang. $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$] til Tangenten af de samme Vinklers halve Difference [tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$].

Beviis. Den kortere Side BA affættes paa den længere BC, saa at $BE = BA$; BC forlænges mod D, at $BD = BE = BA$; derpaa trækkes DA og AE. I $\Delta\, BAC$ er Vinklerne $BAC + ACB = 2R - ABC$; i $\Delta\, BAE$ ere Vinklerne $BAE + AEB = 2\,R - ABC$ (Geomet. §. 29. Till. 1), følgelig Vinklerne $BAC + ACB = BAE + AEB$, men $\angle\, BAE = \angle\, AEB$

$< AEB$ (Geom. §. 13 Till. 1), altsaa $BAC + < ACB = 2 < BAE = 2 < AEB$ og $\frac{1}{2}(BAC + ACB) = < AEB = < BAE$. Men er $< BAE = \frac{1}{2}(BAC + ACB)$, saa er $< EAC = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. See Algebra (§. 31).

Igiennem C trækkes Linien $CF \# AE$, og DA forlænges til den skiærer CF.

Nu er Vinklen $DAE = R$ (Geomet. §. 44 Till. 3), men $DAE = DFC$, altsaa $DFC = R$; Vinklen $EAC = ACF$ (Geomet. §. 28), altsaa $ACF = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. Antages nu C som Centrum, hvorfra med Radius CF blev beskrevet Buer til Maal for Vinklerne BCF og ACF, saa bliver $DF =$ tang. BCF og $AF =$ tang. ACF (§. 4). Men $< BCF = < BEA$ (Geom. §. 28) $= \frac{1}{2}(BAC + ACB)$ ɔ: den halve Summa af de modstaaende Vinkler og $< ACF = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$ ɔ: den halve Difference af de samme Vinkler; følgelig $DF =$ tang. $(\frac{1}{2} BAC + ACB)$ og $AF =$ tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$. Endelig er (Geomet. §. 60) $DC : EC = DF : AF$, men $DC = (AB + BC)$, og $EC = (BC - BA)$, altsaa $BC + AB : BC - AB =$ tang. $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$: tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$ ɔ: Summen af de to

Sider

Sider i en Triangel til deres Difference, som Tangenten af de modstaaende Vinklers halve Summa til Tangenten af deres halve Difference.

Till. Antage vi nu, som §. 29, BC og BA og den indsluttede Vinkel ABC bekiendte, saa er ogsaa $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$ bekiendt (Geometr. §. 29), og vi søge allene $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$, som findes ved den nylig beviiste Proportion.

Sæt til Exempel (Fig. LV) $BC = 329,760'$, $BA = 228,258$, og Vinklen $B = 20^\circ\ 12'$, saa er $BC + AB = 558,018'$, $BC - BA$ $101,502'$. Ogsaa ere Vinklerne $A + C = 180^\circ - 20^\circ\ 12' = 159^\circ\ 48'$, altsaa $\frac{1}{2}(A + C) = 79^\circ\ 54'$, og vi finde altsaa $\frac{1}{2}(A - C)$ ved den nylig beviiste Proportion saaledes

$558,018 : 101,502' =$ tang. $79^\circ\ 54'$: tang. $\frac{1}{2}(A - C)$

Log. tang. $79^\circ\ 54' = 10,7492699$

Log. $101,502' = 2,0064746$

$12,7557445$

Log. $558,018' = 2,7466482$

Log. tang. $\frac{1}{2}(A - C) = 10,0090963$, som giver $\frac{1}{2}(A - C) = 45^\circ\ 36'$. Men nu er (Algebr. §. 32) Vinklen $A = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C)$ altsaa $= 79^\circ\ 54' + 45^\circ\ 36' = 125^\circ\ 30'$ og $C = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}(A - C)$, altsaa $= 79^\circ\ 54' - 45^\circ\ 36' = 34^\circ\ 18'$.

Af

Af de fundne Vinkler findes Siden AC efter §. 27 eller §. 28.

§. 31.

Opgave. Naar i en Triangel ACB (Fig. LVIII) alle tre Sider ere givne, at finde Vinklerne.

Opløsn. Ved Anvendelsen af den (§. 26) beviiste Sætning kan her de ubekiendte Stykker ikke findes, da man ikke kan erholde nogen Proportion med mere end to bekiendte Størrelser; man maae altsaa for at faae de nødvendige bekiendte Størrelser (data) foretage følgende Construction:

Fra Vinkelspidsen C (den største Vinkel) fældes en lodret Linie CI paa den modsatte Side AB, derved deles Trianglen ACB i to retvinklede Triangler ACI og ICB. Betragte vi nu den retvinklede Triangel ACI, saa er de bekiendte Stykker AC Vinklen ved $I = R$; men vi maae endnu have enten en Side eller en Vinkel bekiendt, og vi finde Siden AI saaledes:

Fra Vinkelspidsen C (den Vinkel, hvorfra den lodrette Linie blev fældet) beskrives med Radius CA en Cirkel, og Linien BC forlænges til D. Nu er (Geomet. §. 73) $AB : DB = EB : FB$, men $DB = CB + CA$ og $EB = CB - CA$, altsaa $AB : CB + CA = CB - CA : FB$. Ved denne Proportion, hvori de tre første Led ere givne, kan vi regne os til FB; er denne funden, da er $AF = AB - FB$ og $AI = \frac{1}{2}AF$ bekiendte. Er paa denne Maade Linien AI funden, da findes i den retvinklede Triangel ACI de ubekiendte Stykker efter §. 21, og siden de øvrige Dele i $\Delta\ ACB$ efter §. 29.

Sæt for Exempel $AB = 329{,}760'$, $CB = 228{,}258'$, og $AC = 139{,}864'$, saa er efter den beviiste Proportion $329{,}760' : 368{,}122' = 88{,}394' : FB$

$$
\begin{aligned}
\text{og Log. } 88{,}394 &= 1{,}9464228 \\
\text{Log. } 368{,}122 &= \underline{2{,}5659918} \\
&\ 4{,}5124146 \\
\text{Log. } 329{,}760 &= \underline{2{,}5181980} \\
\text{Log. } FB &= 1{,}9942166,
\end{aligned}
$$

som giver $FB = 98{,}67717$. De øvrige Stykker findes nu let paa den forklarede Maade.

