De

første Grunde

af

den rene Mathematik

Forsøg

til en

Lærebog

for

Skoler

ved

Hans Christian Linderup

Overlærer i Mathematik &c. ved Frue lærde Skole

Første Deel

Fiberg

Kiøbenhavn 1799

Forlagt af Direktør Johan Frederik Schultz

Kongelig og Universitets-Bogtrykker

Prolegomena eller Forerindring til Mathematiken.

Om Mathematikens Gienstand, og dens forskiellige Deele.

§. 1.

Størrelse (qvantitas) er den Egenskab ved en Ting, at den kan modtage Tilvæxt eller Aftagelse, v. en Bestemmelse, hvor ofte til en Tings Frembringelse en ligeartet Ting maae igientages.

Anmærkning. Ting ere ligeartede, (homogeneæ) naar de inbefattes under et fælles Begreb; eftersom dette Begreb er forskielligt, kan de samme Ting være snart ligeartede, snart uligeartede.

En Størrelse (qvantum), kaldes enhver Ting hvori Størrelse (qvantitas) finder Sted. Enhver Størrelse bestaaer derfor af ligeartede Deele. Ere disse ligeartede Deele saaledes foreenede i hinanden, at hvor den eene ophører, den anden der umiddelbar begynder, kaldes Størrelsen

 sam-

sammenhængende (qvantum continuum), f. Ex. Rum. Naar Deelene derimod ikke saaledes ere foreenede, er det en adskilt Størrelse (qvantum discretum) f. Ex. en Armee, et Bibliothek.

En sammenhængende Størrelse kan være enten extensiv (udstrakt) eller intensiv (Kraft-stor).

Extensiv, naar dens ligeartede Deele ere uden for hinanden, og opfylde forskiellige Rum, saa at dens Frembringelse ved deres Foreening er mulig, f. Ex. en Linie.

Intensiv, naar dens ligeartede Deele ikke ere uden for hinanden, og Størrelsen altsaa ikke ved deres Sammensætning kan tænkes frembragt, men maae betragtes som en Eenhed, f. Ex. Varme.

§. 2.

Tydelige Begreb om enhver Art af Størrelses, erholdes først ved Sandserne; dernæst ved at sammenligne en saaledes bekiendt Størrelse med en ligeartet ubekiendt; anstilles denne Sammenligning med adskilte Størrelser, kaldes den Tælning, og den bekiendte Størrelse en Eenhed; bestemmer man derimod paa denne Maade en ubekiendt Udstrækning, saa kaldes den bekiendte Størrelse, Maal eller Maalestok, og Sammenligningen en Udmaalning. De intensive Størrelser kan af Mangel paa en bekiendt Eenhed eller Maalestok

lestok ikke paa denne Maade bestemmes. Endog ved de adskilte og extensive Størrelser, lader denne umiddelbare Sammenligning sig ofte ikke foretage; man maae derfor vide ved Slutninger at bestemme en ubekiendt Størrelse ved Hielp af de ved Tælning og Maalning bekiendte, og til den Ende undersøge de bekiendte Størrelsers Forbindelse med den ubekiendte. Denne videnskabelige Kundskab om Størrelser, og deres Forbindelse kaldes Mathematik: Den forudsætter den umiddelbare Tælning og Maalning, og lærer at bestemme ubekiendte Størrelser, der hvor disse ei kan anvendes, formedelst Slutninger og visse Opfindelses Methoder.

§. 3.

Enhver Størrelse kan betragtes blot som Størrelse, uden Hensyn til nogen virkelig existerende Ting v. affondret fra alle en Tings øvrige Egenskaber, og da kaldes den en abstract (ubenævnt, affondret) Størrelse; eller og med Hensyn til, eller som Egenskab hos en virkelig Ting, og da faaer den Navn af en concret (benævnt v. bestemt) Størrelse. Med hiine allene har den reene Mathematik (Mathesis pura, theoretica) at giøre; med disse derimod den anvendte eller udøvende (Mathesis applicata v. practica).

§. 4.

De Størrelser som efter §. 2, ere Gienstanden for Mathematik ere alleene de adskilte og extensive; Den reene Mathematik har altsaa kun tvende Hoved-Deele. Arithmetik (Tall-Videnskab) handler om de adskilte Størrelser abstract betragtede. Geometrie (Maale-Videnskab v. Videnskab om Rum) om de sammenhængende extensive Størrelser. Dog henregnes i Almindelighed til den reene Mathematik, foruden de tvende nævnte Hoved-Deele, ogsaa Trigonometrie og de analytiske Videnskaber. Trigonometrien lærer af tre givne Stykker i en Triangel at finde de øvrige ved Beregning, og er enten plan, som har plane retlinede Triangler til Gienstand eller sphærisk, hvis Gienstand ere sphæriske eller Kugel-Triangler. De analytiske Videnskaber (analysis) indeholde de almindelige Opfindelses Methoder for begge Hoved-Arter af Størrelser, saavel adskilte som sammenhængende.

§. 5.

Da saavel Geometrie som Arithmetik ere anvendelige paa alle sandselige Gienstænder; saa vilde den heele Materielle Verden blive Object for den anvendte Mathematik; og den maatte altsaa indeholde saa mange forskiellige Deele, som der gives

forskiellige Ting i Naturen, hvis Størrelse lader sig bestemme. Men da det vilde være uhensigtsmæssig at henføre en saa unyttig Mængde af Deele til den anvendte Mathematik, især da den reene Mathematik uden videre Forklaring umiddelbar lader sig anvende paa mangfoldige sandselige Gienstænder; saa deeler man nu i Almindelighed de til den anvendte Mathematik hørende Videnskaber i følgende 4 Hoved-Classer, nemlig: de Mekaniske, Optiske, Astronomiske og Arkitektoniske Videnskaber, og henregne dertil følgende Deele.

I. De Mekaniske Videnskaber, om Lige-Vægt og Bevægelse, derunder hører

1) Statik ɔ: Videnskab om faste Legemers Ligevægt.
2) Mekanik, om faste Legemers Bevægelse
3) Hydrostatik, om Vandets Ligevægt og Tryk.
4) Hydraulik, om Vandets Bevægelse.
5) Aerometrie, om Luftens Ligevægt og Bevægelse.

II. De Optiske Videnskaber, om Lyset, nemlig:

1) Optik, om Lys-Straaler, som fra Objectet i en ret Linie falde i Øiet.
2) Katoptrik, om tilbagekastede Lysstraaler.

3) Di-

3) Dioptrik, om brækkede Lysstraaler.

4) Perspectiv, om Opjecternes Affegning paa en Flade, saaledes som de i en given Afstand og Beliggenhed viser sig for Øiet.

Hertil kunde endnu regnes Photometrie og Pyromerrie, om Lysets og Ildens Kraft; men disse Videnskaber ere endnu i deres Barndom og fortiene ikke Navn af Mathematiske Disciplinær.

III. De Astronomiske Videnskaber, om Himmel-Legemerne og Jorden; dertil regnes:

1) Astronomie, om Himmel-Legemernes Bevægelse, Størrelse og Afstand.

2) Geographie, om Jordens Figur og Størrelse, samt Stedernes Beliggenhed paa samme.

3) Chronologie, om Tids-Bestemmelsen ved Himmel-Legemernes Bevægelse.

4) Gnomonik, om Tids-Bestemmelsen, formedelst Soel, Maane og Stierne-Uhre.

IV. De Arkitektoniske Videnskaber, hvortil hører:

1) Borgerlig Bygningskunst, om Bygningers Opførelse og beqvemme Indretning.

2) Skibs-

2) Skibs-Bygnings-Kunst, om Skibenes rette Dannelse, især under Vandet, at de paa beste Maade svare til deres Bestemmelse.

3) Artillerie-Videnskab, om Skyde-Gevæhrers og andre Vaabens Indretning, som bruges til Angreb og Forsvar.

4) Krigs-Bygnings-Kunst v. Fortification, om Fæstningsværkers Anlæg, samt hvorledes de angribes og forsvares.

De arkitektoniske Videnskaber ere imidlertiid ikke blot mathematiske; men udfordre foruden Mathematiske Kundskaber, som ere aldeles nødvendige, en Mængde andre Kundskaber, som ligge uden for Mathematikens Grændser.

§. 6.

Mathematik inddeles end videre i elementar (lavere) Mathematik og høiere (sublimior). Hiin indskrænker sig blot til de første Grund-Lærdomme, og har sin bestemte Grændse, denne begynder, hvor hiin ophører, og fortsætter sine Undersøgelser i det uendelige. I Henseende til Methode og Foredrag ere den elementare og høiere Mathematik fuldkommen forskiellige; da der i den elementare bestandig bruges den synthetiske Methode, (hvor man gaaer frem fra det enkelte til det sammensatte) og i den høiere den analytiske (hvor man gaaer til-

bage

bage fra det sammensatte til det enkelte) og derved kan Grændse-Linien imellem disse Deele nøiagtigst bestemmes. Man kunde altsaa inddeele, 1) Arithmetik i den gemeene (lavere) som maatte indbefatte simpel Regning og Bogstav Regning, samt Ligningers Opløsning af 1ste og 2den Grad, og den høiere, som undersøger Naturen og Opløsningen af alle mulige Ligninger, og indbefatter integral og differential Regning. 2) Geometrie i den lavere (elementar) som handler allene om rette Linier, og den eene krumme Linie Cirkel-Linien og de Flader og Legemer som ved rette Linier og Cirkel-Linier kan construeres, og høiere, hvorunder henhører alle øvrige krumme Linier, Flader og Legemer.

Om Mathematikens Nytte.

§. 7.

Mathematiken er saaledes en Samling af mange forskiellige Videnskaber, af hvilke enhver især indeholder en Mængde Kundskaber, hvis Vigtighed og Nytte neppe behøver videre at vises. Dens Anvendelse til at forskaffe det Menneskelige Livs Nødvendigheder og Beqvemmeligheder, giør den nødvendig og vigtig for enhver cultiveret Nation, og at udbrede dens Lærdomme er virkelig at befordre

fordre Menneske-Held og Lyksalighed. Men foruden denne almindelige Nytte, medfører Mathematiken for dens Dyrkere den særdeles vigtige Fordeel: at den skiærper Forstanden, og øver den i at dømme sikkert og rigtigt. Forstandens Skiærpelse og Øvelse i at dømme grundigt er uundværlig for enhver Studerende; og saare nødvendig for ethvert vel opdraget Menneske; men denne Fordeel forskaffer ingen Videnskab i den Grad som Mathematik. Thi da Dømme-Kraften bestandig har Tingene for Øjne, og ligesom beskuer dem, saa gaaer den i at anvende de logiske Regler sikkert frem, og er i Stand til let at opdage enhver Feil-Slutning, hvor skiult den endog maatte være.

Paa denne Maade vænnes Dømme-Kraften uformærkt meere og meere til med Sikkerhed at skielne virkelig Overbeviisning fra bedragende Blændeværk, og Mathematikens Studium bliver saaledes den tilforladeligste praktiske Logik, og tillige den beste Skole for Dømme-Kraften. Denne Fordeel befordres end meere ved den strenge Methode (Fremgangsmaade) som i ingen anden Videnskab saa nøie og fuldkommen kan følges. Vil man altsaa vente at opnaae denne omtalte Nytte, maae Mathematiken aldeles behandles efter den strænge Euclidiske Methode; For Konger vidste denne sande Geometer ikke at jævne Vejen til Geometrien; og vir-

virkelig ethvert Forsøg til saaledes at lette Veien, saa behageligt det end kunde synes, tiener meere til at vanskeliggiøre end til at lette Mathematikens Studium. Man maae altsaa nødvendig strax giøre sig en rigtig Forestilling om denne Mathematiske Methode.

Om den Mathematiske Lære-Methode.

§. 9.

For at kunde giøre sig et rigtigt Begreb om denne Methode, maae man nødvendig først forstaae de Konst-Ord, under hvilke de Mathematiske Lærdomme fremsættes. De vigtigste ere Forklaringer (definitiones) Satse (propositiones) og Anmærkninger (scholia), hertil kommer endnu i den anvendte Mathematik, Erfaringer og Forsøg. Forklaringen over disse Konst-Ord læres egentlig i Logiken, men maae for Tydeligheds Skyld her fremsættes.

§. 10.

En Forklaring (definitio) er en tydelig og nøiagtig Bestemmelse af hvad der forstaaes ved en Ting, den maae altsaa hverken indeholde fleere eller færre Kiændemærker, end der ere tilstrækkelige til at give et bestemt Begreb om den Ting, hvorom der tales.

En

En Sats (propositio) er en Bestemmelse af Forholdet imellem tvende Forestillinger. Den eene, om hvilken den anden bekræftes eller nægtes, kaldes subject; (Gienstand), den anden prædicat (Beskaffenhed).

En Sats er theoretisk, naar den blot bestemmer at en Ting er saaledes eller ikke saaledes, praktisk, naar den bestemmer at noget skal skee, og hvorledes det skal skee.

En theoretisk Sats, hvis Sandhed er, naar man blot forstaaer Ordene hvorved den udtrykkes saa tydelig, at den intet Beviis behøver, kaldes en Grundsats (Axioma).

En praktisk Sats af samme Slags kaldes Fordrings-Sats (postulat).

Naar derimod Sandheden og Rigtigheden af en Sats ikke umiddelbar indsees, men behøver at beviises, hedder den, hvis Satsen er theoretisk, en Lære-Sætning (theorema), og hvis den er praktisk, et Værkstykke, en Opgave (problema). En Sats som enten umiddelbar eller ved en let Slutning udledes af en anden foregaaende, kaldes en Følge, et Tillæg (corollarium). En Lære-Sætning eller Opgave, som inføres i en Videnskab, hvor den ikke egentlig henhører, hedder en Laane-Sætning (lemma). En Anmærkning (scholion) indeholder blot tilfældige Oplysninger,

som

som anbringes ved en Definition eller Sats; eller og Anviisninger til at giøres opmærksomme paa det særdeles vigtige i Beviset.

Et Mathematisk Beviis (Demonstratio) er en intuitiv (beskuelig) Fremstillelse af den nødvendige Forbindelse imellem en Sats's Subject og Prædicat. Demonstrationer ere enten directe (uden Omveje) eller indirecte (apagogiske ɔ: med Omveje) disse vise en Satses Rigtighed af den modsattes Umulighed, hiine ligefrem af selv-klare eller forudbeviiste Sætninger.

§. 11.

Den Methode, efter hvilken Mathematikerne gaae frem, bestaaer altsaa i følgende: De begynde med Forklaringer og give om enhver Ting, hvorom de tale, hvis den ikke af sig selv er klar, en bestemt Definition. Ethvert Ord de bruge har saaledes sin bestemte og tydelige Bemærkelse, fra hvilken de aldrig afvige. Efter Forklaringerne anføres de nu forstaaelige Grundsætninger, og ved Hielp af disse vises bestandig ikke alleene Muligheden af den forklarede Sag, men endog Maaden, hvorpaa den er mulig. Hverken i et Problems Opløsning eller i et Theorems Demonstration maa forekomme en Sats, som ikke i Forveien er fremsat enten som Axiom, Postulat, eller beviist som Theorem Problem og Corollarium og her kan citeres. Til Forkortning i deres Sprog betiene de sig af det vigtige Konstgreeb, at i Steden for Ord, udtrykke de Størrelserne selv ved Tall eller Bogstaver, og Deres Forbindelse med hinanden eller Forhold til hinanden ved beqvemme Tegn.

Men denne Fremgangsmaade, der i Grunden ikke er andet, end den videnskabelige eller systematiske, bør og kan bruges og følges i enhver anden Videnskab, ligesaa nøie som i Mathematiken;

Det væsentlige altsaa i den mathematiske Methode bestaaer ikke deri, men som Kant i sin Kritik der reinen Vernunft tydelig viser, allene deri at Mathematikeren ikke som Philosophen gaaer frem ved at slutte (discursive), men ved selv at danne og construere sine Begreber i Tiden og Rummet. (intuitiv). Heraf sees tillige, at Mathematiken alleene kan anvendes paa sandselige Gienstande (phænomener) som de eeneste [illegible]r kan giøres beskuelige.

Arith-

Arithmetik eller Tal-Videnskab.

Om Tal og de Tegn hvormed de skrives.

§. 12.

I Følge den nylig forklarede Methode, begyndes altsaa med Forklaringer:

Den Egenskab, som fleere ligeartede Størrelser (§. 1, Anmerk.) have tilfælles, kaldes Eenheden: v. en enkelt Størrelse i sit Slags for sig alleene betragtet, kaldes en Eenhed. Fleere ligeartede Størrelser eller Eenheder tilsammentagne udgiøre et Tall, som altsaa er en Mængde af Eenheder. Men da enhver Størrelse eller enhver Eenhed bestaaer af Deele, eller i det mindste kan ansees at være sammensat af Deele, saa er det klart, at en Eenhed i Hensigt til dens Deele ogsaa kan betragtes som et Tal.

At tælle er at igientage Eenheden; følgelig kan alleene de ligeartede Størrelser sammentælles: f. Ex. Tre Jyder og toe Holsteenere kan ikke sammentælles, da de ikke ere ligeartede Størrelser, men bringes de under et fælles Begreb, og betragtes som Danske, da blive de ligeartede og kan sammentælles, og udgiøre fem.

§. 13.

De ved Eenhedens Igientagelse fremkomne Mængder af Eenheder udtrykkes ved dertil valgte Ord

Ord, som kan kaldes Tall-Ord, saaledes: naar en vis Eenhed lægges til sig selv, benævnes den da udkomne Mængde med Tal-Ordet: to; lægges til denne Mængde den samme Eenhed endnu eengang, da udtrykkes den frembragte Mængde ved tre o. s. v.

For des lettere at kunde benævne den forskiellige Mængde af Eenheder, som saaledes ved Tælning kunde frembringes, betiener man sig kun af følgende usammensatte Tal-Ord, een, to, tre, fire, fem, sex, syv, otte, ni, ti; hvis Bemærkelse af det forhen sagte, let forstaaes, naar Igientagelsen videre fortsettes, bruger man andre af disse enkelte sammensatte Tal-Ord: saaledes er Ordet elleve, det samme som ti og een; Tretten som ti og tre, Tyve er to Gange ti, tredive, tre Gange ti. Denne Maade at sammensætte Tal-Ordene, er bekiendt under Navn af det decadiske Tal-System eller Ti-Tal Systemet. De ved Eenhedens Gientagelse frembragte første Ti Mængder, betegnes nemlig ved de nylig nævnte usammensatte Ord; siden gaaer man frem ved Sammensætning, indtil man faaer ti Tiere, som benævnes med Ordet Hundrede, og nu sammensættes de allerede bekiendte indtil man faaer ti Hundreder som nævnes med Ordet Tusinde. Ved Hielp af disse tolv nye enkelte Ord, kan man ved

Sam-

Sammensættelser udtrykke en overmaade stor Mængde forskiellige Tal-Begreber. Til at tilkiendegive endnu større Mængder, betiener man sig af Ordet Million, som betegner en Mængde af ti Gange hundrede Tusind; og Billion, som betegner ti hundrede Tusind Millioner ꝛc.

Anmerk. Foruden den her forklarede Maade at tælle paa, gives der andre, f. Ex. at tælle til To; til Fem og til Fire ꝛc. hvilke alle af forskiellige have været brugte, og i større Værker findes forklarede; men som jeg har troet her blot at burde nævne.

§. 14.

Til skriftlig at udtrykke disse Tal-Begreb, betiener man sig i steden for Ord af følgende Zifre eller Tegn 1 (een), 2 (to), 3 (tre), 4 (fire), 5 (fem), 6 (sex), 7 (syv), 8 (otte), 9 (ni), 0 (Nul). Ved Hielp af disse ti Ziffre kan man betegne alle heele Tal, da det samme Ziffer kan betegne forskiellige Tal-Begreb efter den forskiellige Plads det har. Naar man tæller fra høire Side mod venstre, betegner det yderste Ziffer en vis Mængde Eenere, det andet Tiere, det tredie Hundreder, det fierde Tusinder, o. s. v. Nullet bruges allene til at opfylde en tom Plads, og viser at der af den Classe, hvis Plads det optager, ingen er tilstæde. F. Ex. 7 betegner syv Eenheder. 74 er 4 Eenere og 7 Tiere eller fire og halv-

fierd-

fierdsindstyve, 305 læses fem Eenere, ingen Tiere og tre Hundreder, eller kortere tre Hundrede og fem. Den simpleste Maade at læse et ved mange Zifre udtrykt Tal var at læse fra hoire mod venstre, da man veed at Zifrenes Værdi voxer og bliver ti Gange høiere for hver Plads de i den Orden rykke frem; men for hurtig at kunde læse en saadan Mængde Zifre fra venstre til hoire behøver man blot, at aftælle dem fra høire og sætte ved hver tredie Ziffer et Komma, og over det Tal, som følger næst det andet Komma, et Punct eller Streg, over det næst det fierde Komma to Puncter o. s. v. da vil det Ziffer med eet Punct eller Streg over, betyde Millioner, det med to Punkter Billioner, og man vil da uden Vanskelighed saavel kunde læse ethvert med Zifre skrevet Tal, som og kunde skrive ethvert givet: f. Ex.

$$\dddot{7},803,43\ddot{8},765,90\dot{2},487,604$$

læses: syv Trillioner, otte Hundrede og tre Tusinde, fire Hundrede og otte og tredive Billioner, syv Hundrede, fem og tredsindstyve Tusinde, ni Hundrede og to Millioner, og fire Hundrede og syv og firsindstyve Tusind, sex Hundrede og fire.

Anmærk. Denne vigtige Opfindelse at kunde med 10 Zifre skrive alle mulige Tal Begreb, har Gerbert, (som siden blev Pave under Navn af Sylvester den anden) først giort bekiendt i Europa; at

 Gerbert

Gerbert har lært denne Konst af Araberne, synes aldeles rimeligt, saavel af hans Breve, som og af den Maade hvorpaa Zifrene læses; der tydelig nok røber deres østerlandske Oprindelse.

§. 15.

Foruden disse nu bekiendte Tal-Zifre, bruge Mathematikerne for Kortheds Skyld, følgende Tegn:

Tillægnings Tegnet + (plus) som læses ved det Ord og, og naar det sættes mellem tvende Størrelser, betyder at de skal lægges sammen, f. Ex. 8 + 3 læser otte og tre.

Fradragnings Tegnet ÷ (minus) betyder mindre og naar det sættes imellem 2 Tal, tilkiendegiver det, at det sidste skal trækkes fra det første, f. Ex. 12 ÷ 8 hedder otte fra tolv, v. tolv mindre end otte.

Igientagelses Tegnet ×, . læses ved Ordet Gange, og betegner naar det sættes mellem to Tal, at det eene skal gientages saa ofte som det andet indeholder Eenheden, f. Ex. 8 × 3 er 8 igientagen 3 Gange.

Deelings Tegnet, :, som naar det sættes imellem to Tal, tilkiendegiver at man skal dele det første med det sidste ɔ: dele det første i saa mange lige-

ligestore Dele, som det sidste indeholder Eenheder. f. Ex. 12 : 4 hedder 12 skal deles i 4 lige Dele.

Ligheds Tegnet =, som viser, at de Størrelser, imellem hvilke det sættes ere lige store f. Ex. 5 + 3 = 8 hedder 5 lagt til 3 er lig 8.

Uligheds Tegnet <, som sættes imellem ulige store Størrelser, med Spidsen mod den mindre og Aabningen mod den større. f. Ex. 8 > 5 betegner at 8 er større end 5; men 3 < 7 betegner at 3 er mindre end 7.

Om de almindelige Forandringer, der kan foretages med Størrelser, eller de fire Regnings-Arter i hele Tal.

§. 16.

Naar alle de adskilte Størrelser som efter § 4 ere Gienstænder for Tal-Videnskaben, kunde ved simpel Tælning findes og bestemmes, da indskrænkedes denne Videnskab blot til det her nu kortelig er fremsat, men da der gives mangfoldige Tilfælde, hvor den simple Tælning deels vilde være umulig og deels alt for vidtløftig, saa skal Arithmetiken efter at have lært os Tallene og deres Natur, tillige lære os de Methoder, ved hvilke vi ved Hielp af visse givne og med Tal udtrykte Størrelser finde de ubekiendte, som derved bestemmes; denne Deel af Arithmetiken kaldes i Almindelighed Regne-Konst. Dens egentlige Opfindelses Methode bestaaer i at foretage adskillige Forandringer med de givne Tal, for at finde det søgte. Disse Forandringer ere sædvanlig bekiendte under Navn af Regnings-Arter.

Al Forandring, som kan foretages med en given Størrelse, maae enten gaae ud paa at formere eller formindske den. Der ere altsaa kun tvende Hoved-Forandringer eller Regnings-Arter mulige, nemlig: Størrelsernes Formerelse og Formindskelse; men da Formerelsen kan skee paa to forskiellige Maader, og Formindskelsen ligeledes, saa har man antaget fire saadanne Forandringer eller Regnings-Arter. Hvoraf de tvende vise hvorledes en Størrelse kan formeres og de to hvorledes den formindskes. Som oversees let saaledes:

Additio

Tals Formerelse

Addition v. Sammenlægning

$$\overbrace{8 + 5 + 3 + 4}^{\text{sammerende Tal}} = 20 \text{ Summen}$$

Multiplicatio v. Igientagelse

$$\overbrace{8 \times 5}^{\text{Factorer}} \text{ v. } (8 \cdot 5) = 40 \text{ Product}$$

8
8
8
8
8

Formindskelse

Subtraction v. Fradragning

$$\underset{\text{Minuenden}}{20} - \underset{\text{Subtrahenden}}{8} = 12 \text{ differentz v. Forskiel}$$

Division v. Deelning

$$\underset{\text{Dividend}}{20} : \underset{\text{Divisor}}{4} = 5 \text{ Qvotient}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{4} \\ 16 \\ \underline{4} \\ 12 \\ \underline{4} \\ 8 \\ \underline{4} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$$

Addition bestaaer i at formere en Størrelse ved at legge andre ligeartede Størrelser dertil, og det hele derved udbragte kaldes Summen.

Multiplication formerer en given Størrelse ved at igientage den saa ofte, som et givet Tal

til-

tilkiendegiver, de givne Tal kaldes Faktorer, og det udbragte Produkt.

Subtraction formindsker en given Størrelse ved at trække en anden given ligeartet Størrelse derfra, den der skal formindskes, kaldes Minuenden, og den der skal fradrages Subtrahenden, det tilbageblevne Differentz.

Division lærer at formindske en Størrelse, ved at fradrage en anden given Størrelse saa ofte det er muligt. Den givne Størrelse som skal formindskes, kaldes Dividenden, den der skal fradrages Divisor, og det Tal som viser hvor ofte Divisor kan drages fra Dividenden, kaldes Qvotient.

§. 17.

Efter saaledes at have fremsat de nødvendige Forklaringer (Grundsætningerne skal siden blive anførte) kommer jeg nu til nøiere at giennemgaae de i forrige § nævnte fire Regnings-Arter:

At addere flere forskiellige med Tal udtrykte Størrelser, er altsaa at finde et Tal, som udtrykker den samme Mængde af Eenheder, som de flere forskiellige tilsammentagne. Men da en ved Tal udtrykt Størrelse allene kan formeres ved at legge lige-

ligeartede Størrelser dertil, saa indsees let at Summen altid vil indeholde samme Classe af Eenheder, som de summerende Tal. Saaledes vil flere Eenere sammenlagte udgiøre en Sum af Eenere; flere Tiere en Sum af Tiere o. s. v.

For at kunde hurtig udøve Additionen, fordres nødvendig at man veed Summen af ethvert Par af de ni enkelte Tal, dette findes enten ved at tælle paa Fingrene eller ved at skrive saa mange Streger eller Punkter som der ere Eenheder i de Tal, der skal adderes, og sammentælle dem. Veed man dette, findes Summen af de sammensatte Tal let paa følgende Maade: Man ordner de givne Tal saaledes, at Eenerne komme under Eenerne, Tiere under Tiere o. s. v., tæller derpaa hver Classe sammen for sig; og samler endelig disse enkelte Summer til een Hoved-Sum. Til Exempel ville vi antage at følgende Tal skulde adderes: 874, 1359, 7486. disse givne Tal ordnes da som nylig er sagt, og naar nu hver Classe af Eenheder tælles for sig, har man nitten Eenere, tyve Tiere, femten Hundreder, og otte Tusinder, som samlede udgiøre Summen Ni Tusinde syv Hundrede og Nitten, eller og saaledes:

874 1359 7486 ——— 19 Enere 20 Tiere 15 Hundreder 8 Tusinder ——— 9719	Enerne sammenlagte udgiøre 19, men efter §. 13 udgiøre ti Enere en Tier, de 9 skrives derfor paa Enernes Plads, og den eene Tier tegnes eller legges strax til Tierne, man faar da 21 Tiere som udgiøre 2 Hundrede og en Tier o s. f.

Til Lettelse i Sammentælningen kan man bemærke ved et Punct eller Streg hvor ofte man kommer til ti, og saaledes paa en let Maade erindre hvor mange man fra den optalte Classe af Eenheder har at legge til den følgende, f. Ex.

7.8 6.4. 3.8.7 5 9.8. 3 0 7 6. 9.8.7 ——— 1 2 9 1 2	Ved at sammentælle den første Classe eller Eenere, har jeg 7 og 6 er 13, det er tre Eenere og en Tier med et Punct, ved sex anmærker jeg, at jeg har en Tier henlagt, og tæller vi-

dere ikke 13 og 8 men 3 og 8 er 11, her giøres nok et Mærke og tælles videre, 1 og 7 er 8 og og 4 er 12 som er 2 over ti, der giøres igien et Punct, jeg har nu to Eenere og tre Tiere som de tre Punkter

ter udvise, og saaledes fortfares alle Classerne igiennem.

Paa denne Maade vil man med Hurtighed og Lethed kunde iværksætte Additionen, naar man kun som forhen er sagt, veed Summerne af de 9 enkelte Tal. Den simpleste og bedste Prøve paa Additionen er at regne det samme Exempel flere Gange, saaledes at man een Gang tæller fra neden opad, og en anden Gang fra oven og ned, faaer man da ved begge Tælninger samme Sum, kan man med al Rimelighed slutte at man har adderet rigtig. Ved meget vidtløftige Additioner kan man dele de opgivne summerende Tal i flere Dele, og summere hver Deel og siden sammenlægge partial Summerne. som:

3245	
7897	
598	
1034	
———	12774
876	
958	
3279	
426	
———	5539
	———
	Lateris 18313

Transport 18313
8357
943
876
——————— 10176

28489 — 28489

og naar man da efter at have sammentalt de enkelte Summer, under et sammentæller det heele, tiener det tillige som Prøve paa Additionens Rigtighed.

§. 18.

De Tal, om hvis Addition vi hidtil have talt, kaldes ubenævnte, efterdi de blot udtrykke en Mængde af Eenheder uden at bestemme deres Art eller Beskaffenhed (§ 3) naar derimod tillige haves Hensyn til Eenhedens Art, kaldes Tallet benævnt. Saadanne benævnte Tal adderes paa samme Maade som de ubenævnte, naar man allene veed, hvad Forhold de forskiellige Arter staae i til hinanden, og hvor mange af den ringere Sort der gaae paa den høiere. Saaledes for at kunde addere forskiellige Summer Penge, som efter den her brugelige Inddeling, i Almindelighed udtrykkes ved Rigsdaler, Mark, Skilling, er det nødvendigt at viide at 1 Rd. er sex Mark og 1 Mark sexten

ten Skilling. Man skriver da de opgivne summerende Tal under hinanden og tæller først Skillingerne sammen, og undersøger hvor mange Mark de samlede Skillinger udgiøre, de overblevne Skillinger, som ikke udgiøre en Mark tegnes paa Skillingers Plads, og Markerne mærkes for at legges til de sammentalte Marker, der igien giøres til Rigsdalere, f. Ex. at addere:

48 Rd.	3 Mk.	12 Sk.
53 —	4 —	14 —
8 —	2 —	10 —
13 —	5 —	8 —
29 —	2 —	13 —
154 Rd.	1 Mk.	9 Sk.

Skillingerne sammenlagte udgiøre 57, da nu 16 Skilling udgiør 1 ℳ, saa findes ved at prøve hvor ofte 16 indeholdes i 57 (hvilket saalænge Divisionen ikke er lært, kan erfares under Skillingers Sammenlægning ved med et Punct eller Komma at mærke hver Gang man naaer sexten,) at 57 ß er 3 ℳ og 9 ß, de 9 ß skrives paa Skillingernes Plads, og de 3 ℳ lægges til Markerne, som sammenlagte blive 19, nu er 6 ℳ en Rigsdaler, altsaa ere de 19 ℳ, 3 Rdlr. og 1 ℳ, den eene Mark skrives paa Markernes Plads, og de tre Rigsdaler adderes til Rigsdalerne paa den i forrige § forklarede Maade.

X

§. 19.

At subtrahere et mindre Tal fra et større; skeer ved at tage saa mange Eenheder fra det større som der indeholdes i det mindre, ved de enkelte Tal skeer det som ved Additionen er forklaret § 17, og ved de sammensatte paa følgende Maade:

Man ordner Tallene som ved Addition, nemlig Eenerne i Subtrahenden under Eenerne i Minuenden, Tierne under Tierne o. s. v. Man begynder da Subtractionen fra Eenerne, og fortfarer siden med de høiere Classer, treffer det nu at der af en vis Classe er et større Antal i Subtrahenden end i Minuenden, saa da et større Tal ikke kan tages fra et mindre, saa tager jeg af den næste Classe, som altid efter § 14 er ti Gange høiere i Værdi een Eenhed, som udgiør ti af dem hvorfra jeg skulde subtrahere, disse legges til de forrige, og nu iværksættes Fradragningen, dette kaldes i Almindelighed at laane een, som er ti; til Ex. lad 8976 subtraheres fra 21348 de skrives da under hinanden:

21348
8976

12372

Nu subtraheres 6 Eenere fra 8 Eenere, der bliver da to til Rest, som skrives under Stregen paa

paa Eenernes Plads; syv Tiere skulde trækkes fra fire Tiere, men da det ikke gaaer an, laanes een af Hundrederne som er ti Tiere, disse lagde til de 4 udgiøre 14 Tiere, og nu trækkes de 7 derfra der bliver da syv Rest som skrives paa Tiernes Plads under Stregen, og saaledes fortfares med de øvrige Classer. Med en Punkt eller Streg bemærkes de Tal hos hvilke det saakaldte Laan er giort, for at erindre at de ere bleven formindskede en Eenhed i deres Værdi. Findes et Nul paa den Plads hvor man skulde laane, da maae man gaae det forbi og laane hos det følgende saaledes: jeg skal fradrage 897 fra 304.06

897

29509

jeg skulde her laane en Tier, men finder ingen, jeg laaner da en Hundreder, som er ti Tiere, af disse laaner jeg een som er ti Eenere, og Subtraktionen skeer nu som ovenfor er forklaret, af de ti Tiere brugtes kun een, de ni ere altsaa tilbage og sættes i Nullets Sted, og Subtractionen skeer da ligefrem, dette har givet Anledning til den praktiske Regel, at naar i Subtraktionen et Nul overspringes for at laane, bliver det at ansee derefter som et Ni-Tal.

§. 20.

§. 20.

Subtractionen med benævnte Tal skeer som med ubenævnte, naar man kun som i Anleedning af Additionen § 18 er anmærket, kiender Inddelingen og Forholdet af de forskiellige Ting, som skal subtraheres:

f. Ex. fra	286 Rd.	2 ₰	8 ß	
skal subtraheres	97 —	5 —	12 —	
Rest	188 Rd.	2 ₰	12 ß	

12 ß skulde subtraheres fra 8 ß, det gaar ikke an, her laanes da 1 ₰, som efter det bekiendte Forhold er 16 ß, disse legges til de 8, og nu subtraheres 12 fra 24, og Resten skrives under Stregen o. s. v.

Da man ved Subtractionen formindsker det større Tal ved at tage saa mange Eenheder bort som der er i Subtrahenden § 19, saa sees let, at naar det overblevne (difference Forskiel) legges til Subtrahenden, da udkommer Minuenden, og at følgelig en sikker Prøve haves paa Subtractionen, naar Differentzen og Subtrahenden igien adderes, og man da faaer Minuenden. Subtraction og Addition ere derfor modsatte Regnings-Arter, og den eene tiener til at prøve den anden.

Foruden de Tilfælde i Subtractionen jeg hidindtil har betragtet, hvor Minuenden i det Hele stedse

har

har været større end Subtrahenden; gives der og Tilfælde, hvor et større Tal virkelig skal trækkes fra et mindre; men disse Tilfælde forklares bedst tillige med Læren om modsatte Størrelser, hvortil den nærmest henhører, og forbigaaes derfor paa dette Sted.

2.

§. 21.

At multiplicere er efter Forklaringen i § 16, at igientage den eene Faktor, saa ofte som Eenheden indeholdes i den anden. Multiplicationen er altsaa ikke andet end en ofte igientagen Addition. Faktorerne kan enten være begge enkelte Tal, eller og begge sammensatte eller og een enkelt og een sammensat. I første Tilfælde findes Productet ved enten i Tankerne eller paa Papiret at lægge saa ofte den eene Faktor til sig selv, som den anden tilkiendegiver; f. Ex. hvormeget er 5×4 findes saaledes:

$\overset{\text{I}}{5} + \overset{\text{II}}{5} + \overset{\text{III}}{5} + \overset{\text{IIII}}{5} = 20$, jeg lægger nemlig Tallet fem til sig selv fire Gange; men for med Hurtighed og Lethed at kunde iværksætte Multiplicationen forudsættes, at man veed Produkterne af de ni enkelte Tal, hvilke følgende Tabel, der blot ved Addition er forfærdiget, udviser.

1—	2—	3—	4—	5—	6—	7—	8—	9
2—	4—	6—	8—	10—	12—	14—	16—	18
3—	6—	9—	12—	15—	18—	21—	24—	27
4—	8—	12—	16—	20—	24—	28—	32—	36
5—	10—	15—	20—	25—	30—	35—	40—	45
6—	12—	18—	24—	30—	36—	42—	48—	54
7—	14—	21—	28—	35—	42—	49—	56—	63
8—	16—	24—	32—	40—	48—	56—	64—	72
9—	18—	27—	36—	45—	54—	63—	72—	81

I den førſte Rad ſtaae de ni enkelte Tal, diſſe adderes til ſig ſelv, og ſaaledes dannes den anden Rad, ſom legges til den førſte ſaa fremkommer den tredie, der igien lagt til den førſte giver den fierde o. ſ. v.

Vil man nu ved Hielp af denne Tabel vide Produktet af 5 og 7, da ſøge man i den førſte vertikale Rad fra venſtre Tallet 5, og i den øverſte horiſontale Rad Tallet 7, den horiſontale Rad ſom begynder med 5 og den verticale ſom begynder med 7, vil da ſtøde ſammen, og det Tal ſom er fælles for dem begge er det ſøgte Produkt ſom her er 35.

§. 22.

Veed man nu enten ved Hielp af oven forklarede Tabel eller paa anden Maade Produkterne af de enkelte Tal, da findes Produktet af et ſam-

menſat og et enkelt ved at opløſe det ſammenſatte i de enkelte hvoraf det beſtaaer, multiplicere ethvert for ſig med det givne Tal, og ſiden addere partial Produkterne f. Ex. naar 4589 ſkulde multipliceres med 9, da opløſes dette ſammenſatte Tal i 4 Tuſinder 5 Hundreder 8 Tiere 9 Eenere.

4000 + 500 + 80 + 9 hver af diſſe igientages ni Gange, og jeg faaer

36000	4500, 720, 81 diſſe
4500	Produkter ſammenlagte
720	udgiøre 41301 ſom er det
81	ſøgte Produkt
41301	

Kortere ſaaledes: Ni Gange ni Eenere er 81 Eenere

4589	ſom efter § 14 er 8 Tiere
9	og 1 Eener, den 1 ſkrives
41301	paa Eenernes Plads og de
	8 bemærkes, nu igienta-

ges de 8 Tiere 9 Gange, ſom giør 72 Tier, hertil lægges de 8 ſom vare udkomne ved Eenernes Igientagelſe, der bliver da 80 Tiere ſom netop udgiøre 8 Hundreder, med 0 bemærkes altſaa paa Tiernes Plads, at der ingen er, og ſaaledes fortfares indtil den hele Multiplication er tilendebragt.

§. 23.

Ere begge Faktorerne ſammenſatte Tal, da multipliceres paa den i forrige § forklarede Maade,

førſt

først med Enerne, dernæst med Tierne o. s. f. men Produktet som fremkommer ved at multiplicere med Tierne, skrives paa Tiernes Plads, og det med Hundrederne paa Hundredernes Plads o. s. v., thi da f. Ex. 40 er = 4 × 10, saa maae Productet som fremkommer ved at multiplicere med 40, blive 10 Gange saa høit, som ved at multiplicere med 4, og Formerelsen med 10 skeer efter Tal-Systemets § 14 forklarede Natur, ved at rykke Tal-Zifrene frem en Plads fra høire til venstre, naar dette iagttages, da kan de ved Multiplikation med Enere, Tiere og Hundreder ꝛc. frembragte enkelte Produkter ved Addition foreenes til et Hoved-Produkt, sæt til Ex. at 5478 skal multipliceres med 657, der er at Tallet 5478 skal igientages 600 Gange, og 50 Gange og 7 Gange, det skeer saaledes:

$$\begin{array}{r} 5478 \\ 657 \\ \hline 38346 \\ 27390 \\ 32868 \\ \hline 3599046 \end{array}$$

først multipliceres efter § 22 med de 7 Enere, dernæst med de 5 Tiere, det udkomne Produkt 27390 rykkes frem en Plads fra høire mod venstre, da 5 ikke var Ener, men egentlig 5 × 10.