IV.

IV. Trigonometriens Anvendelse paa Cirkler og regulaire Polygoner.

§. 32.

Opgave. Af en given Radius og Chorde at finde den tilhørende Vinkel ved Middelpunktet, og af Vinklen ved Middelpunktet og Chorden at finde Radius.

Opløsn. Lad Radius være CG (Fig. XLVII) $= r$, og Vinklen GCE en Vinkel ved Middelpunktet $= a$, saa er den Vinklen a tilhørende Chorde EG (som vi vil sætte $= b$) $= 2r \times \sin. \frac{1}{2}a$ (§. 10), da Δ GCE er ligebenet. Da enhver Chorde kan ansees som Siden i en regulair Polygon, saa findes ved den Form ogsaa Siden til en regulair Polygon af n Sider, naar Radius af den omskrevne Cirkel $= r$, hvis Center-Vinkel $= a = \frac{360^\circ}{n}$ (Geom. §. 54. Till. 1).

Var $b = 2r \times \sin. \frac{1}{2}a$, saa er $\sin. \frac{1}{2}a = \frac{b}{2r}$ og $r = \frac{b}{2 \sin. \frac{1}{2}a}$; og saaledes findes, naar af de tre Ting Chorde b, Centervinkel a og Radius r, de to ere givne, stedse den tredie.

De

De i Geometrien (§. 53) forekommende Problemer ere saaledes her almindelig opløste.

Till. 1. Sætte vi $FB = l$ og ansee den som Siden i en om en Cirkel, hvis Radius er r, beskrevet Polygon, saa er l den dobbelte Tangent til den halve Centervinkel; kalde vi den i Tabellerne brugte Radius ϱ, saa er $l = \frac{2r \times \text{tang.} \frac{1}{2}a}{\varrho}$

Fremdeles: da $\sin. \frac{1}{2}a : \text{tang.} \frac{1}{2}a = b : l$ (§. 8) og da $\text{tang.} \frac{1}{2}a = \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\cos. \frac{1}{2}a}$, saa er $\sin. \frac{1}{2}a : \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\cos. \frac{1}{2}a} = b : l$ ɔ: $1 : \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}a} = b : l$, men $\sec. \frac{1}{2}a = \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}a}$ (§. 7), følgelig $1 : \sec. \frac{1}{2}a = b : l$ og $l = b \times \sec. \frac{1}{2}a = \frac{b \times \sec. \text{tab.} \frac{1}{2}a}{\varrho}$.

Till. 2. Heraf lader sig udvikle en Methode, til med en høi Grad af Nøiagtighed at finde en Cirkel-Peripherie eller Omkreds. Man beregner nemlig efter den her forklarede Maade Omfanget af en indskrevet eller omskrevet Polygon af overmaade mange Sider. Man sætter til Exempel $\frac{1}{2}a = \frac{1}{8192} R$ (af en ret Vinkel), saa er $a =$

$\frac{1}{4096}$

$\frac{1}{4096}$ og Siden af en indvendig Polygon med 16384 Sider $= b = 2r \times$ sin. $\frac{1}{2}a = 2$ sin. $\frac{1}{2}a = 0{,}0003834959146$. Dette Tal multipliceret med 8192 (Sidernes halve Antal) giver den halve Omkreds af en saadan indskreven Polygon $= 3{,}1415926241532$.

Nu er (Till. 1) l (Siden i omskrevne Polygon af samme Side-Antal) $= b \times$ sec. $\frac{1}{2}a$, men sec. $\frac{1}{2}a = \frac{1}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}a}$, saa er sec. $\frac{1}{8192}R = \frac{1}{0{,}9999998161642938 0}$ og $8192 \times b \times$ sec. $\frac{1}{8192}R = 3{,}1415926918922 =$ den halve Omkreds af en omskrevet Polygon, hvis Centervinkel er $\frac{1}{4096}R$. Imellem begge disse Størrelser (Omkredsen af den indskrevne og omskrevne Polygon) ligger Peripherien af en Cirkel, hvis Diameter $\delta = 1$, da $\varrho : \frac{1}{2}\pi = \delta : \pi$.

Anm. De her nævnte sin. $\frac{1}{8192}R$ og cos. $\frac{1}{8192}R$ ere, for at undgaae unødvendig Vidtløftighed, vel ikke her i det foregaaende beregnede, men vil let kunde findes efter §. 13 Anm. 1 og §. 7.

§. 33.

Opgave. At beregne Indholdet P af en i en Cirkel, hvis Radius er r, beskrevet Polygon, naar Centervinklen $= a$ og Sidernes Antal $= n$.

Opløsn. og Beviis. Lad AB (Fig. LIII) være en af Polygonens Sider, saa er ϱ : sin. tab. $a = r : BD$ og $BD = \frac{r \times \text{sin. tab. } a}{\varrho}$. Nu er (Geom. §§. 98 og 100. Till. 1) $P = \frac{BD \times AC}{2} \times n$, men $AC = r$, følgelig $P = \frac{r \times \text{sin. tab. } a \times r}{2\varrho} \times n = \frac{nr^2 \times \text{sin. tab. } a}{2\varrho}$.

Till. 1. Tænke vi os en anden Polygon Π, hvis Side-Antal er N og hvis Centervinkel A, saa er $P : \Pi = \frac{nr^2 \times \text{sin. tab. } a}{2\varrho} : \frac{Nr^2 \times \text{sin. tab. } A}{2\varrho} = n \times$ sin. tab. $a : N \times$ sin. tab. A. Var $n = 4$ og $N = 12$, saa er $a = 90°$ og $A = 30°$, og altsaa sin. tab. $A = \frac{1}{2}$ sin. tab. a (§. 7. Till. 3); følgelig $P : \Pi = 4 : 12 \times \frac{1}{2} = 4 : 6 = 2 : 3$. d. e. Fladen af en regulair indskrevet Fiirkant er $\frac{2}{3}$ af en i samme Cirkel indskrevet regulair Tolvkant.

Till. 2. Antage vi den anden Polygon at have dobbelt saa mange Sider som den første, altsaa

saa $N = 2n$, og følgelig $2A = a$, saa er $P : \Pi = n \times \text{sin. tab. } 2A : 2n \times \text{sin. tab. } A = n \times \text{sin. } 2A : 2n \times \text{sin. } A$. Fremdeles er $\text{sin. } 2A = 2 \text{ sin. } A \times \text{cos. } A$ (§. 11), følgelig $P : \Pi = 2n \times \text{sin. } A \times \text{cos. } A : 2n \times \text{sin. } A = \text{cos. } A : 1$. Naar altsaa $A = 60^\circ$, $a = 120^\circ$, saa er $\text{cos. } A = \text{sin. } 30^\circ = \frac{1}{2}$, og saaledes $P : \Pi = \frac{1}{2} : 1$. d. e. En regulair Triangel er det halve af en i samme Cirkel indskrevet regulair Sexkant.

Praktisk Geometrie

eller

Landmaaling.

Ikke nogen udførlig Afhandling om den egentlige Landmaaling, der forudsætter mange Kundskaber af Optik, Mekanik og Naturlæren, maae man her vente, hvilket heller ikke er overeensstemmende med Bogens Hensigt, men kun en kort og ved nogle Exempler oplyst Anviisning til praktisk at anvende noget af det hidtil foredragne saavel af Geometrie som Trigonometrie.

Anm. Fuldstændig Underretning om praktisk Landmaaling findes i Hr. Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger, 1ste Deel; desuden og i den af Hr. Justitsraaden udgivne Beskrivelse om den Opmaalingsmethode, der er brugt ved de geographiske Korters Forfærdigelse ꝛc.

§. 1.

Forkl. 1) Ethvert frithængende tungt Legeme (som et Blyelod i en Snor) antager en Retning, som kaldes en Vertikal-Linie. En Flade, hvorpaa en saadan Linie er lodret, kaldes horizontal (vandret), som Overfladen af stillestaaende Van-

Vande. En Flades horizontale Stilling undersøges og bestemmes ved det saakaldte Vaterpas, som almindelig er et Glasrør, fyldt med et Fluidum, hvorpaa der svømmer en Luftblære.

2) Linier giøres synlige paa Marken ved Hielp af Afstikningsstokke, som sættes vertikale paa Jordens Overflade, der antages horizontal; og naar de sættes saaledes, at de dække hinanden, da udgiøre de en ret Linie, eller egentlig ligge de alle i en Plan, der staaer lodret paa den horizontale Flade. At afstikke en ret Linie er altsaa at oprette en saadan vertikal Flade, og at finde Længden af denne Flade er at maale den rette Linie. En saadan afstukket ret Linie udmaales ved Hielp af Maalekieden (som er en af korte Led ved Ringe sammensat Jernkiede, der almindelig er 50 Fod lang) eller ved Stokke.

3) Vinkler udmaales enten ved Snor eller Kiede eller ved Maalebordet og Astrolabium. Ved Maalebordet faaer man Vinklen aflagt umiddelbar; ved Astrolabium derimod faaes dens Indhold i Grader, hvorefter den igien kan overføres paa Papiir ved Transporteuren.

Anm. En udførlig Beskrivelse af disse Instrumenter saavelsom og den dertil nødvendige Diopter-Lineal og Anviisning til deres Brug troer jeg her ikke passende, da den dog ikke let vil kunde forstaaes uden at Instrumenterne kan forevises, og desuden enhver maae ved Udøvelsen have dem ved Haanden. De Læsere, der ønske en saadan Beskrivelse, finder den saavel i de allerede nævnte Bøger, som og i Majers gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practischen Geometrie. Götting. 1791-1795.

§. 2.

Opgave. Imellem to Punkter A og B (Fig. LXV) paa Marken at afstikke en ret Linie og vilkaarlig at forlænge den.

Opløsn. I A og B sættes lodrette Stokke AE og BF; i en ubestemt Afstand fra A sættes Stokken CD, der rettes saalænge, indtil alle tre Stokkene, naar Landmaaleren stiller sig noget bag AE, dække hinanden; de ere da alle tre i samme vertikale Flade og udgiøre en ret Linie. For at forlænge denne Linie ud paa den anden Side af B, stiller Landmaaleren sig noget bag Stokken CD og lader ved hans Medhielper sætte en fierde Stok paa den anden Side af B, der rettes saalænge; indtil Stokkene CD, BF og den sidst satte ligge i samme Flade eller udgiøre en ret Linie.

Till. 1. Ere Punkterne A og B saaledes beliggende, at man ikke kan see fra det ene til det andet, saa indsættes i et Punkt K, hvorfra man kan see baade A og B, en tredie Stok, der efter Øie-

Øiemaal giør en ret Linie med A og B. Derpaa sættes en Stok i M saaledes, at AMK er en ret Linie, og i N, saa at KNB er en ret Linie. Er nu ogsaa MKN en ret Linie, saa er alle fem Stokkene i en ret Linie; er derimod MKN ikke i en ret Linie, da rettes Stokkene KMN saalænge til de udgiøre en ret Linie.

Till. 2. Laae imellem A og B en Bakke, som Fig. LXII, da sættes paa Toppen af Bakken i Punktet C, hvorfra man kan see baade A og B, en Stok Cc. Nu afstikkes paa den forklarede Maade en Linie fra A til C, med den Forskiel, at Stokken Aa maae giøres længere, og at man sigter fra a til Punktet D (Foden af Stokken Dd) og fra d til c (Foden af Stokken Cc); derpaa ligeledes en Linie fra C til B.

Anm. Ved Udmaalinger af en saadan Linie sees let, at Kieden strammes fra a til D, derpaa fra d til C, og saaledes paa den anden Side til e, og fra E til b; disse sammenlagte Længder give da Linien AB.

§. 3.

Opgave. At afsætte ved Hielp af en Maalesnor eller Kiede en Vinkel paa Marken ligestor med en given Vinkel.