Nu multipliceres med 6, og det da udkomne rykkes frem paa Hundredernes Plads, da de 6 ere ikke Enere men 6 × 100. Hvis man begyndte

gyndte Multiplikationen med Hundrederne, da maatte Produkterne siden rykkes fra venstre til høire, efterdi de da blev ringere, og det vilde staae saaledes:

$$\begin{array}{r} 5478 \\ 657 \\ \hline 32868 \\ 27390 \\ 38346 \\ \hline 3599046 \end{array}$$

Tillæg 1. Til Lettelse i Multiplicationen med sammensatte Tal, tiener det ogsaa at opløse den Faktor, hvormed der multipliceres, (Multiplicator) i de Faktorer, hvoraf den er sammensat, og da multiplicere det givne Tal (Multiplicanden) først med den eene Faktor, og det derved fremkomne Produkt, med den anden f. Ex. 456 × 24, i Steden for at igientage 456 fire og tyve Gange umiddelbar, saa opløses 24 i Faktorerne 6 og 4, og det givne 456 multipliceres først med 6, og det da udkomne igien med 4, hvorved det søgte Produkt rigtig erholdes; thi da 24 er 6 × 4 saa følger at Eenheden indeholdes ligesaa ofte i 6 × 4 som i 24. Formerelsen bliver altsaa det samme, om jeg igientager den givne Størrelse 24 Gange eller 6 × 4 Gange saaledes:

456 × 24	456
6 (6 × 4)	24
2736	1824
4	912
10944	10944

Tillæg 2. Findes i den Faktor, hvormed der multipliceres, Nuller, da multipliceres allene med de øvrige Zifre og Nullerne forbigaaes, thi at gientage en Størrelse ingen Gang, giver naturligviis intet Produkt, dog passes at de ved de øvrige Zifre frembragte partial Produkter rykkes hen mod venstre paa deres behørige Plads.

Har fremdeles enten den eene eller begge Faktorer Nuller yderst mod høire, da forrettes Multiplicationen med de øvrige Zifre som om ingen Nuller vare, og naar disse partial Produkter ere adderede, føies til Hoved-Produktet saa mange Nuller som der vare i begge Faktorerne, for Exempel. 32000 × 4700.

32000	5094
4700	708
224	40752
128	35658
250400000	3606551

§. 24.

§. 24.

Multiplicationen med benævnte Tal vil uden synderlig Vanskelighed forstaaes, naar man erindrer, at den eene Faktor altid maae være, eller dog ansees for et ubenævnt Tal, thi at multiplicere med 3 Rd. er jo en Umulighed; thi hvad vilde det sige at igientage en Ting 3 Rd. Gange, og saaledes med ethvert benævnt Tal; jeg vil derfor allene oplyse det med et Exempel: Der forlanges at 548 Rd. 3 ₰ 8 ß skal multipliceres med 6, jeg kan da enten forvandle de givne Rigsdaler og Mark til Skillinger, og efter det forhen forklarede multiplicere dem med 6, jeg faaer da Produktet i Skillinger, men da saa store Summer i det daglige Liv ikke beregnes i Skilling, er det beqvemmere at forrette Multiplicationen ved hver enkelt Deel, saaledes 548 Rd. 3 ₰ 8 ß × 6

6

3291 Rd. 3 ₰ - ß

de 8 ß gientages 6 Gange, og jeg har 48 ß, men da disse netop udgiøre 3 ₰, saa bliver i Produktet ingen Skilling, derpaa gientages de 3 ₰ 6 Gange, og dertil lægges de ved Skillingernes Igientagelse udkomne 3 ₰, det bliver da 21 ₰ som er 3 Rd. 3 ₰, de 3 ₰ skrives paa Markernes Plads og Rigsdalerne giemmes for at lægges til det der ud-

udkommende Produkt. Hvorledes Multiplicationen kan prøves, skal ved Divisionen blive forklaret.

§. 25.

At dividere er efter den § 16 givne Forklaring ikke andet, end oftere at igientage Subtractionen med et og samme Tal; for altsaa at kunde iværksætte dette, behøvedes allene at kunde subtrahere, f. Ex. 24 : 6; her skal efter Forklaringen 24 formindskes, ved at trække 6 saa ofte derfra som muligt, og det findes saaledes:

24	
6	1
18	
6	1
12	
6	1
6	
6	1
0	4

Jeg anmærker med et Komma eller Streg hver Gang 6 trækkes fra 24, og disse Streger sammentælles siden, og jeg erholder da Qvotienten.

Saa simpel og rigtig som denne Maade er, saa vidtløftig er den allerede i smaae Tal, end sige i større. Man har derfor andre Maader, indrettede efter det decadiske Tal-System, som siden skal forklares. Da et Tal maae kunde trækkes saa ofte fra et andet som det indeholdes deri, saa bestaaer

Divi-

Divisionen i Følge Forklaringen ogsaa i at undersøge hvor ofte en given Størrelse (Divisor) indeholdes i en anden given Størrelse (Dividenden), da nu allene ligeartede Størrelser kan indeholdes i hinanden, saa følger at Dividend og Divisor maae altid være ligeartede Størrelser, og Qvotienten vil da blive et ubenævnt Tal; der indeholder Eenheden saa mange Gange som Divisor indeholdes i Dividenden.

Men der møde og Tilfælde, hvor Divisionen gaaer ud paa at dele Dividenden i saa mange ligestore Dele, som Divisor tilkiendegiver, Divisor maae da være et ubenævnt Tal, og Qvotienten ligeartet med Dividenden. Saa ofte som Eenheden da indeholdes i Divisor maae Qvotienten indeholdes i Dividenden.

Af disse fremsatte Forklaringer følge

1) at naar Divisor er 1, bliver Qvotienten det samme som Dividenden
2) at naar Divisor er lige stor med Dividend, bliver Qvotienten = 1. —
3) er Dividenden 0, bliver Qvotienten, hvad end Divisor er altid 0
4) er derimod Divisor 0, bliver Qvotienten en uendelig stor Størrelse, (hvorom i det følgende skal handles).

§. 26.

§. 26.

At dividere et Tal med et andet, skeer altsaa uden Vanskelighed ved Hielp af den § 21 anførte Tabel, saa længe Dividenden er mindre end 100, og Divisor et af de ni enkelte Tal. f. Ex. 30 : 6 = 5. Af Tabellen veed man at 6 × 5 = 30. ɔ: 30 indeholder 6 saa ofte som 5 indeholder Eenheden, nu spørges her hvor ofte 6 indeholdes i 30, eller hvorofte 6 kan trækkes fra 30, intet er da klarere, end at naar 30 frembringes ved 5 Gange at igientage 6, saa maae ogsaa 6 kunde trækkes 5 Gange fra 30, og 5 er da den søgte Qvotient.

Er Dividenden et høiere Tal, men Divisor et af de enkelte Tal, iværksættes Divisionen ved at opløse Dividenden i Dele, dividere hver Deel for sig, og siden addere partial Qvotienterne. f. Ex. 6369 : 3 nu er 6369 = 6000 + 300 + 60 + 9, først prøves nu hvor ofte 3 indholdes i 6000, men da 6000 er = 6 × 1000 og 3 indeholdes 2 Gange i 6, saa følger at det i 6000 indeholder 2000 Gange, i 300 paa samme Maade 100 Gang, og i 60, 20 Gange og endelig i 9, 3 Gange.

Partial Qvotienterne 2000 + 100 + 20 + 3, som sammenlagte udgiøre den egentlige te Qvotient = 2123.

Efter det decadiske Tal-Systems Natur skeer dette lettere ved strax at hensætte Qvotienterne, da Stedet vil give dem deres Værdie, forrige Exempel vil da staae saaledes:

```
3)6369|2123
  6   |
  --
   3
   3
   --
    6
    6
    --
     9
     9
     --
     0
```

Man sætter Divisor foran, og ved en Streg skiller den fra Dividenden, som ligeledes med en Streg indsluttes fra høire Side, bag hvilken Qvotienten hensettes, nu begyndes med Divisionen fra venstre, og prøves hvor ofte 3 indeholdes i 6, af Tabellen veed man at det er 2 Gange, 2 hensættes paa den til Qvotienten bestemte Plads, og faaer ved det at de følgende Tal 1—2—3 ved Divisionens Fortsættelse henhættes paa høire Side deraf, den Værd af Tusinde som det bør have, siden de 6 ikke vare Enere men Tusinder; og saaledes fortsættes med Hundreder, Tiere og Enere.

Naar baade Dividenden og Divisor ere sammensatte Tal, skeer Divisionen egentlig paa samme Maade, med nogle Forandringer som best oplyses ved et Par Exempler;

1) 233550 skal divideres med 54, opsættes saaledes:

```
54)233550|4325
   216
   ---
    175
    162
    ---
     135
     108
     ---
      270
      270
      ---
      ...
```

Først undersøges hvor ofte 54 indeholdes i 2, som ere 2 × 100000 det indeholdes ikke deri, og af den Classe bliver altsaa ingen i Qvotienten; derpaa prøves 54 i 23 men da 23 endnu er mindre end 54 kan det ikke indeholdes nogen Gang deri, og af den Classe bliver følgelig i Qvotienten endnu ingen; man maae altsaa tage de 3 Zifre 233, og prøve hvor tit 54 deri indeholdes (i saadanne Tilfælde slutter man temmelig rigtig, men dog ikke altid, at saa ofte det første af Divisors Tal som her 5, indeholdes i de 2 første af Dvidenden som her 23, saa ofte indeholdes ogsaa de øvrige af Divisor i de øvrige dertil hørende af Dividenden) da nu 5 indeholdes 4 Gange i 23 saa tegnes 4 som Qvotient, derpaa multipliceres den hele Divisor med Qvotienten og Productet 216 skrives under de 3 første Tal af Dividenden og subtraheres derfra, der bliver da tilbage 17. Vi erfarede saaledes at 54 kan trækkes 4 Gange fra 233 og der bliver 17 tilbage, hvorfra 54 ikke kan subtraheres, men da de 233 ere Tusinder saa bliver de 4 i Qvotienten ogsaa Tusin-

Tusin-

Tusinder, de 17 overblevne Tusinde ansees som 170 Hundrede og dertil føies de nu nedflyttede 5, og jeg spørger nu: 54 i 175 hvilket findes, som nys er viist ved at see hvor tit 5 indeholdes i 17, nemlig 3 Gange, Tallet 3 tegnes nu i Qvotienten næst 4, og Divisor multipliceres nu med 3, og Produktet 162 subtraheres fra 175 hvorved erfares at 54 indeholdes 3 Gange i 175, og at der bliver 13 hvorfra de 54 ikke kan subtraheres, da de 175 vare Hundreder, bliver de 3 i Qvotienten ogsaa Hundreder, de 13 overblevne ansees som 130 Tiere og dertil legges de 5 nedflyttede, og nu spørges igien paa samme Maade, hvor ofte 54 indeholdes i 135, saaledes fortfares indtil alle Zifrene ere nedflyttede og Qvotienten funden at være, ingen Hundred Tusinder, ingen Titusinder, 4 Tusinder, 3 Hundreder, 2 Tiere og 5 Enere ɔ: 4325.

2) Lad være givet 7654 at dividere med 37, det opsættes og behandles som forrige Exempel:

```
37)7654|206
   74
   --
    25
    00
    --
    254
    222
    ---
     32
```

Dog anmærkes at da jeg efter at have divideret Hundrederne og nedflyttet de 5 Tiere til de fra Hundrederne overblevne 2 som er 20 Tier, saa har jeg i alt 25 Tiere, da nu 25 er

min-

mindre end 37, kan 37 ikke indeholdes deri nogen Gang, det bemærkes i Qvotienten med et Nul, for at de øvrige Zifre kan faae deres rigtige Plads og dermed forbundne Værd, 37 skulde nu multipliceres med 0 men at igientage en Størrelse ingen Gang giver intet til Produkt, og naar intet fradrages bliver det samme uforandret som før var, det var altsaa unyttigt at skrive de 2 Nuller og de udelades derfor i Almindelighed, da det Tal af næstfølgende Classe strax nedflyttes og Operationen igien begyndes. Efter nu at have divideret Eenerne, bliver en Rest af 32, som endnu skulde divideres med 37, ɔ: det skulde deles i saa mange Dele som Divisor har Eenheder, og een af disse tilføies Qvotienten; hvorledes dette skeer forklares siden ved Brøk-Regningen, her er det nok at sige, at man ved at skrive Qvotienten $206\frac{32}{37}$ viser at Divisionen ikke gandske er fuldført.

Naar Divisor bestaaer af 3, 4 eller flere Zifre, skeer Divisionen paa samme Maade som er viist med 2, og behøver ingen videre Forklaring.

§. 27.

Hvad § 23 er anmærket angaaende Multiplicationen, det samme gielder og om Divisionen at den kan udføres naar Divisor kan opløses i Faktorer ved at dividere først med den ene Faktor, og

og den da udkomne Qvotient igien med den anden Faktor, f. Ex. naar 576 skulde divideres med 12 ɔ: deles i 12 lige Dele, da skeer det ved at dele det først i 3 Dele, og hver af disse igien i 4, og følgelig forrettes Divisionen ved at dividere først med 3 og det da udkomne igien med 4, efterdi

3×4 er $= 12$. $576 : 12 = 48$. og
$576 : 3 = 192$ men $192 : 4 = 48$.

Naar Dividenden lader sig opløse i Faktorer, da divideres den eene Faktor med Divisor og den da udkomne Qvotient multipliceres med den anden Faktor f. Ex. $48 : 3 = 16$, nu er $48 = 6 \times 8$ og $6 : 3 = 2$, denne Qvotient 2 multipliceres med den Faktor 8, og der udkommer da 16, som er den søgte Qvotient.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes: jeg vil i det anførte Exempel vide hvor ofte 3 indeholdes i 48, da nu 48 er $= 6 \times 8$, saa følger at 3 maae indholdes 8 Gange saa ofte i 48 som det indeholdes i 6, da det nu indeholdes i 6 to Gange, saa maae det indeholdes $8 \times 2 = 16$ Gange i $8 \times 6 = 48$.

Af det nu om Multiplicationen og Divisionen forklarede insees let, at naar et Produkt divideres med den eene Faktor, udkommer den anden som Qvotient; og naar Qvotienten multipliceres med Divisor udkommer Dividenden. Multiplication og og Division tiene derfor til at prøve hinanden, og ere modsatte Regnings-Arter.

At dividere benævnte Tal, skeer aldeles paa samme Maade, som om de ubenævnte er forklaret, naar kun, som ved de forrige Regnings-Arter er anmærket, Forholdet af de forskiellige Størrelser er bekiendt, et eeneste Exempel vil være nok, der forlanges at 3846 Rd. 3 Mk 12 ß skal deles i fire lige Dele ɔ: divideres med 4.

4) 3846 Rd. 3 Mk 12 ß
961 Rd. 3 Mk 15 ß

Divisionen begyndes med Rigsdalerne, og efter de i foregaaende § forklarede Methoder, findes at 4 indeholdes 961 Gange i de givne Rigsdalere, men at der bliver to tilovers hvori fire ikke indeholdes, disse 2 Rigsdaler opløses til Mark, og lægges til de 3 som vare givne, nu divideres de 15 Mark med 4, der bliver 3 til Qvotient og 3 Mk tilovers som giøres til Skillinger, disse legges til de 12, og de da udkomne 60 ß divideres med 4, hvorvedder udkommer 15 ß.

Anmærk. Naar Divisor og Dividenden bestaae af mange Zifre, er det fordeelagtigt ved Addition at søge det todobbelte, tredobbelte, firdobbelte rc. af Divisor, da man ved at sammenligne disse Produkter af Divisor med de forskiellige Dele af Dividenden let vil finde Qvotienten f. Ex.

1 Gang

1 Gang)	4523
	4523
2 Gang)	9046
3 —)	13569
4 —)	18092
5 —)	22615
6 —)	27138
7 —)	31661
8 —)	36184
9 —)	40707

4523)2457237348(5432
22615 | 76
19573
18092
14817
13569
12483
9046
34374
31661
27138
27138
- -

Naar man nu som her er skeet ved Addition har fundet det toddobbete o. s. v. til det nidobbelte Produkt af Divisoren, saa sammenligner man de første 5 Zifre af Dividenden med disse forskiellige Produkter af Divisor, og seer da at det femdobbelte er det høieste der kan trækkes derfra, fem er da det første Ziffer i Qvotienten, efter at dette femdobbelte er subtrahert, og det følgende Ziffer 3 er nedflyttet, eftersøges, hvilken af Divisors Produkter, der nærmer sig meest til det Tal 19573 der nu skal divideres, og man finder da at det er det firdobbelte, som da hensættes og subtraheres derfra, o. s. f.

§. 28.

Naar et heelt Tal lader sig ved et andet Tal saaledes dividere, at intet bliver tilovers, og at føl-

følgelig Qvotienten efter § 26 ogsaa er et heelt Tal, saa siges Dividenden at være et deleligt Tal og Divisor og Qvotienten ere dets aliqvote Dele. Et Tal derimod, som ikke lader sig ved noget andet Tal saaledes dividere, kaldes et prim-Tal (udeleligt Tal). Den største Divisor (aliqvote Deel) for et heelt Tal er Tallet selv; naar altsaa et Tal er en aliqvot Deel af et andet, er det tillige den største fælles Divisor eller det største fælles Maal for dem begge; Tal som have et fælles Maal, siges at være indbyrdes delelige, de Tal, som hver for sig selv ere delelige, men intet fælles Maal have, kaldes indbyrdes prim Tal.

Den største fælles Divisor (fælles Maal) for tvende Tal findes paa følgende Maade:

Det større af de givne Tal divideres med det mindre, det da overblevne bruges som Divisor, og dermed divideres den forrige Divisor indtil det enten gaar op, da den sidste brugte Divisor er Tallenes største fælles Maal, eller og der tilsidst bliver een tilovers, som viser at Tallene intet fælles Maal have, og følgelig ere Prim-Tal, f. Ex. Tallene 10051 og 966 være givne, hvis største fælles Maal man vil finde, man gaar da frem saaledes:

966

$$
\begin{array}{l}
966)10051|10 \\
\quad\;\; 966| \\
\quad\quad 391)966|2 \\
\quad\quad\quad\;\; 782| \\
\quad\quad\quad\quad 184)391|2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; 368| \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 23)184|8 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 184|
\end{array}
$$

23 er da den største fælles Divisor: Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees let: 23 findes at gaae op i 184, altsaa og i $2 \times 184 + 23$ (conf. § 26 og 27) $= 391$, følgelig og i $2 \times 391 + 184 = 966$, og endelig naar det gaaer op i 966 gaaer det og op i $10 \times 966 = 9660$, og da det forhen var beviist at gaae op i 391 maae det og gaae op i $9660 + 391 = 10051$, hvilket kan saaledes let oversees:

$$
\begin{aligned}
10051 &= 10 \times 966 + 391 \\
966 &= 2 \times 391 + 184 \\
391 &= 2 \times 184 + 23 \\
184 &= 8 \times 23.
\end{aligned}
$$

Om Brøk i Almindelighed, og de fire Regnings-Arter med Brøk.

§. 29.

En Brøk er een eller flere af en Eenheds ligestore Dele. Naar altsaa et Heelt deles i et vist Antal

 af

af lige Dele, og af disse tages een eller nogle, saa har man en Brøk, eller et brudet Tal; som skrives med to Tal-Zifre saaledes: $\frac{2}{3}$ og læses to tredie Dele. Nævner kaldes det Tal, som tilkiendegiver Delenes Beskaffenhed, eller siger hvor mange Dele det Hele er deelt i, som her Tallet 3. Tæller det, som tilkiendegiver Delenes Tal i det nærværende Tilfælde, eller viser, hvor mange af de ligestore Dele der ere tagne, som i den nævnte Brøk Tallet 2. Af denne Forklaring følger:

1) At enhver Brøk kan ansees som en Qvotient, frembragt ved at dividere Tælleren med Nævneren f. Ex. $\frac{4}{5}$ betegner at en Eenhed er deelt i 5 ligestore Dele, hvoraf tages 4, og følgelig $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$, men naar 4 skal divideres med 5 ɔ: undersøges hvor ofte 5 indeholdes i 4, da opløses efter § 27, 4 i 4×1, i 1 indeholdes 5 $\frac{1}{5}$ Gang, og altsaa i 4×1, $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ Gang. Enhver Division kan derfor udtrykkes som Brøk, og i Steden for at skrive 20 : 5, skrives $\frac{20}{5}$.

2) Ved benævnte Tal, kan ethvert Tal som betegner en ringere Sort af Størrelser, ansees som en Brøk af den høiere Sort, hvorunder det indbefattes; f. Ex. 2 Mark er $= \frac{2}{6}$ Rigsdaler, 8 ß er $= \frac{8}{16}$ Mark, thi da een Rigsdaler er 6 Mark er Marken jo $\frac{1}{6}$ Rd., og følgelig 2 Mk. $= \frac{2}{6}$ ꝛc.

3) Brøken kan ansees som et Tal, thi, skiøndt den ikke indeholder en Mængde af hele Eenheder, saa indeholder den dog en Mængde af den hele Eenheds lige store Dele, der her kan ansees som Eenheder. Nævneren bestemmer allene af hvad Art de Dele ere, som Tælleren opregner, Brøken kan derfor ansees som et benævnt Tal.

4) Ere Tæller og Nævner lige store, da er Brøkens Værdi det samme som den hele Eenheds; thi tænker man sig et Heelt deelt i et vist Antal af lige Dele, som Nævneren bestemmer, og jeg tager alle disse Dele, hvilket maae skee naar Tælleren er samme Tal som Nævneren, faaer jeg upaatvivleligt det Hele, f. Ex. $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7} = 1$. Man kan endog tage flere Dele, end der gaae paa een Eenhed, og i saa Tilfælde bliver Tælleren større end Nævneren f. Ex. $\frac{12}{7}$ her tænkes et Heelt deelt i 7 Dele, og af disse Dele skal tages 12, jeg maae altsaa for at kunde dette, tænke mig endnu en Eenhed af samme Slags ligeledes deelt, og Brøken $\frac{12}{7}$ er da det samme som $1 + \frac{5}{7}$. Saadanne Brøk, hvor Tælleren enten er ligestor med Nævneren eller endog større, kaldes uegentlige, uægte Brøk (fractiones spuriæ, impropriæ). De forvandles ved at dividere Tælleren med Nævneren, enten gandske til hele Tal eller til hele og brudne (blandede) Tal.

Naar Tælleren derimod er mindre end Nævneren, kaldes Brøken ægte eller egentlig (propria, genuina).

3

§. 30.

En Brøks Værd formeres, naar dens Tæller giøres større eller Nævneren mindre; og formindskes naar Tælleren giøres mindre eller Nævneren større.

Beviis: Jo flere af samme Slags Dele der tages, jo større et heelt maae nødvendig erholdes, da nu Tælleren bestemmer Antallet af Delene, saa følger, at naar den forhøies, skal et større Antal af samme Dele tages, og altsaa er Værdien formeret f. Ex. $\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$ thi af de lige store Dele tages nu 7 i steden for 4, da nu $7 > 4$ saa er $\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$. Ved en mindre Nævner tilkiendegives at det hele skal deles i færre Dele; men deraf følger, at Delene selv maae blive større; og naar jeg nu af disse større Dele tager ligesaa mange som før af de mindre; maae nødvendig det da udbragte være større end tilforn f. Ex. $\frac{2}{3} > \frac{2}{12}$ thi den Ting, der før var deelt i 12 Dele, er nu kun deelt i 3, og følgelig hver Deel 4re Gange saa stor. Ligeledes indsees, at naar Tælleren bliver mindre, det er, færre af de samme Dele tages, bliver Værdien mindre; og naar Nævneren bliver større ɔ: det Hele deles i flere Dele, blive Delene mindre, og naar nu Antallet ikke forøges, bliver Værdien følgelig formindsket. Heraf følger:

1) At naar en Brøks Tæller bliver multipliceret eller Nævneren divideret med et heelt Tal, bliver Brøkens Værdi saa mange Gange forstørret, som Tallet indeholder Eenheder, f. Ex.

$\frac{8}{9} = 4 \times \frac{2}{9}$ thi 8 er $= 4 \times 2$

$\frac{2}{3} = 4 \times \frac{2}{12}$ thi $3 = 12 : 4$.

2) At naar Tælleren bliver divideret, eller Nævneren multipliceret med et heelt Tal, bliver Brøkens Værdi saa mange Gange mindre, som Tallet indeholder Eenheder.

3) At en Brøk kan multipliceres med et heelt Tal paa to Maader: enten ved at multiplicere Tælleren eller dividere Nævneren med det givne Tal; ligeledes kan den divideres med et givet heelt Tal paa 2 Maader: enten ved at dividere Tælleren, eller ved at multiplicere Nævneren dermed.

4) At Brøkens Værdi bliver uforandret naar dens Tæller og Nævner multipliceres eller divideres med et og samme Tal; thi i det Tælleren multipliceres, formeres Brøkens Værdi saa mange Gange som Tallet hvormed den multipliceres indeholder Eenheder, og naar Nævneren multipliceres med samme Tal, bliver den paa samme Maade formindsket, og følgelig ligemeget baade formeret og for-

formindsket og altsaa uforandret. Ved at dividere Tæller og Nævner med et og samme Tal, skeer Formerelsen og Formindskelsen ligeledes i samme Grad.

§. 31.

At forkorte en Brok, er at udtrykke den samme Værd i, eller samme Deel af det Hele med ringere Tal: dette skeer ved at dividere Brøkens Tæller og Nævner med samme hele Tal; thi da Qvotienten maae i Følge § 25 altid blive mindre end Dividenden, saalænge Divisor er et heelt Tal, saa maae der ved denne Division udkomme mindre Tal til Tæller og Nævner, og iFølge foregaaende § bliver Værdien den samme, og Forkortningen er skeet f. Exempel,

$$\frac{12}{20} = \frac{12 : 4}{20 : 4} = \frac{3}{5}$$

Alle Brøk hvis Tæller og Nævner ere indbyrdes delelige Tal, kan altsaa forkortes ved at divideres med en af deres fælles Divisorer, og saa meget muligt, ved at divideres med deres største fælles Divisor, der søges efter § 28, ere de derimod indbyrdes Prim-Tal, finder ingen Forkortning Sted. Ved at opløse saavel Tæller som Nævner i Faktorer, og udslette de, som da findes i begge, kan Forkortningen og skee f. Ex $\frac{32}{120} = \frac{4 \times 8}{8 \times 15} = \frac{4}{15}$.

Anm.

Anmærk. Naar man til et givet Tal 430 vil finde Faktorerne, saavel de enkelte som selv ere Prim-Tal, som de sammensatte, der ere komne ved at multiplicere de enkelte med hinanden, eller med, sammensatte da skeer det saaledes:

$$\begin{array}{r|l} 430 & 2 \\ 215 & 5-10 \\ 43 & 43 \cdot 86 \cdot 215 \cdot 430 \end{array}$$

Man dividerer Tallet med den mindst muelige Faktor, som her 2, og sætter den ved høire Side af Tallet, som skilles derfra ved en perpendiculair Streg, Qvotienten 215 sættes under Tallet selv, derpaa divideres 215 med sin mindste Faktor 5 der tegnes paa høire Side af Stregen under den forrige Faktor 2, Qvotienten 43 tegnes under Tallet, 43 er et prim-Tal, og kan ikke divideres, de Tal paa høire Side af Stregen ere nu de enkelte Faktorer, og de som ved at multiplicere dem med hinanden kan frembringes, ere de sammensatte.

X

§. 32.

Da Nævneren bestemmer Brøkens Art, og i Følge § 16, allene ligeartede Størrelser kan adderes, saa følger at allene de Brøker som have eens Nævnere kan adderes, og at det for at foretage Addition med Brøker er nødvendigt, at kunde bringe forskiellige Brøk til eens Benævning ɔ: forandre dem, saa at de have samme Nævner, uden at deres Værd er enten formeret eller formindsket, dette skeer:

a) ved at multiplicere alle de givne Brøks Nævnere med hinanden

b) ved

b) ved at multiplicere enhver af Tællerne med det samme Tal, hvormed dens Nævner er multipliceret, f. Ex. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ bringes saaledes til eens Benævning:

$$\frac{2\times(4\times7)}{3\times(4\times7)}=\frac{56}{84}$$

$$\frac{3\times(3\times7)}{4\times(3\times7)}=\frac{63}{84}$$

$$\frac{5\times(3\times4)}{7\times(3\times4)}=\frac{60}{84}$$

Ved at multiplicere Nævnerne, erholdes samme Nævner overalt (da samme Faktorer altid give samme Produkt) som kaldes en fælles Nævner; men da Brøkens Værdi derved er efter § 30 bleven formindsket, saa maae, for at erstatte dette, enhver Tæller multipliceres med det samme Tal, da Værdien saaledes er (see § 30) aldeles uforandret. Denne Maade at søge en fælles Nævner, vil, naar de givne Brøk ere mange og høie, blive vidtløftig, og den fundne Nævner et meget høit Tal.

Til Lettelse i den praktiske Regning, betiener man sig derfor af følgende Methode: Man opløser alle Nævnerne i deres enkelte Faktorer, multiplicerer disse med hinanden, og finder saaledes et Tal, hvori alle Nævnerne kan gaae op. Dette anseés

anseés som en fælles Nævner, og nu undersøges ved Division, hvor ofte enhver af de givne Nævnere indeholdes i den fundne fælles Nævner, og med de ved denne Division fundne Qvotienter multipliceres Tællerne f. Ex.

		120 fælles Nævner
$\frac{2}{3}$	40	$80=\frac{80}{120}$
$\frac{5}{12}$	10	$50=\frac{50}{120}$
$\frac{11}{20}$	6	$66=\frac{66}{120}$
$\frac{7}{8}$	15	$105=\frac{105}{120}$
$\frac{1}{4}$	30	$30=\frac{30}{120}$
$\frac{13}{24}$	5	$65=\frac{65}{120}$

3) 3 — 12 — 20 — 8 — 4 — 24
4) 1 — 4 — 20 — 8 — 4 — 8
2) 1 — 1 — 5 — 2 — 1 — 2
1 — 1 — 5 — 1 — 1 — 1

$$\overbrace{3\times4\times2\times5}^{\text{enkelte Faktorer}}=120.$$

Rigtigheden af denne Fremgangs-Maade indseés let, ved Division findes de enkelte Faktorer af alle Nævnerne her at være 3, 4, 2, 5, disse multiplicerede, give Produktet 120, hvori ikke blot de enkelte men og de af dem sammensatte Faktorer maae gaae op. Nu findes ved Division med den første Brøks Nævner 3, at den indeholdes 40 Gange i fælles Nævneren, Tælleren 2 multipliceres nu med 40, for at Brøkens Værdie ikke skal for-

forandres, og Brøken $\frac{80}{120}$ er $=\frac{2}{3}$, og saaledes med alle de øvrige Brøker. Ere de givne Brøkers Nævnere alle indbyrdes Prim-Tal, kan denne Maade ikke bruges.

§. 33.

Ere Brøkerne efter forrige § bragte til eens Benævning, da skeer Addition og Subtraction, blot ved at Tællerne adderes og subtraheres, da Nævnerne blive gandske uforandrede; thi da Brøker kan ansees som benævnte Tal, hvis Art bestemmes ved Nævneren, saa kan disse ligesaa lidet adderes eller subtraheres, som ved benævnte Tal de Ord, der bestemme Størrelsernes Art f. Ex. Rigsdaler, Pund, Lod ꝛc. Saaledes er Summen af $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$, af $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ som efter forrige § ere $=\frac{56}{84}+\frac{63}{84}+\frac{60}{84}=\frac{179}{84}$ som er en uegentlig Brøk (see § 29) og $=2\frac{11}{84}$.

Differencen findes ligeledes: f. Ex. $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ (§ 31). I det Tilfælde at der i Minuenden er Heele og Brøk, og Brøken i Subtrahenden er større end i Minuenden, da maae der laanes en Heel, som efter Brøkens Natur er saa mange Dele som Nævneren angiver f. Ex. at subtrahere $4\frac{4}{5}$ fra $8\frac{3}{7}$ skeer saaledes:

$$8\,\frac{3\times5}{7\times5}=\frac{15}{35}$$
$$8\,\frac{4\times3}{5\times7}=\frac{28}{35}$$
$$3\frac{12}{35}$$

efterat Brøkerne her ere bragte til eens Benævning, skulde jeg subtrahere $\frac{28}{35}$ fra $\frac{15}{35}$ eller 28 fra 15, jeg laaner da een af de 8 Hele, som er $\frac{35}{35}$ disse legges til de $\frac{15}{35}$, og udkomme da $\frac{50}{35}$, nu subtraheres 28 fra 50, og den da fundne Difference 12 er Tæller for den søgte Brøk som er $\frac{12}{35}$ siden subtraheres de hele, som forhen er viist. 4

§. 34.

At multiplicere et heelt Tal med en Brøk, er efter § 21, at igientage saa stor en Deel af det hele Tal som Brøken er af Eenheden: v. dele det givne Tal i saa mange lige store Dele, som Nævneren angiver, og tage deraf saa mange som der ere Eenheder i Tælleren. Det skeer ved at dividere det givne Tal med Brøkens Nævner og multiplicere det med dens Tæller, eller i en omvendt Orden f. Ex. $20\times\frac{3}{4}$ $(20:4)\times3=5\times3=15$. Thi at multiplicere $20\times\frac{3}{4}$ er at igientage de $\frac{3}{4}$ af 20, jeg deler først 20 i fire Dele ved at dividere med 4, og af disse Fierdedele tages 3 som skeer ved at multiplicere 5 med 3. Forlanges derimod at $\frac{3}{4}$ skal multipliceres med 20 ɔ: igientages 20 Gange, da skeer det (§ 30, 3.) ved at multi-

plicere

plicere Tælleren 3 med 20, og man faaer da $\frac{60}{4}$ som er en uegentlig Brøk $= 15$. Da det samme Produkt saaledes erholdes ved at multiplicere baade 20 med $\frac{3}{4}$, og $\frac{3}{4}$ med 20, saa har følgelig Faktorernes Orden ingen Indflydelse paa Produktet. Videre indsees, at Produktet, som fremkommer, naar et Tal multipliceres med en egentlig Brøk, altid bliver mindre end Multiplicanden; thi det er ikke en blot Multiplication, men en sammensat Regning, da der først divideres med Nævneren og siden multipliceres med Tælleren; saa længe altsaa Tælleren er mindre end Nævneren (hvilket er Tilfældet i alle egentlige Brøk) vil Produktet blive mindre end Multiplicanden; at multiplicere et Tal med $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ er følgelig ikke andet end at dividere Tallet med 2, 3, 4, thi da 1 giør ingen Multiplication, behøver det ikke at skee.

§. 35.

Brøk multipliceres med Brøk, naar Tæller multipliceres med Tæller og Nævner med Nævner, f. Ex. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$ thi at multiplicere med $\frac{2}{5}$ er efter forrige § at igientage de to femte Dele af den givne Størrelse, og skeer ved at dividere med 5 og multiplicere med 2, naar jeg nu multiplicerer Nævneren 4 med Nævneren 5, bliver Brøken $\frac{3}{4}$ virkelig divideret med 5 (§ 30. 3) og

og i det Tællerne multipliceres, bliver den ligeledes multipliceret med 2, og altsaa Multiplicationen rigtig fuldført.

Skal blandede Tal multipliceres med hinanden, forandres de beqvemt til uegentlige Brøk og multipliceres da paa den nyelig forklarede Maade f. Ex. $3\frac{1}{4} \times 5\frac{2}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{17}{3} = \frac{221}{12} = 18\frac{5}{12}$. Er Multiplicanden et Tal, som bestaaer af 2 eller flere Zifre, er det beqvemmere at lade den blive uforandret, og blot giøre Multiplicator til en uegentlig Brøk og da efter forrige § dividere med dens Nævner og multiplicere med Tælleren f. Ex.

$$\begin{array}{l} 3]\,212\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3}\,.\;5\frac{1}{3} = \frac{16}{3} \\ \hline \quad 70\frac{11}{12} \\ \qquad 16 \\ \hline 1134\frac{2}{3} \end{array}$$

Multiplicationen skeer ogsaa rigtig naar der først multipliceres med Multiplicators hele Tal og derpaa med Brøken, og partial Produkterne derefter adderes som i det anførte Exempel saaledes:

$$\begin{array}{r} 212\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} \\ 5 \qquad \\ 12 \\ \hline 1063\frac{3}{4} = 9 \\ 70\frac{11}{12} = 11 \\ \hline 1134\frac{2}{3} \qquad \end{array}$$

§. 36.

§. 36.

At dividere en Brøk med et heelt Tal, eller at dele den i et vist Antal lige Dele er forklaret § 30, 3. Her skal altsaa allene læres: Hvorledes Divisionen skeer, naar Dividenden er et heelt Tal og Divisor en Brøk; og naar baade Dividenden og Divisor ere Brøk. Det første er efter den paa Division § 25 givne Forklaring at see, hvor ofte Brøken indeholdes i det givne Tal, dette faaes at vide ved at multiplicere det givne Tal med Divisors Nævner og dividere det udkomne med dens Tæller f. Ex.

$20 : \frac{4}{5}$

$\underline{\quad 5}$

$4)\,100$

$\overline{\;25\;}$

Beviis: Her spørges, hvor ofte $\frac{4}{5}$ indeholdes i 20, nu er $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$, jeg undersøger derfor først, hvor ofte $\frac{1}{5}$ indeholdes i 20, ved at multiplicere 20 med 5; thi da $\frac{1}{5}$ er fem Gange mindre end Eenheden, og Eenheden indeholdes tyve Gange i 20, maae $\frac{1}{5}$ indeholdes deri fem Gange saa ofte, nemlig 100 Gange. Men jo større et Tal er, jo færre Gange maae det kunde indeholdes i et andet Tal, $\frac{4}{5}$ kan altsaa ikke indeholdes i 20, saa ofte som $\frac{1}{5}$, men kun fierde Parten saa mange Gange, det ved Multiplicationen udkomne Produkt 100, maae derfor igien divideres med 4, og den da udkomne Qvotient 25 viser hvor ofte $\frac{4}{5}$ kan indeholdes i 20.

Heraf

Heraf indsees at ved at dividere med en egentlig Brøk, udkommer bestandig en Qvotient, som er større end Dividenden, hvilket videre forklares af samme Grund, som ved Multiplicationen er anført § 34. At dividere med $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ꝛc. er følgelig intet andet end at multiplicere med 2, 3, 4. f. Ex. $20 : \frac{1}{2} = 20 \times 2 = 40$. $15 : \frac{1}{3} = 15 \times 3 = 45$. $12 : \frac{1}{4} = 12 \times 4 = 48$.

§. 37.

Brøk divideres med Brøk, naar Dividenden multipliceres med Divisors Nævner og divideres med dens Tæller, hvilket skeer naar Divisors Tæller og Nævner omsættes, og Dividenden dermed multipliceres f. Ex. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Beviis: Spørgsmaalet ved at dividere Brøk med Brøk, er at see hvor ofte den eene Brøk som i det anførte Exempel $\frac{4}{5}$, indeholdes i den anden $\frac{2}{3}$; naar nu Dividenden $\frac{2}{3}$ multipliceres med den omsatte Divisor $\frac{5}{4}$, da bliver den derved multipliceret med Divisors Nævner og divideret med dens Tæller som just var det, der efter forrige § maatte skee, for at erfare hvor ofte Divisor indeholdes i Dividenden.

Divisionen skeer ogsaa rigtig, naar Brøkerne bringes til eens Benævning, og deres Tæl-

Tællere da blot divideres i hinanden f. Ex. $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ er naar de bringes til eens Benævning efter § 32, $= \frac{10}{15} : \frac{12}{15} = 10 : 12 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$; thi da Brøk med eens Nævner ere ligeartede Størrelser, hvis Art bestemmes ved Nævneren, saa maae nødvendig den eene indeholdes i den anden saa ofte som dens Tæller indeholdes i den andens; ligesom 3 ℔ indeholdes i 6 ℔ 2 Gange, saa maae og $\frac{3}{6}$ indeholdes i $\frac{6}{6}$ 2 Gange, eller saa ofte som 3 indeholdes i 6.

Blandede Tal divideres med hinanden, ved at forvandles til uegentlige Brøk, og da behandles paa den nylig forklarede Maade, f. Ex. $2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = \frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$. Er Dividenden et Tal, som bestaaer af 2 eller flere Zifre, da indrettes allene Divisor til en uegentlig Brøk, og Divisionen skeer efter forrige §. f. Ex.

$$238\frac{4}{5} : 6\frac{1}{3} = 238\frac{4}{5} : \frac{19}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 19)\ 716\frac{2}{5} \\ \hline 37\frac{67}{95} \end{array}$$

Anmærk. Ved at dividere 716 med 19 blev tilovers 13, disse maae giøres til femte Dele for at kunde legges til $\frac{2}{5}$, der bliver da i alt $\frac{67}{5}$ som divideres med 19 ved at multiplicere Nævneren (see § 30, 3).

Grundsætninger (Axiomer).

§. 38.

De almindelige Grundsætninger, (§ 17) hvoraf de fleste Sandheder i Mathematiken udledes og bevises, hvor simple og fattelige de end ere, og hvor ofte de end i det daglige Liv anvendes, uden egentlig at kiendes, have dog for Begynderne et saa fremmet Udseende; at jeg har troet ikke at burde anføre dem førend her; da og først i det efterfølgende deres egentlige Anvendelse finder Sted. Følgende ere de vigtigste:

1) Et heelt er lige stort med alle dets Dele tilsammentagne Ex. 1 Rd. = 96 ß 18 = 8 + 5 + 2 + 3.

2) Et Heelt er større end enhver af dets Dele; og enhver Deel er mindre end det Hele. Ex. 1 Rd. > 1 ß. 18 > 8; 1 ß < 1 Rd. 5 < 18.

3) Lige store Størrelser kan sættes i Steden for hinanden Ex. 1 Rd. i Steden for 96 ß; 4 Qvarter for 1 Alen.

4) Naar lige store Størrelser formeres eller formindskes med lige store Størrelser, og paa samme Maade, bliver det udkommende lige.

Ex. ved Addition (§ 17).	Multiplication (§ 21)
$8 = 5 + 3$	$7 = 4 + 3$
$4 = 4$	$5 = 5$
$12 = 9 + 3$	$35 = 20 + 15.$
Subtraction (§ 19)	Division (§ 25)
$7 = 4 + 3$	$24 = 16 + 8$
$2 = 2$	$4 = 4$
$5 = 2 + 3$	$6 = 4 + 2$

5) Naar lige store Størrelser formeres eller formindskes ved ulige store Størrelser, er det udkommende ulige stort; ligeledes naar ulige Størrelser formeres eller formindskes ved lige store Størrelser.

Ex.	
$7 = 4 + 3$	$8 = 5 + 3$
$5 > 2$	$2 < 3$
$12 > 6 + 3$	$6 > 2 + 3$
$8 = 5 + 3$	$20 = 12 + 8$
$2 < 3$	$5 > 4$
$16 < 15 + 9$	$4 < 3 + 2$

6) Naar to Størrelser ere lige store eller ligedanne med en tredie, da ere de indbyrdes lige store eller ligedanne:

Ex. 1 Rd. = 96 ß
6 Mk. = 96 ß

altsaa 1 Rd. = 6 Mk.

7) Naar en Størrelse er større eller mindre end den eene af to lige store Størrelser, er den og større eller mindre end den anden.

Ex. $8 = 5 + 3$, nu er $9 > 8$, altsaa $9 > 5 + 3$. X 5.