Opløsn. Paa Benene af den givne Vinkel BAC (Fig. LXVIII) afsætte man af vilkaarlig Længde Ab, Ac og maale Linien bc. Skulde nu denne Vinkel afsættes ved C paa Linien CD (Fig. LXIII), saa afsætter man fra C en Linie Cd saa stor som Ab og afmaale paa Snoren en Længde $= Ac + bc$, og ved en Stok stramme den afmaalte Snor over Cd, saaledes at $Ce = Ac$ og $ed = be$.

§. 4.

Opgave. At finde en Afstand imellem to Stæder A og B (Fig. LXVII) paa Marken, som man ikke umiddelbar kan maale.

1ste Tilfælde. Naar man fra et antaget tredie Standpunkt C kan maale til begge Endepunkter af Afstanden ɔ: til A og B.

Man maaler CA og CB, forlænger disse Linier paa den modsatte Side af C, og giør $Ca = CA$, $Cb = CB$, saa er $ab = AB$ (Geom. §. 12).

2det Tilfælde. Naar man fra det antagne Standpunkt C kan komme til A, men ikke til B.

Man maaler da CA og forlænger den, samt afsætter $Ca = CA$, og ved a en Vinkel $Cab = CAB$ (§. 3). Nu afstikkes fra C en Linie mod B, der forlænges tilbage indtil den skiærer den forlængede ab i b, og nu er $ab = AB$ (Geom. §. 15).

3die Tilfælde. Naar man fra C hverken kan komme til A eller B.

Man afstikker fra C Linier mod A og B, der forlænges tilbage; derpaa vælges et Standpunkt, hvorfra man kan komme til C og finde Afstanden AC, og paa samme Maade CB (2det Tilfælde). Disse afsættes nu paa de forlængede Linier, nemlig $Ca = CA$ og $Cb = CB$, og da bliver $ab = AB$.

Till. 1. Ere der Hindringer, som forbyde at afsætte de hele Linier paa den modsatte Side af C, da kan man afsætte proportionale Stykker af dem begge; f. Ex. $Cd = \frac{1}{2}CA$ og $Ce = \frac{1}{2}CB$, da bliver $ed = \frac{1}{2}AB$. Man kunde og paa Linierne selv, uden at forlænge dem mod den anden Side, afsætte disse Stykker som CE og CD, da DE ligeledes er $= \frac{1}{2}AB$. Ved andet og tredie Tilfælde finder lignende Forandring Sted.

Till. 2. Hvorledes enhver Figur paa Marken (Fig. LXVIII) kan paa samme Maade optages ɔ: paa Papiret tegnes en anden ligedan dermed, indsees let. Man deler Figuren ved Diagonaler, som afstikkes ved Stokke; i de derved opkomne Triangler maales saamange Stykker, som der behøves, for paa Papiret at kunde tegne efter en formindsket Maalestok en Figur, der er ligedan med den givne, som her *Abcdef*.

Till. 3. Ethvert Kort er i sig selv ikke andet end en paa Papiret efter vilkaarlig mindre Maal aftegnet Figur, ligestor med den givne paa Marken. Maalestokkens Størrelse beroer paa Omstændighederne; hos os bruge de oeconomiske Landmaalere, efter Rentekammerets Foranstaltning, den Maalestok, at een Decimaltomme paa Papiret svarer til 200 Alen paa Marken.

Anm. 1. Denne her forklarede Opløsningsmaade bruges sielden, da man ved Maalebord og Astrolabium som og ved Trigonometriens Hielp meget lettere og hurtigere kan besvare Spørgsmaalet. Imidlertid fortiener denne Maade dog at anmærkes, og er bekiendt under Navn af **Landmaaling uden Instrumenter**.

Man seer tillige heraf, at den hele Landmaalingskunst beroer paa Læren om ligestore og ligedanne Triangler og deres Tegning, da man anseer Distancerne imellem forskiellige Steder som Sider i en Triangel, hvoraf man maaler saa meget som behøves, for at kunde tegne en anden ligestor eller ligedan dermed.

Anm. 2. Oeconomisk Landmaaling er den, som kun har med saa lidet et Stykke af Jordens krumme Overflade at giøre, at det uden Feil kan antages for en Plan, og hvor man paa Kortet skal kunde skielne enhver privat Mands Eiendom. Om den Slags Landmaaling er det her tales. Geographisk Landmaaling behandler større Stykker af Jordkloden og grunder sig paa andre Principier.

§. 5.

Forkl. 1) Til at optage en Vinkel (ↄ: drage to Linier paa Papiret, der giøre samme Vinkel som to Linier paa Marken) betiener man sig af Maalebordet (mensula prætoriana), som bestaaer af en fiirkantet Bordskive (hos os almindelig 15 Tommer lang og 11 Tommer bred), der overtrækkes med Papiir; et Stativ, hvorved det kan gives enhver vilkaarlig Stilling; en trebenet Fod, hvorpaa det hviler; og af Sigt-Linialen, hvorved man, efterat et Punkt paa Bordet er stillet lodret over Vinkelspidsen paa Marken, kan sigte til Vinklens afstukne Been, og derefter optrække Linier paa Papiret, der da vil ligge i samme Planer som de nedstukne Stokke, og følgelig giøre samme Vinkel.

2) Til at maale en Vinkel paa Marken betiener man sig af en i Grader og mindre Dele inddeelt Heel-, Halv- eller Fierdedeel-Cirkel, af en halv eller heel Fods eller endnu større Diameter, som faaer Navn af Maale-Cirkel (geographisk Cirkel), Astrolabium, Qvadrant o. s. v., der ved Hielp af et Stativ fastgiøres og stilles paa en Fod ligesom Maalebordet, og er forsynet med een eller to Diopter-Linialer, hvoraf den ene lader sig dreie om Vinkelmaalerens Centrum.

Till. Man bruger ogsaa til Vinklers Udmaaling en Boussole ↄ: en i Grader inddeelt Ring, over hvis Middelpunkt en Magnetnaal frit kan bevæge sig.

Anm. Nøiere Kundskab om disse Instrumenter faaes ved umiddelbar at beskue dem, ved mundtlig Underretning, eller af udførligere Lærebøger om Landmaalingen. Hvilket af de anførte Instrumenter der helst bør bruges, beroer paa Omstændighederne. Ved Opmaalinger i det Smaae (oeconomisk Landmaaling) er Maalebordet det brugbareste; men i det Store, hvor man tillige vil anvende Trigonometrie, er Vinkelmaaleren beqvemmere.

§. 6.

Opgave. At opløse den §. 4 fremsatte Opgave ved Hielp af Maalebordet.

1ste Tilfælde. Naar man kan fra et Standpunkt C (Fig. XXXIX Tab. 3) komme til A og B.

Man stiller da Maalebordet over C saaledes, at Punktet C paa Bordet er lodret over C paa Marken; med Diopter-Linealen sigtes fra C mod A og B og Linierne optrækkes paa Bordet, og efter en formindsket Maalestok giøres Ca og Cb paa Bordet ligestore med CA og CB paa Marken. Maales nu Afstanden ab paa Bordet, saa er den i det mindre Maal hvad AB er i det større.

2det

2det Tilfælde. Naar man fra et Standpunkt C (Fig. XL Tab. 3) kan komme til A, men ikke til B.

Man stiller Maalebordet over C og sigter mod A og mod B, optrækker Linier derefter paa Bordet, og giør efter en formindsket Maalestok $cA = CA$. Derpaa flyttes Maalebordet til A, og stilles, at A paa Bordet kommer over A paa Marken og sigter mod B. Paa Bordet forlænges nu Linierne fra A og C til de skiære hinanden i b, saa er ab paa Bordet i det mindre Maal, hvad AB paa Marken er i det større.

Till. Vil man, uden at flytte Maalebordet hen over Punktet B, maale Afstanden allene fra C, saa stiller man Punktet c paa Bordet lodret over C paa Marken (Fig. LXIII); i en temmelig Afstand derfra nedstikkes to Stokke D og E, der med A udgiøre en ret Linie; derpaa sigter man fra c til D, E, A og B, optrækker Sigt-Linierne, og giør efter en formindsket Maalestok cd, ce og cb ligestore med CD, CE og CB. Trækkes nu fra d igiennem e en Linie, som forlænges, da vil den skiære cA i a; og ab er i det mindre Maal, hvad AB er i det større.

Thi $\triangle\, ced \sim CED$, følgelig $\angle\, cda = CDA$, men ogsaa $\angle\, acd = ACD$, altsaa $\triangle\, dac \sim \triangle\, DAC$ og $ca : cd = CA : CD$, men efter Construction $cd : cb = CD : CB$, altsaa $ca : cb = CA : CB$; og da $\angle\, acb = \angle\, ACB$, saa er $\triangle\, acb \sim \triangle\, ACB$, følgelig $cb : ba = CB : BA$.

3die Tilfælde. Naar man fra C hverken kan komme til A eller B.

Fra Punktet C (Fig. XII) afstikkes Linier mod A og B, som forlænges paa den anden Side af C, og en Stok nedsættes i disse forlængede Linier i E og D. Man stiller Maalebordet over Punktet E, og afmaaler paa Bordet efter formindsket Maalestok $ed = ED$; fra e optrækkes Sigt-Linierne em, en. Nu flyttes Maalebordet, Punktet d paa Bordet bringes noiagtigt over Punktet D paa Marken, og Linien de i samme Retning som DE. Fra d sigtes nu mod A og B, og man mærker nøie hvor disse Linier skiære de forrige fra Punktet e trukne Sigt-Linier i a og b, saa er Linien ab paa Bordet i det formindskede Maal, hvad AB er paa Marken i det virkelige Maal. Beviset herfor er let, da Figuren $deab$ paa Bordet bliver ligedan med $DEAB$ paa Marken.

Till. 1. Hvorledes alle tre Tilfælde ved Hielp af Astrolabium eller en anden Vinkelmaaler kan opløses, indsees let; man maaler nemlig de nødvendige

vendige Vinkler og Sider, og tegner paa Papiret en ligedan Triangel, hvori man kan maale det Søgte.

Till. 2. Ved Trigonometrien opløses disse tre Tilfælde endnu lettere, da man, efter at have maalet de til en Triangels Bestemmelse nødvendige Stykker, regner sig til de øvrige (Trigon. §. 1).

§. 7.

Opgave. Ved Hielp af Instrumenter at optage en Grundtegning af en Figur paa Marken ɔ: at tegne en Figur paa Papiret ligedan med en paa Marken.

Opløsn. I Almindelighed bestaaer det i, at man inddeeler Figuren paa Marken i Triangler og maaler saa meget af enhver som behøves for at frembringe paa Papiret en ligedan Triangel. Men efter de forskiellige Omstændigheder kan der gives forskiellige Tilfælde; jeg vil anføre allene de mærkeligste.

1ste Tilfælde. Naar man kan komme ind i Figuren og efter Behag afstikke og maale Linier.

Man vælger da et Punkt C (Fig. XIV) i Figuren, hvorfra man kan, om muligt, see til alle dens Hiørner. I dette Punkt opstilles Maalebordet saaledes, at et Punkt c paa Bordet er lodret over Punktet C paa Marken. Man optrækker da Sigt-Linier til alle Figurens Vinkelspidser Ca, Cb, Cc, Cd, Ce og Cf, og efter den formindskede Maalestok giør disse Linier ligestore med CA, CB, CC, CD, CE, CF; derpaa trækkes Linierne ab, bc, cd, de, ef og fa, saa er Figuren $abcdef$ paa Maalebordet ligedan med Figuren $ABCDEF$ paa Marken.

Anm. Var der Hindringer, som giorde det umuligt at maale en eller anden af Linierne fra C, som f. Ex. CA, da maaler man i dets Sted Siden AB, og fra b med en Radius, der efter den antagne Maalestok er ligestor med AB, afskiærer man ba.

Till. Vil man istedet for Maalebordet bruge Astrolabium eller en anden Vinkelmaaler, da stilles det i Punktet C, og alle Vinklerne ved C maales, da deraf og af de fra C til Vinkelspidserne maalte Linier, en Figur kan tegnes paa Papiret ligedan med den paa Marken.

2det Tilfælde. Naar man ikke kan komme ind i Figuren.