Om modsatte Størrelser.

§. 39.

Naar to Størrelser ere af den Art, at, naar de begge sammenlegges, den eene da bliver forøget med saa mange Eenheder, som den anden indeholder, kaldes de, Størrelser af samme Betingelse (qvanta ejusdem conditionis) eller kortere overeenstemmende Størrelser f. Ex. 100 Rdlr. Formue og 30 Rd. Formue. 100 Rd. Gield og 30 Rd. Gield. Ere derimod to Størrelser af den Art, at, naar de begge sammentages, den eene derved gandske forsvinder, og den anden bliver saa mange Eenheder mindre, som den første indeholder; saa kaldes de: Størrelser af modsat Betingelse (qvanta contrariæ conditionis) eller kortere modsatte Størrelser (qvanta contraria). Saadanne ere: Formue og Gield, Bevægelse fra samme Punkt i modsat Direction, Stigen og Falden ꝛc.

Man har vedtaget at betegne disse modsatte Størrelser med + og — og nævne dem bekræftende (positive) og nægtende (negative) saaledes at naar en vis Størrelse f. Ex. Formue betegnes med + betegnes dens modsatte, Gield med — saa at naar + 8 Rd. betyder en Formue af 8 Rdlr., betyder — 3 Rd. en Gield af 3 Rd. Dog er det almindelig vedtaget, at naar en bekræftende Størrelse, der skulde betegnes med +, enten staaer gandske allene eller i Begyndelsen af en Række, da udelades Tegnet. I sig selv ere alle Størrelser, for saavidt de ere noget, bekræftende og kan ikke kaldes nægtende uden i Sammenligning med andre. Det er derfor ligegyldigt hvilke Størrelser der gives Navn af bekræftende og nægtende, thi Formue er ligesaa vel en nægtende Størrelse naar det modsættes Gield, som Gield er nægtende naar det modsættes Formue. Ligeledes maae det forstaaes relativ (hensigtsmæssig) naar de nægtende Størrelser kaldes mindre end intet; thi kun for saavidt de modsættes de bekræftende, som ere mere end intet, kan de siges at være mindre end intet. Den, som uden at eie noget er 10 Rd. skyldig, hans Formue kan siges at være mindre end intet 0 — 10 Rd., thi sæt at ham gives 10 Rd., da vil jo de

10 Rd.

10 Rd. Gield ophæve de bekomne 10 Rd., og hans Formue er = 0, men den er jo dog større nu end førend den Tilvæxt af de bekomne 10 Rd., den var altsaa fra Begyndelsen mindre end intet. I sig selv derimod (absolut) betragtet kan ingen Størrelse siges at være mindre end intet, thi Gield er saavel en virkelig Størrelse som Formue, og hvad der er noget, kan ikke tillige være intet, end sige mindre end intet. Man maa derfor tage sig i Agt, at man ikke ved Navnet positiv her tænker sig, det virkelig reelle, og ved negativ altsaa det, som ikke er noget reelt, positiv bekræftende betyder her intet andet, end den af to modsatte Størrelser, som ved en Undersøgelse egentlig er Hoved-Gienstanden; Og dog er det i de fleste Tilfælde vilkaarligt, hvilken af to modsatte vi vil ansee som Hoved-Gienstand.

Anmærk. Man kan derfor ansee enhver nægtende Størrelse, som noget der skal fradrages, og en bekræftende som noget der skal tillegges, hvilket formodentlig er Anledning til, at Tal, der i sig selv alle ere eensartede, ogsaa kan betragtes som modsatte Størrelser, naar man anseer det ene som en adderende, og det andet som en subtraherende, og derfor sætter foran hiin Additions Tegnet + og foran denne Subtractions-Tegnet —.

§. 40.

§. 40.

Hidindtil have vi udtrykt enhver Størrelses Forhold til en anden af samme Art, der kan ansees som Eenhed (hvilket i Almindelighed benævnes med Tal) ved de bekiendte Tal-Zifre. Alle Størrelser lade sig vel paa denne Maade udtrykke ved Tal; men for mere Almindeligheds Skyld, og for at kunde udtrykke Størrelsen som Tal endog naar Eenheden er ubestemt, betiener man sig af Bogstaver, især de smaa i det latinske Alphabet, og forestiller derved de forskiellige Mængder af forskiellige Eenheder. Man kalder den Regnekonst, hvori man betiener sig af disse almindelige Tegn, **almindelig Regnekonst** eller **Bogstav-Regning**, ja vel og **Algebra**. Et Bogstav som et almindeligt Tegn kan betegne, saavel alle muelige Mængder, som Arter af Eenheder, f. Ex. a kan betyde 2 Rigsdaler 3 Borde ꝛc. b ligeledes, det er altsaa vilkaarligt, hvilke Bogstaver man vælger, for at betegne visse Størrelser, men efter at have valgt dem, maa man, som let begribes, beholde de samme Bogstaver, til at betegne samme Størrelser under den hele Udførelse af den begyndte Regning.

Størrelser udtrykte ved forskiellige Bogstaver ere derfor at ansee som uligeartede, og kan allene adderes og subtraheres formedelst de os allerede

rede

bekiendte Tegn f. Ex. a og b er $= a + b$ og Differencen af a og b er $= a - b$.

Da Bogstaver betragtede som Multiplicatorer og altsaa som Tal (§ 21) tilkiendegive en ubestemt Mængde Eenheder, saa følge at Multiplicationen heller ikke anderledes kan skee, thi at multiplicere a med b er at igientage Størrelsen a, b Gange, men da b, kan betegne forskiellige Mængder af Eenheder skeer Igientagelsen ikke, men tilkiendegives at den skal skee, ved at skrive $a \times b$.

Anmærk. Efter en almindelig Vedtægt udelades Multiplications-Tegnet imellem Bogstaver, og de skrives tæt op til hinanden, saaledes er $ab = a \times b$, $aa = a \times a$.

Ved Divisionen finder det samme Sted, og den skeer ved Hielp af Tegnet, eller ved at udtrykke Qvotienten som Brøk f. Ex. at a skal divideres med b, det er deles i b lige Dele, lader sig ikke iværksætte, da det er ubestemt hvad Mængde af Eenheder b betegner: det tilkiendegives derfor blot, at Delingen skal skee, ved at skrive $a : b$ eller $\frac{a}{b}$.

Saadanne med Bogstaver udtrykte Størrelser kan forbindes med Tal-Zifre enten formedelst Tegnene $+$ og $-$ f. Ex. $a + 8$; $9 + x$, $b - 7$; eller og uden Tegn, da Tallene enten sættes umiddelbar foran Bogstaverne som $7a$, $8b$, $9c$ de faa da Navn af Coefficienter, og angive, at Bogstaverne

verne

verne dermed ere multiplicerede f. Ex. $7a$ er $= 7 \times 1a = 7 \times a$; eller og ved den øverste Kant af Bogstavets høire Side, som a^2, b^3, disse Tal kaldes Exponenter, og betegne at Bogstav-Størrelsen skal multipliceres med sig selv saa mange Gange som Exponenten indeholder Eenheder f. Ex. $a^3 = a \times a \times a$, $b^2 = b \times b$.

Anmærk. Naar Coefficienten eller Exponenten er 1, udelades den saaledes er $a = 1a$, $b = b^1$.

§. 41.

Modsatte Størrelser, betragtede som saadanne, kan ikke være ligeartede, da de efter § 39 ikke ere overeensstemmende; de kan altsaa egentlig ikke adderes (see § 16) og den udbragte Sum er ikke et Heelt, hvis Dele de summerende Størrelser ere. F. Ex. naar 100 Rd. Formue og 30 Rd. Gield adderes, saa er Summen 70 Rd. Formue, men 100 Rd. Formue kan ikke ansees som en Deel af 70 Rd. F⸗rmue.

Naar altsaa modsatte Størrelser skal adderes eller sammenlignes i Henseende til Qvantiteten, saa maa de først ansees som ligeartede, og overeensstemmende; ere de da begge lige store, vil Summen blive $= 0$ (see definit. § 39) ere de derimod, som overeensstemmende betragtede, ulige, da skeer Additionen naar det modsatte af den mindre subtra-

heres fra den større. F. Ex. 30 Rd. Formue + 100 Rd. Gield er = 100 Rd. Gield − 30 Rd. Gield = 70 Rd. Gield.

$$\text{adder} \left\{ \begin{array}{r} -100 \text{ Rd.} \\ +\underline{\ \ 30 \text{ Rd.}} \\ -70\phantom{ \text{ Rd.}} \end{array} \right. = \left. \begin{array}{r} -100 \\ -\underline{\ \ 30} \\ -70 \end{array} \right\} \text{subtraher}$$

Summen af to modsatte Størrelser findes altsaa i Almindelighed, ved at subtrahere den mindre, modsat taget, fra den større; eller, som det og pleier at udtrykkes, ved at subtrahere den mindre fra den større og give det udkomne det Tegn, den største Størrelse havde.

Da alle bekræftende Størrelser, ere ligeartede, som og de nægtende, saa skeer deres Addition efter den § 17 forklarede Maade: f. Ex. 8 Rd. Formue + 3 Rd. Formue er = 11 Rdlr. Formue, ligeledes er 3 Rd. Giel + 4 Rd. Gield = 7 Rd. Gield.

Flere med + og − forbundne Størrelser udtrykte ved Tal og Bogstaver, vil nu altsaa let kunde adderes f. Ex.

$$\begin{array}{rl} \text{adder:} & 12 - 8 + 7 - 11 + 9 = 9 \\ & -8 + 5 - 3 + 8 - 6 = -4 \\ & 7 - 4 + 2 - 7 + 5 = 3 \\ & \underline{-3 + 2 - 8 + 4 - 2 = -7} \\ & 8 - 5 - 2 - 6 + 6 = 1 \end{array}$$

I den første virtikale Rad samles de bekræftende Størrelser som udgiøre 19 og de nægtende der er $= -11$ men 19 og -11 adderede efter den nylig forklarede Regel, giver Summen $= 8$. o. s. f.

Den hele Sum reduceres paa samme Maade til et eeneste Tal, som her bliver $= 1$. Man kan og addere de horizontale Radder hver for sig, og siden samle partial Summerne, som da vil udgiøre det samme som de vertikale Raders Sum.

Et Exempel med Bogstav Størrelser:

$$
\begin{array}{rl}
\text{adder:} & 3a - 4b + 5c - 2d \\
 & -2a + 2b - 3c + 2f \\
 & -4a + 3b - 4c + d \\
 & \quad\;\; - 7b + c - 2g \\
\hline
 & -3a - 6b - c - d + 2f - 2g
\end{array}
$$

Man ordner først Størrelserne, at de eensbenævnte komme lige under hinanden, derpaa adderes de efter de oven forklarede Regler; i det Tilfælde, at der ingen eensbenævnte Størrelser findes, da skeer Additionen blot ved at skrive Størrelserne med deres Tegn ved hinanden f. Ex.

$$
\begin{array}{c}
2a + 3b + 4c \\
3g - 2h - 3f - 2m \\
\hline
2a + 3b + 4c - 3f + 3g - 2h - 2m.
\end{array}
$$

§. 42.

§. 42.

Subtraction med modsatte Størrelser udtrykte ved Bogstaver og Tal skeer: naar Tegnene ved ethvert Led i Subtractor forandres til det modsatte, og Størrelserne derpaa efter forrige § adderes.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Ex. fra} & 2a - 3b + 5c - 4d \\
\text{subtraher} & \pm a \pm b \mp c \pm d \\
\hline
 & a - 2b + 6c - 5d
\end{array}
$$

Rigtigheden af denne Regel indsees saaledes: Ved Subtraction søges en Størrelse, som lagt til Subtractor udgiør Minuenden; lad f. Ex. $5a$ være givne hvorfra $-3a$ skal subtraheres, saa søges en Størrelse som adderet til $-3a$ udgiør $5a$, denne erholdes just naar $-3a$ forandres efter Reglen til $+3a$ og derpaa adderes til $5a$, thi man faaer da $8a$ som adderet til $-3a$ efter § 41 giør $5a$. Eller maaskee tydeligere paa denne Maade; For at kunde subtrahere en given Størrelse fra en anden, er det nødvendigt at den sidste maa indrettes saaledes, at den første kan blive en Deel deraf, og Subtractionen da foretages f. Ex. fra $8a$ subtraher $-5a$, nu indrettes $8a$ ved at tilføie $+5a$ og $-5a$ saa at $-5a$ er en Deel deraf, saaledes;

8a

$$8a = 8a + 5a - 5a$$
$$\mp 5a = -5a$$
$$13a = 8a + 5a = 13a$$

Et andet Exempel. subtraher -8 fra 12

$$12 = 12 + 8 - 8$$
$$\mp 8 = \quad -8$$
$$20 = 12 + 8$$

§. 43.

Efter Multiplicationens Natur maa Multiplicator altid være et Tal (§. 21), der ere altsaa i Henseende til modsatte Størrelsers Multiplication at mærke følgende fire Tilfælde:

1) Naar en bekræftende Størrelse multipliceres med et bekræftende Tal, da er Productet bekræftende, f. Ex. $+a \times +m = +am$, $+7 \times +4 = +28$.

Thi Produktet kommer af Størrelsen $+7$ paa samme Maade som Tallet $+4$ kommer af Tallet 1 (§ 21), men da $+4$ kommer af $+1$ ved at lægge det til sig selv fire Gange, saa kommer Produktet ved at legge $+7$ til sig selv fire Gange, og er altsaa $+7+7+7+7 = +28$.

2) Naar en nægtende Størrelse multipliceres med et bekræftende Tal, bliver Produktet nægtende,

de,

de, f. Ex. $-a \times +m = -am$ $-7 \times +4 = -28$.

Da Tallet $+4$ kommer af $+1$ ved at igientage det fire Gange, maa Produktet frembringes ved at tage Størrelsen -7 fire Gange, og følgelig være $= -28$.

3) Naar en bekræftende Størrelse multipliceres med et nægtende Tal, er Produktet nægtende, saaledes er $+a \times -m = -am$; $+7 \times -4 = -28$.

At multiplicere $+7$ med -4, er at frembringe et Produkt af $+7$ paa samme Maade som -4 er kommet af $+1$. Nu er Tallet -4 kommet af Tallet $+1$, ved at at igientage det fire Gange og betragte Produktet som et subtraherende Tal; følgelig frembringes det forlangte Produkt ved at igientage $+7$ fire Gange, og ansee den udkomne bekræftende Størrelse $+28$ som subtraherende, hvilket er det samme som en negativ Størrelse betragtet adderende (§ 42).

4) Naar en nægtende Størrelse multipliceres med et nægtende Tal, er Produktet bekræftende, f. Ex. $-7 \times -4 = +28$.

Tallet -4 kommer af $+1$, naar 1 multipliceres med 4 og det udkommende ansees som et subtraherende Tal, det søgte Produkt skal altsaa frembringes ved at igientage -7 fire Gange, og

ansee

ansee det udkomne -28 som en subtraherende Størrelse, men -28 anseet som en subtraherende Størrelse er efter § 42 det samme som $+28$ anseet som en adderende.

Heraf indsees nu den almindelige Regel: at ved at multiplicere bekræftende og nægtende Størrelser med bekræftende og nægtende Tal, faaer Produktet $+$, naar Faktorerne have eens Tegn, og $-$ naar de have forskiellige.

Anmærk. Foruden det anførte Beviis lader denne Regel sig og saaledes oplyse, er det først tilstaaet, at $-5 \times +9$ giver -45 hvilket efter Multiplicationens Natur let indsees, da bevises at $-7 + -5$ giver $+35$ saaledes:

efter den § 38, 4. anførte Grundsætning skal Produkterne her blive lige men da $-5 \times +9$ giver, som antages for beviist -45, saa maa -7×-5 give $+35$, da de udkommende Produkter ellers ikke bleve lige store.

$$\begin{array}{r} -5 = -5 \\ 9-7 = 2 \\ \hline -45+35 = -10 \end{array}$$

§. 44.

Alle saavel med Tal som med Bogstaver udtrykte bekræftende og nægtende Størrelser, lade sig nu let multiplicere: Man multiplicerer nemlig enhver enkelt Størrelse i Multiplicanden med enhver enkelt i Multiplicator, saaledes at Tallene vir-

kelig multipliceres, og Bogstaverne skrives uden Tegn ved hinanden (§ 40), for ethvert Produkt sættes Tegnet $+$ eller $-$ efter § 43. Disse enkelte Produkter adderes derpaa til sammen. f. Ex.

a) med Tal:

$$\begin{array}{rrrrl} 12 & -8 & +7 & -6 & = 5 \\ & & 7 & -4 & = 3 \\ \hline 84 & -56 & +49 & -42 & \quad 15 \\ -48 & +32 & -28 & +24 & \\ \hline 36 & -24 & +21 & -18 & = 15. \end{array}$$

b) med Bogstaver:

No. 1.

$$\begin{array}{l} a-x+y \\ \qquad\quad b \\ \hline ab-bx+by \end{array}$$

No. 2.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2 \text{ v. } aa+ab \\ \qquad\qquad ab+b^2 \text{ v. } bb \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

No. 3.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

No. 4.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2. \end{array}$$

Anm.

Anmærk. Da Bogstaver kan udtrykke alle mulige Størrelser, saa kan ved $a + b$ betegnes Summen af ethvert Par Størrelser, eller enhver Størrelse der bestaaer af 2 Dele (binomium) og altsaa er det udkomne Produkt $a^2 + 2ab + b^2$ et almindeligt Udtryk for Produktet af ethver binomisk Størrelse multipliceret med sig selv. Ligeledes kan $a - b$ ansees som Differencen af ethvert Par Størrelser og $a^2 - 2ab + b^2$ som en almindelig Form for Produktet, naar Differencen af 2 Størrelser multipliceres med sig selv. Ex. No. 4. giver ogsaa en almindelig Regel, at naar $a + b$ (Summen af to Størrelser) multipliceres med $(a - b)$ (Differencen af de samme) udkommer $a^2 - b^2$ (den første multipliceret med sig selv mindre end den anden ligeledes multipliceret med sig selv) om Anvendelsen af disse Sætninger vil i det følgende tales videre.

c) Med Tal og Bogstaver.

$$\begin{array}{l}
8b - 4a + 3ac - 4g \\
\qquad\qquad 2a + 3b \\
\hline
16ab - 8a^2 + 6a^2c - 8ag \\
24b^2 - 12ab + 9abc - 12bg \\
\hline
24b^2 + 4ab - 8a^2 + 6a^2c + 9abc - 8ag \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 12bg
\end{array}$$

§. 45.

Division med modsatte Størrelser, skeer som med absolute Størrelser efter § 22, og i Henseen-

de til Tegnene følges denne Regel: at naar Dividenden og Divisor have eens Tegn ɔ: ere begge bekræftende eller begge nægtende, faaer Qvotienten + eller bliver bekræftende; have derimod Dividend og Divisor forskiellige Tegn faaer Qvotienten —, eller bliver nægtende. Da Dividend, Divisor, Qvotient og Eenheden, have samme Forhold til hverandre som Produkt, Multiplicand, Multiplicator og Eenheden (§ 27), saa følger, at det § 43 for Multiplications-Reglen førte Beviis, med den nødvendige Omsætning tillige kan anvendes her.

Angaaende Bogstav-Størrelserne da er § 40 allerede erindret, at naar de ere forskiellige, Divisionen da skeer allene ved Hielp af Tegn; men forekommer samme Bogstav som Faktor baade i Dividend og Divisor da hæve de hinanden, f. Ex. $ab : a = \frac{ab}{a} = b$. Udtrykket ab betegner, at Størrelsen b er igientagen et vist Antal Gange, som udtrykkes ved a, naar den nu skal divideres med a, det er, deles i saa mange lige store Dele, som a tilkiendegiver, saa følger, at Qvotienten bliver b (§ 27), ligeledes er $a^2 : a = aa : a = a$. $cd : c = d$.

§. 46.

Er enten Dividenden en sammensat Størrelse, og Divisor et enkelt Tal; eller baade Dividenden og Divisor sammensatte Tal, da skeer Divisionen efter samme Fremgangsmaade som § 25 om hele Tals Division er forklaret; naar tillige erindres, hvad i foregaaende § i Henseende til Tegnene, og Bogstav-Størrelserne er anmærket. Begge Tilfælde oplyses ved følgende Exempler:

a. Naar Dividenden allene er en sammensat Størrelse, f. Ex. $(ab - ac + ad) : a$, opsættes saaledes:

$$\begin{array}{l}
a)\ ab - ac + ad\ (\ b - c + d \\
\underline{-ab} \\
\qquad -ac \\
\qquad \underline{+ac} \\
\qquad\qquad ad \\
\qquad\qquad \underline{-ad} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4m)\ 20\,ma - 12\,ma \mid 5a - 3a \\
\underline{-20\,ma} \\
\quad 0 \quad -12\,ma \\
\qquad\quad \underline{+12\,ma} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Man dividerer her hvert Led i Dividenden med Divisor (ligesom ved Tal Divisionen), og skriver de udkomne Qvotienter bag Stregen med

deres

deres behørige Tegn. Dog maa i dette Tilfælde ethvert Led i Dividenden indeholde de samme Bogstaver som Divisor, da Divisionen ellers ikke lader sig udføre uden Brøk.

b. Naar baade Dividenden og Divisor ere sammensatte Størrelser, f. Ex.:

$$\begin{array}{l}
a + b)\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\ (\ a^2 + 2ab + b^2 \\
\qquad \underline{-a^3 - a^2b} \\
\qquad\qquad 2a^2b + 3ab^2 \\
\qquad\qquad \underline{-2a^2b - 2ab^2} \\
\qquad\qquad\qquad ab^2 + b^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-ab^2 - b^3} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0
\end{array}$$

Man tager her det første Led af Divisor a, og undersøger hvor ofte det indeholdes i det første Led af Dividenden a^3, og findes da efter forrige § Qvotienten a^2, dermed multipliceres nu hele Divisor, og det udkomne Produkt subtraheres fra Dividenden; nu undersøges fremdeles, hvor ofte det første Led af Divisor indeholdes i det første Led af den tilbageværende Rest af Dividenden, og fortfares paa samme Maade som tilforn, indtil der, som i det foregaaende og følgende Exempel, intet bliver tilovers; Divisionen er da fuldført og Qvotienten nøiagtig udtrykt $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$.

 $a - b)$

$$a - b)\; a^3 - b^3 \;(\; a^2 + ab + b^2$$
$$\underline{a^3 \mp a^2b}$$
$$a^2b - b^3$$
$$\underline{a^2b \mp ab^2}$$
$$ab^2 - b^3$$
$$ab^2 - b^3$$
$$\underline{- \quad +}$$
$$0 \quad 0$$

Møder i Divisionen det Tilfælde, at de enkelte Led i Dividenden ikke indeholde Divisor, da udtrykkes Qvotienten ved Brøk, som i følgende Exempel: $a:(a-x)$ der udføres saaledes:

$$a - x)\; a \;(\; 1 + \frac{a}{x} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \text{ o. s. f.}$$
$$\underline{a \mp x}$$
$$x$$
$$\underline{x \mp \frac{x^2}{a}}$$
$$\frac{x^2}{a}$$
$$\underline{\frac{x^2}{a} \mp \frac{x^3}{a^2}}$$
$$\frac{x^3}{a^2}$$
$$\underline{\frac{x^3}{a^2} \mp \frac{x^4}{a^3}}$$
$$\frac{x^4}{a^3}$$

Divi-

Divisionen skeer her efter samme Regler som før, men da der strax møder, at x skal divideres med a, kan Divisionen efter § 40 ikke skee anderledes, end ved at udtrykke Qvotienten som en Brøk $\frac{x}{a}$ o. s. f. Divisionen kan fortsættes i det Uendelige, og man kan derved opløse enhver Brøk i en uendelig Tal-Række, hvorom mere paa et andet Sted.

Anm. At handle udførligere om Regning med Bogstaver, om Potentser, og Regnings-Arterne dermed, samt om Tal-Rækker og Ligninger, troer jeg efter min Plan her ikke passende, jeg har allene vildet vise de fire Regnings-Arter med almindelige Tegn eller Bogstaver, for at kunde nytte de almindelige Former i det følgende, ved Qvadrat- og Cubik-Rodens Udtrækning, og tillige for i Almindelighed at udføre Beviserne i Læren om Forhold og Proportioner.

Om Decimal- eller tiendedeels Brøk.

§. 47.

En tiendedeels Brøk eller en Decimalbrøk kaldes enhver Brøk, hvis Nævner er ti, hundrede eller tusinde &c., eller hvor Nævneren er en høiere Eenhed, f. Ex. $\frac{7}{10}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{756}{1000}$, $\frac{2873}{10000}$.

Efter det decadiske Tal-Systems Natur (§ 14) voxer Zifrenes Værd fra høire til venstre, og bliver for hver Plads, de rykke frem, ti Gange høiere,

paa

paa samme Maade kan de siges at tage af i Værd, fra venstre til høire, og blive for hver Plads de rykkes mod høire Side, ti Gange ringere. Denne Egenskab ved Tal-Systemet giør, at man kan udtrykke Decimal-Brøkene blot ved at skrive Tællerne paa følgende Maade: Man betegner med en Streg eller et Punkt, hvor de hele Tal ophøre, og skriver efter dette Mærke mod høire Decimalbrøkens Tæller, det Ziffer næst ved Eenerne mod høire maa da betegne Størrelser som ere ti Gange mindre end Eenheden og følgelig tiende Dele; det næste Ziffer, Størrelser, som ere ti Gange mindre end tiende Dele, altsaa hundred Dele o. s. v. Saaledes betegner Udtrykket 3, 7 tre Eenheder og syv tiende Dele, og altsaa det samme som $3\frac{7}{10}$; 8, 42 otte hele, fire tiende Dele og to hundred Dele eller 42 hundred Dele, og er altsaa $= 8\frac{42}{100}$. De Ziffre paa høire Side af Stregen kaldes Decimal-Zifre eller Decimaler.

I det Tilfælde, at der ingen hele Tal ere, betegnes deres Plads med et Nul, ved hvilket Stregen sættes, saaledes skrives $\frac{27}{100}$, som Decimalbrøk 0,27. En saaledes skreven Decimalbrøk kan læses, enten ved at læse hver Slags Dele for sig, f. Ex. 8,342 læses: otte hele, tre tiende Dele, fire hundrede Dele og to tusinde Dele; eller og, otte hele, tre hundrede og to og fyrretyve tusind

tusind Dele, da $\frac{3}{10}$ er $= \frac{300}{1000}$, $\frac{4}{100} = \frac{40}{1000}$ og følgelig $8 + \frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{2}{1000} = 8\frac{342}{1000}$ $=$ 8,342. Man kan altsaa giøre den almindelige Regel: at Tælleren læses som et heelt Tal, og Nævneren er altid en høiere Eenhed, der har saa mange Nuller, som der ere Decimaler i Tælleren.

Anm. Man kan paa Grund af det nu anførte kalde tiende Dele Eenheder af første ringere Orden, hundred Dele af anden, tusinde Dele af tredie, ligesom man kalder Tiere, Eenheder af første høiere Orden, Hundreder af anden, Tusinder af tredie o. s. f.; og paa Grund deraf skrive Decimalbrøk uden Komma eller Streg, naar Eenernes Plads betegnes med et 0, og de høiere Eenheder paa venstre Side af Eenerne med de bekræftende Tal 1, 2, 3, men de ringere Eenheder paa høire Side med de nægtende Tal −1, −2, −3 &c., f. Ex. $\overset{2}{2}\,\overset{1}{3}\,\overset{0}{4}\,\overset{-1}{5}\,\overset{-2}{6}\,\overset{-3}{7}$ er = 234,567 $= 234\frac{567}{1000}$.

§. 48.

At forandre en given simpel Brøk til en Decimalbrøk, er allene at søge Tælleren (§ 47) til en Decimalbrøk, der udtrykker den givne Brøks Værdi uforandret; dette skeer ved at føie Nuller til den givne Brøks Tæller, og dividere denne saaledes forøgede Tæller med dens Nævner, Qvotienten er da den søgte Decimal-Tæller, f. Ex. $\frac{3}{8}$ forandres saaledes til Decimal-Brøk $\frac{3000}{8} = 0{,}375$.

Be-

Beviis. Den fundne Decimal-Tæller 0,375 er $= \frac{375}{1000} = \frac{375 \times 8}{1000 \times 8}$ (§ 30. 4) $= \frac{3000}{8000} = \frac{3000 \cdot 1000}{8000 \cdot 1000} = \frac{3}{8}$. Egentlig forøges og formindskes Brøkens Tæller og Nævner med samme Tal og dens Værd bliver altsaa i Følge den anførte § 30 uforandret. Saaledes er $\frac{5}{8} = \frac{5000}{8000} = \frac{5000 \cdot 8}{8000 \cdot 8} = \frac{625}{1000} = 0{,}625$.

Der gives imidlertid Brøk, der ikke lade sig nøiagtig forvandle til Decimalbrøk f. Ex. $\frac{2}{3} = \frac{2000000}{3} = 0{,}666666\frac{2}{3}$. I saadanne Tilfælde vedbliver man at føie flere Nuller til Tælleren, og fortsætter Divisionen med Nævneren; saalænge Regningens Nøiagtighed udfordrer det; i nærværende Exempel bliver der, efter at der er føiet 6 Nuller til, $\frac{2}{3}$ tilbage, som er $\frac{2}{3}$ af en Million Deel (§ 47). Denne Brøk, som er over en halv, ansees for en heel Million Deel og antages altsaa $\frac{2}{3} = 0{,}666667$, hvor Decimalbrøken er $\frac{1}{3}$ af en Million Deel større end den egentlig burde være. Er derimod den ved Divisionens Ophør overblevne Brøk under en halv, da bortkastes den, saaledes er $\frac{1}{3} = 0{,}333333$ ......

De saaledes fundne Decimalbrøk ere vel alle enten større eller mindre end de givne simple Brøk, i hvis Sted de skulde settes; men jo længere man ved at tilføie Nuller fortsætter Divisionen, desto mere nærmer Værdien af Decimalbrøken sig til den givne

givne Brøks Værdi, og man kan fortsætte det saa længe, at Feilen ikke udgiør en Million-, Billion-, Trillion-Deel af Eenheden. Da nu Regningen med Decimalbrøk er, som strax videre skal vises, saa overmaade beqvem, saa er i praktiske Regninger, der enten ikke fordre en saa gandske fuldkommen Strenghed; eller og efter deres Natur ikke kan tage derimod; simple Brøkers Forvandling til Decimalbrøker, af megen Vigtighed og Nytte.

§. 49.

Decimalbrøkers Natur medfører, at de uden Vanskelighed bringes til eens Benævning, blot ved at sætte Nuller til høire Side af Tælleren, hvorved Værdien ikke forandres, f. Ex. $0{,}75 = 0{,}750 = 0{,}7500$, thi udtrykte som simple Brøk er $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = \frac{7500}{10000}$ (§ 30). De adderes og subtraheres derfor, naar de blot skrives ordentlig under hinanden (tiende Dele under tiende Dele, hundred Dele under hundred Dele 2c.), efter de samme Regler, som om hele Tal ere forklarede (§ 17 og 19), f. Ex.

At Addere:	At Subtrahere:
8,304	12,3405
7,54	8,7638
0,0598	3,5767
3,7569	
19,6607	

§. 50.

Decimalbrøk multipliceres som hele Tal, og Antallet af Decimal-Zifrene i Produktet er saa stort, som Summen af Faktorernes Decimaler.

Rigtigheden af denne Regel indsees, naar man erindrer, at, naar to Tal, der endes med Nuller, multipliceres med hinanden, faaer Produktet saa mange Nuller, som begge Faktorerne (§ 23. Till. 2). Hvad der gielder om Tal i Almindelighed, gielder og om en Brøks Nævner; skal altsaa 2 Brøker, hvis Nævnere endes med Nuller, multipliceres med hinanden (§ 35), saa faaer Produktets Nævner saa mange Nuller, som begge Faktorernes. Nu har en Decimalbrøks Nævner altid saa mange Nuller, som der ere Decimaler i Tælleren (§ 47), naar altsaa to Decimalbrøke multipliceres, maa Produktet have saa mange Zifre paa høire Side af Kommaet, som begge Faktorerne.

For at indsee dette endnu tydeligere, skriver man Decimalbrøkerne, som simple Brøk, og multiplicere dem efter § 35, f. Ex.:

$$0{,}375 \times 0{,}26 = \frac{375}{1000} \times \frac{26}{100} = \frac{9750}{100000}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}26 \\ \hline 2250 \\ 750 \\ \hline 0{,}09750 \end{array}$$

Ved at multiplicere Tællerne i nærværende Exempel faaer vi Produktet 9750. Efter den nylig forklarede Regel skulde Produktet have fem Decimaler, her føies altsaa Nuller foran, for at Zifrene kan faae deres rigtige Plads, og i Følge deraf betegne den rigtige Classe af ringere Eenheder (§ 47. Anmærkning).

Bestaaer enten den eene eller begge Faktorerne af hele Tal og Decimalbrøk, skeer Multiplicationen paa lige Maade og efter samme Regel; thi ethvert saadan Tal kan ansees som en uegentlig Brøk, f. Ex. at multiplicere a) 32,7835 med 0,423.

$$\begin{array}{r} 32{,}7835 \\ 0{,}423 \\ \hline 983505 \\ 655670 \\ 1311340 \\ \hline 13{,}8674205 \end{array} \qquad = \frac{327835}{10000} \times \frac{423}{1000} = \frac{13867420 5}{10000000} = 13\frac{8674205}{10000000}$$

$$\text{b)} \quad \begin{array}{r} 5{,}023 \\ 3{,}46 \\ \hline 30138 \\ 20092 \\ 15069 \\ \hline 17{,}37958 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} = \frac{5023}{1000} \times \frac{346}{100} = \frac{1737958}{100000} = 17\frac{37958}{10000}$$

§. 51.

Division med Decimalbrøk skeer som med hele Tal; kun at Qvotienten faaer saa mange Deci-

Decimaler, som Dividenden har flere end Divisor, f. Ex. 324,48:2,4.

2,4)324,48†135,2
24
84
72
124
120
48
48
00

Beviis. Ere Dividendens og Divisors sidste Zifre mod høire Side enten begge Eenere, eller og begge tiende Dele, hundred Dele, eller tusind Dele, og følgelig Dividenden og Divisor Størrelser af lige Art, bliver Qvotienten efter § 25 altid hele Tal. Har derimod Dividenden flere Decimaler end Divisor, er den for hver Decimal den har flere, 10 Gange mindre; men samme Divisor kan ikke indeholdes saa ofte i et ti Gange mindre Tal, som i det større, og Qvotienten maa da blive ti Gange mindre for hver, det er, der maa i den afskiæres ved Decimal-Tegnet saa mange Zifre fra høire, som der i Dividenden er flere Decimaler, end i Divisor. Lad i det ovenanførte Exempel Kom-

Kommaet i Dividenden flyttes et Ziffer tilbage mod høire, det hedder da 3244,8 : 2,4 = $\frac{32448}{10}$: $\frac{24}{10}$ = 1352. Ved at rykke Kommaet en Plads længer mod Venstre, bliver Dividenden 10 Gange mindre, og Divisor uforandret; Qvotienten bliver altsaa ikke den samme, men ti Gange mindre, hvilket just, efter det om Decimalbrøkene forklarede, skeer naar dens sidste Ziffer afskiæres ved Decimal-Tegnet, og den bliver da i nærværende Exempel 135,2. Blev Dividenden 32,448 og Divisor uforandret 2,4, vilde Qvotienten blive 13,52.

Indtræffer det Tilfælde, at Dividenden har færre Decimaler end Divisor, da kan man ved at føie Nuller til Dividenden, hvorved dens Værdie slet ikke forandres (§ 49), bringe dem til at blive eensartede, f. Ex. 328 : 0,75 = 328,00:0,75

0,75)328,00†437,33
300
280
225
550
525
250
225
250
225
25

Qvotienten er i Følge det forhen forklarede 437 de overblevne 25 kunde tilføies som en simpel Brøk, og blev da 437$\frac{25}{75}$; men vil man have Qvotienten udtrykt i Decimalbrøk, tilføies flere Nuller, og Divisionen fortsættes, men da Dividenden ved de tilføiede Nuller er bleven formindsket, maa der i Qvotienten afskiæres Decimaler efter Reglen.

Ved at betragte nærværende Exempel, seer man let, at de følgende Zifre, der ved at føie Nuller til Dividenden, kunde erholdes i Qvotienten, vilde stedse blive de samme, og at der bestandig vilde blive 25 tilovers. Man retter sig altsaa i Henseende til Fortsættelsen af Divisionen efter det som er sagt § 48.

Anmærk. Rigtigheden af den anførte Divisions-Regel indsees ogsaa, naar Decimalbrøken udtrykkes som simple Brøk og behandles efter § 37, for Exemp.: $32,448 : 2,4 = \frac{32448}{1000} : \frac{24}{10} = \frac{32448}{1000} : \frac{2400}{1000} = \frac{32448}{2400} = 13\frac{1248}{2400} = 13\frac{1248:24}{2400:24} = 13\frac{52}{100} = 13,52$.

Da de færreste Brøk nøiagtig kan udtrykkes i Decimalbrøk, men kun ved Tilnærmelse (§ 48), saa findes, ved at give Agt paa de ei nøiagtigt rigtige Decimalbrøks Indflydelse paa det ved Regnings-Arterne udkommende, at man paa Grund af de sidste Zifres Urigtighed i Produktet og Qvotienten kan forkorte Multiplicationen og Divisionen med Decimalbrøk.

Om Tallenes Potenser og deres Rødder.

§. 52.

Et Produkt af lige store Faktorer, kaldes en Potens eller Værdighed af det som Faktor brugte

Tal,

Tal, der ogsaa kaldes Potensens Rod; Faktorernes Antal bestemmer Graden af Potensen, og Tallet, hvorved dette tilkiendegives kaldes Potens-Exponent (Værdigheds Angiver). Saaledes kaldes et Produkt af to lige store Faktorer den anden Potens eller Qvadrat-Tallet, eller og kortere Qvadratet af Roden, som da faaer Navn af Qvadratrod. Et Produkt af tre lige store Faktorer, heder den tredie Potens eller Cubic-Tallet, og kortere Cubus af Faktoren, der nu kaldes Cubikrod. Og i Almindelighed et Produkt af n lige store Faktorer den $n$te Potens af Faktoren. Til Ex.: 16 er Qvadratet, 64 Cubus, og 1024 den femte Potens af 4, fordi $4 \times 4 = 16$, $4 \times 4 \times 4 = 64$, og $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$. Ligeledes er 4 Qvadratroden til 16; Cubikroden til 64, og den femte Rod til 1024.

Med et almindeligt Udtryk er aa Qvadratet, aaa Cubus, $aaaaa$ den femte Potens af a o. s. f.

Till. 1. At ophøie et Tal til 2den, 3die eller $n$te Potens, er at finde denne Potens af Tallet, som skeer altsaa blot ved at multiplicere Tallet 2, 3 eller n Gange med sig selv, og tilkiendegives ved Exponenten, som skrives over Linien ved høire Side af Roden saaledes: $4^2 = 4 \times 4 = 16$. $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$. $a^2 = aa$ $a^3 = aaa$ (§ 40).

Anm.

Anm. At ophøie et Tal til anden Potens, kaldes at qvadrere det; til tredie, at cubere det.

Till. 2. At udtrække den 2den, 3die eller $n$te Rod af et Tal, er at finde denne Rod ɔ: det Tal, der 2, 3 eller n Gange multipliceret med sig selv, har frembragt det givne Tal. At dette skal skee, tilkiendegives ved det saa kaldte Rod-Tegn $\sqrt{}$, der sættes foran det Tal, hvis Rod søges. Ved et Tal, som sættes i Rod-Tegnet og kaldes Rod-Exponent, tilkiendegives, hvilken Rod der forlanges, f. Ex. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{256}$ betyder, at der søges den tredie Rod eller Cubik-Roden af 27, fierde Rod af 256. Ved Qvadratroden udelader man for Korthedс Skyld Exponenten 2, som skulde sættes i Rodtegnet, saa at $\sqrt{64}$ betyder Qvadratroden af 64.

Till. 3. Et Tal qvadreres, naar det multipliceres med sig selv, og cuberes, naar det multipliceres med dets Qvadrat, og bliver i Almindelighed ophøiet til den $n$te Potens, naar det multipliceres med sin $(n - 1)$te Potens. Naar man altsaa multiplicerer de ni enkelte Tals Qvadrater, som vides af Multiplications-Tabellen (§ 21) med Tallene selv, har man deres Cuber, og altsaa følgende Tabel over deres Qvadrat og Cubik-Tal.

Rod	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Qvadrat	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Till. 4. Naar Roden til en Potens forøges med et Nul, forøges dens Qvadrat med to, Cubus med tre o. s. f. (§ 23. 2 Tillæg), thi f. Ex.

$$30^2 = 30 \times 30 = 900$$
$$300^2 = 300 \times 300 = 90000$$
$$30^3 = 30 \times 900 = 27000$$
$$300^3 = 300 \times 90000 = 27000000.$$

§. 53.

En Brøk qvadreres, cuberes og kort ophøies til n Potens, naar dens Tæller og Nævner hver for sig, qvadreres, cuberes eller ophøies til n Potens; thi at qvadrere en Brøk er at multiplicere den med sig selv (§ 52. 3 Tillæg), hvilket efter § 35 skeer ved at multiplicere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner, og altsaa just, ved at qvadrere baade Tæller og Nævner, f. Ex. $(\frac{4}{5})^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2}$ $(\frac{2}{7})^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2^2}{7^2}$ (§ 52) $= \frac{2}{7} \times \frac{4}{49} = \frac{8}{343} = \frac{2^3}{7^3}$.

At udtrække Roden af en Brøk (§ 52. 2 Til.) skeer følgelig ved at udtrække Roden af Tæller og Nævner, og Roden er en Brøk, hvis Tæller og

Nævner ere Røder af den givne Brøks Tæller og Nævner, f. Ex., $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$.

Tillæg. Qvadratet af en egentlig Brøk er altsaa mindre end Roden; Cubus mindre end Qvadratet, og i Almindelighed enhver høiere Potens af samme Brøk mindre end den lavere. F. Ex., $\frac{4}{49} < \frac{2}{7}$; $\frac{8}{343} < \frac{4}{49}$ (§ 34).

§. 54.

Af en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere bestemte og endelige Størrelser, og som ikke er liig et heelt Tal, kan ingen Potens blive et heelt Tal.