Man stiller Maalebordet over en af Figurens Vinkelspidser A (Fig. XV), optrækker Sigtlinier mod

mod E og B, og giør efter den formindskede Maalestok $ab = AB$. Derpaa flyttes Bordet hen over B, saa at b kommer lodret over B og ba i Linie med AB. Fra b sigtes nu mod C; og har man fra A optrukket Sigtlinien ac, saa er nu c bestemt uden at maale AC. Saaledes vedblives indtil man har den hele Figur.

Till. 1. Kan man fra en Vinkelspidse oversee hele Figuren, da stiller man Maalebordet over denne Vinkelspidse A (Fig. XVI) og optrækker Sigtlinier til alle de andre Hiørner; man maaler derpaa AB og afsætter efter den antagne Maalestok $ab = AB$; med en Passer-Aabning, der er paa samme Maade ligestor med BC, afskiæres bc o. s. f.

Till. 2. Har man med en Vinkelmaaler maalt alle Vinklerne ved A og desuden Siderne i Figuren, da kan deraf paa Papiir tegnes en Figur ligedan med den paa Marken.

3die Tilfælde. Naar man fra to Standpunkter kan oversee alle Figurens Sider og Vinkler.

Den antagne Standlinie være FG (Fig. LXVI). Man stiller Maalebordet over den ene Ende F, saa at f paa Bordet er lodret over F paa Marken, og sigter saa at fg paa Bordet (der giøres i det mindre Maal ligestor med FG paa Marken) kommer i lige Linie med FG, og derpaa drages fra f Sigtlinier til alle Vinkelspidser i Figuren; derpaa flyttes Maalebordet og stilles i G, saa at g paa Bordet bliver lodret over G paa Marken og gf i samme Retning som GF. Fra G sigtes nu til alle Figurens Hiørner; disse Sigtlinier vil overskiære de tilforn fra F trukne, og saaledes bestemme Figurens Hiørner, der forbindes med rette Linier, og Figuren $abcde$ bliver ligedan med $ABCDE$ paa Marken.

Till. Ved samme Fremgangsmaade bestemmes Beliggenhed af de forskiellige Gienstande, som fra en saadan antaget Standlinie kan sees.

Anm. Stand-Linien maae ikke være alt for kort, ikke give alt for spidse eller stumpe Vinkler, og dens Længde maae paa det nøiagtigste maales.

§. 8.

Forkl. Ved **Høiden** af en over Jorden ophøiet Gienstand forstaaes en lodret Linie fra Gienstandens Spidse til Jorden. At finde denne perpendiculair kaldes **Høidemaaling**, og skeer lettest ved

ved Trigonometrie. Faldet eller Skraaningen fra et Punkt paa Jordens Overflade til et andet er Forskiellen imellem to Stæders Horizont. At bestemme den kaldes Nivellering (Vandmaaling), og forudsætter mathematisk-geographiske Kundskaber.

§. 9.

De mærkeligste Tilfælde ved Høidemaaling er

1) Naar man fra et antaget Standpunkt *C* (Fig. XIII) kan komme til den nederste Ende *B* af den lodrette Høidelinie *AB*.

Man maaler da Linien *CB*, over *C* i *E* stilles Instrumentet (Maalebord eller Astrolabium), og derved maales Vinklen *BDE*; man har da $EF = BC$, Vinklen $BED = R$ og Vinklen *AFE* bekiendt. Heraf kan ved Tegning, og lettere ved trigonometrisk Beregning, findes Linien *AF*; lægges dertil $BF = CE$ (Instrumentets Høide), saa er den søgte Høide *AB* fundet.

2) Naar man ikke fra det antagne Standpunkt *C* kan komme til *B*.

Man maaler da i en ubestemt Afstand fra *B* Standlinien *CD*, stiller Instrumentet over *C*, og bestemmer Vinklen *AEF* og derved tillige *AEG*. Derpaa føres Instrumentet hen over *D*, og Vinklen *AGE* bestemmes. Af disse Vinkler og Siden $EG = CD$ kan Trianglen *AEG* bestemmes ved Tegning eller Beregning. Er det skeet ved Tegning, og man fra *A* fælder en lodret Linie *AF* paa den forlængede *EG*, saa vil den i det formindskede Maal, naar den nøiagtig udmaales, være hvad *AF* virkelig er; og lægges hertil som før Instrumentets Høide *FB*, da findes Linien *AB*. Har man ved Trigonometrie af de maalte Ting i $\triangle AEG$ fundet *AE*, saa kan man i $\triangle AFE$ videre regne sig til *AF* og dertil lægge *FB*.

Anm. Den antagne og maalte Stand-Linie maae ikke være for kort, som *EC* (Fig. LXI), da Vinklen *eAC* bliver saa liden, at den ikke nøiagtig kan maales, men heller maae den, naar Omstændighederne tillade det, tages tilstrækkelig lang, som *ED*.

Till. Indtræffer det næstforegaaende Tilfælde med den Omstændighed, at man fra det over Standpunktet *C* liggende Punkt *E* kan see Punktet *B*, som ligger lodret under *A*, da kan man fra dette ene Punkt bestemme *AB* paa følgende Maade: Ved Hielp af Instrumentet maaler man Vinklerne *AGE* og *GDC*, hvorved man har tillige Vinklen *EDB*, som er $= R - BDC$.

DC

DC = Instrumentets Høide er ogsaa bekiendt. Man kan da efter den formindskede Maalestok afsætte Linien DC, og ved D Vinklen BDC, samt fra C en lodret Linie, der vil skiære DB i Punktet B; fra dette Punkt B oprettes en lodret Linie, som forlænges indtil den skiæres af DA i Punktet A.

Anm. 1. Denne Maade lader sig ikke vel anvende, naar Høiden, man vil finde, er meget stor i Sammenligning med Instrumentets Høide, eller naar AB er mange Gange større end CD.

Anm. 2. Om Nivellering troer jeg det her ikke passende at anføre noget.