Beviis. Er den givne Brøk en egentlig Brøk, er det klart af Tillægget i forrige §, thi da Potenserne stedse blive mindre end Roden, blive de saa meget mere mindre end en Heel. Er det derimod en uegentlig Brøk, som ei er liig et heelt Tal, hvor Nævneren altsaa (§ 28) ikke er nogen aliqvot Deel af Tælleren; da er enten Tæller og Nævner relative Prim-Tal, f. Ex. i Brøken $\frac{12}{7}$ eller og, de ved at divideres med deres største fælles Maal (§ 31) kan bringes dertil, f. Ex. $\frac{32}{20} = \frac{8}{5}$. Enhver Potens af en saadan Brøk vil blive en Brøk, hvis Tæller og Nævner stedse blive Produkter af Tal, der ere indbyrdes Prim-Tal; og føl-

gelig vil Nævneren aldrig blive en aliqvot Deel af Tælleren og Potensen aldrig blive et heelt Tal (§ 29).

1 Till. Naar altsaa Roden til et heelt Tal ikke er et heelt Tal, er det heller ingen Brøk, hvis Tæller og Nævner ere endelige Tal; men da enhver Mængde maa kunde udtrykkes ved hele Tal og Brøk, maa denne Rod nødvendig være en Brøk; den er altsaa en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere uendelig store, og følgelig aldrig nøiagtig kan udtrykkes. Saadanne Rod-Størrelser kaldes irrationale Tal, f. Ex. $\sqrt{7} = 2,645 \ldots$ $\sqrt{3} = 1,732 \ldots$

2 Till. Et Tal, hvis Qvadrat-Rod er et heelt Tal, kaldes et fuldkomment Qvadrat-Tal; et Tal, hvis Cubik-Rod er et heelt Tal, hedder et fuldkomment Cubik-Tal, og i Almindelighed enhver Potens, hvis Rod er et heelt Tal, en fuldkommen Potens. Er Roden derimod ikke et heelt Tal, hedder det, et ufuldkomment Qvadrat- og Cubik-Tal, og i Almindelighed en ufuldkommen Potens. Rødderne til alle ufuldkomne Potenser ere i Følge 1 Tillæg irrationale Tal.

§. 55.

Et fuldkomment Qvadrat-Tal skal, naar Roden bestaaer af to Dele, eller er binomisk, indeholde: 1) Qvadratet af Rodens første Deel, 2) det dobbelte Produkt af begge Dele, 3) Qvadratet af den sidste Deel.

Beviis. Da Bogstaver ere almindelige Tegn, saa kan enhver saadan binomisk Rod udtrykkes ved det almindelige Udtryk $a + b$, og altsaa Qvadratet af en saadan Rod ved $(a+b)^2$, som er $= (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ (§ 44), da a betegner Rodens første Deel, er a^2 den første Deels Qvadrat; $2ab = 2 \times ab =$ det dobbelte Produkt af begge, eller Produktet af den første og anden Deel to Gange taget, og b^2 = Qvadratet af den anden Deel.

Med Tal-Exempler lader det sig ogsaa oplyse saaledes:

$$
\begin{array}{rcl}
47 & = & 40 + 7 \\
\underline{47} & & \\
49. & = & 7^2 \\
\left.\begin{array}{r} 28 = 4 \times 7 \\ 28 = 4 \times 7 \end{array}\right\} & = & 2 \times 4 \times 7 \\
16. & = & 4^2 \\
\hline
2209 & = & 47^2.
\end{array}
$$

Tallet 47 bestaaer af 4 Tiere og 7 Eenere, Qvadrat-Tallet er sammensat af Tiernes Qvadrat, som er 1600 (§ 52. 4 Till.), Produktet af Tierne og Eenerne to gange taget, som er $2 \times 280 =$

560,

560, og Eenernes Qvadrat, som er 49; ved, som i nærværende Exempel, at skrive de enkelte Produkter hver paa sit Sted, efter § 22, sees dette tydeligt. Exempler kan og staae saaledes:

$$
\begin{array}{rcr}
47 & = & 40 + 7 \\
47^2 & = & (40 + 7)^2 = 40 + 7 \\
 & & \underline{40 + 7} \\
 & & 280 + 49 \\
 & & 1600 + 280 \quad \\
\hline
47^2 & = & 1600 + 560 + 49
\end{array}
$$

1 Tillæg. Da ethvert heelt Tal, af hvor mange Zifre det end bestaaer, kan deles i to Dele, saa kan den forklarede Form anvendes paa alle Tal, til at finde deres Qvadrat, f. Ex. $476^2 = (470 + 6)^2 = 470^2 + 2 \times 470 \times 6 + 6^2$, som udsættes saaledes: $476 = 470 + 6$

$$
476^2 = \left\{
\begin{array}{l}
470^2 = \left\{ \begin{array}{lcr} 40^2 & = & 16\,.\,.\,.\,. \\ 2 \times 40 \times 7 & = & 56\,.\,.\,. \\ 7^2 & = & 49\,.\,. \end{array} \right. \\
\quad 2 \times 470 \times 6 \quad = \qquad 564\,. \\
\quad\quad 6^2 \qquad\quad = \qquad\quad 36 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 226576
\end{array}
\right.
$$

2 Tillæg. Ved at sammenligne Delene af Qvadratet af 47 med Delene af Qvadratet af 476, sees, at Qvadratet, naar Roden forøges med eet Ziffer, formeres med et dobbelt Produkt af de forrige Zifre og det tilføiede, som i nærværende Ex-

empel

empel er $2 \times 470 \times 6$, og Qvadratet af det tilføiede som her er 6^2.

Forsøges altsaa Roden 476 endnu med et Ziffer og bliver 4763, vil Qvadratets Dele være

$$4763^2 \begin{cases} 4760^2 \begin{cases} 470^2 \begin{cases} 40^2 = 16\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ 2 \times 40 \times 7 = 56\,.\,.\,.\,.\,. \\ 7^2 = 49\,.\,.\,.\,. \end{cases} \\ 2 \times 470 \times 6 = 564\,.\,.\,. \\ 6^2 = 36\,.\,. \end{cases} \\ 2 \times 4760 \times 3 = 2856\,. \\ 3^2 = 9 \\ \overline{22686169} \end{cases}$$

Med almindelige Tegn sees det saaledes:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)\,d + d^2$$

$$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2 + 2(a+b+c+d)\,e + e^2$$

3 Tillæg. Da ethvert med Ziffre udtrykt Tal, kan ansees at bestaae af et vist Tal $n+1$, saa vil Qvadratet af ethvert saadant Tal bestaae af $n^2 + 2n + 1$, og altsaa Forskiællen imellem Qvadratet af $n = n^2$

og Qvadratet af $n + 1 = n^2 + 2n + 1$

være $= 2n + 1$ ɔ: naar Roden forhøies ved Tillæg af Eenheden, forhøies Qvadratet med det dobbelte af den forrige Rod

Rod

Rod og Eenheden, f. Ex. $12^2 = 144$. $13 = 12 + 1$. $13^2 = 12^2 + 2 \times 12 + 1 = 169$.

§. 56.

Ved den i forrige § forklarede Opløsning af Qvadratets Dele indsees, at (det første Ziffer fra venstre Side undtagen) giver ethvert, af de øvrige Zifre i Roden, to nye Zifre i Qvadrat-Tallet, hvoraf det første indeholder Eenerne af det dobbelte Produkt, af det eller de foregaaende Zifre, og dette, og det andet dettes Qvadrat. Naar altsaa et givet Qvadrat-Tal inddeles i Classer fra høire til venstre to Zifre i hver Classe, (den sidste Classe undtagen, som undertigen kun har eet Ziffer), saa har Roden til dette Qvadrat saa mange Zifre, som der ere Classer, og begynder man fra venstre, da findes i den første Classe Qvadratet af Rodens første Ziffer, i den anden det dobbelte Produkt af Rodens første og andet Ziffer, samt Qvadratet af det andet; i den tredie det dobbelte Produkt af Rodens tvende første Zifre og det tredie, samt dets Qvadrat; og altsaa i den første Classe Qvadratet af Rodens første Ziffer; i de 2 første Qvadratet af de to første Zifre i Roden, og i de tre første Klasser Qvadratet af Rodens tre første Zifre v. s. f. For Exempel Qvadratet af

4763

4763^2 er $=$ 16 . .
56 .
49 . .
564 .
36 . .
2856 .
9
―――――――
22686169

$2354^2 = $ 4 . .
12 .
9 . .
230 .
25 . .
1880 .
16
―――――――
5541316

§. 57.

At udtrække Roden af et givet Tal, der bestaaer af flere end to Zifre (thi da vil det uden Vanskelighed vides af den § 52 anførte Tabel) skeer altsaa saaledes:

1) Det givne Tal inddeles i Classer fra høire til venstre to Tal i hver Classe.

2) I Qvadrat-Tabellen søges det høieste Qvadrat-Tal, der lader sig subtrahere fra Tallene i første Classe fra venstre Side, som hensættes derunder og subtraheres derfra; dets Rod er den søgte Rods første Ziffer.

3) Til den fra første Classe overblevne Differents nedsættes anden Classe, det fundne første Rod-Ziffer fordobles og hensættes, saa at dets Eenere kommer under det første af anden Classes Zifre, som Divisor, og den derved fundne Qvotient bliver Rodens andet Ziffer. Med dette multipliceres den brugte Divisor, og Produktet sættes med dets Eenere under det første af anden Classes Zifre; nu tages Qvadratet af Rodens andet Ziffer, og sættes med dets Eenere under anden Classes sidste Ziffer. Disse tvende Dele sammenlægges og subtraheres fra de af første og anden Classe lige over staaende Tal. Lader denne Subtraction sig ikke iværksætte, er det Beviis paa, at Rodens andet Ziffer er taget for høit, i modsat Tilfælde er den fundne Qvotient virkelig det andet Ziffer af den søgte Rod.

4) Til den fra første og anden Classe overblevne Differents nedsættes tredie Classe, det dobbelte af de to fundne Rod-Zifre tages nu som Divisor, og hensættes, at dets Eenere kommer under det første af tredie Classes Zifre; dermed divideres de lige over staaende Tal, og den fundne Qvo-

Qvotient er da Rodens tredie Ziffer, derpaa fortfares som i No. 3 er forklaret, og saaledes vedblives med alle de Classer, som ere forhaanden.

5) Bliver tilsidst intet tilovers, da er det givne Tal et fuldkommen Qvadrat (§ 54. Till. 2) og Roden er funden nøiagtig. Bliver derimod en Rest, saa er Tallet et ufuldkomment Qvadrat-Tal, og følgelig dets Rod et irrational Tal, og der maa til den fundne Rod komme en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere uendelige (§ 54, Till. 1). Til Exempel, at udtrække Roden af 5484964, skeer saaledes:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad a\ b\ c\ d \\ \sqrt{5}\,|48|49|64 \dagger 2\ 3\ 4\ 2 \\ a^2 = 4 \\ \hline \quad 1,48 \\ 2a = (4) \\ \left.\begin{array}{r} 2ab = 12 \\ b^2 = 9 \end{array}\right\} \\ \hline 2ab + b^2 = 129 \\ \hline \quad 19,49 \\ 2(a+b) = (46) \\ \left.\begin{array}{r} 2(a+b)c = 18\ 4 \\ c^2 = 16 \end{array}\right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2(a+b)c + c^2 = 18,56 \\ \hline \qquad\qquad 93,64 \\ 2(a+b+c) = (46\ 8) \\ \left.\begin{array}{r} 2(a+b+c)d = 936 \\ d^2 = 4 \end{array}\right\} \\ 2(a+b+c)d + d^2 = 93,64 \\ \hline \qquad\qquad 00,00 \end{array}$$

Det høieste Qvadrat der kan subtraheres fra første Classe er 4, dets Rod er 2. Den første Divisor er 2 × 2, som sættes efter No. 3, og den fundne Qvotient 3 er det andet Ziffer i Roden; med den multipliceres Divisoren 4, og Produktet er 12, som, forøget med Qvadratet af 3, subtraheres fra 1,48, til Resten 19 føies 3die Classe o. s. f. De Tal, der saaledes efterhaanden fradrages fra Tallet 5484964 udgiøre just Qvadratet af 2342 efter § 55 og 56.

Et andet Exempel:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad a\ b\ c \\ \sqrt{32}\,|47|86 \dagger 5\ 6\ 9 \\ \ 25 \\ \hline \ 7,47 \\ (10)6) \\ \ 6\ 3\ 6 \\ \hline 1\ 1\ 1,86 \\ \quad (11\ 2)9) \\ 1\ 0\ 1,6\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 2\ 5 \end{array}$$

1 Tillæg. I Steden for at multiplicere først det dobbelte af det eller de fundne Rod-Zifre med Qvotienten, og dertil igien addere Qvadratet af Qvotienten, for under et at subtrahere det fra de over staaende Tal efter No. 3, kan man, som i sidste Exempel er skeet, strax hensætte den fundne Qvotient ved Siden af Divisoren, og derpaa foretage Multiplicationen; da man faaer ved een Multiplication det dobbelte Produkt af de forrige Zifre og det Nye, samt Qvadratet af det nye, saaledes er i sidste Exempel $636 = 2 \times 50 \times 6 + 6^2$ og $10161 = 2 \times 560 \times 9 + 9^2$.

2 Tillæg. Bliver, som i sidste Exempel, noget tilovers, da sees, at Roden ikke er funden nøiagtig; thi 569 er mindre end Roden af 324786, men dog kan denne Rod ikke være een Eenhed større end 569, thi i saa Fald maatte det overblevne 1025 være mere end $2 \times 569 + 1$ (§ 55. 3 Till.) Roden kan da ikke bestemmes nøiagtig, da den er et irrational Tal (§ 54. 2 Till.), men findes ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, som strax skal forklares.

§. 58.

For bedre at forstaae denne Maade at finde Roden af et ufuldkomment Qvadrat-Tal ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, vil jeg først vise, hvor-
ledes

ledes Roden udtrækkes af en given Decimalbrøk. Til Ex. af 13,7. Man føier nemlig til den givne Brøk paa høire Side saa mange Nuller man vil, dog saa, at Decimalernes Antal bliver lige, og derpaa udtrækker Roden som af hele Tal, der vil da blive i Roden saa mange Decimaler, som de med Nuller formerede Decimaler, udgiorte Classer.

$\sqrt{13,7} = \sqrt{13,700000}$

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{13,70,00,00} \dagger 3,701 \\
9 \\
\hline
4,70 \\
(6)7 \\
469 \\
\hline
1,00 \\
(74)0 \\
000 \\
\hline
1,00,00 \\
(740)1 \\
7401 \\
\hline
2599
\end{array}
$$

thi $\sqrt{13,7} = \frac{\sqrt{137}}{\sqrt{10}}$ (§ 53) $\frac{\sqrt{13700000}}{\sqrt{1000000}} = \frac{3701}{1000} = 3,701$.

1 Tillæg. Roden af enhver Brøk findes derfor lettest ved at forandre den til en Decimal-
brøk,

brøk, og deraf udtrække Roden, f. Ex., da $\frac{5}{7}$ = 0,714285714285 . . ., saa er $\sqrt{\frac{5}{7}}$ = $\sqrt{0{,}714285714285}$ = 0,845154.

§. 59.

Af et heelt Tal, som ikke er et fuldkomment Qvadrat-Tal, findes Roden ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, saa nøiagtig som man vil, paa følgende Maade:

Man føier til det givne Tal saa mange Par Nuller, som man forlanger Decimaler i Roden, og udtrækker derpaa Roden efter de § 57 forklarede Regler. F. Ex., der forlanges at vide Roden af 7.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{7} & 2{,}6457 \\
4 & \\
\hline
3{,}00 & \\
(4)6 & \\
276 & \\
\hline
24{,}00 & \\
(52)4 & \\
2096 & \\
\hline
304{,}00 & \\
(528)5 & \\
26425 & \\
\hline
3975{,}00 & \\
(5290)7 & \\
370349 & \\
\hline
27151 &
\end{array}
$$

Rig-

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes: 7 er = 7,000000 (§ 49) og altsaa $\sqrt{7} = \sqrt{7{,}000000}$.

§. 60.

Cubus eller Cubik-Tallet af en binomisk Rod (en Rod som bestaaer af to Dele), bestaaer af: 1. Cubus af Rodens første Deel. 2. Det tredobbelte Produkt af den førstes Qvadrat multipliceret med den anden. 3. Det tredobbelte Produkt af den første multipliceret med den andens Qvadrat; og 4. Cubus af den anden Deel.

Thi efter § 52 findes Cubik-Tallet af en Rod, naar den multipliceres med sit Qvadrat, altsaa er $(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2) \times (a+b) =$

$$
\begin{array}{r}
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \qquad\qquad \\
a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

og da Udtrykket $a+b$ gielder i Almindelighed for enhver binomisk Rod, saa maa og dets fundne Cubus vise de Dele, som ethvert saadan fuldkomment Cubik-Tal nødvendig maa indeholde.

Saaledes findes Cubus af 47, som er = 40 + 7 at være

= 1,

$$
\begin{array}{ll}
= 1,\ 40^3 = & 64\ .\ .\ . \\
2,\ 3 \times 40^2 \times 7 = & 336\ .\ . \\
3,\ 3 \times 40 \times 7^2 = & 588\ . \\
4,\ 7^3 = & 343 \\
\hline
47^3 = 103823 &
\end{array}
$$

Tillæg. Da ethvert Tal, af hvor mange Zifre det end bestaaer, kan deles i to Dele, og følgelig bringes til det almindelige Udtryk $a + b$, saa kan og Cubik-Tallet af ethvert heelt Tal findes efter den anførte Form; til Ex. at cubere 468.

$$468 = 460 + 8 = a + b$$

$$468^3 = (460 + 8)^3 = (a + b)^3$$

$$
468^3 = \left\{
\begin{array}{ll}
460^3 = \left\{
\begin{array}{ll}
40^3 = & 64000\ .\ .\ .\ . \\
3 \times 40^2 \times 6 = & 28800\ .\ .\ .\ . \\
3 \times 40 \times 6^2 = & 4320\ .\ .\ . \\
6^3 = & 216\ .\ .\ .
\end{array}
\right. & \\
3 \times 460^2 \times 8 = & 5078400 \\
3 \times 460 \times 8^2 = & 88320 \\
8^3 = & 512 \\
\hline
 & 102503232
\end{array}
\right.
$$

§. 61.

Cubus af ethvert heelt Tal, som bestaaer af to eller flere Zifre, lader sig nu sammensætte af de blotte Zifre; naar man udsetter de Dele, hvoraf efter forrige § det fuldkomne Cubik-Tal skal bestaae, saaledes at det sidste Ziffer af hver Deel rykkes en Plads længere mod høire, f. Ex.

$$
\begin{array}{ll}
27^3 = 2^3 = & 8\ .\ .\ . \\
3 \times 2^2 \times 7 = & 84 \\
3 \times 2 \times 7^2 = & 294 \\
7^3 = & 343 \\
\hline
 & 19683
\end{array}
$$

Beviis: 27 = 20 + 7 dets Cubus bestaaer altsaa af I) $20^3 = 8000$, II) $3 \times 20^2 \times 7 = 8400$, III) $3 \times 20 \times 7^2 = 2940$ og IV) $7^3 = 343$ ved at sammenligne disse Dele med det vi ved den umiddelbare Sammensætning fik ud, vil det findes at være just de samme Dele, thi 8 paa fierde Plads fra høire mod venstre er = 8000. 84 paa tredie Plads = 8400. 294 paa anden = 2940, og endelig 343 paa Enernes Plads = 343 (§ 13).

Paa samme Maade findes Cubus af 123.

$$
\begin{array}{ll}
123^3 = 1^3 = & 1\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\
3 \times 1^2 \times 2 = & 6\ .\ .\ .\ .\ . \\
3 \times 1 \times 2^2 = & 12\ .\ .\ .\ . \\
2^3 = & 8\ .\ .\ . \\
3 \times 12^2 \times 3 = & 1296\ .\ . \\
3 \times 12 \times 3^2 = & 324\ . \\
3^3 = & 27 \\
\hline
 & 1860867
\end{array}
$$

thi opløses 123 efter forrige § i 120 + 3, og dets Cubus søges efter Formen, vil den, naar Nullerne bortkastes, bestaae just af de nu fundne Tal.

1. Till. Det første Ziffer i Roden undtagen, giver altsaa ethvert af de følgende, tre nye Zifre i Cubik-Tallet; hvoraf det første indeholder Enerne af det tredobbelte Produkt af de forrige Zifres Qvadrat og det nye, det andet Enerne af det tredobbelte Produkt af de forrige Zifre og dettes Qvadrat, det tredie Enerne af dettes Cubus.

2. Till. Inddeles altsaa et givet Cubiktal i Classer fra høire til venstre, saa at der kommer tre Zifre i hver Classe, den første undtagen (der kan have eet, to eller tre, eftersom Cubus af Rodens høieste Ziffer indeholder eet, to eller tre Zifre), saa vil Roden bestaae af saa mange Zifre, som der ere Classer; og man vil, naar man begynder fra venstre i den første Classe finde Cubus af Rodens første Ziffer; i den første og anden Classe, Cubus af Rodens to første Zifre o. s. f.

§. 62.

Cubikroden af ethvert givet heelt Tal findes nu let efter følgende Regler:

1) Man indeler Tallet i Classer fra høire mod venstre tre Zifre i hver Classe, Roden har da saa mange Zifre, som der ere Classer (§ 61).

2) Man søger i Cubik-Tabellen det høieste Cubiktal, der kan trækkes fra første Classes Zifre (fra venstre regnet), dets Rod bliver da det første Ziffer i den søgte Rod (§ 61. Till. 2).

3) Denne Cubus subtraheres fra første Classes Zifre, og til den overblevne Differents nedsættes anden Classe; det tredobbelte af det fundne Rod-Ziffers Qvadrat hensættes i en Parenthese, saa at dets Enere kommer under det første af anden Classes Zifre, og dermed divideres de overstaaende Tal; den da fundne Qvotient er Rodens andet Ziffer; Denne multipliceres med Divisor, og Produktet (som er just det tredobbelte Produkt af det første Rod-Ziffers Qvadrat multipliceret med det andet) hensættes, saa at dets Enere kommer under det første af anden Classes Zifre. Dernæst søges det tredobbelte Produkt af det første Rod-Ziffer og det andets Qvadrat, som sættes med dets Enere under anden Classes andet Ziffer; endelig hensættes Cubus af Rodens andet Ziffer, saa at dens Enere kommer under anden Classes tredie Ziffer. Disse tre Dele adderes nu tilsammen, er den da udkommende Sum større end de lige over staaende Tal (som er den af første Classe blevne Differents forenet med anden Classe), da er Rodens andet Ziffer taget for høit. Er den derimod net op saa stor eller mindre, da er det fundne Ziffer virkelig det andet Ziffer af den forlangte Rod.

4) Den fundne Sum subtraheres nu fra de lige over staaende Tal, og til den da blevne Differents nedsættes tredie Classes Zifre. Af de to allerede

lerede fundne Rod-Zifres Qvadrat tages nu det tredobbelte og hensættes, at Enerne komme under det første af tredie Classes Zifre; dermed divideres nu de ligeover staaende Tal, og den fundne Qvotient er Rodens tredie Ziffer; nu fortfares i samme Orden, som i No. 3 er forklaret, og saaledes vedbliver man med 4, 5 og 6 Classe ꝛc.

5) Bliver tilsidst intet tilovers, saa har man fundet den forlangte Rod fuldkommen nøiagtigt, og det givne Tal er et fuldkomment Cubiktal. Bliver der derimod en Rest, saa er det givne Tal et ufuldkomment Cubiktal, og dets Rod et irrational Tal.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saavel af de næst foregaaende Her, som og deraf, at, naar den, efter disse Regler af et givet Tal fundne Cubik-Rod, igien ophøies til tredie Værdighed eller cuberes, udkommer just det givne Tal.

Tal-Exempler:

$\sqrt[3]{15625}$. $\sqrt[3]{1860867}$. $\sqrt[3]{80677568161}$.

$\sqrt{15|625} \dagger 25$

$2^3 = 8$

7625

$3 \times 2^2 = (12)$

$3 \times 2^2 \times 5 = 60$

$3 \times 2 \times 5^2 = 150$

$5^3 = 125$

7625

: : : :

Ef,

Efter Reglen 1, deles Tallet ind i 2 Classer. Tallet 8 hensættes efter No. 2, og dets Rod er efter samme Rodens første Ziffer; efter No. 3 sættes Divisoren 12 og Produkterne 60, 150 og 125, hver paa sit Sted, og samlede til en Sum subtraheres de fra de overstaaende Tal efter No. 4. Da intet blev tilovers, er efter No. 5 den forlangte Rod nøiagtig 25, og Tallet var altsaa et fuldkomment Cubiktal.

$\sqrt[3]{1|860|867} \dagger 123$

$1^3 = 1$

860

$3 \times 1^2 = (3)$

$3 \times 1^2 \times 2 = 6$

$3 \times 1 \times 2^2 = 12$

$2^3 = 8$

728

132,867

$3 \times 12^2 = (432)$

$3 \times 12^2 \times 3 = 1296$

$3 \times 12 \times 3^2 = 324$

$3^3 = 27$

132,867

: : : : : :

Anm.

Anm. I Steden for efter 3die og 4de Reg. at samle de tre Produkter til een Sum, og derpaa subtrahere denne fra de lige over staaende Tal kan ethvert Produkt, sat paa sit Sted efter 3die Reg., strax subtraheres fra det lige over staaende Tal, hvilket almindelig bruges i den praktiske Regning. Det anførte Exempel $\sqrt[3]{15625}$ vilde da staae saaledes:

$\sqrt[3]{}$ 15|625 † 25
8|
———
7|6
(12)
60
———
162
150
———
125
125
———
000

$\sqrt[3]{}$

$\sqrt[3]{}$ 80|677|568|161 † 4321
64|
———
16,677
(48)
144
———
227
108
———
1197
27
———
1170,568
(5547)
11094
———
6116
516
———
56008
8
———
56000,161
(559872)
———
1296
1296
———
1
1
———

§. 63.

Cubik-Roden af en Decimalbrøk findes, ved at føie til Brøken paa høire Side, saa mange Nuller man vil (dog at man iagttager, at Decimalernes Antal bliver deelbar med 3), og derpaa udtrekke Ro-

Roden efter § 62. Den fundne Rod vil da have saa mange Decimaler, som der vare Classer af Decimaler i Tallet, hvoraf Roden skulde udtrækkes. F. Ex. skal Cubik-Roden søges af 78,4, skeer det saaledes: 78,4 = 78,400,000,000 (§ 49.)

$\sqrt[3]{78,4} = \sqrt[3]{78,400,000,000} \dagger 4,279$

64
14,400
(48)
96
480
48
4320
8
4312,000
(5292)
37044
60760
6174
545760
343
545517,000
(546987)
4922883
5322870
103761
52191090
729
52190361

Den søgte Cubic-Rod af 78,4 fandtes altsaa at være 4,279; men det overblevne viser, at Roden ikke nøiagtig er funden; man kan, ved at tilføie flere Nuller, blive ved at fortsætte Udtrækningen, og hvor længe dette bør skee, bedømmes efter den større eller mindre Grad af Nøiagtighed, som Regningen udkræver.

1. Till. Cubik-Roden af enhver Brøk findes altsaa lettest, ved at forandre den til en Decimalbrøk, og deraf uddrage Roden. F. Ex. $\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$. $\frac{3}{7} = 0,428571428 \ldots$ altsaa $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} =$

$\sqrt[3]{0|428|571|428} \dagger = 0,753 \ldots$

343
85,5
(147)
735
1207
525
6821
125
6696,428
(16875)
50625
163392
2025
1613678
27
1613651

2. Tillæg. Cubik-Roden af et ufuldkomment Cubik-Tal, findes ved Tilnærmelse i Decimalbrøk ved at føie til Tallets høire Side, saa mange Gange tre Nuller, som man vil have Decimaler i Roden, og deraf at udtrække Cubic-Roden efter § 62, f. Ex. $\sqrt[3]{2}$ findes saaledes:

$\sqrt[3]{2|000|000|000} \dagger 1,259$
1
1,000
(3)
6
40
12
280
8
272,000
(43 2)
2160
5600
900
47 000
125
46875,000
(46875)
421875
4688 50
30375
4384 750
729
4384 021

Thi

Thi da $2 = 2,000,000,000$ (§ 49), saa er $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2,000,000,000} = 1,259$. Ved at tilføie flere Classer af Nuller, vil man kunde finde Roden saa nøiagtig, som Omstændighederne udfordre, men fuldkomment nøiagtig lader den sig ikke bestemme (see § 54).

Om Forhold og Proportioner.

§. 64.

Forhold (ratio) kaldes en Sammenligning imellem 2 ligeartede Størrelser a og b; ved Sammenligningen kan haves Hensyn enten til Størrelsernes Forskiel ɔ: den tredie Størrelse d, som maa legges til eller tages fra a, for at frembringe b, og da kaldes Forholdet arithmetisk: eller og til det Tal m, som viser hvor mange Gange b indeholdes i a eller a i b, i dette Tilfælde hedder det et geometrisk Forhold. F. Ex., sammenlignes Tallene 20 og 5 med Hensyn til Tallet 15, som maa tages fra 20, for at frembringe 5, da betragtes disse Tals arithmetiske Forhold til hinanden; haves derimod Hensyn til, hvor mange Gange 5 indeholdes i 20, da undersøges deres geometriske Forhold.

1. Till. Til et Forhold hører altsaa nødvendigt to Størrelser, som kaldes Lede i Forhol-

det

det (termini rationis), hvoraf det, der sættes først kaldes det **foregaaende** (antecedens), og det der sættes sidst det **efterfølgende** (conseqvens). Begge disse Lede maa efter § 17 og 25 altid være ligeartede Størrelser. Den Størrelse d i et arithmetisk Forhold, som legges til eller tages fra det foregaaende Led, for at frembringe det efterfølgende, kaldes **Forholds Navn** eller **Forholds Størrelse** (nomen rationis); og Tallet m i et geometrisk Forhold, som viser, hvor mange Gange det eene Led indeholdes i det andet, kaldes **Forholds Exponent** (exponens rationis).

2. Till. Til at udtrykke det arithmetiske Forhold imellem to Størrelser, betiener man sig af Subtractions-Tegnet, som sættes imellem Størrelserne saaledes: $a - b$, $8 - 13$, og læses a forholder sig til b; 8 forholder sig til 13, og til at betegne det geometriske Forhold, bruger man Divisions-Tegnet (:), der sættes imellem de sammenlignede Størrelser, f. Ex. $a : b$; $24 : 8$, som læses a forholder sig til b; og 24 forholder sig til 8.

Anmærk. For i denne Lære om Forhold at undgaae Forvirring af Divisionen og det geometriske Forhold, vil jeg udtrykke Divisionen ved Brøk-Tegnet, at a divideres med b, skrives altsaa stedse $\frac{a}{b}$, og Tegnet (:) bruges allene til at tilkiendegive to Størrelsers geometriske Forhold.

3. Till.

3. Till. Uagtet modsatte Størrelser vel ikke ere ligeartede, saa kan de dog (§ 39) ansees som ligeartede, kun at de adderes, i Steden for at subtraheres, og subtraheres i Steden for at adderes, og altsaa kan de sammenlignes med hinanden, og Forhold har Sted imellem dem. Ligesom og den eene af to modsatte Størrelser kan frembringes af den anden, ved Addition, Subtraction, Multiplication og Division.

Anm. Efter at have fremsat disse Forklaringer, troer jeg det indsees let, hvor vigtig det er at kiende og undersøge Størrelsernes **geometriske Forhold**, da al deres Udmaaling, som er Mathematikens Hoved-Gienstand, beroer derpaa (§ 2). De Gamle gave ogsaa allene det geometriske Forhold, Navn af **Forhold**, og naar man endnu i Mathematiken taler om Forhold, uden noget Tillægs Ord, forstaaes altid det geometriske Forhold. Det arithmetiske Forhold synes derimod ikke at være af saa stor Betydenhed, og kunde, uden at betragtes som et særskildt Forhold, henføres under Subtractionen. Dog da det findes i alle nyere mathematiske Lærebøger særskildt afhandlet, vil jeg og her kortelig anføre de vigtigste didhenhørende Sætninger.

§. 65.

Et arithmetisk Forholds Størrelse bestemmes ved Forholds Navnet (§ 64. 1 Till.); og to arithmetiske Forhold, der have samme Forholds Navn, ere

ere lige store, f. Ex. Forholdet $a - (a \pm d)$ er ligestort med Forholdet $b - (b \pm d)$, da d er Forholds-Navnet i begge; ligeledes $13 \overset{4}{-} 17 = 8 \overset{4}{-} 12$, da 4 er Forholds Navn i begge. Har to Forhold derimod ulige Forholds Navn, da siges det Forhold, som har størst Forholds Navn, at være større eller høiere, end det der har mindre. F. Ex. Forholdet $5 - 12$ er større end Forholdet $13 - 17$, fordi Forholds Navnet 7 er > 4.

To lige store arithmetiske Forhold, forbundne med Lighedstegn, udgiøre en arithmetisk Proportion: saaledes siges de fire Størrelser a, b, c, d at være arithmetisk proportionale, eller at udgiøre en arithmetisk Proportion, naar $a - b = c - d$, og læses a forholder sig til b, som c til d. Ligeledes $7 - 11 = 15 - 19$, og $13 - 8 = 17 - 12$.

1. Till. Enhver arithmetisk Proportion bestaaer altsaa af 4 Lede; hvoraf det første og fierde, som i foregaaende Exempler a og d, 7 og 19 kaldes de yderste Lede, og andet og tredie, som b og c, 11 og 15 de mellemste. De foregaaende Led i begge Forholdene, hvoraf Proportionen bestaaer, nemlig det første og tredie, kaldes eensstaaende; ligeledes begge de efterfølgende, nemlig andet og fierde.

2. Till.

2. Till. Naar andet og tredie (eller begge de mellemste) Lede i en arithmetisk Proportion ere lige, kaldes Proportionen sammenhængende (continua), og Størrelsen, der er baade andet og tredie Led, kaldes en arithmetisk middel- eller mellemproportional Størrelse. F. Ex. $8 - 13 = 13 - 18$, hvor 13 er en middel proportional Størrelse mellem 8 og 18.

§. 66.

I enhver arithmetisk Proportion er Summen af de to yderste Lede liig Summen af de to mellemste. F. Ex. naar $a - b = c - g$, saa er $a + g = b + c$, og naar $7 - 11 = 15 - 19$, saa er $7 + 19 = 15 + 11$.

Beviis. Lad i Forholdet $a - b$ Forholds Navnet være d, saa er $b = a \mp d$ (§ 64) er nu Proportionen rigtig, maa (§ 65) i det andet Forhold $c - g$ Forholds Navnet ogsaa være d, og følgelig g være $= c \pm d$. De to yderste Led $a + g$ er altsaa $= a + c \pm d$, og de to mellemste $b + c = a \pm d + c$, men disse Summer $a + c \pm d$ og $a \pm d + c$ bestaae just af de samme Dele, og ere følgelig lige store, altsaa og $a + g = b + c$.

Ved Tal-Exempler lader det sig ligeledes vise, da de efterfølgende Lede ere sammensatte af de fore-

gaaende

gaaende og Forholds Navnet. F. Ex. $8 - 13 = 12 - 17$ er det samme som $8 - (8 + 5) = 12 - (12 + 5)$, altsaa $(8 + 12 + 5) = (8 + 5 + 12)$.

Till. Naar altsaa Summen af 2 Størrelser $a + b$ ere = Summen af to andre Størrelser $c + g$, da udgiøre de 4 Størrelser en arithmetisk Proportion.

§. 67.

I en sammenhængende arithmetisk Proportion er Summen af de to yderste Lede saa stor, som det Dobbelte af det eene mellemste; thi naar $a - b = b - c$, saa er i Følge forrige §, $a + c = b + b$, men $b + b = 2b$, og naar $12 - 17 = 17 - 22$, saa er $12 + 22 = 17 + 17 = 2 \times 17$.

Till. Er altsaa Summen af to Størrelser $a + c$, = det dobbelte af en tredie Størrelse b, da er denne en mellem proportional Størrelse imellem hine, og de udgiøre en sammenhængende arithmetisk Proportion.

§ 68.

Til tre givne Størrelser a, b, c findes en fierde arithmetisk proportional Størrelse x, eller naar de tre første Lede i en arithmetisk Proportion a, b, c ere givne, findes det fierde x; ved at addere de to mellemste, og derfra substrahere det første. Thi naar x er $= (b + c - a)$ saa er Summen af de yderste $x + a$ = Summen af de mellemste $b + c$ (§ 41.) og altsaa Proportionen rigtig (§ 66. Till.) F. Ex. $7 - 13 = 25 - x$. x findes da at være $= 13 + 25 - 7 = 31$. —

Till. Mellem 2 givne Tal, findes et arithmetisk middel Tal eller mellem proportional Tal x ved at tage det Halve af de give Tals Summe; f. Ex. Mellem Tallet x mellem a og b er $= \frac{a+b}{2}$ thi naar x er $= \frac{a+b}{2}$ saa er $a + b = 2x$ og Proportionen altsaa en rigtig sammenhængende Proportion (§ 67. Till.).

§. 69.

Størrelsen af et geometrisk Forhold (§ 64. 1 Till.) bestemmes ved Exponenten, der altid er et Tal, hvormed det foregaaende Led er divideret for at frembringe det efterfølgende: eller hvormed det efterfølgende Led er multipliceret for at frembringe det foregaaende; f. Ex. i Forholdet $20 : 5$ er Exponenten 4 thi $\frac{20}{4} = 5$ og $5 \times 4 = 20$. I Forholdet $ma : a$ er Exponenten m thi

thi $m \times a = ma$ men i Forholdet $a : ma$ er Exponenten $\frac{1}{m}$ thi $ma \times \frac{1}{m} = a$. Da begge Ledene i et Forhold ere ligeartede Størrelser kan Exponenten altid findes, naar Ledene ere givne, ved at dividere det foregaaende med det efterfølgende ɔ: ved at see hvor mange Gange det efterfølgende indeholdes i det foregaaende § 25.

1. Till. Indeholdes det efterfølgende Led saaledes i det foregaaende at intet bliver tilovers, eller er det en aliqvot Deel deraf (§ 28.) da bliver Exponenten et heelt Tal; f. Ex. i Forholdet $ma : a$ er Exponenten m det er a indeholdes m gange i ma. Men indeholdes ikke det hele efterfølgende Led, men vel en aliqvot Deel deraf netop nogle Gange i det foregaaende da bliver Exponenten en Brøk. F. Ex. i Forholdet $a : c$ naar c antages op løst i n lige Deele og a findes at være $= m \times \frac{1}{n} c$ da vil Exponenten i Forholdet $a : c$ være $\frac{m}{n}$ thi Exponenten er $= \frac{a}{c} = \frac{m \times \frac{1}{n} c}{c} = \frac{m \times \frac{1}{n} c}{n \times \frac{1}{n} c} = \frac{m}{n}$. I begge disse Tilfælde siges Forholdet at være rationalt og Exponenten er et bestemt Tal.

2. Till. Kan derimod hverken det efterfølgende Led eller nogen aliqvot Deel deraf nøiagtig udmaale det foregaaende, da siges Forholdet at

være

være irrationalt. Men disse Forhold faa vi i Geometrien Leilighed til nøiere at kiende.

§. 70.

To geometriske Forhold, der have samme Exponenter, siges at være lige store f. Ex. Forholdet $ma : a$ er lige stort med Forholdet $mb : b$ da m er Exponenten i begge; $20 : 5 = 12 : 3$ thi $4 = 4$. To saadane lige store geometriske Forhold forbundne med Ligheds Tegn udgiøre en geometrisk Proportion: og de fire Størrelser som udgiøre Ledene i disse to Forhold siges at være geometrisk proportionale. F. Ex. $ma : a = mb : b$. $20 : 5 = 12 : 3$. $8 : 24 = 6 : 18$.

Anmærk. Ledene i en geometrisk Proportion benævnes som i en arithmetisk; de to yderste ere ma og b, 20 og 3. De to mellemste a og mb. 5 og 12. to foregaaende som ma og mb. efterfølgende som a og b. hvilke kaldes eenstaaende Lede (§ 65. 1. Till.).

Till. Ere i en geometrisk Proportion samme Størrelse baade andet og tredie Led, kaldes den en sammenhængende geometrisk Proportion; og denne Størrelse en geometrisk mellem Proportional Størrelse. F. Ex. $a : b = b : c$, $63 : 21 = 21 : 7$.

§. 71.

§. 71.

I enhver geometrisk Proportion $a : b = c : d$ er Produktet af de yderste Lede ad lige med Produktet af de mellemste bc.

Bev. Naar i Forholdet $a : b$ Exponenten antages at være m da er (§ 69.) $a = mb$ er nu Proportionen rigtig maa efter §. 70. i Forholdet $c : d$ Exponenten ogsaa være m og altsaa $c = md$. Productet af de yderste Lede ad vil da være $mb \times d = mbd$ og Produktet af de mellemste bc vel være $= b \times md = bmd$. men nu er $mbd = bmd$ og følgelig $ad = bc$. Ligeledes er i Proportionen $12 : 4 = 15 : 5$ Produktet af de yderste Lede $5 \times 12 =$ Produktet af de mellemste 4×15. Thi efter §. 69. kan de efterfølgende Lede udtrykkes ved de foregaaende og Exponenten, hvorved det viser sig, at de mellemste og yderste Lede i en rigtig geometrisk Proportion altid bestaae af de samme Faktorer. Den anførte Proportion kunde f. Ex. udtrykkes saaledes:

$$12 : \tfrac{12}{3} = 15 : \tfrac{15}{3}$$

og altsaa $\dfrac{12 \times 15}{3} = \dfrac{15 \times 12}{3}$.

Till. I en sammenhængende geometrisk Proportion er Produktet af de yderste Lede saa stort som Qvadratet af det eene mellemste thi i Følge det nylig anførte Beviis er i Proportionen $a : b = b : c$; $ac = bb$ men bb er $= b^2$ (§. 52.). og i Proportionen $63 : 21 = 21 : 7$ er $63 \times 7 = 21 \times 21$ men 21×21 er $= 21^2$ og følgelig $63 \times 7 = 21^2$.

Till. 2. Er Produktet af to Størrelser ab lige stort med Produktet af to andre cd saa udgiøre disse fire Størrelser en geometrisk Proportion, hvori Faktorerne til det ene Produkt ere de yderste, og de andre de mellemste Lede: thi naar $ab = cd$ saa et $a = \frac{cd}{b}$ (§. 38. 5.) altsaa $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ og følgelig $a : c = d : b$.