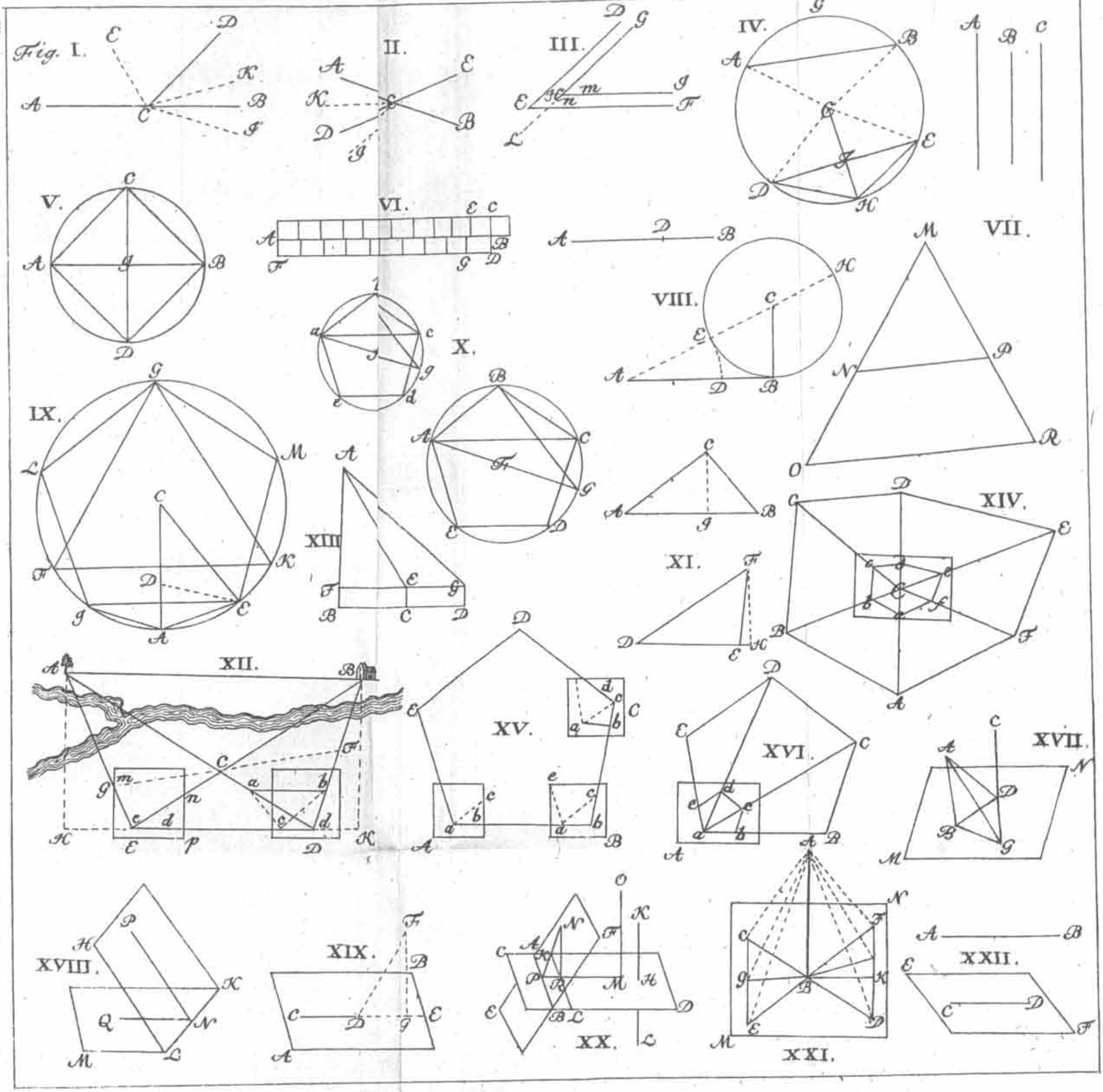
Fig. I.
II.
III.
IV.
V.
VI.
VII.
VIII.
IX.
X.
XI.
XII.
XIII
XIV.
XV.
XVI.
XVII.
XVIII.
XIX.
XX.
XXI.
XXII.

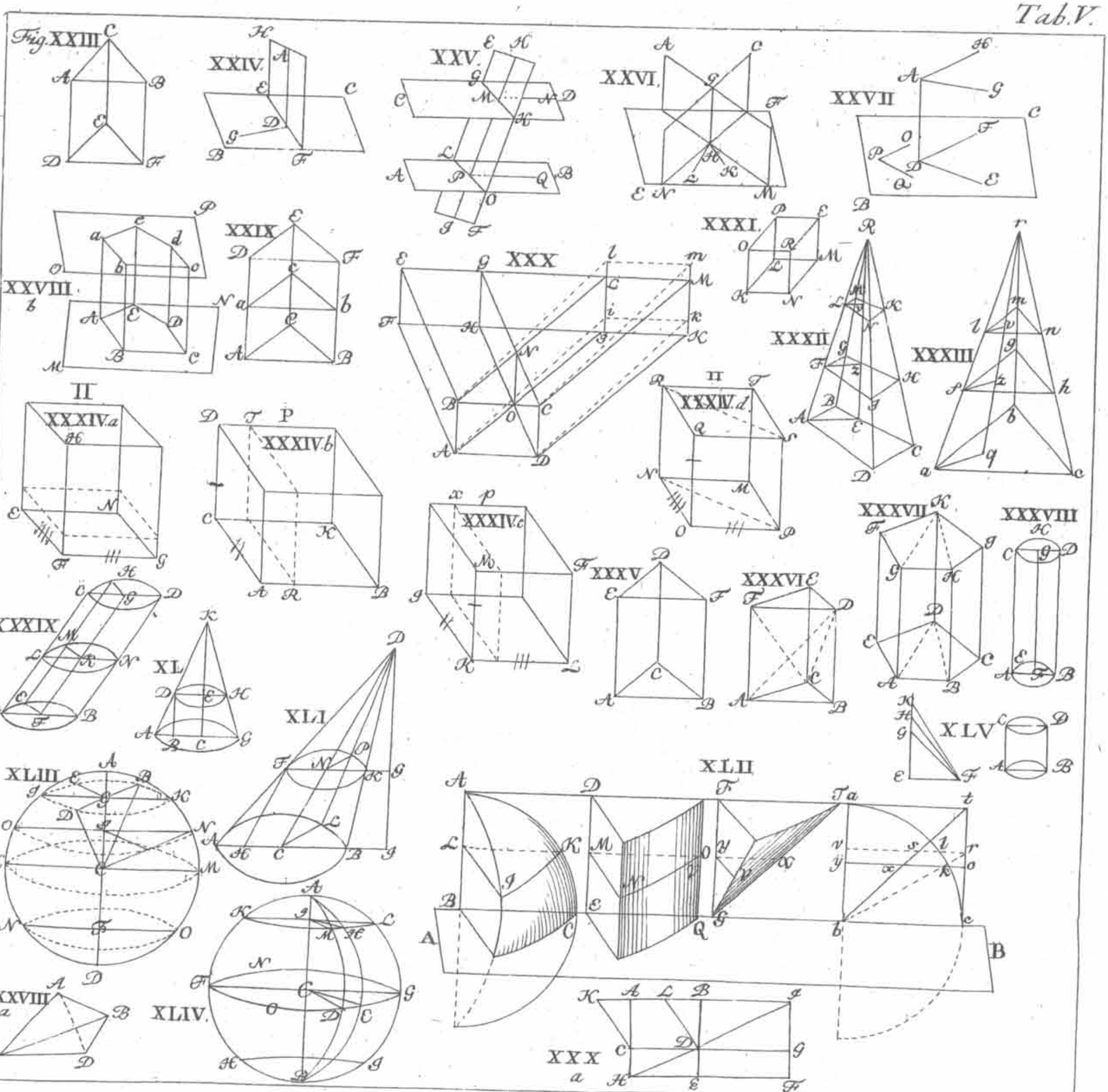
Fig. XXIII
XXIV
XXV
XXVI
XXVII
XXVIII b
XXIX
XXX
XXXI
XXXII
XXXIII
XXXIV a
XXXIV b
XXXIV c
XXXIV d
XXXV
XXXVI
XXXVII
XXXVIII
XXXIX
XL
XLI
XLII
XLIII
XLIV
XLV
XXXVIII a
XXX a

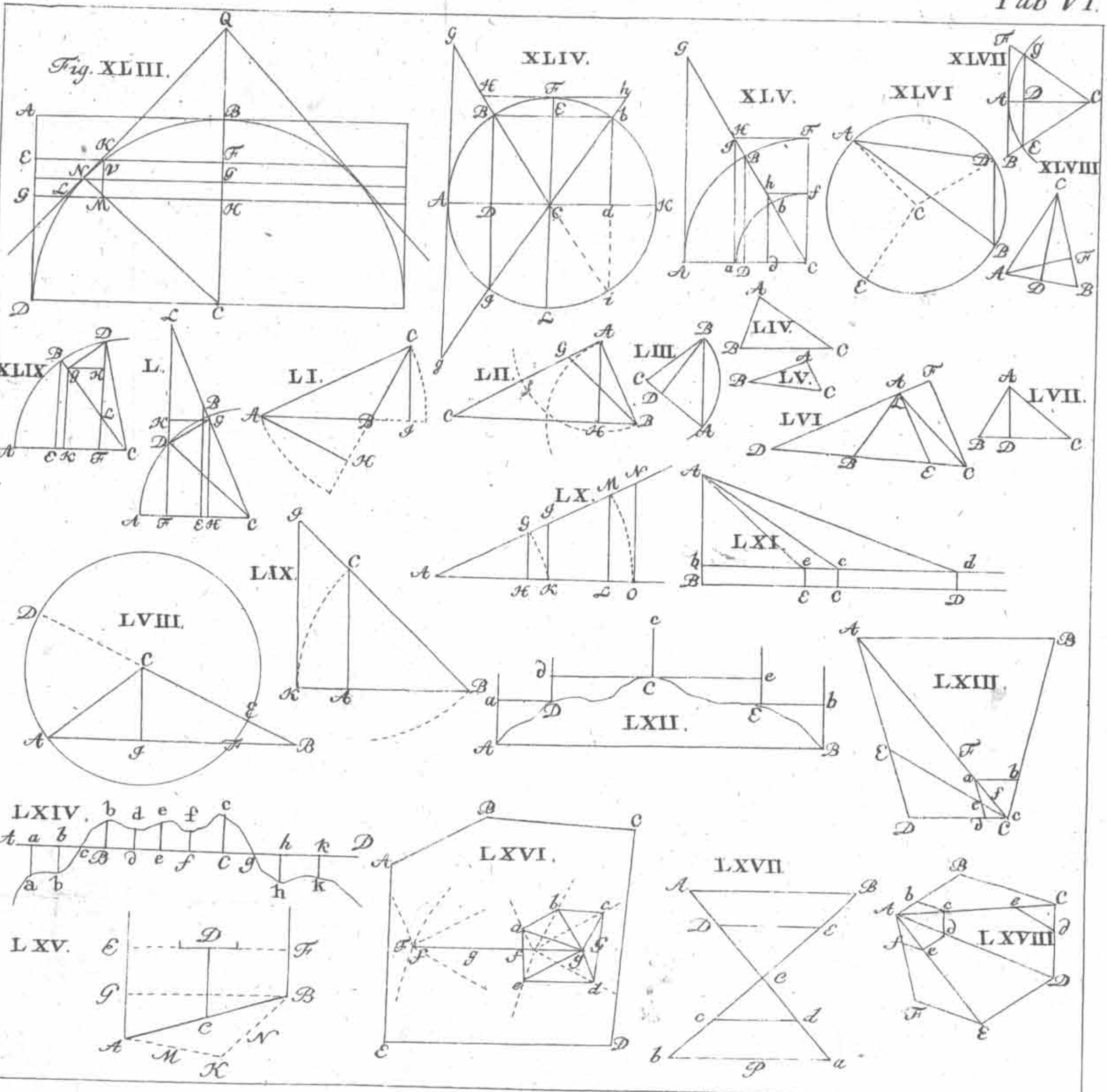
Fig. XLIII.
XLIV.
XLV.
XLVI
XLVII
XLVIII
XLIX
L.
LI.
LII.
LIII.
LIV.
LV.
LVI
LVII.
LVIII.
LIX.
LX.
LXI.
LXII.
LXIII.
LXIV.
LXV.
LXVI.
LXVII.
LXVIII