Till. 3. Er Produktet af to Størrelser ab liig Qvadratet af en tredie m, da er denne en mellem proportional Størrelse imellem de to, eller andet og tredie Leed i en sammenhængende geometrisk Proportion. Thi naar $m^2 = ab$ saa er $a = \frac{m^2}{b}$ og $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$ (§. 38. 5.) og følgelig $a : m = m : b$. (§. 70.)

§. 72.

Til tre med Tal eller almindelige Tegn udtrykte Størrelser a, b, c i en geometrisk Proportion findes den fierde proportionale x, ved at multiplicere de to mellemste b, c og dividere det fundne Produkt bc med

med den første a. Saaledes findes $x = \frac{bc}{a}$ f. Ex. $12 : 8 = 16 : x$ da er $x = \frac{8 \times 16}{12} = 10\frac{2}{3}$.

Bev. Naar x er $= \frac{bc}{a}$, saa er $ax = bc$ og altsaa $a : b = c : x$. (§. 70. Till. 2.)

Till. Imellem to med Tall eller almindelige Tegn udtrykte Størrelser a, b findes en geometrisk mellem proportional Størrelse x, ved at multiplicere de givne og af Produktet udtrække Qvadratroden. Saaledes bliver $x = \sqrt{ab}$ f. Ex. naar $18 : x = x : 8$ saa er $x = \sqrt{(18 \times 8)} = 12$. Thi er $x = \sqrt{ab}$ saa er $x^2 = ab$ og følgelig $a : x = x : b$. (§. 70. Till. 3.)

§. 73.

Da en geometrisk Proportion bestaaer af to ligestore Forholde, og Forholdenes Ligestorhed beroer paa deres ligestore Exponenter, saa indsees let at enhver given geometrisk Proportion kan taale alle Forandringer hvorved enten Exponenterne i begge Forholde blive aldeles uforandrede eller og ligemeget forandrede.

Man kan altsaa naar en Proportion er given f. Ex. $ma : a = mb : b$ frembringe en anden.

Ved

1) Ved at omsætte de foregaaende og efterfølgende Lede (invertendo); $a : ma = b : mb$ thi i den givne Proportion er Exponenten $m = m$ og altsaa $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$ og følgelig $a : ma = b : mb$ (§. 70.).

2) Ved at tage Summen eller Differencen af begge de foregaaende til Summen eller Differencen af begge de efterfølgende Lede (summando et differentiando) saaledes faaes af Proportionen $ma : a = mb : b$. α) summando $ma + mb : a + b = mb : b$; β) differentiando $ma - mb : a - b = mb : b$ i begge Tilfælde blive Exponenterne uforandrede thi $\frac{ma + mb}{a + b}$ er $= m$ og ligeledes er $\frac{ma - mb}{a - b} = m$. (§. 46.)

3) Ved at tage Summen eller Differencen af det foregaaende og efterfølgende Led til det efterfølgende i begge Forhold, (componendo et dividendo). F. Ex. Af den givne Proportion $ma : a = mb : b$ faaes saaledes α) componendo $(ma + a) : a = (mb + b) : b$, β) dividendo: $(ma - a) : a = (mb - b) : b$. Exponenterne forandres her i begge Forhold ligemeget nemlig i det første Tilfælde ved at forøges med en Eenhed thi $\frac{ma + a}{a}$ er $= \frac{mb + b}{b} = m$

$= m + 1.$ og i det andet ved at formindskes paa samme Maade da $\frac{ma - a}{a}$ er $= \frac{mb - b}{b}$ $= m - 1.$

4) Ved at ombytte andet og tredie Led (vicissim v. permutando) er f. Ex. $ma : a = mb : b$ saa er ogsaa $ma : mb = a : b$ thi $\frac{ma}{mb}$ er $= \frac{a}{b}$ og altsaa Proportionen rigtig.

Anm. Enhver Proportion kan desuden forandres ved at multiplicere eller dividere med et og samme Tal enten alle Ledene; eller de to foregaaende, eller de to efterfølgende; eller de to i det første Forhold, eller de to i det sidste. Ogsaa ved at multiplicere eller dividere begge Ledene i det første Forhold med et, og Ledene i det andet med et andet Tal.

§. 74.

Naar Ledene i to Proportioner multipliceres efter Ordenen med hinanden give Produkterne en rigtig Proportion. F. Ex.

naar: $ma : a = mb : b$
og $nc : c = nd : d$
saa er $manc : ac = mnbd : bd$

Beviis: I den første Proportion er Exponenten m i den anden n følgelig $m = m$ og $n = n$ altsaa $mn = mn$. Nu er i den frembragte Pro-

Proportion $\frac{manc}{ac} = \frac{mnbd}{bd} = mn$ (§. 46) og altsaa er den rigtig. (§. 70)

Till. 1. Ere to Proportioner af den Art at de efterfølgende Led i den første ere de foregaaende i den anden; saa forholder det første foregaaende i den første Proportion sig til det første efterfølgende i den anden som det andet foregaaende i den første til det andet efterfølgende i den anden.

F. Ex. er $ma : a = mb : b$
og $a : c = b : d$
saa er (ordinatim et ex æqvo) $ma : c = mb : d$

thi $maa : ac = mbb : bd$ (§. 74.) og naar Ledene i det første Forhold divideres med a og i det andet med b (§. 73 Anm.) saa fremkommer $ma : c = mb : d$.

Till. 2. Ere to Proportioner af den Art at det andet Led i den første er det første i den anden og det tredie i den første det fierde i den anden: saa forholder det første Led i den første Proportion sig til det andet i den anden, som det tredie i den anden til det fierde i den første.

F. Ex. er $ma : a = mb : b$
og $a : c = d : mb$
saa er (perturbate et ex æqvo) $ma : c = d : b$

thi

thi efter §. 74. er $maa : ac = mbd : bmb$ og naar (§. 73. Anm.) Ledene i det først Forhold divideres med a og i det andet med mb saa er $ma : c = d : b$.

§. 75.

Staar en Størrelse A i en saadan Forbindelse med en anden Størrelse B at naar en vis Deel af den eene a giver en Deel af den anden b, saa skal ogsaa a gientaget et vist Antal gange m give b gientaget ligesaa mange Gange: saa siges A og B at være i et direct Forhold. ɔ: $a : ma = b : mb$, og $a : b = ma : mb$; Et saadant Forhold har Sted imellem Vare og deres Værdie. Er derimod en Størrelse C i saadan Forbindelse med en Størrelse D at naar en vis Deel af den eene c giver en Deel af den anden d; saa skal c gientaget et vist Antal Gange m, give d formindsket ligesaa mange Gange ɔ: mc skal give $\frac{1}{m} d = \frac{d}{m}$: saa siges C og D at være i et omvendt Forhold (ratio inversa) ɔ: $c : mc = d : \frac{1}{m}d = c : d = mc : \frac{1}{m}d$ Et saadant Forhold finder Sted mellem Antallet af Arbeidere som behøves til et vist Værk, og Tiden de dertil behøve.

An-

Anvendelse af de geometriske Proportioner paa den praktiske Regning.

§. 76.

Den hele saakaldte Regula de tri (de tribus numeris, Reglen om tre) er allene Anvendelsen af det (§. 72.) forklarede Problem til 3 givne Størrelser at finde den fierde geometrisk proportionale. Opløsningen ved ethvert Regula de tri Stykke hvor altid tre Tal ere givne, er altsaa at multiplicere andet og tredie Led med hinanden og dividere Productet med det første Leed. Den udførligere Forklaring om Anvendelsen heraf paa Regningsspørgsmaale som forekomme i det daglige Liv hører ikke til den rene Mathematik; men til den anvendte eller praktiske Regnekonst; jeg vil derfor indskrænke mig blot til at vise dens Brug i nogle Hoved-Tilfælde.

Anm. Hovedsagen ved denne Regels Anvendelse er at kunde bedømme om de givne Størrelser ere af den Art at ethvert Par Dele af den ene ere proportionale til et Par Dele af den anden, og hvorledes Ledene i denne Proportion maa ordnes; dette lader sig nu let giøre efter den (§. 75.) givne Forklaring; og eftersom Størrelserne da ere i et direct eller omvendt Forhold; finder den ordentlige (directa) eller omvendte (inversa) Regula de tri Sted.

§. 77.

§. 77.

De vigtigste Tilfælde som kan henregnes til begge ere

a) til den saakaldte ordentlig Regula de tri

1) Beregning af Vare og deres Værdie, thi da m Gange en vis Deel Vare giver m Gange mere Værdi, saa forholde Varene sig som deres Værdi. F. Ex. naar 3 Alen koste 8 Rdl. hvad koste 9 Alen, og naar 2 Alen koste 7 Rdl. hvormange Alen faaes da for 100 Rdl. opsættes saaledes:

3 Alen : 9 Alen = 8 Rdl. : x Rdl.

7 Rdl. : 100 Rdl. = 2 Alen : x Alen.

2) Rentes-Regning: Da m Gange større Capital giver i samme Tid m Gange mere Rente, og samme Capital i n Gange længere Tid n Gange større Rente: saa forholder Renterne sig som Capitalerne, naar Tiden er den samme; og som Tiderne naar Capitalen er den samme.

Ex. Hvormeget er Renten af 10000 Rdl. i et Aar naar 100 Rdl. give 4 Rdl. og hvormegen Rente giver en vis Capital i 12 Aar naar den i et Aar give 120 Rdl.

100 Rdl. : 4 Rdl. = 10000 Rdl. : x Rdl.
= 400 Rdl.

1 Aar : 12 Aar = 120 Rdl. : x Rdl.
= 1440 Rdl.

3.

3. Reductions-Regning: Da en benævnt Størrelse forvandles til en anden. F. Ex. een Tønde er 8 Skiepper altsaa er m Tønder = m Gange 8 Skiepper følgelig forholder en Tønde sig til m Tønde som 8 Skiepper til m Gang 8 Skiepper. Ligeledes giøre 13913 Pariser Fod 14400 Danske Fod og m Gange flere af de første m Gange flere af de sidste. Altsaa forholde 13913 Pariser Fod sig til ethvert andet Antal deraf: som 14400 Danske Fod til et Antal deraf som svarer til hiint. F. Ex. hvor mange Skiepper giøre 384 Tønder.

1 Tønd. : 384 Tønd. = 8 Skiepp. : x Skiepp.
= 3072 Skiepp.

Hvormange Danske Fod giøre 210 Par. Fod.

13913 P. F. : 210 P. F. = 14400 D. F.
: x D. F. = $217\frac{4879}{13913}$ D. Fod.

b) Til den omvendte (inversa) Regula de tri høre

1) Beregning af de Arbeidere og den Tid der behøves til et Arbeids-Fuldførelse: Thi da m Gange flere Arbeidere bruge m Gange mindre Tid, saa forholder Arbeidernes Antal sig omvendt som Tiderne. Man maa altsaa omvende Forholdet af de givne Størrelser. F. Ex. Naar 7 Arbeidere giøre et vist Arbeide i 12 Dage, hvor lang Tiid vilde da 15 Arbeidere bruge: hvis man opsatte

7

7 Arbeidere : 15 Arbeidere = 12 Dage : x Dage, da vilde der komme et urigtigt fierde Leed, thi Dagenes Antal voxer ikke som Arbeidernes, men tager af (§. 75.) man maa altsaa sette omvendt. 15 Arbeid. : 7 Arbeid. = 12 Dage : x Dage og x bliver $= \frac{12 \times 7}{15}$ $5\frac{9}{15} = 5\frac{3}{5}$ Dag.

2) Beregning af Tiden i hvilken en given Capital kan give samme Rente som en anden giver i en vis Tid; som og hvor stor Capitalen maa være for i en bestemt Tid at give samme Rente som en anden Capital i en anden Tid. Thi da en m Gange større Capital giver samme Rente i en m Gange kortere Tid; saa forholde her Capitalerne sig omvendt som Tiderne og her maa altsaa bruges det omvendte Forhold.

Exemp. Hvorlænge maa 660 Rdl. staa for at kunde til samme Procent give ligesaa megen Rente som 1000 Rdl. i 4 Maaneder, opsættes ikke 1000 Rdl. : 600 Rdl. = 4 Maaneder : x Maaneder men 600 Rdlr. : 1000 Rdlr. = 4 Maan. : x Maan. og $x = 6\frac{2}{3}$ Maan.

Hvor stor maa den Capital være som til samme Procent i 7 Maaneder skal give ligesaamegen Rente som 1000 Rdl. i 9 Maan.

7 Maan. : 9 Maan = 1000 Rdl. : x Rdl. og x findes $= 1285\frac{5}{7}$ Rdl.

3. Beregning af Længden af Tøyer af forskiellig Brede som skal anvendes til samme Brug. Thi da af et m Gange bredere Stykke fordres m Gange mindre Længde; saa forholder Længden sig omvendt som Breden. Ex. Naar af et Stykke Klæde 10 Qvarter bredt bruges 3 Alen til en Kiol, hvor mange Alen bruges der da naar Klædet er 6 Qvarter bredt. Opsættes: 6 Qvart. : 10 Qvart. = 3 Alen : x Alen og x findes $= \frac{3 \times 10}{6} = 5$ Alen.

Anm. Den saakaldte Regula de qvinqve (Reglen om fem) og Kiedereglen ere intet andet end Anvendelse af hvad der (§. 74.) er lært om geometriske Proportioner; og det maa her være nok allene at giore den Anmærkning, at det første Leed i Proportionen begynder med en Størrelse af samme Art som den der skal forvandles, det andet ender med en Størrelse af samme Slags som den søgte, og Størrelsen som skal forvandles udgiør det tredie Led. F. Ex. Naar 4 Ducater giøre 11 Rdl. og 6 Rdl. giør 5 Rubler hvor mange Rubler udgiøre da 100 Ducater.

Opsættes saaledes:

$$\begin{array}{l}
4 \text{ Duc.} : 11 \text{ Rdl.} = 100 \text{ Duc.} : x \text{ Rdl.} \\
6 \text{ Rdlr.} : 5 \text{ Rubl} = x \text{ Rdlr.} : y \text{ Rubl.} \\
\hline
4 \times 6 : 11 \times 5 = 100 : y \text{ Rubl.} \\
24 : 55 = 100 : 225 \text{ Rubl.}
\end{array}$$

Videre Udførelse af disse Regler finder her ikke Stæd; men maa søges i de egentlig praktiske Regnebøger.

Geometrie.

Indledning.

§. 1.

Forklar. Geometrien (Maale-Videnskaben) betragter de sammenhængende udstrakte Størrelser (Rummet Prolegom. §. 4.). Det hele uendelige Rum og enhver Deel deraf, for saavidt den er udstrakt til alle Sider kaldes et legemligt Rum (spatium solidum). Et saadant til alle Sider udstrakt, og begrændset Rum kaldes et geometrisk Legeme (corpus geometricum) da Geometrien bestandig har allene Hensyn til Udstrækningen af Legemet eller Rummet som det opfylder uden at betragte dets øvrige Egenskaber. Saaledes f. Ex. bestemmes Udstrækningen eller den geometriske legemlige Størrelse af en Kugle ved den hule Form hvor i den er støbt, uden at der haves Hensyn til Materien hvoraf den er.

Grændserne af et geometrisk Legeme eller de yderste Dele, hvor Legemet ophører kaldes Flader; Grændserne af en Flade Linier; og Grændserne af en Linie Punkter.

Till. 1. Legemet (Fig. 1.) har altsaa tre Dimensioner (Udmaalninger) Længde, Brede og Dybde (Høyde v. Tykkelse). Fladen allene to, Længde og Brede; Linien een nemlig Længde og Punktet ingen.

Anm. Benævnelserne af et Legems Længde, Brede o. s. v. ere vilkørlige; almindeligt kalder man den største Udstrækning Længde og den mindre i samme Flade Brede; og ved Benævnelserne af Høyde, Dybde og Tykkelse kommer saavel Legemets Beliggenhed som Standpunktet hvorfra det sees i Betragtning.

Till. 2. Da Grændsen af en Ting ikke er en Deel af Tingen, men tvertimod dens Ophør, saa er Fladen ikke en Deel af Legemet; Linien ikke en Deel af Fladen og Punktet ikke af Linien. Utallige Punkter udgiøre derfor ingen Linie; utallige Linier ingen Flade og utallige Flader intet Legeme. Enhver nok saa liden Deel af et Legeme er altsaa selv et Legeme; af en Flade selv en Flade og af en Linie selv en Linie.

Anm. Heraf sees ogsaa at det aldeles ikke er muligt at tegne geometriske Punkter, Linier og Flader. Da alle tegnede Punkter, Linier og Flader ere virkelige physiske Legemer; hvis Udstrækning i Rummet er et geometrisk Legeme. Vi maa altsaa ved de tegnede **Punkter** assondre (abstrahere) Begrebet fra all Udstrækning i Almindelighed; ved **Linier** fra all Brede og Tykkelse ved **Flader** fra all Tykkelse.

§. 2.

Forkl. At Dele en sammenhængende Størrelse i to Dele er at bestemme den fælles Grændse for begge Dele; et legemligt Rum deles altsaa ved Flader; en Flade ved Linier og en Linie ved Punkter.

Till. Da Rummet overalt hvor man vil, kan begrændses, saa kan man i enhver Flade forestille sig utallige Arter af begrændsede Flader, og i ethvert legemligt Rum utallige Arter af Legemer. Den geometriske Deling af Rummet gaaer altsaa i det uendelige.

§. 3.

Forkl. Tænker man sig et Punkt (som er uden all Udstrækning §. 1.) sat i Bevægelse, saa følger, at det ved sin Bevægelse giennemløber en Vey eller en Længde uden all Brede og Tykkelse det er en Linie. Bliver nu Retningen af Punktet under dets Bevægelse uforandret saa beskriver det en ret Linie (recta) *AB* (Fig. 2.) og kommer fra et Stæd til et andet paa den korteste Vey. Forandres derimod bestandig Punktets Retning under Bevægelsen saa beskriver det en **krum Linie** (curva) (Fig. 2.)

Anm. Begrebene om rette og krumme Linier ere saa enkelte at de ikke lade sig definere eller giøre forstaaelige ved Forklaring; da vi nødes at forklare Linie ved Retning og Retning igien ved Linie. Imidlertid indeholder den anførte Forklaring den første og simpelste Forestilling vi kan giøre os om rette og krumme Linier.

Till. En ret Linie *AB* (Fig. 2.) er altsaa den korteste Afstand imellem dens Ende Punkter *A* og *B*; og ved to Punkter bestemmes Beliggenhed af enhver ret Linie, og naar de ere Endepunkter tillige Liniens Længde thi da den rette Linie fremkommer ved Punktets uforandrede (i samme Retning fortsatte) Bevægelse og den kun kan være een, saa følger at alle de rette Linier, man i Tankerne vilde forestille sig trukne fra *A* til *B* maatte falde sammen med *AB*. Da derimod den krumme Linie fremkommer ved Punktets forandrede Retning, saa følger at der imellem to Punkter gives utallige krumme Linier.

§. 4.

Forkl. En Flade, hvori der fra ethvert givet Punkt til et andet kan trækkes en ret Linie, hvis Dele alle ligge i samme Flade, kaldes en ret

Flade eller Plan (planum); den hvori dette ikke lader sig giøre er en krum Flade.

Till. For saavidt Geometrien befatter sig allene med Udstrækninger der alle ligge i samme Plan kaldes den plan Geometrie eller Planimetrie; naar den derimod handler om Legemer og betragter to og flere Flader tillige samt deres Bøjning mod hinanden ja endog krumme Flader, faaer den Navn af solid (legemlig) Geometrie eller Stereometrie.

§. 5.

Grundsæt. (axioma) Udstrækninger der dække hinanden (congruunt) ɔ: der kan lægges saaledes paa hinanden, at deres Grændser falde sammen: eller der i Henseende til Qvantitæt og Qvalitet ere saa fuldkommen eens, at de kan sættes i hinandens Stæd; ere ligestore og ligedanne.

Anm. Udstrækninger kan være ligestore uden at dække hinanden; man maa derfor giøre Forskiæl imellem Fladers Ligestorhed af deres Congruents; og Ligestorhed uden Congruents.

Fordringss. (postulata) 1) Igiennem to givne Punkter at trække en ret Linie og forlænge den igiennem dens Endepunkter uden Ende til begge Sider. 2) Ved Hielp af Passeren i en Plan at beskrive en Cirkel.

Plan

Plan Geometrie.

Om de forskiellige Arter af Figurer og i Særdeleshed om Cirklen.

§. 6.

Forkl. Bøjningen (Heldingen) som to rette Linier i samme Plan, CA og CB (Fig. 3.) have mod hinanden, naar de uden at være hinanden direkt modsatte (d. e. uden at udgiøre en ret Linie) støde sammen i et Punkt C, kaldes en retlinet Plan-Vinkel, undertiden allene en Vinkel (angulus). Punktet C hvor Linierne støde sammen, Vinklens Spidse eller Toppunkt (vertex anguli) og Linierne selv dens Sider eller Been (crura).

Anm. En Vinkel benævnes enten allene ved Bogstavet ved dens Toppunkt f. Ex. (Fig. 3.) Vinklerne C og D eller og ved tre Bogstaver, da Toppunktets Bogstav altid maa staae i Midten f. Ex. (Fig. 3) Vinklen ACB eller BCA. Undertiden ved smaa Bogstaver som sættes inde i Bøjningen f. Ex. (Fig. 40.) Vinklerne m, n.

Till. Vinklens Størrelse beroer ikke paa Liniernens Længde men allene paa deres Bøjning eller Skraahed mod hinanden; Vinklerne (Fig. 3.) C og D ere altsaa ligestore naar ved at lægges paa hinanden deres Toppunkte og Sider falde sammen skiønt

skiønt Linierne DE og DF ere længere end CA og CB.

§. 7.

Forkl. To Vinkler ACD og DCB (Fig. 4.) som have en fælles Side og et fælles Toppunkt og hvis yderste Sider ere hinanden direkt modsatte d. e. udgiøre en ret Linie kaldes Naboe-Vinkler (anguli contigui s. deinceps positi). Ere de begge ligestore som ACD og DCB (Fig. 5.) kaldes de rette Vinkler (anguli recti). En ret Vinkel er altsaa den, der er ligestor med sin Naboevinkel. Enhver anden Vinkel er skiæv og i Særdeleshed stump, naar den er større, og spids, naar den er mindre end en ret. (Fig. 4.)

Anm. En ret Vinkel betegnes i det følgende bestandig med Bogstavet R.

Till. En Linie CD (Fig. 5.) siges at være lodret (perpendicularis, normalis) paa en anden AB, naar den dermed giør rette Vinkler.

§. 8.

Forkl. En plan Figur, er en paa alle Sider begrændset Plan; da Grændserne af en Plan ere Linier §. 1. og disse kan være rette eller krumme, saa ere plane Figurer retlinede, krumlinede og blandetlinede, eftersom deres Grændser

ere

ere rette, krumme eller baade rette og krumme Linier.

Till. 1. To rette Linier kan umuligt (§. 3. Till.) have flere end et Punkt tilfælles nemlig det hvori de forlængede skiære hinanden; og de kunde altsaa umuligt udgiøre Grændserne for en Plan.

Till. 2. De retlinede Figurer inddeles derfor efter Liniernes Antal, der indslutte Planen og kaldes Figurens Sider, i Triangler, Fiirkanter og Mangekanter (Fig. 9. 10. 11.) eftersom de have tre, fire eller flere Sider.

Forkl. En Triangel er ligesidet (æqvilaterum) naar alle tre Sider ere ligestore som ABC (Fig. 13.); ligebenet (æqvicrurum, isosceles) naar de to Sider ere ligestore som DFE (Fig. 14.). Uligesidet, naar ingen af Siderne ere ligestore som IGH (Fig. 15).

En firsidet Figur, kaldes: naar den har fire ligestore Sider og rette Vinkler en Qvadrat; fire ligestore Sider men skiæve Vinkler en Rhombus; to og to modstaaende Sider ligestore og rette Vinkler en Rectangel; og naar allene de modstaaende Sider ere ligestore men Vinklerne skiæve en Rhomboides (Fig. 45. 46. 47. 51.) alle øvrige firsidede Figurer faa Navn af Trapesier (Fig. 10.).

De

De mangesidede Figurer (polygoner) faa efter Sidernes Antal Navn af Femkanter, Sexkanter o. s. v.

De retlinede Figurer ere enten regulaire (ordentlige v. regelmæssige) naar alle deres Sider og Vinkler ere ligestore; eller irregulaire (uregelmæssige) naar de er ulige store.

§. 9.

Forkl. En Cirkel (circulus) (Fig. 12.) er en Plan, som begrændses af en eeneste i sig selv tilbageløbende krum Linie, hvori ethvert Punkt ligger ligelangt borte fra et vist Punkt i den begrændsede Plan som kaldes Cirklens Middelpunkt (centrum). Den krumme Linie kaldes Cirklens Peripherie eller Cirkellinien. De rette Linier *CD* og *CB* som kan trækkes fra Centrum til Peripherien og som alle ere lige lange, Radier. En ret Linie *MN* fra et Punkt i Peripherien til et andet kaldes en Korde (Streng) og naar den gaaer igiennem Centrum en Diameter (Giennemmaaler). En Diameter er altsaa saa stor som to Radier, og alle Diametre i samme Cirkel ligestore. En Linie *HI*, der berører Cirklen i et eneste Punkt og ellers ligger aldeles uden for Cirklen kaldes en Tangent (Berøringslinie). Forlænges Chorden udenfor Cirklen har man en Sekant (Skiæringslinie) *KL*. Fladen, som indsluttes af to Radier og et Stykke af Peripherien kaldes et Udsnit (sector) *ACD*; indsluttes den derimod af en Chorde og en Bue et Affnit (segment) *MN*.

Till. En Cirkel beskrives, naar en ret Linie *CB* dreier sig i en Plan omkring dens ubevægelige Endepunkt *C*. Linien selv vil da beskrive Cirkelfladen, det ubevægelige Punkt bliver Centrum, og det andet Endepunkt beskriver Peripherien.

Anm. 1. Cirkles beskrives paa Grund heraf ved et Instrument som kaldes Passer eller Cirkel-Passer (§. 5.).

Anm. 2. Peripherien af enhver Cirkel indeles i Almindelighed i 360 ligestore Dele som kaldes Grader. En Grad er altsaa en ubestemt Størrelse og betegner $\frac{1}{360}$ Deel af enhver Cirkels Peripherie. Graden inddeles igien til at udmaale mindre Dele af Peripherien i 60 Minuter og en Minut igien i 60 Sekunder. For Kortheds Skyld betegnes Grader ved °, Minuter ved ′ og Sekunder ved ″. F. Ex. $24° \, 35' \, 47''$ læses 24 Grader 35 Minuter og 47 Sekunder.

§. 10.

Læres. Ere i en og samme Cirkel eller i to ligestore Cirkler Vinklerne ved Centrum (ɔ: de Vinkler hvis Toppunkt ligge i Cirklens Cen-

Centrum og hvis Sider ere Radier) ligestore, da ere Buerne hvorpaa de staae, ogsaa ligestore.

Beviis: Lad (Fig. 16 og 17.) Vinklerne CDE og GCB være ligestore, og lad Vinkelspidserne C være lagte paa hinanden, da vil (§. 6.) Linien CD falde paa CG og CE paa CB og da Linierne ere ligestore (§. 9.) Punkterne D og E paa G og B og følgelig Buen DE paa Buen GB.

Till. 1. Trækkes i en Cirkel en Diameter AB (Fig. 17.) og en anden Diameter DE lodret paa den første, da blive Vinklerne ved Centrum rette og følgelig lige store (§. 7. Till.) Peripherien af Cirklen deles da efter den anførte Læresætning i fire ligestore Buer eller Qvadranter hver til 90° (§. 9. Anm. 2.).

Till. 2. At maale en Vinkel er egentlig at bestemme Liniernes Bøyning mod hinanden, dette skeer ved at sammenligne den med den rette Vinkel, da ved at tilkiendegive hvor stor en Part den er af en ret Vinkel, Liniernes Afvigelse tillige bestemmes. Saaledes f. Ex. er Vinkelen FCB (Fig. 17) $= \frac{1}{3} R$ ɔ: Liniernes Afvigning er saaledes, at Afvigningen af de Linier der giøre en ret Vinkel er tre Gange saa stor. For beqvemmere at kunde anstille denne Sammenligning antager man almindelig

delig $\frac{1}{90}$ af en ret Vinkel til Maalestok og bestemmer enhver anden Vinkels Størrelse ved at see hvor ofte den antagne $\frac{1}{90} R$ indeholdes deri; og da man ved at ansee Vinklerne som Centervinkler og sammenligne Buerne de staa paa, finder at der er samme Forhold, imellem Buerne som imellem Vinklerne; saa udmaales almindelig i Stædet for Vinklen Buen imellem Vinklens Been, da man ved at sammenligne den maalte Bue med 90° som er den Bue en ret Vinkel staaer paa (Till. 1.) finder, hvor stor en Part den givne Vinkel er af en ret f. Ex. naar Buen FB (Fig. 17.) er 30° saa er Vinklen $FCB = \frac{1}{3} R$. da 30° er $= \frac{1}{3} \times 90°$.

Anm. Til mekanisk Udmaalning af Vinkler betiener man sig af en Transporteur, som er en halv Cirkel inddeelt i sine 180 Grader.

§. 11.

Forkl. Cirkler beskrevne fra samme Center med forskiellige Radier kaldes concentriske (Fig. 16. 17.); men beskrevne fra forskiellige Centrer ere de excentriske. (Fig. 18. 19.)

Cirkler siges at skiære hinanden naar en Deel af den eenes Peripherie ligger i Fladen af den anden. En ret Linie skiærer en Cirkel naar nogle Dele

Dele af Linien ligge uden og nogle inden for Cirkellinien.

Læresæt. Excentriske Cirkler skiære hinanden naar Middelpunkternes Afstand er mindre end Radiernes Summa, men større end deres Differentz.

Beviis: Middelpunkternes Afstand er (Fig. 19.) AC, Radiernes Summa $CD + AB$.

Altsaa er $CD + AB > AC$

$$CD = CD \quad (§. 9.)$$

$$AB > AC - CD$$

$$AB > AD.$$ følgelig Punktet D's Afstand fra Centrum A mindre end Radius AB og Punktet D i Fladen af Cirklen hvis Radius er AB (§. 9.).

Till. Er Middelpunkternes Afstand (Fig. 18.) AC = Radiernes Summa $CD + DA$ eller deres Difference da vil Cirklerne røre hinanden.

Om Triangler, især om deres Ligestorhed.

§. 12.

Plane Figurer ere ligestore naar de dække hinanden, eller passe paa hinanden (§. 5.). At to Triangler følgelig ogsaa ere ligestore, naar alle

tre Sider og Vinkler ere stykkevis ligestore er af sig selv klart; thi de vil da nødvendig dække hinanden. Men til at indsee at Ligestorheden af to Triangler ogsaa kan kiendes uden at vide om alle tre Sider og Vinkler ere ligestore, tiene de nu følgende Sætninger.

Læresæt. Naar i Trianglerne ACB og DFE (Fig. 20. 21.) Vinklen A er $= D$, Siden $AC = DF$ og $AB = DE$ da vil Trianglerne dække hinanden og være ligestore. ɔ: To Triangler ere congruente naar to Sider og den indsluttede Vinkel i den ene ere ligesaa store som i den anden.

Beviis: Naar Trianglen DFE antages at være lagt paa ABC maa, da Vinklen A er $= D$, Linien DF falde paa AC og Linien DE paa AB og da AB er antaget $= DE$ og $AC = DF$ maa Punktet F falde paa C og E paa B og Linien CB maa da (§. 3. Till.) nødvendig falde sammen med Linien FE.

Till. To Sider og den deraf indsluttede Vinkel bestemme altsaa fuldkommen en Triangel, og af disse Stykker lade sig kun tegne een Triangel, men vel i forskiellig Beliggenhed.

§. 13.

Læresæt. Naar i en ligebenet Triangel ABC (Fig. 27.) en Linie BD antages at dele Vinklen B som indsluttes af de to lige lange Been i to lige Dele; da deler den hele Triangelen i to ligestore Triangler, og staar tillige lodret paa ~~Linien AC~~.

Beviis: Efter Betingelsen er Linien $AB = BC$, Vinklen $ABD = DBC$ og $BD = BD$ følgelig (§. 12.) Trianglen $ADB = BCD$ og Vinklen $ADB = BDC = R$ (§. 7.) altsaa Linien BD lodret paa AC; og $AD = DB$.

Till. 1. Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Triangel ɔ: de Vinkler der staa lige over for de to lige store Sider, ere ligestore.

Till. 2. Naar Linien BD (Fig. 27.) staaer midt paa Grundlinien og lodret maa den dele Vinklen ved B i to lige Dele. Thi der maatte ellers gives en anden ret Linie som deelte Vinklen B i 2 lige Dele og som i Følge Læresætningen skulde ogsaa staa midt paa Grundlinien, men dette er umuligt (§. 7.).

§. 14.

Læresæt. To Triangler ere congruente naar alle tre Sider ere Stykkeviis ligestore i dem begge.

Bev.

Bev. 1. Tilfælde; Trianglerne være GKI og GHI (Fig. 24.) Siden $GI = GI$; $GK = GH$ og $KI = IH$; lad en Linie trækkes fra K til H; saa er Triangelen KIH ligebenet og Vinklen $HKI = KHI$ (§. 13. Till. 1.) ligesaa i Triangelen KGH er Vinklen $HKG = KHG$ og $HKI + HKG = KHI + KHG$ ɔ: Vinklen $GKI = GHI$ og følgelig Trianglen $GIK = GIH$ (§. 12.).

2. Tilfælde: Trianglerne være ACB og ADB (Fig. 25.) Siden $AB = AB$; $AC = AD$ og $BC = BD$ saa er Trianglen ACD ligebenet; Vinklen $C = D$ og Trianglen $ACB = ADB$ (§. 12.).

3. Tilfælde: Trianglerne være ACB og ABD; (Fig. 26.) Siden $AB = AB$; $AC = AD$ og $BC = BD$. Lad en Hielpelinie trækkes fra C til D; saa er Triangelen CAD ligebenet og Vinklen $ACD = ADC$. Triangelen CBD er ogsaa ligebenet og deri Vinklen $BCD = BDC$ altsaa (§. 13. Till. 1.) $ACD - BCD = ADC - BDC$ ɔ: Vinklen $ACB = ADB$ og Trianglen $ACB = ADB$ (§. 12.)

Till. Tre Sider bestemme altsaa en Triangel og af tre givne Linier lade sig kun tegne een Triangel, men i forskiellig Beliggenhed.

§. 15.

§. 15.

Lærs. Triangler ere ligestore, naar een Side og to Vinkler ere ligestore i dem begge.

Beviis: Naar i Trianglerne ACB og DEF (Fig. 21 og 23.) antages Siden $AB = DF$, Vinklen $A = D$ og $B = F$. saa maa naar Triangelen ACB lægges paa DEF saa at Vinkelspidsen A falder paa D, Linien AB falde paa DF og AC paa DE; fremdeles da AB efter Betingelsen er $= DF$, Punktet B paa F og Linien BC paa FE. Nu er Spørgsmaalet om Punktet C falder sammen med E; og det indsees ved en indirect Demonstration (Prol. §. 10.) thi antages C at falde enten oven eller neden for E maa Vinklen B blive større eller mindre end F som er mod Betingelsen.

§. 16

Lærs. Toe Naboe Vinkler udgiøre altid tilsammentagne to rette Vinkler.

Bev. Vinklerne være AC[illegible] DCB (Fig. 4.) lad Linien C[illegible] antages lagt s[illegible] Vinklen ACF bliver $= ECB = R$ (§. [illegible]) saa er $ACE + ECB = 2R$; nu er $ACE + ECD = ACD$ og følgelig $ACD + DCB = 2R$.

Till.

Till. Tre eller flere Nabovinkler udgiøre sammenlagte to rette og alle de Vinkler, der kan ligge om et Punkt fire rette Vinkler.

Modsæt. Naar to Vinkler ACD og DCB (Fig. 1) der have en fælles Spidse og en fælles Side udgiøre tilsammentagne to rette, ere de Nabovinkler.

Beviis: Var CB ikke den forlængede Linie AC saa maatte AC forlænget fra C falde enten oven for CB som CK og da vilde $ACD + DCK$ være $= 2R$ som er imod Betingelsen; eller neden for som CI, da altsaa $ACD + DCI$ blev $= 2R$ der ligeledes er efter Betingelsen umuligt; CB er altsaa den forlængede AC og følgelig ere Vinklerne ACD og DCB Naboevinkler.

§. 17.

Lærs. Top Vinkler ACD og ECB (Fig. 8.) (anguli verticales) ɔ: de med Toppunktet mod hinanden vendte Vinkler, der opkomme naar to rette Linier skiære hinanden; ere altid ligestore.

Bev. Vinklerne $DCA + ACE$ ere $= 2R$ (§.16)

$$ACE + ECB = 2R$$

altsaa $DCA + ACE = ACE + ECB$ (Arith. §. 38.6)

fradrag $ACE = ACE$

følgelig $DCA = ECB$ (Arith. §. 38. 4)

 Modsæt.

Modsæt. Er Vinklen $ACD = ECB$ (Fig. 11.) saa er Linien ED en ret Linie og Vinklerne ACD og ECD Topvinkler.

Beviis: Var ED ikke en ret Linie, maatte Linien EC kanne forlænges fra C og vilde da falde paa en af Siderne af CD og være enten CK eller CI; da saaledes enten Vinklen ACK eller ACI hvoraf den første er større den sidste mindre end ACD maatte blive $= ECB$ imod den anførte Betingelse.

§. 18.

Læresæt. Naar i en Triangel ADB (Fig. 30.) den ene Side AB, forlænges mod C, skal den udvendige Vinkel DBC være større end den indvendige D, der ligger over for den forlængede Side.

Beviis: Fra Vinkelspidsen A til Midten af DB trækkes en ret Linie AE, der forlænges, saa at EF bliver $= AE$ og fra F til B drages Linien BF. Nu er $EB = ED$ og $EF = EA$ (ved Tegning) Vinklen $DEA = FEB$ (§. 17.) følgelig Trianglen $AED = EBF$ og Vinklen $EBF = ADB$. Men nu er Vinklen $DBC > EBF$ (Arith. §. 38) altsaa $> ADB$.

Till. 1. Forlænges DB mod H bevises paa samme Maade, at Vinklen ABH er større end DAB og da Vinklen ABH er $= DBC$ (§. 17.)

saa følger at enhver udvendig Vinkel paa en forlænget Side i en Triangel er større end enhver af de to indvendige modsatte. 1810. 1810 1810 1810. 1810.

Till. 2. Vinklen DBC er større end enhver af Vinklerne BDA og DAB men $DBC + DBA = 2R$ altsaa $DBA + DAB < 2R$ og ligeledes $DBA + ADB < 2R$ ɔ: I enhver Triangel ere ethvert Par Vinkler tilsammentagne mindre end to Rette. 1810 1810 1810 1810. 1810.

Till. 3. I en Triangel kan ikke være mere end een ret eller stump Vinkel; og derfor kaldes en Triangel retvinklet, naar den har een ret Vinkel og to spidse, som ABC (Fig. 32.); stumpvinklet, naa den har een stump og to spidse Vinkler som DEC (Fig. 33.) og spidsvinklet, naar alle tre Vinkler ere spidse.

Till. 4. Fra et Punkt N (Fig. 28.) lader sig ikke trække flere end een lodret Linie MN paa en given ret Linie som LO. Thi er NM lodret ere Vinklerne NMO og NML rette (§. 7.) antages nu nogen anden Linie fra N at være ligeledes lodret f. Ex. NO eller NL saa skulde Vinklerne NLM eller NOM ogsaa være rette som er umuligt efter Till. 3.

§. 19.

Opgave. At dele en given Vinkel i to lige Dele:

Opløs: Vinklen være ABC (Fig. 37.) med en vilkaarlig Radius AB beskrives fra Vinkelspidsen A Buen BC. Over Chorden til denne Bue beskrives en ligebenet Triangel, hvis Toppunkt bestemmes ved Skiæringspunktet af to med samme Radier (der dog maa tilsammentagne være større end BC (§. 11.)) fra B og C beskrevne Cirkelbuer. En ret Linie fra Vinkelspidsen A til det saaledes bestemte Punkt D vil da dele den givne Vinkel.

Beviis: Efter Construktionen er $AB = AC$, $BD = CD$ og $AD = AD$ altsaa (§. 14) Trianglen $ABD = ACD$ og Vinklen $BAD = DAC$.

Anm. Ved igien at halvere enhver af de fundne Dele kan en Vinkel deles i fire, otte, sexten o. s. v. lige store Dele. Men at dele en Vinkel i tre lige Dele er en Opgave som i den lavere eller elementære Geometrie ikke almindeligt kan opløses.

§. 20.

Opgave: At dele en given Linie i to lige Dele; saa at Delingslinien bliver lodret.

Opløs. Linien være AB (Fig. 38.) over den beskrives til begge Sider de ligebenede Triangler (§. 19.)

(§. 19.) ADB og AEB, igiennem deres Toppunkter trækkes Linien DE, som staaer lodret paa midten af AB.

Beviis: Efter Construktionen er $AD = DB$; $AE = EB$; og $ED = ED$; følgelig Trianglen $EAD = EBD$ (§. 14.) og Vinklen $ADC = CDB$ og altsaa Linien CD lodret paa Midten af AB (§. 13.).

§. 21.

Opgave. Fra et givet Punkt M i en ret Linie (Fig. 28.) at opreise en lodret Linie.

Opløs. Fra det givne Punkt M afsættes paa Linien ligestore Stykker nemlig $ML = MO$; over Linien LO beskrives en ligebenet Triangel; da en Linie fra dens Toppunkt N til det givne Punkt M vil være den forlangte lodrette Linie.

Beviis: Efter Construktionen er Linien $ML = MO$; $LN = NO$; $NM = NM$ altsaa Trianglen $LMN = MNO$ og Vinklen $LMN = NMO = R$ (§. 7.) og følgelig Linien NM lodret paa LO.

Till. Fra et givet Punkt C uden for en given Linie AB (Fig. 39.) fældes en lodret Linie CD paa den givne Linie saaledes: Fra Punktet C beskrives med en vilkaarlig Radius AC en Cirkelbue, som skiærer den givne Linie i A og B over

over AB beskrives til den anden Side en ligebenet Triangel som (§. 20.) og fra dens Vinkelspids til det givne Punkt trækkes Linien CE som er den forlangte lodrette. Beviset er det samme som §. 20.

§. 22.

Læresæt. Naar i en Triangel den ene Side er større end den anden; saa er altid den Vinkel lige over for den større Side, større end den over for den mindre.

F. Ex. i Trianglen ACB (Fig. 31.) være $AB > CB$ saa er Vinklen $C > A$.

Beviis: Paa AB afsættes $DB = CB$, og Punkterne C og D sammenbindes, i Triangelen DCB er Vinklen $BCD = CDB$ (§. 13. Till. 1.). Men i Trianglen ADC er DB en forlænget Side og altsaa Vinklen $CDB > A$ nu er $CDB = BCD$ derfor $BCD > A$, og $BCA > BCD$. altsaa $BCA > A$.

Modsæt. Naar Vinklen C er større end A, maa Siden AB være større end CB.

Bev. Var $AB = CB$, saa var Vinklen $C = A$ mod Betingelsen; var $AB < CB$ saa var efter Sætningen Vinklen $A > B$ som ligeledes er mod den anførte Betingelse. Kan saaledes AB hverken være $= CB$ eller $< CB$ saa maa den nødvendig være større.

Till. 1. I en retvinklet Triangel staaer derfor altid den største Side lige over for den rette Vinkel som BC (Fig. 32.) og kaldes Hypothenuse, de to andre Sider kaldes Catheter.

Till. 2. Den lodrette Linie er den korteste af alle de rette Linier, der kan trækkes fra et Punkt ned paa en ret Linie, da enhver anden ret Linie vil blive Hypothenuse i en retvinklet Triangel.

Till. 3. I en ligebenet Triangel ABC (Fig. 34.) er enhver ret Linie fra Punktet B ned paa Grundlinien, som falder inden for Benene AB og BC kortere end disse lige lange Been; derimod er enhver Linie som fra samme Punkt paa Grundlinien falder uden for Benene længere end disse.

§. 23.

Læresæt. To Triangler ere ligestore naar der er een Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side ligestore i dem begge, og den modstaaende Side tillige er større end den hosliggende.

Bev. Trianglerne være ABC og DEF (Fig 35. 36.) Vinklen $B = E$; Siden $AB = DE$,

DE, $AC = DF$ og $AC > AB$; lægges nu Vinklen E paa B, vil Siden ED falde paa AB, og da $BA = DE$, Punktet D paa A; ligeledes vil EF falde paa BC; men nu er Spørgsmaalet om Punktet F vil falde paa C, dette indsees ved at vise Umuligheden af det modsatte; thi faldt F oven for C f. Ex. i D og en Linie blev trukket fra A til D maatte Triangelen ADC være ligebenet da AD blev saaledes $= DF = AC$ (per hypoth.) og altsaa (§. 22. Till. 3.) $AB > AC$ som er imod Betingelsen. Faldt F neden for C f. Ex. i E blev Trianglen ACE ligebenet, da AE blev $= DF = AC$ (per hypoth.) og følgelig skulde AB være $> AC$ som er imod Betingelsen. Kan nu Punktet F hverken falde oven eller neden for C maa det falde sammen med C og altsaa Linien $EF = BC$. og Trianglerne congruente.

Om parallele Linier og de deraf dannede Figurer.

§. 24.

Forkl. Ligeløbende eller parallele Linier ere rette Linier i en Plan, som ihvorlangt de end forlænges aldrig kan løbe sammen f. E. AB, DE (Fig. 6.). Sammenløbende (convergerende) kaldes rette Linier som tilstrækkelig forlængede skiære hinanden i et Punkt og giøre en Vinkel som AB, DE (Fig. 7.).

§. 25.

Læresæt. To rette Linier AB og CD (Fig. 40.) ere parallele; naar ved at overskiæres med en tredie EF, enten 1) de to indvendige Vinkler $o + p$ tilsammentagne ere $= 2 R$, eller 2) den udvendige og indvendige modsatte Vinkel m og p ere ligestore eller 3) Vexelvinklerne n og p (ànguli alterni) ere ligestore.

Beviis: Naar Linierne AB og CD løb sammen med B og D blev der en Triangel hvor de to indvendige Vinkler $p + o$ var $= 2 R$ og hvor den udvendige Vinkel m var $=$ den indvendige modsatte p. hvilke begge Tilfælde er umulige (§. 18. Till. 1 og 2.) Ligesaalidet kan de løbe sammen mod den anden Ende thi naar $o + p$ er $= 2 R$. saa er og de to indvendige paa den anden Side $= 2 R$ (§. 16.) og følgelig vil samme Umulighed i at tænke en Triangel der finde Sted. Ere Vexelvinklerne p og n ligestore, saa ere og de to indvendige $p + o = 2 R$. Thi efter §. 16. ere $n + o = 2 R$ og naar n er $= p$ ere ogsaa $p + o = 2 R$ altsaa vil den samme Umulighed af at Linierne kunde løbe sammen igien finde Sted.

Anm.

Anm. De tre anførte Tilfælde med Vinklerne som bestemme Liniernes parallele Beliggenhed ere saaledes forbundne, at et af dem antaget har de andre til Følge, f. Ex. ere de indvendige $= 2R$ saa er ogsaa den udvendige og indvendige modsatte, jamt Vexelvinklerne ligestore; thi

1) $o + p = 2R$ (efter Betingelsen)
$o + m = 2R$ (§. 16.)

$o + p = o + m$

$o = o$

$p = m$

2) $o + p = 2R$
$o + n = 2R$ (§. 16.)

$o + p = o + n$

$o = o$

$p = n.$

§. 26.

Opgave: Igiennem et givet Punkt at trække en Linie parallel med en given Linie *CD*.

Opløs. Igiennem det givne Punkt og et vilkaarligt Punkt i den givne Linie trækkes en Linie *FE*; (Fig. 41.) og Vinkelen m afsættes $= n$; naar da Linien *AB* trækkes er den parallel med *CD* (§. 25.).

Anm.

Anm. Mekanisk (d. e. ved at bruge andre Instrumenter end Linial og Passer) kan en Linie trækkes igiennem et givet Punkt parallel med en anden saaledes: man lægger en Linial *AB* (Fig. 42.) igiennem det givne Punkt og et Punkt i den givne Linie, og ved den lægges en Triangel saaledes at dens ene Side falder langs med Linien *HI* og den anden tæt og til Linialen; derpaa føres Trianglen langs med Linialen i samme Beliggenhed til det givne Punkt; da Linien *EG* derefter optrækkes som er parallel med *HI* (§. 25.). Ved Parallellinialen trækkes ogsaa en Linie parallel med en anden.

§. 27.

Grundsæt. Naar to rette Linier *AB* og *DE* (Fig. 43.) skiæres af en tredie *GH* saaledes at de to indvendige Vinkler *BIK* og *EKI* ere tilsammentagne $< 2R$ maa Linierne løbe sammen.

Anmerk. Denne er den saa meget omtvistede 11te Grundsætning hos Euclid. Man har vildet nægte dens Antagelse for Grundsætning og forsøgt paa mange forskiellige Maader at bevise den; et Beviis findes derfor hos Carstens; men som grundes paa en foregaaende Sætning hvorved alle tre Vinkler i en Triangel bevises at være liig $2R$, der forekommer mig ikke tilfredsstillende. Ligesaalidet synes det for samme af Johan Schulz i Konigsberg fremsatte Beviis passende her at anføre; hellere har jeg derfor vildet anføre den som Grundsætning.

Till.

Till. Linierne AB og DE ere ogsaa convergerende naar enten den udvendige og indvendige modsatte Vinkel eller Vexelvinklerne ere uligestore; thi er f. Ex. Vinklen $GIB >$ Vinklen IKE saa ere, da $GIB + BIK = 2R$ (§. 16.) ogsaa $BIK + IKE < 2R$ og altsaa Linierne convergerende (§. 27.). Ligeledes naar $AIK > IKE$ saa er, da $AIK = GIB$ (§. 17.) ogsaa $GIB > IKG$ og følgelig Linierne convergerende.

§. 28.

Læresæt. Overskiæres to parallele Linier AB og CD (Fig. 40.) med en tredie EF da ere 1) begge de indvendige Vinkler paa samme Side af den skiærende Linie $o + p = 2R$. 2) Den udvendige Vinkel $m =$ den indvendige modsatte p. 3) Vexelvinklerne n og p ligestore.

Beviis: 1) Vare Vinklerne $o + p < 2R$ vilde Linierne løbe sammen med B og D (§. 27.) som er mod Betingelsen da de antages parallele; vare derimod $o + p > 2R$ maatte Linierne løbe sammen mod den anden Ende som ligeledes er mod Betingelsen; kan saaledes $o + p$ hverken være $< 2R$ eller $> 2R$ saa følger at de maa være $= 2R$.

2)

2) Ere $o + p = 2R$ saa da $o + m$ ere $= 2R$ (§. 16.) saa følger at $o + p = o + m$ og følgelig $p = m$.

3) Er $p = m$ og $m = n$ (§. 17.) saa er altsaa $p = n$.

Till. 1. Ere to rette Linier parallele med en tredie ere de ogsaa indbyrdes parallele. En ret Linie som skiærer den ene af to parallele Linier skiærer naar den forlænges ogsaa den anden.

Till. 2. Ligge to Vinkler DEF og GHI (Fig. 111.) saaledes i en Plan at Linien ED er parallel med GH og EF med HI saa ere Vinklerne ligestore; thi er ED parallel med HG saa er Vinklen $E = n$ (§. 28.) og da HI er parallel med EF er $n = m$ følgelig $E = m$.

§. 29.

Læresæt. Naar i en Triangel ACB (Fig. 48.) den ene Side AB forlænges mod D, da er den udvendige Vinkel paa den forlængede Side saa stor som de to indvendige modsatte ɔ: $CBD = BCA + CAB$.

Beviis: Igiennem Punktet B trækkes Linien BH parallel med AC (§. 26.) saa er

$$\angle HBD = \angle CAB$$

og $$\angle CBH = \angle BCA \quad (§.\ 28.)$$

altsaa $HBD + CBH = CAB + BCA$

og

og $HBD + CBH = CBD = CAB + BCA$.

Till. 1. Alle tre Vinkler i enhver Triangel udgiøre tilsammentagne to rette Vinkler eller 180° thi $< CBD + CBA = 2R$ (§. 16.) men $CBD = CAB + BCA$ altsaa $CBA + CAB + BCA = 2R$.

Till. 2. Naar i en Triangel een Vinkel er bekiendt, er Summen af de to andre ogsaa bekiendt og ere de to Vinkler givne, er den tredie ligeledes. Naar altsaa i to forskiellige Triangler de to Vinkler ere stykkeviis ligestore, er den tredie ogsaa.

Till. 3. Er i en ligebenet Triangel een Vinkel bekiendt, ere de alle tre bekiendte. I en ligesidet Triangel er hver Vinkel $= \frac{2}{3} R = 60°$.

Till. 4. I en retvinklet Triangel udgiøre de 2 spidse Vinkler tilsammentagne een ret, og naar Catheterne ere ligestore ere hver af de spidse Vinkler $= \frac{1}{2} R = 45°$.

Till. 5. Summen af alle Vinklerne i enhver retlinet Figur findes ved at multiplicere Sidernes Antal med $2R$ og derfra subtrahere $4R$, ɔ: $S = (n \times 2R) - 4R$. Thi fra et Punkt i Figurens Flade kan trækkes Linier til alle dens Vinkelspidser (Fig. 32.) hvorved der opkomme ligesaa mange Triangler som Figuren har Sider; i hver Triangel udgiøre Vinklerne $2R$, altsaa findes Summen af Trianglernes Vinkler ved at multiplicere deres Antal med $2R$; men Vinklerne som ligge omkring det antagne Punkt udgiøre $4R$ (§. 16.) disse maa altsaa, da de ikke høre til den egentlige Figurs Vinkler, subtraheres fra Summen af Trianglernes Vinkler.

Anm. Vinkler kan være enten udgaaende eller indgaaende. For saavidt Benene forlængede mod den anden Side af Toppunktet enten gaa ud fra Figuren eller ind i Figurens Flade.

§. 39.

Læresæt. Overskiæres to parallele Linier AB, DC (Fig. 44.) med to andre parallele Linier AD og BC, da ere de imellem Parallelerne liggende Stykker ligestore: nemlig $AB = DC$, og $AD = BC$.

Beviis: Naar Linien DB (som kaldes en Diagonallinie) trækkes, opkomme Trianglerne ADB og DBC hvor i er

$$\left.\begin{array}{l} DB = DB \\ < ADB = < CBD \\ < ABD = < CDB \end{array}\right\} \text{§. 28.)}$$

altsaa $\Delta ABD = \Delta DBC$ og følgelig $AB = DC$; og $AD = BC$.

Till.

Till. 1. En saadan firsidet Figur, hvori de modstaaende Sider ere parallele og ligestore kaldes et Parallelogram.

Anm. Et Parallelogram nævnes almindelig ved de to Bogstaver som staa ved de modstaaende Vinkelspidser f. Ex. AD; FH (Fig. 45 og 46.)

Till. 2. Qvadraten, Rectanglet, Rhombus og Rhomboides (§. 8.) ere Parallelogramer.

Till. 3. Ethvert Parallelogram deles ved en Diagonallinie i to ligestore Triangler, og ikke allene dets modstaaende Sider; men ogsaa de modstaaende Vinkler ere ligestore, og Summen af alle dets fire Vinkler udgiøre tilsammentagne $4\,R$ (sammenlign §. 29. Till. 5.).

Till. 4. Parallele Linier staae allevegne ligelangt fra hinanden; thi alle perpendikulærerne imellem dem blive parallele (§. 25.) og ere altsaa ligestore (§. 30.).

Anm. Man kan paa Grund heraf geometrisk tegne en Linie parallel med en anden, ved at trække den giennem Endepunkterne af to paa den givne Linie opreiste ligestore Perpendikulærer.

Till. 5. Er i et Parallelogram een Vinkel $= R$ ere de alle rette; er derimod een spids er den modstaaende ogsaa spids men de to andre stumpe, og omvendt.

§. 31.

Opgav. Af to givne Linier DC, CB (Fig. 44.) og den Vinkel de indslutte BCD at tegne et Parallelogram.

Oplos. Den ved de tre givne Stykker bestemte Triangel DCB afsættes og nu giøres $\triangle ADB = DCB$ saa er $\angle ABD = BDC$ og $ADB = DBC$ følgelig Linien AB parallel med DC og AD med BC (§. 25.) og den tegnede Figur et Parallelogram (§. 30. Till. 1.).

Till. Er den givne Vinkel ret, og de to Sider som indeslutte den ligestore, da frembringes en Qvadrát; er Vinklen skiæv men Siderne ligestore en Rhombus; er Vinklen ret, men Siderne ulige en Rectangel og er Vinklen skiæv og Siderne ulige en Rhomboides.

Anm. Til at tegne en Qvadrat behøves altsaa kun at gives en Side; til en Rhombus een Side og een Vinkel; en Rectangel 2 Sider, og en Rhomboides, to Sider og en Vinkel.

§. 32.

Læres. Naar i et Parallelogram $ABCD$ (Fig. 53.) trækkes en Diagonal AC og igiennem et vilkaarligt Punkt E paa Diagonalen trækkes Linier parallele med de modstaaende Sider nemlig IK parallel med AB og DC; og HG

parallel med AD og BC; da blive de to Parallelogramer som Diagonalen ikke gaaer igiennem ED og EB (som kaldes Complementer til Parallelogramerne omkring Diagonalen) ligestore.

Beviis:

$$\triangle ADE = \triangle ABC \text{ (§. 30. Till. 3)}$$
$$\triangle AIE = \triangle AEH$$
$$\triangle EGC = \triangle EKC$$

altsaa $\triangle ADC - (AIE + EGC) = \triangle ABC - (AEH + EKC)$ ɔ: Parall. ED = Parall. EB.

Till. Er Parallelogramet en Qvadrat $ABCD$ (Fig. 54.) hvis ene Side bestaaer af to Dele AF og FB, da bestaaer Qvadratet paa hele Linien AB, af følgende Stykker 1) Qvadratet paa AF; 2) Qvadratet paa FB eller EC og 3) 2 ligestore Rectangler FE og HF. Da nu en Side i en Qvadrat kan altid ansees som Roden, og Fladen eller Qvadratet selv som Qvadrattallet af denne Rod; saa kan heraf udledes et Beviis for den i Arithmetiken §. 55. anførte Sætning om Qvadrattallet af en binomisk Rod.

§. 33.

Forkl. Ved Høiden i et Parallelogram forstaaes den perpendikulære Linie imellem to modstaaende

staaende Sider hvoraf den eene da kaldes Grundlinien. I en Triangel er Høiden en Perpendikulær fra en af Vinkelspidserne ned paa den modstaaende Side, som da kaldes Grundlinie.

Till. 1. I Rectanglerne ere af to anliggende Sider altid den ene Høide og den anden Grundlinie; i Qvadratet er Grundlinie og Høide ligestore og altid en af Qvadratets Sider. I Rhomber og Rhomboider er derimod naar af to anliggende Sider den ene antages for Grundlinie, Høiden altid mindre end den anden (§. 22. Till. 1.)

Till. 2. En Triangel er halvparten af et Parallelogram, som har samme Grundlinie og Høide, (§. 30. Till. 3.).

§. 34.

Læresæt. Parallelogramer, som have samme Grundlinie og Høide, ere ligestore.

Beviis: 1te Tilfælde. Parallelogramerne være BF og AE (Fig. 56.) saa er $AB = CF$; $AD = FE$ (§. 30. Till. 1.) $BC = AF = DE$ og $BC + CD = DE + CD$ ɔ: $BD = CE$ altsaa Trianglen $ABD = CFE$ og $ABD - CDH = CFE - CDH$ ɔ: Trapes. $BACH$ = Trapes. $DHFE$ følgelig $BACH + AHF = DHFE + AHF$ ɔ: Parallelog. BF = Parallelog. AE.

2det Tilfælde: Parallelogrammerne være BF og AE (Fig. 55.) saa er $AB = DF$; $AC = FE$; $BD = AF = CE$; altsaa $BD - CD = CE - CD$ ɔ: $BC = DE$ og Trianglen ABC = Trianglen DFE følgelig $ABC + ACDF = DFE + ACDF$ ɔ: $FB = AE$.

3de Tilfælde: Parallelogrammerne være BC og AE (Tab. 2. Fig. 1.) saa er $AC = BD$; $AD = BE$; $CD = AB = DE$ altsaa Trianglen $ACD = DBE$ og $ACD + ADB = DBE + ADB$ ɔ: Parallelog. $CB = AE$.

§. 35.

Læresæt. Triangler som have samme Grundlinie og Høide ere ligestore.

Beviis: Trianglerne være ACB og ADB, (Fig. 3.) naar da CF trækkes parallel med AB; BE med AC og BF med AD; saa er $ACB = \frac{1}{2}$ Parall. $ACEB$ og $ADB = \frac{1}{2}$ Parall. $ADFB$; men Parall. $ACEB$ = Parall. $ADFB$ (§. 34.) altsaa $\frac{1}{2}\,ACEB = \frac{1}{2}\,ADFB$ og $\triangle ACB = \triangle ADB$.

§. 36.

Opgav. 1) At forvandle en Triangel ABC (Fig. 2.) til et Parallelogram.

Opløs. Fra Midten af Grundlinien AB trækkes en Linie FE parallel med AC og igiennem C en Linie CD parallel med AB saa er Parall. $AE = \frac{1}{2}$ Parall. $ACDB = \triangle ACB$.

2) At forvandle en $\triangle KIF$ (Fig. 4.) til et Parallelogram hvori der er en given Side G og en given Vinkel.

Opløsning: Paa Midten af Grundlinien AF afsættes den givne Vinkel ved H og Parall. $HLEF$ frembringes paa den nylig forklarede Maade. Fra F afsættes nu Linien FC = den givne Linie G, IE forlænges og igiennem C trækkes CD parallel med FE; Linierne LH, EF og DC forlænges derpaa ubestemt; fra D til F trækkes en Diagonal, som forlænges til den skiærer den forlængede LH i A; derpaa trækkes AB parallel med HC. Nu er Parall. $FB = FL$ (§. 32.) og $FL = \triangle KIF$, følgelig $FB = KIF$ men i FB er $FC = G$ (den givne Side) og Vinklen $FGB = HAB$ (§. 28.) $= LHF$ (den givne Vinkel).

Anm. Er den givne Vinkel = R. bliver Trianglen forvandlet til en Rectangel.

Till. Enhver retlinet Figur forvandles til en Rectangel, naar den inddeles, ved Diagonaler i Triangler; og hver Triangel for sig forvandles til en Rectangel med en given Side, da disse Rectangler igien samles til een eneste.

§. 37.

Læresæt. I enhver retvinklet Triangel ACB (Fig. 5.) er Qvadratet paa Hypothenusen AB saa stor som Qvadraterne paa begge Catheterne AC og CB tilsammentagne.

Beviis: Paa Trianglens Sider beskrives Qvadraterne AF, BG og AH; fra den rette Winkels Spidse C fældes en lodret Linie GL paa Hypothenusen igiennem dens Qvadrat; som derved deles i to Rectangler BL og LA. Nu bevises at Rectanglen BL er $=$ Qvadraten BG. Fra G til E og fra A til F trækkes til den Ende Hielpelinier; saa er Triangelen $ABF = \frac{1}{2}$ Qvadr. GB og Trianglen $BCE = \frac{1}{2}$ Rectangel BL (§. 30. Till. 3.).

men $AB = BE$

$BF = BG$

$\angle ABF = \angle CBE$ $\left\{\begin{array}{l}\text{thi } ABF = ABC + R \\ \text{og } CBE = ABC + R\end{array}\right.$

$\triangle ABF = \triangle CBE$

$\frac{1}{2}$ Qvadr. $BG = \frac{1}{2}$ Rect. BL altsaa Qvadratet $BG =$ Rect. BL.

Paa

Paa samme Maade; ved at trække Hielpelinierne DC og IB, bevises at Rectanglen AL $=$ Qvadratet AH.

Nu er Rect. $BL =$ Qvadr. BG

Rect. $AL =$ Qvadr. AH

altsaa Qvadr. BD (Rect. $BL +$ Rect. AL) $=$ Qvadr. $BG + AH$.

Anm. Denne Læresætning, som efter dens formeente første Opfinder kaldes den Pythagoriske, er for dens mangfoldige Anvendelse i Mathematiken, af overmaade stor Vigtighed. Pythagoras siges derfor ogsaa af Glæde over denne Opfindelse at have ofret et Hecatombe. Qvadratet paa en Linie BC betegnes ved Exponenten 2 eller ved Bogstavet q, saa at BCq v. BC^2 er $=$ Qvadrat $BCGF$.

Till. Er Qvadratet paa Hypothenusen saa stort som Qvadraterne paa begge Catheterne; saa maa Qvadratet paa den ene Cathete være saa stort som Differencen mellem Qvadratet paa Hypothenusen og Qvadratet paa den anden.

§. 38.

Opgave: 1) At tegne en Qvadrat saa stort som to givne, eller at addere to Qvadrater.

Oplos. De givne Qvadrater være ABq og GHq (Fig. 7.) man tegner da en retvinklet Triangel AEB hvor $AB = AB$, $AE = GH$

saa

saa er $EBq = ABq + AEq = ABq + GHq$ (§. 37.)

2) At tegne en Qvadrat saa stor som Differencen mellem to givne Qvadrater; eller at subtrahere en mindre Qvadrat fra en større.

Opløs. De givne Qvadrater være ABq og GHq (Fig. 7.) man tegner en retvinklet Triangel FDE (Fig. 9.) saaledes at $DF = GH$; $FE = AB$; saa er $DEq = FEq - FDq = ABq - GHq$ (§. 37. Till.)

3) At tegne en Qvadrat dobbelt saa stor som en given.

Opløs. Qvadraten være ABq man trækker i den en Diagonal CB, saa er $CBq = ACq + ABq = 2\,ABq$.

4) Af de to Sider (givne i Tal) i en retvinklet Triangel ACB (Fig. 8.) ved Beregning at finde den tredie.

Opløs. Ere Catheterne givne, da tages Qvadrattallene deraf og adderes, og af Summen udtrækkes Roden som er Hypothenusen; thi $CB^2 = AC^2 + AB^2$ (§. 37.) og altsaa $\sqrt{CB^2} = \sqrt{(AC^2 + AB)^2}$; altsaa $CB = \sqrt{(AC^2 + AB^2)}$. Er Hypothenusen CB og een af Catheterne AB givne, da findes den anden AC naar fra Qvadratet paa Hypothenusen subtraheres Qvadratet paa den ene Cathete og af Diffe-

Diffe-

Differencen udtrækkes Roden; thi $AC^2 = CB^2 - AB^2$ (§. 37. Till.) og $\sqrt{AC^2} = AC = \sqrt{(CB^2 - AB^2)}$. f. Ex. $CB = 5$; $AB = 3$; saa er $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

§. 39.

Læres. Er i en Triangel ABC (Fig. 6.) Qvadratet paa den ene Side $CBq = ACq + ABq$ saa er Trianglen retvinklet og Vinklen over for CB er $= R$.

Bev. Ved A afsættes Vinkelen $BAD = R$; $AD = AC$ og Punkterne B og D bindes sammen; Triangelen BAD er da retvinklet og $BDq = BAq + ADq$ (§. 37.)
men $CBq = BAq + ACq$ (efter Beting.)
nu er $BAq = BAq$
$ACq = ADq$ fordi $AC = AD$ (ved Construct.)
altsaa $BAq + ACq = BAq + ADq$
følgelig $DBq = CBq$ og $BD = CB$ er nu $AB = AB$; $AD = AD$ og $BD = CB$ saa er Trianglen $BAD = CAB$ og følgelig $\angle CAB = BAD = R$.

Om

Om Linier og Vinkler i og ved Cirklen.

§. 40

Læresæt. En Linie som deler Vinklen ved Centrum ACB (Fig. 29. Tab. 1.) i en Cirkel i to lige Dele, deler ogsaa Chorden AB som ligger imellem Vinklens Been i to lige Dele og staaer lodret derpaa.

Beviis: Trianglen ACB er ligebenet, og altsaa naar Linien CD deler Vinklen ACB i lige Dele staaer den tillige lodret midt paa AB (§. 13.).

Till. 1. Staaer Linien DC lodret paa Midten af Chorden maa den nødvendig gaa igiennem Centrum og dele Vinkel ved Centrum i to lige Dele, thi der maatte ellers gives en anden Linie fra Centro som delte Vinklen ACB i to lige Dele, og som i Følge Læresætningen maatte staa perpendiculær paa Midten af Chorden. Der vilde saaledes gives to forskiellige lodrette Linier paa et og samme Punkt i samme rette Linie som er umuligt. (§. 13. og §. 7.)

Till. 2. Fældes en Linie fra Centrum lodret paa Chorden maa den staa midt paa Chorden thi i Trianglerne ACD og CDB vil $CD = CD$, $\angle CDA = \angle CDB = R$ og $\angle CAD = \angle CBD$ (§. 13. Till. 1.) altsaa $\Delta ADC = DCB$ og $AD = DB$.

§. 41.

Opgav. At søge Centrum til en Cirkel, hvis Peripherie skal gaa igiennem tre givne Punkter.

Opløs. Punkterne være A, B, C, (Fig. 10.) de forbindes med rette Linier AB og BC; paa Midten af disse opreises lodrette Linier, som da begge maa gaa igiennem Centrum til den søgte Cirkel (§. 40. Till.) og hvor disse Linier skiære hinanden, maa altsaa Centrum være. At disse lodrette Linier maa skiære hinanden naar Punkterne ligge saaledes (Fig. 10.) at Linierne AB og BC giøre en ret Vinkel med hinanden indsees af §. 28. Till. 1.

Ligge derimod de givne tre Punkter saaledes, at Linierne imellem dem som (Fig. 11.) AB og BC giøre en stump Vinkel med hinanden, da maa de paa Midten af AB og BC opreisie lodrette Linier ogsaa skiære hinanden, thi i Trianglen BEF er Vinklen $BFE = R$ (ved Construct.) altsaa BEF spids (§. 18. Till. 1.) følgelig $\angle DGE + GEF < 2R$ og altsaa Linierne CD og ED convergerende (§. 27.).

Giør

Giøre Linierne mellem de tre Punkter en spids Vinkel med hinanden maa de paa Midten af dem opreiste lodrette Linier ogsaa skiære hinanden.

Anm. Ligge de tre givne Punkter i en ret Linie lader der sig ingen Cirkel slaa derigiennem, thi de paa Midten af Forbindingslinierne opreiste Perpendiculærer vil da blive parallele og følgelig ikke skiære hinanden (§. 24 og 25.).

§. 42.

Læres. Staa i en og samme eller i ligestore Cirkler 1) to Chorder lige langt borte fra Centrum, da ere de ligestore; 2) ere Chorderne derimod ligestore, saa staa de lige langt borte fra Centrum; og 3) er den ene Chorde større end den anden, da staaer den større nærmere ved og den mindre længere borte fra Centrum.

Beviis: 1) Er (Fig. 12.) Chorderne AB og DE lige langt borte fra Centrum ɔ: $CF = CG$, saa er, naar Linierne CB og CD trækkes, i Trianglerne CFB og CDG

$$CBq = CFq + FBq$$
$$CDq = CGq + DGq \text{ (§. 37.)}$$

men $CB = CD$ og altsaa $CBq = CDq$

følgelig $CFq + FBq = CGq + DGq$

er

er nu $CFq = CGq$ (efter Beting.)

saa er $FBq = DGq$ og $FB = DG$ (Arith. §. 38.)

$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DE$ og $AB = DE$.

2) Er (Fig. 12.) $AB = DE$ saa er $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DE$ og $FB = DG$ og $FBq = DGq$ er nu

$$FBq + FCq = CGq + DGq$$

og $FBq = DGq$ (efter Beting.)

saa er $FCq = CGq$ og $FC = CG$.

3) Er (Fig. 13.) $AB > EG$ saa er $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}EG$; $DB > EF$.

men $CBq = CDq + DBq$ (§. 37.)

$$CEq = CFq + EFq$$

$CBq = CEq$ altsaa $CDq + DBq = CFq + EFq$

$$DBq > EFq$$

$$CDq < CFq \text{ (Arith. §. 38.)}$$

og $CD < CF$.

§. 43.

Forkl. En Vinkel som staaer med sit Toppunkt i Cirklens Peripherie og hvis Sider ere Chorder kaldes en Peripherie-Vinkel som ADB (Fig. 15.) og den siges at staa i Segmentet ADB af Cirklen og paa Buen AB. Center-Vinkel kaldes derimod (§. 10.) en Vinkel, der staaer med sit Toppunkt i Centro og hvis Sider ere Radier ACB (Fig. 25.).

§. 44.

§. 44.

Læresæt. Enhver Center-Vinkel ACB (Fig. 15.) er dobbelt saa stor som en Peripherie-Vinkel, naar de begge staa paa samme Cirkel-Bue AB.

Beviis: 1. Tilfælde: Naar Vinklerne have den Stilling som (Fig. 15.) saa er CA en forlænget Side i Triangelen CDB og $\angle ACB = \angle D + B$ (§. 29.) men $D = B$ (§. 13. Till.) altsaa $\angle ACB = 2D$.

2. Tilfælde: Center-Vinklen være ACB og Peripherie-Vinklen ADB (Fig. 16.) naar da en Hielpelinie trækkes fra Peripherievinklens Toppunkt D ned igiennem Centervinklen C saa er:

$\angle ACE = CDA + DAC = 2ADC$ (§29. og §13)
$\angle ECB = CDB + DBC = 2BDC$

altsaa $ACE + ECB = 2ADC + 2BDC$
ɔ: $ACB = 2(ADC + BDC) = 2ADB$.

3. Tilfælde: Center-Vinklen være ACB og Peripherie-Vinklen AEB (Fig. 17.) naar da Linien ECD trækkes, saa er:

$\angle DCB = CEB + EAC = 2CEB$ (§. 29. og
$\angle DCA = CEA + EAC = 2CEA$ §. 13.

altsaa $DCB - DCA = 2CEB - 2CEA$.
ɔ: $ACB = 2(CEB - CEA) = 2AEB$.

Till.

Till. 1. Enhver Vinkel ved Peripherien udmaales ved den halve Bue hvorpaa den staaer (§. 10. Till. 2.).

Till. 2. Vinkler ved Peripherien, der staa i samme Segment eller paa samme Bue (Fig. 19.) ere ligestore.

Till. 3. Enhver Vinkel ved Peripherien som staaer i en halv Cirkel er $= R$. staaer den derimod i et Segment som er større end en halv Cirkel er den spids, og i et Segment som er mindre end en halv Cirkel er den stump (Fig. 18.).

§. 45.

Opgav. At opreise en lodret Linie paa Enden af en given Linie uden at forlænge den.

Opløs. Den givne Linie være AB (Fig. 20.). Fra et vilkaarligt Centrum C med en Radius CB beskrives en Cirkel; igiennem A og C trækkes en Diameter ACD og fra D til B trækkes Linien DB som er den forlangte lodrette Linie; thi $\angle DBA$ er $= R$ (§. 44. Till. 3.) og altsaa Linien DB lodret paa AB (§. 7. Till.).

Till. Paa samme Maade fældes ogsaa en lodret Linie fra et givet Punkt paa en given Linie.

§. 27.

§. 46.

Læresæt. En Linie *KI* (Fig. 14.) som staaer lodret paa Enden af Radius *HI*. Kan ikke have flere Punkter tilfælles med Cirklen end det, hvori den berører Radius, men ligger ellers aldeles uden for Cirklen.

Bev. Alle de rette Linier *HL*, *HM*, ꝛc. som kan trækkes fra Centrum til Linien *KI* maa alle blive længere end *HI* (§. 22. Till. 1.) og altsaa maa de Punkter, hvortil de trækkes alle ligge uden for Cirkelsladen (§. 9.) følgelig ligger hele Linien *KI* uden for Cirklen.

Till. 1. En saadan Linie som staaer lodret paa Enden af en Radius er altsaa en Tangent; og til ethvert givet Punkt i en Cirkel trækkes altsaa en Tangent ved at opreise (§. 45.) en lodret Linie paa Enden af Radius.

Till. 2. Fra et givet Punkt *A* (Fig. 21.) uden for en Cirkel trækkes en Tangent til Cirklen naar det givne Punkt bindes sammen med Cirklens Centrum *C*, Linien *CA* halveres og fra Middelpunktet beskrives en Cirkel som skiærer den givne Cirkel i *D*; Linien *AD* bliver da den forlangte Tangent, thi Vinklen *ADC* er $= R$ (§. 44. Till. 3.) og altsaa *AD* en Tangent.

§. 47.

Læres. Støde to Skiæringslinier som *AB* og *BC* (Fig. 23.) sammen i et Punkt uden for Cirklen, da er Vinklen $ABC = \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE$ ɔ: den har til Maal det halve af den concave Bue mindre end det halve af den convexe.

Bev. Naar Hielpelinien *AD* trækkes, er Vinklen $ADC = ABC + BAD$ (§. 29.)

$$\underline{BAD = BAD}$$

altsaa $ADC - BAD = ABC$ og følgelig

$\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE = ABC$ (§. 44. Till. 1)

Till. 1. En Vinkel som en Tangent og en Sekant giøre ved at støde sammen uden for Cirklen udmaales paa samme Maade.

Till. 2. Ligger derimod en Vinkel med sit Toppunkt i Fladen af en Cirkel uden at ligge i Centro, da har den til Maal det halve af begge de Buer, som dens Sider, forlængede mod begge Sider af Toppunktet til Peripherien, afskiære.

§. 48.

Læresæt. Den Vinkel *ABH* (Fig. 22) som en Chorde og en Tangent til samme Cirkel giøre med hinanden, har til Maal den halve Bue *AB* som Chorden afskiærer.

Beviis: Fra Berøringspunktet B trækkes en Diameter BCE og Punkterne D, A forbindes ved Linien DA, i Trianglen DAB er Vinklen $A = R$ (§. 44. Till. 3.)

Vinklerne $ADB + DBA = R$ (§. 29. Till. 4.)
og $DBA + ABH = R$ (§. 46. Till. 1.)
altsaa $ADB + DBA = DBA + ABH$
men $DBA = DBA$
følgelig $ADB = ABH$
det halve af Buen $AB = ABH$ (§44 Till. 1)

§. 49.

Læresæt. Ere i samme eller i lige store Cirkler to Chorder som AB og DE (Fig. IV.) ligestore, da ere Buerne AGB og DEH som de afskiære ogsaa ligestore, og omvendt.

Beviis: Chorden AB være $= DE$, Radierne AC, CB, CD og CE trækkes saa er Trianglen $ACB = CDE$ (§. 14.) og altsaa Vinklen $ACB = DCE$ og Buen $AGB =$ Buen DHE.

Till. 1. En lodret Linie CI fra Centro paa Chorden DE, der deler Chorden i to lige Dele (§. 40) deler tillige Buen DAE i to ligestore Buer: thi Trianglen DIH er $= EIH$ (§. 14.) altsaa Chorden $DH = HI$ og følgelig efter

efter den nylig anførte Sætning Buen $DH =$ Buen HE.

Till. 2. En Chorde (AB Fig. 24) som afskiærer en Bue paa 60 Grader er altid saa stor som Cirklens Radius, thi er Buen $AB = 60°$ saa er Vinklen $ACB = 60°$ (§. 10. Till. 2.) og altsaa Vinklerne $CAB + CBA = 120°$ (§. 29. Till.) men $AC = CB$ og altsaa $CAB = CBA = 60°$ (§. 13. Till. 1.) alle tre Vinklerne blive altsaa ligestore og følgelig Trianglen ligebenet, hvordan den end vendes og $AB = AC = CB$.

§. 50.

Læresæt. Naar til en og samme Cirkel trækkes to Tangenter BD, AD (Fig. 27.) der skiære hinanden i Punktet D; saa ere Stykkerne fra Berøringspunkterne til Skæringspunktet ligestore ɔ: $BD = AD$.

Beviis: Naar Linierne CD, CB og CA trækkes, ere

$BC = CA$ (Radier i Cirklen)
$CD = CD$
$\angle DBC = \angle DAC = R$ (§. 46. Till.)

altsaa Trianglen $DBC =$ Trianglen DAC (§. 23.) og Linien $BD = AD$.

Till. Vinklerne BCA og BDA samt Buen BEA deles ved Linien CD i to lige Dele.

 Om

Om regulære Figurer i sær Polygoner, og deres Forhold til Cirklen.

§. 51.

Forkl. En Figur siges at være indskreven i en Cirkel naar Cirklens Peripherie gaaer igiennem alle Figurens Hiørner, og dens Sider ere Chorder og Cirklen kaldes da omskreven som *AFEDB* (Fig. 24.). Ere derimod Figurens Sider Tangenter til Cirklen, kaldes den omskreven og Cirklen indskreven som *GHIKL* (Fig. 28.).

Till. Cirklens Peripherie er altid større end Peripherien (Perimeteren Omtrækket) af den indskrevne og mindre end Peripherien af den omskrevne Polygon.

§. 52.

Læresæt. Antages Peripherien af en Cirkel at være deelt i et vist Antal af lige store Dele som *AF*, *FE*, *ED*, *DB* og *BA* (Fig. 24.) og der trækkes Chorder mellem alle Delingspunkter fremkommer en indskreven regulær Figur.

Beviis: Vare Buerne ligestore, saa ere Chorderne ogsaa ligestore (§. 49.) som ere Figurens Sider, Vinklerne *AFE*, *FED* ꝛc. blive alle Peripherie-Vinkler der staae i ligestore Segmenter og ere altsaa ligestore (§. 44. Till. 2.), men ere baade Sider og Vinkler ligestore, er Figuren regulær (§. 8.).

Till. I en given Cirkel indskrives altsaa enhver regulær Figur, ved at dele Cirklens Peripherie i saa mange ligestore Dele som Figuren skal have Sider.

Anm. Dem Deling skeer enten geometrisk eller mekanisk.

§. 53.

Opgave: At dele en Cirkels Omkreds i fire og i sex ligestore Dele, og tegne en regulær fiirkant eller sexkant i Cirklen.

Opløs. 1) Man trækker to Diametre *AB* og *CD* (Fig. V.) lodrette paa hinanden, saa ere Vinklerne *AIC*, *CIB*, *BID* og *DIA* rette og altsaa ligestore, og Buerne *AC*, *CB*, *BD* og *DA* følgelig ogsaa ligestore (§. 10.) naar da Chorderne trækkes, har man den forlangte regulære Firkant.

2) Med Radius *AC* (Fig. 24.) afsættes ligestore Stykker paa Peripherien som da inddeles i sex lige Buer (§. 49. Till. 2.) og naar Chorderne hertil trækkes fremkommer den regulære Sexkant.

Till.

Till. 1. Ved at halvere Buerne kan man naar Cirklens Peripherie først er deelt i fire eller sex Dele igien dele den i 8, 12, 16, 24 og flere Dele, og saaledes tegne regulære Polygoner (§. 52. Till.). Ligeledes kan, naar Peripherien er deelt i et lige Antal ligestore Dele, det halve Antal deraf bestemmes.

Anm. Foruden de her nævnte Dele lader en Cirkels Peripherie sig ogsaa dele geometrisk i ti, fem og femten lige store Dele, men denne Deling grunder sig paa Læresætninger som først i det følgende fremsættes. Derimod i 7, 13 ɛc. Dele lader Peripherien sig ikke dele uden efter Beregning og ved mekanisk Tegning.

Till. 2. Er saaledes en regulær Polygon f. Ex. en Sexkant (Fig. 29.) beskreven i en Cirkel, og der trækkes Linier fra Cirklens Centrum til Polygonens Vinkelspidser da opkomme saa mange lige store Triangler som Polygonen har Sider; disse lade sig igien forvandle til een eeneste Triangel (Fig. 33. og §. 35.)

§. 54.

Forkl. Ved Polygon-Vinkel forstaaes den Vinkel i en regulær Polygon som ethvert Par af Polygonens Sider giore med hinanden f. Ex. Vinklen *EFA* og *EDB* (Fig. 24.) eller *FGA* og *ACD* (Fig. 29.). Polygonens Center-Vinkel kaldes den Vinkel, som to Radier

Radier i den omskrevne Cirkel trukne til begge Ender af samme Polygon-Side, giore med hinanden som *AGB*, *BGD* ɛc. (Fig. 29.)

Till. 1. Center-Vinklen i enhver i en Cirkel indskrevet Polygon beregnes derfor, ved at dividere 360° med Sidernes Antall; (§. 10. Till. 2.) kaldes nu Sidernes Antall n er Center-Vinklen $= \frac{360°}{n}$.

Till. 2. Polygonvinklen i enhver i en Cirkel indskreven Polygon udmaales som en Peripherie-Vinkel (§. 44. Till. 1.) ved den halve Bue hvorpaa den staaer; og da i enhver regulær Polygon alle Vinklerne staae paa ligestore Buer, nemlig paa den ~~halve~~ hele Cirkels Peripherie undtagen det der ligger bag ved enhver Vinkels to Sider; som er i en Femkant (Fig. 28.) $\frac{2}{5}$ i en Sexkant (Fig. 24.) $\frac{2}{6}$ af den hele Peripherie; saa følger at naar Sidernes Antal i en regulær Polygon kaldes n, er Buen hvorpaa enhver af dens Polygon Vinkler staaer $= 360° - \frac{2}{n} \times 360$ og Vinklen har til Maal det halve deraf som er $180° - \frac{360°}{n}$; men da efter forrige Tillæg Centervinklen i enhver regulær Polygon er $= \frac{360°}{n}$ saa sees at Polygonvinklen findes

des ved at subtrahere Centervinklen fra 180°: Efter disse Former lade Center- og Polygonvinkler sig beregne i alle regulære Polygoner, naar Sidernes Antal er bekiendt.

§. 55.

Opgave: Om enhver regulær Figur at beskrive en Cirkel.

Opløs. Figuren være $ABDEFG$ (Fig. 29.) naar da to af Polygonvinklerne f. Ex. ved A og B deles i 2 lige Dele, saa vil Delingslinierne støde sammen og bestemme Centrum C, hvorfra med Radius CA eller CB en Cirkel lader sig beskrive som vil gaa igiennem alle Figurens Hiørner og altsaa være en omskreven Cirkel (§. 51.).

Beviis: Trækkes Linier fra C til alle Polygonens Vinkelspidser CG, CF ꝛc. saa blive alle de derved opkomne Triangler ligestore (§. 15.) og altsaa Linierne CA, CB, CD, ꝛc. alle lige lange, følgelig ligge alle Punkterne A, B, D, E. F, G lige langt borte fra C og altsaa i Peripherien af en Cirkel, hvis Centrum er C.

Till. Fældes fra C lodrette Linier paa Polygon Siderne som CH (Fig. 29.) vil de alle blive lige lange (da enhver af Trianglerne derved deles i to lige store Triangler) og med en af dem til

til Radius lader sig altsaa en Cirkel indskrive i Polygonen.

Anm. Centrum til disse Cirkler i og om Polygonen kaldes ogsaa Polygonens Centrum, og den omskrevne Cirkels Radius AC Polygonens største og den indskrevne Cirkels Radius CH dens mindste Radius.

§. 56.

Opgave: Paa en given ret Linie at afsætte en regulær Polygon af et bestemt Antal Sider.

Opløs. Linien være AB, Polygonsidernes Antal f. Ex. 5 (Fig. 28.) Polygon Vinklen beregnes (§. 54. Till. 2.) og ved Hielp af Transporteuren (mekanisk) afsættes den halve Polygon-Vinkel ved $A = CAB$ og den halve ved $B = CBA$ Linierne fra A og B forlænges til de skiære hinanden i C, fra C beskrives en Cirkel med Radius CA, og Chorden AB omføres i Cirklen som da vil blive inddelt i de forlangte fem Dele og Polygonen saaledes afsat.

Beviis: Vinklen ACB maa blive $= 2R - (CAB + CBA)$ (§. 29. Till. 1.) ɔ: blive Opfyldningen til Polygon-Vinklen og altsaa blive Center-Vinklen i en Polygon, hvis Side er AB (§. 54. Till. 2 og 3.). Saaledes vil den her i Femkanten være $180^\circ - (2 \times 54^\circ) =$

180°

180° — 108° = 72° som er Femteparten af den hele Peripherie, der saaledes lader sig dele i 5 ligestore Dele, og den forlangte Polygon afsætte.

§. 57.

Opgave: Om en Cirkel (Fig. 28.) at tegne en regulær Polygon af et vist Antal Sider, naar Cirkelens Peripherie kan deles i det forlangte Antal Dele.

Opløs. Peripherien deles i det forlangte Antal Dele (§. 53.) og igiennem alle Delingspunkterne trækkes Tangenter (§. 46. Till. 1.) som da blive Siderne til den forlangte Polygon. At saavel Sider som Vinkler saaledes blive ligestore og Polygonen altsaa regulær følger af §. 50.

Om Forhold og Proportion mellem Linier, og Figurers Ligedanhed.

§. 58.

Forkl. En Størrelse (f. Ex. Linien AD) som nøyagtig kan udmaales ved en anden CF siges at være et Mangefold (multiplum) af den anden; og denne at være en aliqvot Deel (pars aliqvota) submultiplum af den første, og indeholdes altsaa deri et vist Antal Gange f. Ex. AD er = 3 CF, og $CF = \frac{1}{3} AB$.

For-

Forholdet imellem to Linier bestemmes ved at undersøge hvorofte den ene indeholdes i den anden. Er den ene Linie en aliqvot Deel af den anden bliver Exponenten et heelt Tal som f. Ex. Forholdet imellem AD og CF, hvor Exponenten er 3. Er derimod den mindre Linie ikke nogen aliqvot Deel af den større; men en aliqvot Deel af den mindre er tillige en aliqvot Deel af den større, da bliver Exponenten en uegentlig Brøk hvis Nævner udtrykker Antallet af de aliqvote Dele som den mindre Linie er deelt i og Tælleren angiver hvormange af disse Dele der indeholdes i den større Linie. F. Ex. Exponenten i Forholdet mellem AB og CF er $= \frac{11}{3}$ da CF er inddeelt i 3 ligestore Dele og af disse indeholdes 11 i Linien AB. I begge disse Tilfælde siges Forholdet at være rationalt og Linierne siges at være commensurable Størrelser (sammenlign. Arithm. §. 69.).

Er derimod en nok saa liden aliqvot Deel af den ene Størrelse ikke nogen aliqvot Deel af den anden, da siges Størrelserne at være incommensurable og Forholdet irrationalt. Men da den mindre Størrelse kan tænkes inddeelt i saa mange aliqvote Dele, at een af disse Dele bliver mindre end enhver nok saa liden given Størrelse; saa følger at den irrationale Deel af Forholdet bliver mindre end enhver nok saa liden given Brøk; thi den

den aliqvote Deel af den ene Størrelse; kan vel ikke gandske udmaale den anden, men efterlader en Rest der altid er mindre end den aliqvote Deel, da nu den aliqvote Deel stedse kan tænkes mindre, saa maa og den blevne Rest, tilsidst blive mindre end enhver bestemt endelig Størrelse og saaledes det irrationale Forhold mellem to Størrelser nærme sig til det rationale.

Till. 1. To irrationale Forhold $A : B$ og $C : D$ ere ligestore naar en vis aliqvot Deel af B ($\frac{1}{m} B$) indeholdes ligesaa ofte med en Rest (n Gange $+ R$) i A som samme aliqvote Deel af D ($\frac{1}{m} D$) indeholdes i C med en Rest (n Gange $+ R$) thi da jeg efter den anførte Forklaring kan tænke en af de aliqvote Dele mindre end enhver given Størrelse, saa følger at det irrationale Forhold kan bringes det rationale saa nær at Forskiellen kan ansees som umærkelig.

Till. 2. Da alle Forhold lade sig udtrykke i Tal, og alle Størrelser lade sig betragte som Tal, saa gielder alt hvad i Arithmetiken er sagt om Forhold og Proportioner i Tall ogsaa om Forhold og Proportioner imellem udstrakte Størrelser.

Anm. I Forhold og Proportioner mellem ubenævnte Tall ere alle Ledene af samme Art. Her maa vel Ledene i samme Forhold være Størrelser af en Art; men i en Proportion, kunde Ledene i det første Forhold være saavel af samme Art, som Ledene i det andet Forhold, som og af forskiellig.

§. 59.

Læresæt. Antages den ene af en Triangels Sider ACB (Fig. 30.) at være indelt i et vist Antal ligestore Dele, CD, DE, EF, FA og der trækkes Paralleler igiennem alle Delingspunkter, da vil den modstaaende Side blive inddeelt i ligesaa mange ligestore Dele CG, GH, HI, ꝛc.

Beviis: Trækkes Hielpelinien GK parallel med AC, fremkommer Trianglen GKH nu er

$$GK = ED = CD \text{ (§. 30. Till. 1.)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle HGK = HCD \\ \angle CHK = CGD \end{array}\right\} \text{(§. 28.)}$$

$$\overline{\text{Triangl. } GKH = \text{Triangl. } CDG}$$

$$\text{og} \quad CG = GH.$$

Paa samme Maade bevises GH, HI og IB at være ligestore.

Till. En given Linie AC (Fig. 34.) deles paa Grund heraf i et forlangt Antal af ligestore Dele ved at afsætte fra A under en vilkaarlig Vinkel en anden ret Linie AB af ubestemt Længde og paa den afsætte det forlangte Antal Dele AH, HI, IK, KL, LB dernæst sammenbinde Punkterne B og C og og igiennem alle Delingspunkterne L, K, I, H trække Paralleler med BC, som da vil dele den givne Linie i det forlangte Antal ligestore Dele.

§. 60.

Læresæt. Er i en Triangel ACB (Fig. 31.) Linien DE trukket saaledes, at den skiærer de to Sider og er parallel med den tredie, da skal følgende Proportioner finde Sted: 1) $CA : DA = CB : EB$. 2) $CD : DA = CE : EB$. 3) $AC : DE = AB : DE$.

Beviis: 1) Er DA en aliqvot Deel af CA saa vil naar der trækkes Paralleler (§. 59.) EB være en ligesaa stor aliqvot Deel af CB og altsaa Exponenten i begge Forholdene den samme og Proportionen rigtig (Arith. §. 70.). Er DA ikke nogen aliqvot Deel af CA bestemmes Exponenten efter §. 58. og ved at tænke Paralleler trukne, vil Exponenten i Forholdet $CB : EB$ findes at være den samme, thi sæt at DA inddeles i m Dele og en af disse indeholdes n Gange i CA, saa at $CA : DA = n \times \frac{1}{m} DA : DA$ og $\frac{CA}{DA} = \frac{n \times \frac{1}{m} DA}{DA} = n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$ saa vil efter §. 59. ved Paralleler, EB ligeledes inddeles i m Dele og en af disse vil indeholdes n Gange i CB og altsaa $CB : EB = n \times \frac{1}{m} EB : EB$ og $\frac{CB}{EB} = \frac{n \times \frac{1}{m} EB}{EB} = n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$.

2) Af Proportionen $CA : DA = CB : EB$ følger $(CA - DA) : DA = (CB - EB) : EB$ (Arithm. §. 73. 3.) ɔ: $CD : DA = CE : EB$.

3) Igiennem Punktet D trækkes en Hielpelinie DI parallel med CB, saa er efter No. 1. $AC : DC = AB : BI$ men $BI = DE$ (§. 30. Till. 1.) altsaa $AC : DC = AB : DE$.

Till. Af disse beviste Proportioner lade sig udlede mange andre efter Arithm. §. 73.

§. 61.

Læresæt. Ere de to Sider i en Triangel ABC (Fig. 31.) deelte saaledes at $CA : DA = CB : EB$ saa er Skiæringslinien DE parallel med Trianglens tredie Side AB.

Beviis: Igiennem ethvert Punkt lader sig trække en Linie parallel med en given (§. 26.) var altsaa DE ikke parallel med AB maatte igiennem D kunde trækkes en anden Linie parallel med AB denne maatte enten falde oven for DE f. Ex. i F men

men saa skulde $CA : DA = CB : FB$ (§. 60.) som er mod Betingelsen eller og neden for f. Ex. i G, da skulde $CA : DA = CB : GB$ som er ligeledes umuligt, naar den i Betingelsen anførte Proportion finder Sted; kan saaledes den med AB igiennem D lagte parallele Linie hverken falde oven eller neden for DE maa den falde sammen med DE, og DE er altsaa parallel med AB.

Till. 1. Staa to rette Linier AB, DC (Fig. 32.) imellem to parallele Linier og overskiæres af en tredie EG som er parallel med AD og BC saa er $AE : EB = DG : GC$; thi naar Hielpelinien AC trækkes er i $\Delta\ BAC$ efter den anførte Sætning

$AE : EB = AF : FC$ og i Triangelen ACD er $DG : GC = AF : FC$

altsaa $AE : EB = DG : GC$ (Arith. §. 38)

Veed man derimod om Linierne AB og CD at de staa mellem to parallele Linier og at $AE : EB = DG : GC$ saa er EG parallel med AD og BC.

Till. 2. Ere Linierne AC og HB (Fig. 35.) parallele og AB, CD staae derimellem og skiære hinanden, da er $AE : EB = CE : ED$. thi naar AH trækkes parallel med CD og EG parallel med AC saa er i Trianglen HAB; $AE : EB = AG : GH$ nu er $AG = CE$; og GH

$GH = ED$ (§. 30. Till. 1.) altsaa $AE : EB = CE : ED$.

§. 62.

Læresæt. Er i en Triangel ABC (Tab. 3. Fig. 1.) en Vinkel B deelt i to lige Dele; saa skal Delingslinien BD dele den Vinklen modstaaende Side AC i to Dele, der forholde sig til hinanden som Siderne, der indslutte den deelte Vinkel ɔ: $AD : DC = AB : BC$.

Beviis: Efter Betingelsen være Vinklen $ABD = DBC$; Linien CB forlænges og derpaa afsættes $BE = AB$. Punkterne E og A sammenbindes, nu er Vinklen $BEA = EAB$ (§. 13. Till.) og $ABC = BEA + EAB = 2\ BEA = 2\ EAB$ (§. 29.) men efter Betingelsen var $ABC = 2\ ABD = 2\ DBC$ følgelig $2\ BEA = 2\ DBC$ og $BEA = DBC$ ligesaa $2\ EAB = 2\ ABD$ og $EAB = ABD$ altsaa Linien BD parallel med AE (§. 25.) følgelig $AD : DC = EB : BC$ (§. 61.) men $EB = AB$ (ved Construct.) altsaa $AD : DC = AB : BC$.

Modsætn. Skiærer Linien BD Siden AC saaledes at $AD : DC = AB : BC$ saa er Vinklen ved B deelt i to ligestore Dele.

Beviis: Er Linien BC forlænget og $BE = AB$; saa er $AD : DC = EB : BC$ og følgelig BD parallel med AE (§. 61.) Vinklen $ABD = EAB$; og $CBD = BEA$ (§. 28.) nu er $EAB = BEA$ (§. 13. Till. 1.) altsaa $ABD = CBD$.

§. 63.

Læresæt. Ere i et Trapezium $ACDB$ (Fig. 2.) de to Sider AB og CD parallele, da er den Linie EF som deler de to Sider der ikke ere parallele i lige Dele, saa stor som de to parallele Siders halve Summe ɔ: $EF = \frac{1}{2}(CD + AB)$.

Beviis: Efter Betingelsen være $DF = FB$; $CE = EA$; Diagonalen CB trækkes; de parallele Sider halveres i I og G, IF og EG trækkes, saa er i Trianglen CDB

$$DI : IC = DF : FB \left\{ \begin{array}{l} \text{thi } DI = IC \\ \text{og } DF = FB \end{array} \right.$$

altsaa IF parallel med CB (§. 61.). I Triangelen CAB er ligeledes:

$$AE : EC = AG : GB$$

følgelig EG parallel med CB og da $CE = EA$, og $DF = FB$ saa er $CE : EA = DF : FB$

altsaa EF parallel med CD og AB (§. 61. Till. 1.). Følgelig er $GIHF$ et Parallelogram (§. 30. Till. 1.) og $GI = HF$; ligeledes $EHGB$ et Parallelogram og $EH = GB$

er nu $EH = GB = \frac{1}{2} AB$

og $HF = CI = \frac{1}{2} CD$

saa er $EH + HF = GB + CI = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$

og $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

§. 64

Læresæt. Er den ene af en retvinklet Triangels Catheter AB (Fig. 5.) inddelt i et vist Antal ligestore Dele, f. Ex. 10 og igiennem alle Delingspunkterne trækkes Paralleler med den anden AC; da vil disse Paralleler bestemme ligesaa mange Dele af AC som AB var inddelt i; saaledes er $vm = \frac{1}{10} AC$; $ul = \frac{2}{10}$ $tk = \frac{3}{10}$ o. s. v.

Beviis: Da Linierne vm, ul, tk o. s. v. ere parallele med AC, saa er (§. 61.) $AB : vB = AC : vm$ og følgelig $\frac{AB}{vB} = \frac{AC}{vm}$ men

$$\frac{AB}{vB} = \frac{10\,vB}{vB} = 10 \text{ (ved Construktion)}$$

følgelig $\frac{AC}{vm} = 10$ og $vm = \frac{1}{10} AC$.

saaledes føres Beviset ogsaa for de øvrige Dele; og sættes i Steden for det bestemte Tal

 10

10 et almindeligt Udtryk n, da naar $AB = n \times vB$ og $\frac{AB}{vB} = \frac{n \times vB}{vB} = n$ saa er ogsaa $AC = n \times vm$ og $\frac{AC}{vm} = n$. —

Till. Herpaa grundes Tegningen af den formindskede Maalestok, eller Maalestokken med transversal Inddeling. Linien AB (Fig. 6.) f. Ex. være deelt i fire Dele, hver af disse igien i 10; nu forlanges at en af disse tiende Dele igien deles i ti mindre Dele; der afsættes da fra Punktet A en lodret Linie af vilkaarlig Længde (almindelig Maalestokkens Brede) paa denne afsættes det forlangte Antal Dele, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 og igiennem alle Delingspunkterne trækkes Paralleler, saa vil de forlangte Dele fremkomme, og Rigtigheden heraf indsees af den forklarede Læresætning.

Anm. 1. Er f. Ex. Linien AB antaget at være fire Fod, hvor af den sidste er deelt i 10 Tome, saa give de ved Transversal-Linier frembragte Dele $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, ꝛc. af en Tome, $\frac{1}{100}$ af en Fod, og $\frac{1}{400}$ af den hele Maalestok.

Anm. 2. Ved Hielp af Maalestokken deles en ret Linie i et forlangt Antal ligestore Dele saaledes: Man lægger den paa Maalstokken og dividerer det da fundne Tal f. Ex. 675 med Antallet af de forlangte Dele, og afsætter derpaa fra Begyndelsen af Linien den fundne Qvotient 135. Er Linien længere end Maalestokken, da bruges samme Fremgangsmaade med dens halve, tredie eller fierde Part.

Anm. 3. Ved at dele Randen af Instrumenter ved koncentriske Cirkler i lige Dele, og ved Transversal-Linier igien dele disse, under den, efter Buernes Størrelse mere eller mindre urigtige Forudsætning, at de derved frembragte Dele forholde sig som Vinklerne ved Middelpunktet; har man tilforn brugt den, ved Hielp af den formindskede Maalestok til rette Liniers Deling forklarede Methode, ogsaa til at dele Cirkelbuer. Nøjagtigere og bedre er Inddelingen af Qvadranten, især om man i Stædet for 90 deler den i 96 lige store Dele, som ved bestandig Halvering lader sig giøre. En almindelig Methode til at dele saavel rette Linier som Cirkelbuer i lige Dele har man ved den saa kaldte **Vernier** eller **Nonius**, hvis Forklaring jeg, skiønt den egentlig hører hen til den praktiske Geometrie, dog for dens almindelige Brugs Skyld her vil anføre.

§. 65.

Opgave: At tegne eller indrette en Vernier eller Nonius.

Opløs. AB (Fig. VI.) være en ret Linie eller en Cirkelbue, inddelt paa Randen af et Instrument AC i 11 lige Dele; og paa en Plade AD, der lader sig skyde langs Instrumentets Rand og kaldes Vernier eller Nonius eller over AB,

AB; være samme Længde FD deelt i 10 lige Dele. Da nu samme Linie AB har paa Nonius AD een Deel mindre end paa Randen AC, og følgelig enhver Deel af AB er større paa AC end paa AD ɔ: $DG > CE$ saa kommer det an paa at finde Forskiellen mellem DG og CE.

Da AB er $= 11 \times CE = 10\,DG$ saa er $10 : 11 = CE : DG$ (Arith. §. 70.) følgelig $10 : (11 - 10) = CE : (DG - CE)$ $10 : 1 = CE : (DG - CE)$ (Arith. §. 73 Till. 3.) altsaa $DG - CE = \frac{1}{10} CE$. Er nu $CE = 1$ Tom, saa er $DG - CE = \frac{1}{10}$ Tom $= 1$ Linie. Er $CE = 1$ Grad, saa er $DG - CE = \frac{1}{10}$ Grad $= 6$ Minuter. Saameget altsaa som 1 Linie eller 6 Minuter, staaer da den første Deel paa Nonius over den første Deel paa Randen; følgelig den anden 2 Linier eller 12 Minuter o. s. v.

Brugen af Nonius lader sig heraf let forklare; thi skydes Nonius paa Randen af Instrumentet langs Linien AB, saa vil efterhaanden de fra G efter hinanden følgende Delingslinier paa Nonius falde sammen med de fra E efter hinanden følgende Delingslinier paa Randen; og BD vil rykke frem over BC, een, to, tre Dele af Nonius o. s. v.

§. 66

Forkl. Figurer siges at være ligedanne (similes) naar deres Vinkler ere stykkeviis ligestore og de eenstaaende (ɔ: de der staa lige over for de lige store Vinkler) Sider (latera homologa) ere proportionale f. Ex. Trianglerne ACB, DFE (Fig. 3.) Polygonerne $ABCDE$ og $abCde$ (Fig. 11.).

Till. Da i regulære Figurer alle Sider og Vinkler ere ligestore, saa følger, at alle regulære Figurer af lige mange Sider ere ligedanne.

Anm. Ligedanheds Tegnet er ($\backsim$) som sættes imellem Figurerne f. Ex. $ACB \backsim DFE$ (Fig. 3.)

§. 67.

Forkl. Siderne i to Figurer (Fig. 15.) som indslutte lige store Vinkler ved A og D siges at være reciproqve proportionale naar de to Sider i den ene Figur udgiøre de yderste, og de to i den anden de mellemste Led i Proportionen ɔ: naar $AC : DF = DE : AB$.

Anm. I Almindelighed siges to Par Størrelser udtrykte i Tall eller med Bogstaver a, b og c, d; at være reciproqve proportionale naar det ene Par udgiøre de yderste og det andet de mellemste Lede i Proportionen.

§. 68.

Læresæt. To Triangler ACB, DFE (Fig. 3.) ere ligedanne, naar Vinklerne i dem begge ere ligestore ɔ: $A = D$; $B = E$.

Beviis: Paa DE afsættes $DG = AB$; paa DF ligeledes $DH = AC$ Punkterne H og G sammenbindes, saa er Trianglen $DHG = ACB$ (§. 12.) Vinklen $HGD = CBA = FED$ følgelig HG parallel med EF (§. 25.) og $DE : DF = DG : DH$ (§. 61.) altsaa $DE : DF = AB : AC$ (da $AB = DG$ og $AC = DH$) fremdeles $DE : EF = AG : GH$ følgelig (da $HG = CB$) $= DE : EF = AC : CB$ og Trianglen $ACB \sim DEF$ (§. 66.).

Till. Er en ret Linie HG (Fig. 3.) i Triangelen DFE parallel med EF og altsaa Vinklerne ved H og G ligestore med Vinklerne ved F og E, saa ere Trianglerne DFE og DHG ligedanne.

§. 69.

Læresæt. To Triangler ABC og DEF (Fig. 4.) ere ligedanne, naar deres Sider ere proportionale ɔ: $AB : AC = DE : DF$; og $AB : BC = DE : EF$.

Be-

Beviis: Paa DE afsættes $DG = AB$ ved G Vinkelen $DGH = DEF$ følgelig HG parallel med EF (§. 25.) og Trianglen $DGH \sim DEF$ (§. 68.); Men i Trianglerne ACB og DGH ere

$AB = DG$ (ved Construktion)

$AC = DH$ thi $AB : AC = DE : DF$ (efter Betingelsen)

$HG = CB$ og $DG : DH = DE : DF$

$AB : AC = DG : DH$

er nu $AB = DG$

saa er $AC = DH$. (Arith. §. 70.) Paa samme Maade vises at $HG = CB$. følgelig $ACB = DHG$ (§. 14.) og altsaa deres Vinkler ligestore, og de ligedanne; er nu $ACB \sim DHG$ og $DHG \sim DEF$ saa er $ACB \sim DEF$.

§. 70.

Læresæt. To Triangler ABC og DEF (Fig. 4.) ere ligedanne, naar een Vinkel er ligestor i dem begge $A = D$; og de to Sider som indslutte Vinklen, ere proportionale ɔ: $DE : DF = AB : AC$.

Beviis: Paa DE afsættes $DG = AB$ Vinklen $DGH = DEF$; Linien HG er da parallel med EF og Vinklen $GHD = EFD$ og følgelig $DHG \sim DEF$ (§. 68.) men i

Tri-

Trianglerne ACB og DHG ere

$AB = DG$ (ved Construkt.)

$\angle A = \angle D$ (efter Betingelse)

og $AC = DH$ (fordi $AB : AC = DE : DF$ og $DG : DH = DE : DF$ altsaa $AB : AC = DG : DH$ og da $AB = DG$ (ved Construkt.) saa er $AC = DH$ (Arithm. §. 70.)) altsaa $ACB \sim DHG \sim DEF$.

§. 71.

Læresæt. En lodret Linie CD (Fig. 7.) fældet fra den rette Vinkels Spids: C i en retvinklet Triangel ACB paa Hypothenusen, deler den retvinklede Triangel i to mindre Triangler ACD og CDB, der begge ere ligedanne med den hele og altsaa indbyrdes ligedanne.

Beviis: I Trianglen ACD og ACB er Vinklen $A = A$ og $CDA = R = ACB$ altsaa $\triangle ACD \sim \triangle ACB$. ligeledes er i $\triangle CDB$ og ACB, Vinklen $B = B$ og $CDB = R = ACB$ altsaa $CDB \sim ACB$ er

nu $ACD \sim ACB$

og $CDB \sim ACB$

saa er $ACD \sim CDB$.

Till. Den lodrette Linie CD bliver en mellemproportional Linie imellem Stykkerne af Hypothenusen AD og DB; og enhver af Catheterne AC og CB blive mellemproportional Linier mellem den hele Hypothenuse og det ved Catheten anliggende og af Hypothenusen afskaarne Stykke ɔ: $AD : DC = DC : DB$; $AB : AC = AC : AD$; og $AB : BC = BC : BD$. (§. 66. og 68.)

§. 72.

Læresæt. Naar to Chorder AB, CD (Fig. 8.) skiære hinanden i en Cirkel, ere deres Stykker reciproqve proportionale (§. 67. Anm.) ɔ: $AG : GC = GD : GB$.

Beviis: Linierne AC og BD trækkes: saa er i Trianglerne ACG og GBD; Vinklen $AGC = BGD$ (§. 17.) $ACG = GBD$ (§. 44. Till. 2) altsaa $\triangle ACG \sim \triangle GBD$ (§. 68.) og følgelig $AG : GC = GD : GB$.

Till. Bliver den ene Chorde AB en Diameter og antages at skiære den anden under en ret Vinkel, da vil den halvere den anden (§. 40. Till. 2.) og det halve af Chorden CD vil blive en mellemproportional Linie mellem Diameterens Stykker; thi var $AG : GC = GD : GB$ og efter det anførte $GC = GD$ saa er $AG : GC = GC : GB$ (sammenlign. §. 71. Till.)

§. 73.

§. 73.

Læresæt. Naar to Sekanter AB, BD (Fig. 9.) skiære hinanden uden for en Cirkel; ere Sekanterne og deres uden for Cirklen liggende Stykker reciproqve proportionale ɔ: $AB : BD = BF : BE$.

Beviis: Naar Hielpelinierne AF, ED trækkes, er Vinklen $B = B$; $A = D$ (§. 44. Till. 2.) altsaa $\triangle ABF \sim \triangle BED$ og $AB : BF = BD : BE$ (§. 66. og 68.) og (efter §. 73. 4. Arithm.) $AB : BD = BF : BE$.

§. 74.

Læresæt. Skiære en Sekant AB og en Tangent BC (Fig. 10.) hinanden uden for en Cirkel; da er Tangenten en mellemproportional Linie imellem den hele Sekant og det Stykke, som ligger uden for Cirklen ɔ: $AB : BC = BC : BD$.

Beviis: Trækkes Hielpelinierne DC og AC saa er $\triangle ABC \sim \triangle DBC$ (§. 68.) fordi Vinklen $B = B$; og Vinklen $DAC = DCB$ (§. 44. og 48.) altsaa $AB : BC = BC : BD$ (§. 66. og 67.).

§. 75.

§. 75.

Opgav. Til tre givne Linier A, B, C, (Fig. VII.) at finde en fierde proportional Linie.

Opløs. Man afsætter en Linie $MN = A$ og i samme Direktion $NO = B$; under en vilkaarlig Vinkel afsættes ved M, $MP = C$. Punkterne N og P sammenbindes og igiennem O trækkes OR parallel med NP, saa er PR den søgte fierde proportionale Linie.

Beviis: I Triangelen OMR er NP parallel med OR ved Construktion og altsaa (§. 60.) $MN : NO = MP : PR$.

Till. Paa samme Maade deles en given Linie i Dele, der forholde sig til hinanden som Delene af en anden given Linie.

§. 76.

Opgav. Imellem to givne Linier CD og AB (Fig. 7.) at søge en mellemproportional Linie.

Opløs. Man afsætter Linien $AD = AB$ og $DB = CD$ i en ret Linie AB, over denne slaaes en halv Cirkel, og fra Punktet D til Cirklens Peripherie opreises en lodret Linie (§. 21.) DC, som er den forlangte mellemproportional Linie.

Beviis:

Beviis: Trækkes Linierne AC og CB saa er Vinkelen $ACB = R$ (§. 44. Till. 3.) og Trianglen retvinklet og følgelig $AD : DC = DC : DB$ (§. 71. og 72. Till.).

Till. En anden Opløsning af denne Opgave følger af §. 74. og §. 46. Till. 2.

§. 77.

Forkl. En Linie AB (Fig. VIII.) siges at være deelt i det mellemste og yderste Forhold (secundum mediam et extremam rationem) eller i en sammenhængende Proportion, naar det største Stykke er en mellemproportional Linie mellem den hele Linie og det mindre Stykke ɔ: naar $AB : AD = AD : DB$.

§. 78.

Opgav. At dele en given Linie AB (Fig. VIII.) i det mellemste og yderste Forhold.

Opløs. Paa Enden af AB opreises en lodret Linie $BC = \frac{1}{2} AB$, fra C med Radius CB beskrives en Cirkel; A og C forbindes ved Linien AC og AD afsættes $= AE$ saa er $AB : AD = AD : DB$ og AD er det største Stykke af Linien AB.

Beviis: Forlænges AC til H, saa da AB er lodret paa BC og følgelig en Tangent

(§. 46.)

(§. 46.) saa er $AH : AB = AB : AE$ (§. 74.) og følgelig $(AH - AB) : AB = (AB - AE) : AE$ (Arithm. §. 73.) nu er $AB = 2\,CE = EH$ og $AD = AE$ (ved Construkt.) altsaa $(AH - HE) : AB = (AB - AD) : AD$, det er $AD : AB = DB : AD$ og invertendo (Arithm. §. 73.) $AB : AD = AD : DB$. Fremdeles da AC er $> AB$ (§. 22. Till. 1.) og $CE = \frac{1}{2} AB$ saa er $(AC - CE) = AD > \frac{1}{2} AB$ og saaledes AD det største Stykke af Linien AB.

§. 79.

Læresæt. Er Radius AC i en Cirkel (Fig. IX.) deelt i det mellemste og yderste Forhold, og Chorden AE tages liig det største Stykke af Radius DC saa er i den ligebenede Triangel ACE enhver af Vinklerne ved Grundlinien CAE og CEA dobbelt saa store som Vinklen ved Toppunktet C.

Beviis: Trækkes Hielpelinien DE er $\triangle ACE \sim \triangle ADE$ (§. 70.) fordi Vinklen $A = A$, og $AC : AE = AE : AD$ (efter Betingelsen); altsaa Vinklen $AED =$ Vinklen C; da nu fremdeles efter Betingelsen $CE : EA = CD : DA$, saa er Vinklen E deelt i to lige

Dele

Dele (§. 62.) og Vinklen $AED = \frac{1}{2}$ Vinkel E men Vinklen $C = AED$ altsaa $C = \frac{1}{2} E$.

Till. Heraf sees hvorledes en ligebenet Triangel beskrives hvori enhver af Vinklerne ved Grundlinien er dobbelt saa stor som Vinklen ved Toppunktet.

§. 80.

Opgave: I en Cirkel at tegne en regulær Femkant og Tikant.

Opløs. Radius i den givne Cirkel være CA (Fig. 9.), den deles i det yderste og mellemste Forhold (§. 78.) saa at CD er mellemproportional Linien mellem CA og DA, fra A afsættes Chorderne AI, $AE = CD$ saa er AE Siden i Tikanten og IE Siden i Femkanten.

Beviis: I Trianglen ACE er Vinklen $CAE = 2\,C$ og $CEA = 2\,C$ (§. 79.) altsaa $CAE + CEA + C = 5\,C$, følgelig $5\,C = 2\,R$ v. 180° (§. 29. Till. 1.) og $C = \frac{180^\circ}{5}$ (§. 10. Till. 2.) $= \frac{360^\circ}{10}$; følgelig Buen

$$BD = \frac{360^\circ}{10}$$ = Tiende-Delen af den hele Cirkelperipherie (§. 9. Anm. 2.) Buen AE lader sig altsaa afsætte 10 Gange paa den hele Peripherie og naar Chorderne dertil trækkes, har man den regulære Tikant (§. 52. Till.). Fremdeles er Buen

Buen $IAE = IA + AE = 2\,AE$ (ved Construktion) altsaa $= \frac{360^\circ}{5}$ = femte Parten af den hele Peripherie, naar den altsaa afsættes fem Gange og Chorderne trækkes, fremkommer den forlangte regulære Femkant.

§. 81.

Opgave: I en given Cirkel at tegne en regulær Femtenkant.

Opløs. Man beskriver i Cirklen (Fig. IX.) en regulær Triangel FGK (§. 53. Till. 1.) og en regulær Femkant (§. 80.) $EILGM$ saa er Buen FI en femtende Deel af den hele Peripherie, og den dertil hørende Chorde er Siden til den forlangte Femtenkant.

Beviis: Buen IL er $= LG = \frac{360^\circ}{5}$ altsaa Buen $ILG = \frac{2}{5} \times 360^\circ = \frac{6}{15} \times 360^\circ$ men nu er Buen $GLF = \frac{1}{3} \times 360^\circ = \frac{5}{15} \times 360^\circ$ altsaa Buen $FI = (GLI - GLF) = \frac{6}{15} \times 360^\circ - \frac{5}{15} \times 360^\circ = \frac{1}{15} \times 360^\circ$ o: en femtende Deel af den hele Peripherie.

§. 82.

Læresæt. Mangekantede ligedanne Figurer inddeles ved eensliggende (ɔ: som ere trukne imellem ligestore Vinklers V Spidser) Diagonaler i ligemange ligedanne Triangler.

Beviis: Figurerne være $ABCDE$ og $abCde$ (Fig. 11.) Diagonalerne EeC, AaC saa er Vinklen $D = d$ og $ED : DC = ed : dc$ (efter Betingelsen og §. 66.) altsaa $\Delta\, EDC \backsim \Delta\, edC$ (§. 70.). Fremdeles er $\angle\, DEA = \angle\, dea$ (efter Betingelsen) $\angle\, DEC = \angle\, deC$ (thi $\Delta\, EDC \backsim edC$) følgelig $DEA - DEC = dea - deC$ ɔ: Vinklen $CEA = Cea$. Nu er $DE : de = EA : ea$ (§. 52.) og $DE : de = EC : eC$ (fordi $\Delta\, DEC \backsim deC$) altsaa $EA : ea = EC : eC$ og $\Delta\, AEC \backsim \Delta\, aeC$ (§. 70.) og saaledes kan ethvert Par af de opkomne Triangler bevises at være ligedanne.

Till. Inddeles altsaa en mangekantet Figur ved Diagonaler i Triangler, og der afsættes andre med dem ligedanne Triangler i samme Orden, da bliver den derved frembragte Figur ligedan med den første.

§. 83.

Læresæt. Ligedanne Figurers Omkreds forholde sig til hinanden som to af deres eenstaaende Sider eller eensliggende Diagonaler ɔ: Peripherien $ABEDC$: Periph. $abedC = ED : ed$ (Fig. 11.).

Beviis: Da Figurerne ere ligedanne saa er

$$
\begin{array}{l}
AB : ab = AB : ab \\
AB : ab = AE : ae \\
AB : ab = ED : ed \\
AB : ab = DC : dc \\
AB : ab = BC : bc \\
\hline
\end{array}
$$

$AB : ab = (AB + AE + ED + DC + BC) : (ab + ae + ed + dC + bC)$ ɔ: Periph. $ABEDC$: Periph. $abedC = AB : ab = ED : ed$ o. s. v. men $AB : ab = AC : aC$ (fordi $\Delta\, ABC \backsim abC$) altsaa Periph. $ABEDC$: Periph. $abedC = AC : aC$.

§. 84.

Læresæt. Ere to ligedanne Figurer $ABCDE$ og $abcde$ (Fig. X.) indskrevne i Cirkler, saa forholde deres Omkreds sig, som Radierne eller Diameterne af de omskrevne Cirkler.

Beviis: Er F og f Cirklernes Middelpunkter, og altsaa AG, ag Diameterne og man trækker AC, BG i den eene, og ac, bg i den anden Figur, saa er Vinklen ABC = Vinkl. abc og $AB : ab = BC : bc$ (§. 66.) følgelig Vinkl. $BCA = bca$ og derfor $BGA = bga$ (§. 44. Till. 2.) fremdeles er Vinklen $ABG = abg$ (§. 44. Till. 3.) altsaa $\Delta ABG \sim \Delta abg$ (§. 68.) og $AB : ab = AG : ag = AF : af$. Men Figurernes Peripherier forholde sig som $AB : ab$ (§. 83.) følgelig ogsaa som $AG : ag$ eller som $AF : af$.

Till. 1. Da alle regulære Figurer af ligemange Sider ere ligedanne, og de alle kan indskrives i Cirkler (§. 55.) og omskrives om Cirkler, saa forholde deres Peripherier sig som Radierne i de ind- eller omskrevne Cirkler.

Till. 2. Ere to regulære Figurer beskrevne den ene i, den anden om, samme Cirkel, (en Side i den omskrevne være f. Ex. LM og en Side i den indskrevne AB (Fig. 29.),) saa forholde deres Omkredse sig til hinanden som $CL : CA = CA : CD$.

Till. 3. Jo flere Sider to ligesidede regulære Polygoner, som ere beskrevne i og om samme Cirkel faa, jo mindre Forskiel bliver der imellem Radierne i deres Omskrevne Cirkler, og da Polygonernes Peripherier forholde sig som disse Radier, nærme de sig stedse mere til hinanden.

§. 85.

§. 85.

Opgave: At beskrive i og om en Cirkel to regulære Polygoner af lige mange Sider, saaledes at Exponenten af Forholdet mellem deres Peripherier er mindre end ethvert givet Tal, der er noget lidet større end een ɔ: $< 1 + \frac{1}{m}$.

Opløs. Peripherien af den omskrevne Polygon vil vi kalde P og af den indskrevne p. I Cirklen beskrives en regulær Polygon hvis ene Side være AB, (Fig. 29.) og om Cirklen en af ligesaa mange Sider hvis ene Side være LM: saa er $P : p = CL : CA$ (§. 84. Till. 1.) og $\frac{P}{p} = \frac{CL}{CA}$ er nu CA deelt i m Dele hvoraf

AL er een saa er $\frac{CL}{CA} = \frac{CA + \frac{1}{m} CA}{CA}$

$= 1 + \frac{1}{m}$; nu beskrives to andre Polygoner af et dobbelt Antal Sider, saaledes at Siden i den indskrevne er AD og i den omskrevne NC saa er:

$P : p = CN : CA$ og $\frac{P}{p} = \frac{CN}{CA}$ nu

er

er $CN < CL$ altsaa $\frac{CN}{CA} < \frac{CL}{CA}$

$$\frac{CN}{CA} < \frac{CA + \frac{1}{m} CA}{CA}$$

$$\frac{CN}{CA} < 1 + \frac{1}{m}$$

og da $\frac{P}{p}$ var $= \frac{CN}{CA}$ saa er $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m}$.

Till. 1. Der lade sig i Følge heraf beskrive to Polygoner i og om Cirklen af saa mange Sider at Differencen imellem deres Peripherier er mindre end enhver nok saa liden Deel af Radius ɔ: at $d < \frac{1}{m} CA$.

Beviis: Efter forrige §. var $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m}$ antages nu enhver af disse m Dele deelt i 8 mindre Dele, saa er $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{8}$ men kaldes Differencen imellem Polygonernes Peripherier d saa er

$P =$

$P = p + d$ altsaa $\frac{p + d}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{8}$

$$1 + \frac{d}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{8}$$

$$\frac{d}{p} < \frac{1}{m} \times \frac{1}{8}$$

$$d < \frac{1}{m} \times \frac{1}{8} p$$

men da en om Cirklen beskrevet Qvadrat er 8 Gange saa stor som Radius, og Cirklens Peripherie er mindre end Peripherien af enhver omskreven Figur og Peripherien af en indskreven Figur igien mindre end Cirkel-Peripherien, saa følger at $p < 8\ CA$ og altsaa $\frac{1}{8} p < CA$ var altsaa $d < \frac{1}{m} \times \frac{1}{8} p$, saaa er ogsaa $d < \frac{1}{m} CA$.

Till. 2. Kaldes Differencen imellem Cirklens Peripherie (Π) og den ind- eller omskrevne Polygons Peripherie δ, saa følger, da Cirklens Peripherie er større end Peripherien af enhver indskreven og mindre end Peripherien af enhver omskreven Polygon, at $\delta < d$ og følgelig $< \frac{1}{m} CF$. Der gives altsaa Polygoner der nærme sig

saa

saameget til Cirklen, at Differencen imellem deres og Cirklens Peripherier er mindre end enhver nok saa liden Deel af Radius.

Om Forhold imellem Figurernes Flader.

§. 86.

Læresæt. Fladerne af Triangler ABC, DEF (Fig. 13.) der have samme Høide, forholde sig som deres forskiellige Grundlinier AC, DF.

Beviis 1. Ere Grundlinierne commensurable, (§. 58.) da gives der en aliqvot Deel af den eene, der kan udmaale dem begge. Lad denne aliqvote Deel være $Ae = Dg$, som antages at indeholdes m Gange i AC og n Gange i DF saa at $AC : DF = m : n$. Trækkes nu fra alle Delingspunkterne i Trianglernes Grundlinier Linier til deres Toppunkter, saa vil Fladen af Trianglen ABC blive inddelt i m ligestore Triangel-Flader og DEF i n saadanne, altsaa er $\Delta\, ABC : \Delta\, DEF = m : n$ og følgelig $\Delta\, ABC : \Delta\, DEF = AC : DF$.

2. Ere Grundlinierne derimod incommensurable, saa kan man dog (§. 58. Till. 1.) tænke sig en aliqvot Deel af AC som indeholdes i DE n Gange med en liden Rest og $AC : DE = m : n + R$ og ved at trække Linier fra Punkterne i Grundlinierne til Trianglernes Toppunkter vil $ABC : DEF = m : n + R$ og saaledes $\Delta\, ABC : \Delta\, DEb = AC : DE$.

Till. Da en Triangel altid er Halvparten af et Parallelogram, der har samme Grundlinie og Høide (§. 33. Till. 2.) saa gielder den om Triangler beviste Læresætning ogsaa om Parallelogrammer.

§. 87.

Læresæt. Fladerne af Triangler ABC og DEF (Fig. 15.) der have ligestore Grundlinier forholde sig som deres forskiellige Høider CH og FG.

Beviis: Trækkes BI parallel med CH; CI med AB og en Linie fra A til I saa er $\Delta\, AIB = ACB$ (§. 35.) naar fremdeles EK giøres parallel med FG; FK med DE og Linien DK trækkes, saa er $\Delta\, DEK = \Delta\, DEF$. Men $AIB : DKE = IB : KE$ (§. 86.) altsaa $ACB : DEF = IB : KE = FG$ (§. 30.).

Till. Det samme gielder om Parallelogrammer.

§. 88.

Læresæt. Fladerne af Triangler (ABC og DEF Fig. 16 og 17.) og Parallelogrammer i Almindelighed forholde sig som Produkterne af deres Grundlinier og Hoider; eller ere i et Forhold, sammensat af Forholdene mellem deres Grundlinier AB og DF og Hoider CH og EI.

Beviis: Linien EI i $\triangle\ DEF$ forlænges til G saa at $IG = CH$ og fra G trækkes Linier til D og F. Naar nu Trianglerne ABC og DFG sammenlignes:

saa er $ABC : DFG = AB : DF$ (§. 86.)
ligeledes er $DFG : DEF = CH(GI) : EI$ (§. 87.)

altsaa $ABC : DEF = AB \times CH : DF \times EI$ (Arithm. §. 74.)

eller $ABC : DEF = \begin{cases} AB : DF \\ CH : EI \end{cases}$

Anm. Beviset for Parallelogrammer føres paa samme Maade.

§. 89.

Læresæt. Ere to Triangler ABC, DEF (Fig. 37.) (og to Parallelogrammer) ligestore; saa ere deres Grundlinier og Hoider reciproqve proportionale ɔ: $AB : DE = GF : CH$.

CH. Og ere Grundlinier og Hoider i to Triangler eller Parallelogrammer reciproqve proportionale: saa ere de ligestore.

Beviis: 1. $\triangle\ ABC : \triangle\ DEF = AB \times CH : DE \times FG$ (§. 89.) nu er $ABC = DEF$ (efter Betingelsen) altsaa $AB \times CH = DE \times FG$ (Arithm. §. 70.) og følgelig $AB : DE = FG : CH$ (Arithm. §. 71. Till. 2.).

2. Er $AB : DE = GF : CH$ (efter Betingelsen) saa er $AB \times CH = DE \times GF$ (Arithm. §. 71.) og da $\triangle\ ABC : \triangle\ DEF = AB \times CH : DE \times FG$ saa naar $AB \times CH = DE \times FG$ er ogsaa $\triangle\ ABC = \triangle\ DEF$.

Anm. Beviset for Parallelogrammer føres paa samme Maade.

Till. 1. Ere fire rette Linier proportionale, saa er Rectanglet af de to yderste i Proportionen liig Rectanglet af de to mellemste.

Till. 2. En Qvadrat $EFGH$ (Fig. 20.) er ligesaa stor som en Rectangel $ABCD$ (Fig. 18.) naar Qvadratens Side er en mellem Proportional-Linie mellem Rectanglens Grundlinie og Høide, og omvendt.

§. 90.

Læresæt. Ere i to Triangler ABC, DEF (Fig. XI.) (ogsaa i to Parallelogramer) en Vinkel $A = D$ og de Sider som indeslutte de ligestore Vinkler ere reciproqve proportionale, (§. 67.) saa ere Trianglerne ligestore. Og ere to Triangler ligestore og have en ligestor Vinkel, da ere de Sider som indslutte de ligestore Vinkler reciproqve proportionale.

Beviis: 1. Efter Betingelsen er $AB : DE = DF : AC$; fældes nu fra C og F de perpendikulære Høider CI og FH, saa er $\angle A = \angle D$, og $\angle CIA = R = \angle FHD$ (ved Construktion) altsaa $\Delta\ ACI \sim \Delta\ DFH$ (§. 68.) og $DF : AC = FH : CI$ (§. 66.) følgelig $AB : DE = FH : CI$ og $\Delta\ ABC = \Delta\ DEF$ (§. 89.).

2. Ere Trianglerne ligestore, saa er naar Høiderne fældes $AB : DE = FH : CI$ (§. 89.) men er Vinklen $A = D$, saa er $\Delta\ ACI \sim \Delta\ DFH$ altsaa $FH : CI = DF : AC$ og følgelig $AB : DE = DF : AC$.

Anm. For Parallelogrammer føres Beviset paa samme Maade.

Till. 1. To Triangler ACB og DFE (Fig. XI.) som og Parallelogrammer som have en ligestor Vinkel $A = D$ ere i et Forhold til hinanden, sammensat af Forholdet mellem de Sider der indslutte de ligestore Vinkler eller forholde sig som Produktet af de Sider der indslutte de ligestore Vinkler

thi $\Delta\ ACB : \Delta\ DEF = \begin{cases} BB : DE \\ CI : FH \end{cases}$ (§. 88.)

men $\Delta\ ACI \sim DFH$ altsaa $AC : DF = CI : FH$ følgelig

$\Delta\ ACB : DEF = \begin{cases} AB : DE \\ AC : DF \end{cases} = AB \times AC : DE \times DF$.

Till. 2. Forholdet mellem to Qvadrater er dobbelt saa høit som Forholdet mellem deres Sider, eller to Qvadrater forholde sig som Qvadrattallene af deres Sider.

§. 91.

Læresæt. Fladerne af to ligedanne Triangler ACB og DEF (Fig. 16 og 17.) forholde sig som Qvadraterne paa to af deres eensstaaende Sider.

Beviis: $\Delta\ ACB : DEF = \begin{cases} AB : DF \\ CH : EI \end{cases}$ (§. 88.) $\Delta\ ACB \sim DEF$ (efter Betingelsen) altsaa:

$$AB : DF = AC : DE$$

$\Delta\ ACH \sim \Delta\ DEI$ (thi $\angle A = \angle D$ og $\angle E$

$\angle EID = R = CHA$) følgelig: $CH : EI = AC : DE$; ligestore Forhold kan sættes i Stæden for hinanden, og saaledes er $\Delta\, ACB :$

$$\Delta\, DEF = \left\{ \begin{matrix} AC : DE \\ AC : DE \end{matrix} \right. = AC^2 : DE^2.$$

Anm. Paa samme Maade bevises at de forholde sig som Qvadraterne paa deres eenstaaende Grundlinier, og eenstaaende Høider.

§. 92.

Læresæt. Mangekantede ligedanne Figurers Overflader $ABCDE$ og $abCde$ (Fig. 11, 12.) forholde sig som Qvadraterne paa to af deres eenstaaende Sider.

Beviis: Ved Diagonaler inddeles Figurerne i ligemange ligedanne Trianglere (§. 82.) og saa er

$$\Delta EDC : \Delta edC = ED^2 : ed^2$$
$$\Delta EAC : \Delta eaC = EA^2 : ea^2 = ED^2 : ed^2$$
$$\Delta ABC : \Delta abC = AB^2 : ab^2 = ED^2 : ed^2$$

altsaa $\Delta(EDC + EAC + ABC) : \Delta(edC + eaC + abC) = ED^2 : ed^2$

ɔ: Fig. $ABCDE$; Fig. $abCde = ED^2 : ed^2$.

Till. 1. Regulære Figurer af lige Antal Sider forholde sig som Qvadraterne paa Radierne eller Diameterne i deres omskrevne og indskrevne Cirkler.

Till.

Till. 2. Da Cirkler kan ansees som regulære uendelig mangekantede Polygoner (§. 85. Till. 2.) saa følger: at alle Cirkler ere ligedanne Figurer og at deres Flader forholde sig som Qvadraterne paa deres Radier eller Diametre.

Om Liniers og retlinede plane Figurers Udmaalning.

§. 93.

Forkl. At udmaale en Størrelse er at sammenligne den med en bekiendt Størrelse af samme Art, som kaldes Maal eller Maalestok. Til at udmaale rette Linier, bruges altsaa en Linie til Maalestok; til at udmaale Flader, en Flade, og til at udmaale Legemer et Legeme. Den vilkaarlige rette Linie som antages til Eenhed eller Maal for Linier kaldes en Fod. Foden inddeles igien enten efter Decimal-Inddeling i ti Tommer, og Tommen i ti Linier, og ti Fod giøre en Rode, eller efter Duodecimal Inddeling i 12 Tommer, Tommen i 12 Linier o. s. v. Disse Dele betegnes ved ($^{\circ}$, $'$, $''$, $'''$) ligesom Grader, Minuter, Sekunder f. Ex. 8°, $7'$, $10''$, $9'''$, læses 8 Roder, 7 Fod, 10 Tommer, 9 Linier.

Till.

Till. 1. I Decimalmaal forvandles det større Maal til det næstfølgende mindre ved at føie et Nul til f. Ex. $8^{\circ} = 80' = 800'' = 8000'''$ det mindre derimod til det næstforegaaende høiere ved med et Comma at afskiære det yderste Ziffer mod høire og ansee det som Decimalbrøk f. Ex. $3487''' = 348{,}7'' = 34{,}87' = 3{,}487^{\circ}$.

Till. 2. I Duodecimalmaal derimod forvandles større Maal til mindre ved at multiplicere, og mindre til større ved at dividere med 12.

Anm. 1. Længden af en Fod er meget forskiellig i de forskiellige Lande, og man maa derfor ved enhver Opmaaling bestemme hvad Længde Foden har. Det er altsaa vigtigt at kiende Forholdet imellem Fodmaalet i forskiellige Lande og Steder. Nogle af de vigtigste Landes og Stæders Fodmaal kiendes af følgende Tabel; som viser hvor mange Pariser Linier (hvoraf 1 Fod har der 144), Foden har andre Steder

En Fod i	Aachen har . . .	128,5 Pariser Linier
	Amsterdam . . .	125,5
	Berlin	137,6
	Bremen . . .	128,2
	Cøln	122
	Danemark . . .	139,13
	Engelland . . .	135,16
	Frankfurt . . .	127
	Hamburg . . .	127
En Fod i	Holsteen har : :	132,3 Pariser Linier
	Kønigsberg . . .	139,12
	Østerrigske Nederlande	126,6
	Paris	144
	Portugal . . .	145,3
	Rhinlandsk . . .	139,13
	Rom	110,9
	Rusland . . .	135
	Sachsen	125,1
	Schweitz . . .	133
	Spanien . . .	125,3
	Sverrig . . .	131,6
	Strasburg . . .	128,2
	Venedig . . .	153,7
	Wien	140,12
	Zürich	133

Anm. 2. Efter den allernyeste Opmaaling af en Meridiangrad i Frankrig er af National-Conventen dekreteret en almindelig Reform i Maal og Vægt. I Aaret 1798 er igien skeet fra Direktorium i den franske Republik en Indbydelse til andre Stater, at sende lærde og kyndige Mænd til Paris for at overlægge med de dertil udnævnte Pariser Lærde, om at bestemme en almindelig Grund for all Maal og Vægt. Saa ønskeligt og nyttigt som dette vilde være, saa mange Vanskeligheder vil det være underkastet. Man venter imidlertid med Længsel hvad Udfaldet af disse Deliberationer vil blive. Herfra er efter Regieringens Anmodning og paa dens Bekostning Justitsraad og Professor Bugge reist i dette Ærende til Paris.

§. 94.

Opgave: At forvandle Duodecimalmaal til Decimalmaal og omvendt.

Opløsn. Antager man Foden at være den samme, saa, da den efter Decimalinddeling er $=$ 10 Tomme og efter Duodecimal $=$ 12 Tomme, følger at, naar vi kalde Duodecimaltomme z og Decimaltomme y, ere $10\,y = 12\,z$ og altsaa $y = 1{,}2\,z$ og $z = 0{,}8333\,y$. Decimaltommer forvandles altsaa til Duodecimal ved at multipliceres med 1,2 og Duodecimaltommer til Decimal ved at multipliceres med 0,8333 f. Ex. 7 Decimaltommer er $= 7 \times 1{,}2 = 8{,}4$ Duodecimaltommer.

Fremdeles da en Tomme efter Duodecimalmaal er 12 Linier og efter Decimalmaal 10, saa følger at en Fod efter Duodecimalmaal er $=$ 144 Linier og efter Decimalmaal 100, altsaa naar vi kalde Decimallinien u og Duodecimal v saa ere $144\,v = 100\,u$ og $u = 1{,}44\,v$ og $v = 0{,}694\ldots u$. Forvandlingen skeer altsaa som ved Tommer ved Multiplication f. Ex. $8\,u = 8 \times 1{,}44\,v = 11{,}52\,v$ og $8\,v = 8 \times 0{,}6944 = 5{,}552\,u$.

Anm. Forskiellige Landes-Fodmaal reduceres naar man af den anførte Tabel veed Forholdet, efter Arithmetiken §. 77. 3.

§. 95.

Forkl. Da Maalestokken altid maa være af samme Art som Størrelsen der skal udmaales, saa følger, at til Fladers Udmaalning maa til Maalestok antages en Flade. Af alle plane Figurer har man dertil valgt Qvadraten, og Figurers Overflade siges at udmaales i Qvadratmaal, ved at see hvor ofte en vis antagen Qvadrat (der kaldes en Qvadratfod; Qvadrattomme, Qvadratlinie eftersom dens Side er een Fod, Tomme eller Linie) kan lægges om derpaa.

Anm. For at skilne Qvadratmaal fra Længdemaal pleier man almindelig efter Tallet som tilkiendegiver Mængden at skrive en lille Qvadrat (□) f. Ex. 52 □′, læses 52 Qvadratfod.

§. 96.

Opgave: At udmaale Overfladen af en Rectangel AC (Fig. 22.) med Maalestokken $abcd$.

Opløsn. Med een Side af den til Maalestok antagne Qvadrat ab, udmaales Rectanglens Grundlinie og Høide; disse Linier multipliceres med hinanden og Produktet er Rectanglens Overflade i Qvadratmaal f. Ex. $AB = 5''$ og $AC = 3''$ saa er Rectangel Fladen $ABCD = 15\,\square''$.

Beviis: 1. Trækkes igiennem alle Delingspunkterne paa AB Linier parallele med AD og BC og igiennem Delingspunkterne paa BC Paralleler med AB og DC saa vil hele Fladen blive inddelt i saa mange smaa ligestore Qvadrater hvoraf een er $abcd$ som Produktet af AB og BC indeholder Eenheder. Antallet af Delene AB viser hvormange af de antagne Qvadrater der kan ligge i en Rad og Delene i BC hvormange Rader der kan være.

Beviis: 2. At udmaale Rectanglen $ABCD$ er at see hvorofte Qvadraten $abcd$ kan legges om paa dens Overflade, nu forholde forskiellige Parallelogrammer sig som Produkterne af deres Grundlinier og Høider (§. 88.) altsaa $abcd : ABCD = ab \times bc : AB \times BC$; er nu den antagne Qvadrat $=$ 1 Qvadratfod eller Tomme ꝛc. saa er $1 : ABCD = 1 \times 1 = 1 : AB \times BC$ og følgelig Fladen $ABCD = AB \times BC$ (Arithm. §. 73.).

Till. 1. Da Parallelogrammer, der have samme Grundlinie og Høide ere ligestore (§. 34.) saa følger, at enhver skiævvinklet Parallelogram kan forvandles til en Rectangel og dens Fladeindhold beregnes paa samme Maade som Rectanglens.

Till. 2. Indholden af et Parallelogram $ABCD$ i Qvadratmaal divideret med Grundlinien AB giver Høiden BC.

Anm. 1. For Kortheds Skyld udtrykker man det saaledes, at Parallelogramernes Grundlinier multipliceres med deres Høider; da disse Linier egentlig udtrykkes ved Tal og disse multipliceres med hinanden. At to Linier virkelig ikke kan multipliceres med hinanden indsees af Arithmetiken.

Anm. 2. At beregne en Figurs Overflade i Qvadratmaal kaldes ogsaa at finde dens **Quadratur**, eller at qvadrere den, især bruges denne Benævnelse om Cirklens og andre krumlinede Figurers Overflade.

§. 97.

Opgave: At udmaale en Qvadrat (Fig. 23.)

Opløsn. Man maaler en af dens Sider med Sidelinien af den til Maalestok antagne Qvadrat $abcd$ og qvadrerer Tallet som angiver Mængden af disse Dele f. Ex. Siden være 4 ab, saa er Fladen af Qvadraten $4 \times 4\ abcd = 16\ abcd$.

Beviis: Da Qvadraten er et retvinklet Parallelogram hvis Grundlinie og Høide ere ligestore, saa gielder de §. 96. førte Beviser ligeledes for den.

Till. 1. Omvendt kan man ogsaa af en Qvadratsindhold finde Længden af en af dens Sider;

der; ved at udtrække Roden af det Tal som angiver Fladeindholdet.

Till. 2. En Qvadratfod er efter Duodecimalinddeling 144 og efter Decimalinddeling 100 Qvadrattomme, en Qvadrattomme ligesaa efterhiin Inddeling 144, og efter denne 100 Qvadratlinier.

Till. 3. Qvadratmaal efter Decimalinddeling forvandles altsaa let fra større til det næste mindre naar ved høire Side føies to Nuller til f. Ex. 485 □′ = 48500 □″ = 4850000 □‴; og fra mindre til det næst foregaaende større ved at dividere med 100, som (efter Arithm. §. 83.) skeer meget let ved fra høire stedse at afskiære to Zifre f. Ex. 50709 □‴ = 507 □″ 09 □‴ = 5 □′ 07 □″ 9 □‴. Men ved Duodecimalmaalsreduktion maa multipliceres eller divideres med 144.

Till. 4. Angaaende Sammenligning af Duodecimal- og Decimalqvadratmaal gielder hvad der er sagt §. 94. kun at her naar Foden antages uforandret, 100 Decimalqvadrattommer = 144 Duodecimalqvadrattommer.

Till. 5. Til at reducere forskiellige Landes-Qvadratmaal tages Qvadratet af de i Tabellen §. 93. anførte Forholdstal og Reduktionen skeer efter Arithmetiken §. 77, 3.

§. 98.

§. 98.

Opgave: At udmaale Overfladen af en Triangel ACB (Fig. 21.).

Opløsn. Fra en af Vinkelspidserne C fældes en perpendikulær Linie CD som da er Trianglens Høide og AB dens Grundlinie (§. 33.). Disse Linier maales med den antagne Maalestoks (§. 95.) Sidelinie, og Antallet af Grundliniens Dele multipliceres med Høidens og det fundne Produkt halveres, eller og Grundlinien multipliceres med den halve Høide eller Høiden med den halve Grundlinie.

Beviis: Fladeindholdet af ethvert Parallelogram findes ved at multiplicere dets Grundlinie med Høiden (§. 96.). Trianglen er Halvparten af et Parallelogram, der har samme Grundlinie og Høide (§. 33. Till. 2.) dens Fladeindhold er altsaa Halvparten af et Parallelograms af samme Grundlinie og Høide.

Till. Er en Triangels ABC (Fig. 21.) Fladeindhold bekiendt og dens Grundlinie AB, da findes Høiden naar Indholden divideres med den halve Grundlinie. Dog giver dette ikke Høiden for nogen bestemt Triangel, men kuns Beliggenheden af en ubegrændset ret Linie som kunde lægges igiennem C parallel med AB; hvori Toppunkpunkterne maae falde af alle de ligestore Triangler, der kan tegnes over Grundlinien AB.

§. 99.

Opgave: At udmaale Indholden af et Trapezium $ABCD$ (Fig. 26.) som har to parallele Sider.

Oplosn. De parallele Siders AB og CD halve Summa multipliceres med CE som bestemmer deres Afstand, det fundne Produkt giver da den forlangte Indhold $ABCD = \frac{1}{2}(AB + DC) \times CE$.

Beviis: Trækkes en Diagonal fra C til A; inddeles Trapeziet i Trianglerne ADC og ABC hvis Indhold sammenlagt udgiøre Trapeziets Indhold; nu er (§. 98.)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\, ACB = \frac{1}{2}\, AB \times CE \\ \Delta\, ADC = \frac{1}{2}\, DC \times CE \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{thi } AD \text{ er} \\ = CE \text{ (§.} \\ \text{30. Till. 3.)} \end{array}$$

altsaa $\Delta\, ACB + ADC = ABCD = \frac{1}{2}(AB \times CE) + \frac{1}{2}(DC \times CE) = \frac{1}{2}(AB + DC) \times CE$.

§. 100.

Opgave: At udmaale enhver given Polygons Overflade.

Oplosn. Polygonen være $ABCDE$, (Fig. 27.) ved Diagonaler inddeles den i Trianglerne DEC, EAC og ABC deres Flader beregnes efter §. 98. og Summen af disse giver Polygonens Fladeindhold.

Beviis: Da alle Triangelfladerne udgiøre hele Polygonfladen, saa indsees uden videre Beviis, at dens Fladeindhold maa være Summen af alle Trianglernes.

Anm. Ved at dele Polygonen ind i Trapezier med to parallele Sider, lader dens Flade Indhold sig ogsaa beregne efter §. 99.

Till. 1. En regulær Polygon lader sig dele i saa mange ligestore Triangler som den har Sider (§. 55. Till.) hvis Hoide bliver Polygonens mindste Radius; dens Indhold findes altsaa ved at beregne en af disse Trianglers Flade og multiplicere denne med Sidernes Antall.

Till. 2. En regulær Polygon forvandles til en eeneste Triangel (§. 55. og §. 35.) hvis Grundlinie er Polygonens Omkreds (Perimeter) og Hoiden Polygonens mindste Radius (Tab. 2. Fig. 29. og 33.) dens Indhold findes altsaa ved at multiplicere dens Perimeter med det halve af dens mindste Radius.

Om

§. 101.

Læresætn. Overfladen af en Cirkel er saa stor som Fladen af en Triangel hvis Grundlinie er Cirklens Peripherie og hvis Hoide er Cirklens Radius (Fig. 38.).

Beviis: I og om Cirklen lade sig beskrive regulære Polygoner af saa mange Sider at Exponenten af Forholdet imellem deres Perimetre og Flader er mindre end ethvert Tall, der er noget lidet større end 1 ($< 1 + \frac{1}{m}$) og at Forskiellen imellem deres Perimetre er mindre end en hver nok saa liden Deel af Radius, og at altsaa Forskiellen mellem Peripherie og Flade af Cirklen og den ind- eller omskrevne Polygon ligeledes er mindre end en hver nok saa liden Deel af Radius eller dens Ovadrat. Bliver saaledes Forskiellen imellem Cirklen og den om- eller indskrevne Polygon tilsidst saa ringe at den ikke meer kan angives, saa kan man ansee Cirklen som en Polygon af uendelig mange Sider, da uendelig smaa Buer af Peripherien ere ikke forskiellige fra Chorden eller Tangenten som hører dertil, og dens Overflade at bestaae af en uendelig Mængde smaae Triangler (§. 100. Till. 1. og 2.) der alle kon forvandles til een eneste

ste Triangel hvis Grundlinie er Peripherien og hvis Høide er Radius.

Till. 1. Da alle Cirkler saaledes kan ansees som uendelig mangesidede regulære Polygoner, saa følger at de alle ere ligedanne (§. 66. Till.) og at altsaa deres Peripherier forholde sig som deres Radier eller deres Diametre (§. 92. Till.) og deres Overflader som Ovadraterne af Radierne eller Diametrene.

Till. 2. Naar Peripherien af en Cirkel lod sig udmaale i retlinet Maal, kunde dens Indhold nøiagtig bestemmes og dens Ovadratur findes, men da Peripherien kun kan findes ved Tilnærmelse, nemlig ved at søge Perimeterne af ind- og omskrevne Polygoner af saa mange Sider at Forskiellen imellem dem og Cirkelperipherien vil blive umærkelig, men dog nogen, saa kan Cirklens Ovadratur heller ikke nøyagtigt bestemmes.

§. 102.

Opgav. Naar Siden i en regulær Polygon er givet $= AB$ (Fig. 29.) og Polygonens største Radius AC, da at finde 1) Polygonens mindste Radius CD og 2) Siden i en regulær Polygon af dobbelt saa mange Sider AE.

Oplosn.

Opløsn. 1) Fra Qvadratet af den givne største Radius subtraheres Qvadratet af den halve Polygonside og af Resten udtrækkes Qvadratroden, som da giver Størrelsen for den forlangte mindste Radius ɔ: $CD = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AB^2}$.

Beviis: I Triangelen ACD er Vinklen $ADC = R$ altsaa $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (§. 38.) og $CD^2 = AC^2 - AD^2$ men $AD = \frac{1}{2}AB$ og $AD^2 = \frac{1}{4}AB^2$ følgelig $CD^2 = AC^2 - \frac{1}{4}AB^2$ og $CD = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4}AB^2}$.

Exemp. Lad $AC = 1$ og AB Siden i en reguler Sexkant og altsaa $= 1$ (§. 49. Till. 2.) saa er $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}732. = 0{,}866.....$

2) Den fundne mindste Radius CD subtraheres fra den største Radius, Differencen DE qvadreres, og adderes til Qvadratet af den halve Polygonside AD; af denne Summa udtrækkes Qvadratroden, som er den forlangte Side AE.

Beviis: Trianglen ADE er retvinklet altsaa $AE^2 = AD^2 + DE^2$ men $AD = \frac{1}{2}AB$ og $DE = CE - CD$ altsaa $AE^2 = \frac{1}{4}AB^2 + (AC - CD)^2$ og $AE = \sqrt{(\frac{1}{4}AB^2 + (AC - CD)^2)}$.

Exemp. Antages som før $AC = 1$ og AB at være Sexkantens Side $= 1$ saa er Tolv-

kantens

kantens Side $AE = \sqrt{(\frac{1}{4} + (1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4} + 1 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4})} = \sqrt{(2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}})} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}. = 0{,}5176. . . .$

Anm. Paa samme Maade som man her af Sexkantens Side har fundet Tolvkantens, findes af denne fire og tyve kantens, af den 48 kanten o. s. v. indtil man endelig finder 768 kantens Side $= 0{,}0081811. . .$ naar dette Tall multipliceres med 768 har man Perimetren af en 768 kant $= 6{,}28308 . . . .$ naar Radius er $= 1$ altsaa naar Radius er $= \frac{1}{2}$ og Diametren $= 1$ er Perimetren $= 3{,}1415. . . . .$

§. 103.

Opgave: Naar Cirklens Radius AC (Fig. 29.) og Siden i den indskrevne Polygon AB er given, da at finde Siden ML i en omskreven Polygon af lige Antal Sider.

Opløsn. Er Polygonens mindste Radius beregnet efter (§. 102.) da findes den omskrevnes Side ML ved at søge en fierde Proportionallinie til CD, CA, og AB. ɔ: $CD : CA = AB : LM$ kaldes nu Cirklens Radius r, den mindste Radius ϱ. Siden i den indskrevne Polygon l og i den omskrevne L saa er: $\varrho : r = l : L$ og altsaa $L = \frac{r \times l}{\varrho}$.

Beviis:

Beviis: I Trianglen CCL er Linien AD parallel med CL altsaa $CD : CC = DA : CL$ (§. 60.) følgelig $CD : CC = \frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} LM = AB : LM$. ɔ: $\varrho : r = l : L$.

§. 104.

Opgav. At finde Forholdet imellem en Cirkels Diameter og dens Peripherie.

Oplosn. Efter §. 102. og 103. søges Perimetren af en ind- og omskreven 12, 24, 48, 96, 192 . . . . kant. Da nu Cirkelperipherien er større end Perimetren af enhver indskreven og mindre end Perimetren af enhver omskreven Polygon, saa bestemmes derved Grændserne imellem hvilke Cirkelliniens Størrelse som ret Linie ligger. Fordobbler man nu videre Sidernes Antal i den i Cirklen beskrevne regulære Polygon, saa bliver Forskiellen imellem Perimeteren af en saadan Polygon og Cirklens Peripherie tilsidst mindre end enhver bestemt endelig Linie (§.85 .). Paa denne Maade lader Cirkellinien sig altsaa bestemme i retlinet Maal saa nøiagtig som det behøves, og tillige Forholdet imellem Diametren og Peripherien hvilket i alle Cirkler er det samme.

Till. 1. Er nu Cirklens Diameter 2′ ($d = 2$) og Radius 1′ ($r = 1$) saa er Chorden til den 768 Deel af Peripherien ɔ: Siden i en indskreven

skreven 768 kant = 0,0081811′ (§. 102. Anm.) og følgelig Perimeteren = 6,28308′ og heraf findes (§. 103.) Perimetren af den om Cirklen beskrevne regulære 768 kant = 6,2831375′ Cirkellinien er altsaa større end 6,2830′ og mindre end 6,2831 og følgelig omtrent = 6,2830 (p = 6,2830) og $d : p = 2 : 6,2830 = 1 : 3,1415$. Benævnes nu Peripherien af en Cirkel hvis Diameter er 1 med π; saa er $\pi = 3,1415$. Søger man nu paa den forklarede Maade Perimetren af en Polygon der har 2, 4, 8 ꝛc. Gange saa mange Sider, saa kan man stedse nøiagtigere og nærmere finde Forholdet mellem Diametren og Cirklens Peripherie, ɔ: nøiere bestemme Værdien af π. Paa denne møisommelige Maade fandt Ludolph von Ceulen π = 3,141592,653589,793238,462643,383279,50. . hvilket er bekiendt under Navn af det Ludolphiske Tall.

Anm. 1. Archimedes fandt allerede Forholdet imellem Diameter og Peripherie som 7 : 22 . eller $\pi = 3\frac{1}{7} = 3,142$ . . og altsaa allerede ved det 3de Decimalziffer for stort. Metius fandt Forholdet imellem Diameter og Peripherie = 113 : 355 = 1 : 3,1415929 og altsaa først ved det 8de Decimalziffer for stort.

Anm. 2. Siden har man ved Hielp af den høiere Mathematik fortsat det Ludolphiske Tall langt videre nemlig

nemlig Sherwin til 72; Machin til 110 og Lagny til 127 Decimaler.

Anm. 3. Gandske nøiagtig har endnu ingen kundet finde Diameterens Forhold til Peripherien (og det vil rimeligt aldrig kunde findes) thi alle de angivne af Ludolph, og de øvrige fundne Tall give Cirkellinien stedse noget lidet mindre end den virkelig er, da de egentlig angive Perimeteren af en indskreven Polygon med overmaade mange Sider. Imidlertid er Feylen naar antages $\pi = 3{,}1415$ allerede mindre end $\frac{1}{10000}$ af Diameteren, og ved det Ludolphiske Tal ikke engang $\frac{1}{100}$ af en Qvintilliondeel. Men ved det Lagnyske ikke $\frac{1}{10}$ af en 21 Tilliondeel af Diameteren. Til en Cirkellinies virkelige Beregning i Længdemaal behøver man altsaa ikke engang hele det Ludolphiske Tall, men man tager kun saa mange Decimaler, som Regningens Nøiagtighed udfordrer. Imidlertid tiener det til at prøve Rigtigheden af de Forhold, som de der vilde finde Cirklens Qvadratur angive at have fundet, og som sædvanlig i de første Decimaler befindes urigtige.

§. 105.

Opgave: At finde en Cirkels Peripherie p i retlinet Maal og dens Overflade a i Qvadratmaal naar dens Diameter d er given.

Opløsn. Den givne Diameter d multipliceres med π, saa findes Peripherien $p = \pi d$; denne fundne Peripherie multipliceres igien med den halve Radius eller Fierdedelen af Diametren saa

findes Overfladen $a = p \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} pr$ eller $= p \times \frac{1}{4} d = \frac{1}{4} dp$.

Beviis: Efter §. 104. Till. 1. er naar Diameteren er 1 Peripherien $= \pi$ altsaa maa følgende Forhold finde Sted $1 : \pi = d : p$ og $p = \frac{\pi d}{1} = d\pi$. Cirkelfladen a er liig Fladen af en Triangel (§. 53. Till. 2.) hvor Grundlinien AB (Fig. 38.) er Peripherien i retlinet Maal p og Høiden saa stor som Radius r. Men denne Triangelflade beregnes ved at multiplicere Grundlinien p med den halve Høide $\frac{1}{2} r$ (§. 98.) altsaa Cirkelfladen $a = p \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} pr$, men da $d = 2r$ saa er $\frac{1}{2} d = r$, og $\frac{1}{4} d = \frac{1}{2} r$ følgelig $\frac{1}{2} pr = \frac{1}{4} dp$.

Anm. At rectificere en krum Linie er at trække en ret Linie, som er ligesaa lang; en Cirkellinie kan altsaa rectificeres naar dens Længde paa anførte Maade i retlinet Maal bestemmes.

Till. 1. Er Overfladen af en Cirkel $a = \frac{1}{4} dp$ og $p = d\pi$ saa er $a = \frac{1}{4} d \times d\pi = \frac{1}{4} d^2\pi = \frac{d^2\pi}{4} = d^2 \times \frac{1}{4}\pi = 0{,}785398\, d^2$.

Da $d = 2r$ saa er $p = 2r\pi$ altsaa $a = 2r\pi \times \frac{1}{2} r = r^2\pi$.

Till. 2. Indholden af Ringen mellem to koncentriske Cirkler (Fig. 36.) hvis Radier ere CB og CG er $= (CB^2 - CG^2) \times \pi$ thi den større Cirkelflade er $= CB^2 \times \pi$; den mindre $CG^2 \times \pi$, altsaa deres Differents (som er Fladen af Ringen) $= CB^2 \times \pi - CG^2 \times \pi = (CB^2 - CG^2) \times \pi$.

Till. 3. Er $p = d\pi$ saa er $d = \frac{p}{\pi}$ ɔ: Diameteren findes til en Cirkel naar Peripherien er given i Længdemaal ved at dividere den med π, og naar $a = r^2\pi$ saa er $r^2 = \frac{a}{\pi}$ og $r = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ ɔ: naar Overfladen er givet i Qvadratmaal findes Radius til en Cirkel, naar Overfladen divideres med π og af den fundne Qvotient udtrækkes Qvadratroden.

§. 106.

Opgave: At bestemme Længden af en Cirkelbue paa 1 Grad, 1 Minut og 1 Sekund i retlinet Maal naar Diametren $d = 1$.

Opløsn. Den fundne (§. 104. Till. 1.) Peripherie i Længdemaal (π) som svarer til Diameter $d = 1$ divideres med 360 saa har man Længden af een Grad; denne Længde divideret med 60 giver Længden af een Minut, og denne igjen med 60 Længden af een Sekund i retlinet Maal. Saaledes er i Decimalbrøk

1 Grad $=$ 0,008726646259 . . .

1 Minut $=$ 0,000145444104 . . .

1 Sekund $=$ 0,000002424068 af Diameterne.

Beviis: Er efter §. 104. Till. 1. $p = \pi$ naar $d = 1$ saa da $p = 360°$ so følger at $360° = \pi$ og $1° = \frac{\pi}{360}$. Er fremdeles $1° = 60'$ saa er $1' = \frac{1°}{60} = \frac{\pi}{360} : 60 = \frac{\pi}{360 \times 60}$. o. s. v.

Till. 1. Heraf lader enhver Bue given i Grader som AEB (Fig. 29.) sig sammensætte; og naar den multipliceres med den givne Diameter, har man dens Længde i samme Maal, hvori Diameteren var givet, Buen være f. Ex. 49°, 28', 13'' og Diameteren $= 8'$, saa er naar Diameteren vær $= 1$.

$49° = 0{,}42728$

$28' = 0{,}00406$

$13'' = \underline{0{,}0000312}$

49°, 28', 13'' $=$ 0,43137 multipliceres nu nu dette med Diameter $= 8$

saa er $3,45096'$ Længden af Buen i Fodmaal.

Till. 2. Da enhver Sektor eller Udsnit kan ansees som en Triangel hvis Grundlinie er Buen og hvis Høide er Radius, saa findes Fladeindholdet af enhver Sektor som $ACBE$ (Fig. 29.) naar den rectificerede Bue AEB multipliceres med den halve Radius.

Till. 3. Har man saaledes beregnet Indholden af Udsnittet $ACBE$; og derefter beregner Indholdet af Trianglen ACB (§. 98.) og subtraherer det fra Indholdet af Udsnittet; saa findes Fladeindholdet af Segmentet $ADBE$.

§. 107.

Læresæt. Enhver paa Hypothenusen af en retvinklet Triangel ABC (Fig. 32.) beskreven retlinet Figur ABF er saa stor som de to med den ligedanne paa Catheterne beskrevne Figurer AEC og BCD tilsammentagne.

Beviis: $\triangle AEC \sim \triangle CBD$ altsaa er

$AEC : CBD = ACq : CBq$ (§. 91.)

følgelig: $(AEC + CBD) : CBD = (ACq + CBq) : CBq$ (Arithm §. 73.)

$(AEC + CBD) : CBD = ABq : CBq$ (§. 38.)

fremdeles er $ABF : CBD = ABq : CBq$ (§. 91.)

altsaa $ABF : CBD = (AEC + CBD) : CBD$

men $CBD = CBD$

følgelig $ABF = AEC + CBD$.

Anm. Det her for Triangle førte Beviis gielder for alle ligedanne Figurer; altsaa ogsaa for Cirkler.

Till. 1. Beskrives paa de tre Sider af en retvinklet Triangel ACB (Fig. 37.) halve Cirkler; saa ere de to mellem Cirkelbuerne indsluttede Stykker (som kaldes Halvmaaner, Lunulæ) p og o saa store som den retvinklede Triangel; thi naar Segmenterne $n + m$ tages fra Halvcirklen paa Hypothenusen bliver den retvinklede Triangel tilbage; og tages de fra Halvcirklerne paa Catheterne blive Lunulæ tilbage.

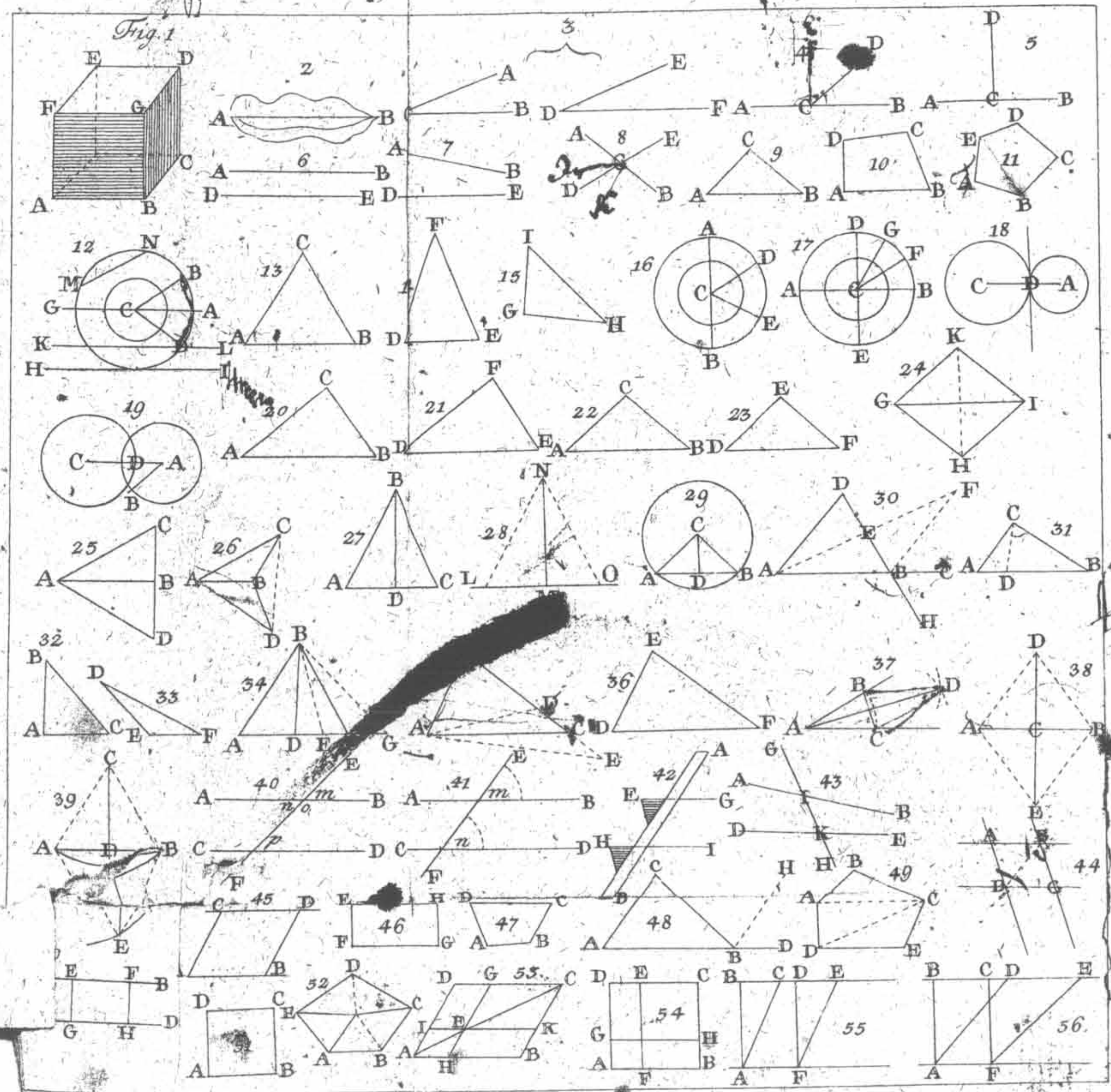
Till. 2. To givne ligedanne Figurer forvandles til en ligesaastor og ligedan; naar en retvinklet Triangel tegnes hvori to eenstaaende Sider af de givne Figurer ere Catheter; og paa dens Hypothenuse tegnes en ligedan Figur.

§. 108.

Opgave: At forvandle en given Rectangel (Fig. 30.) til en Qvadrat.

Opløsn.

Tab. I.



Tab. I.

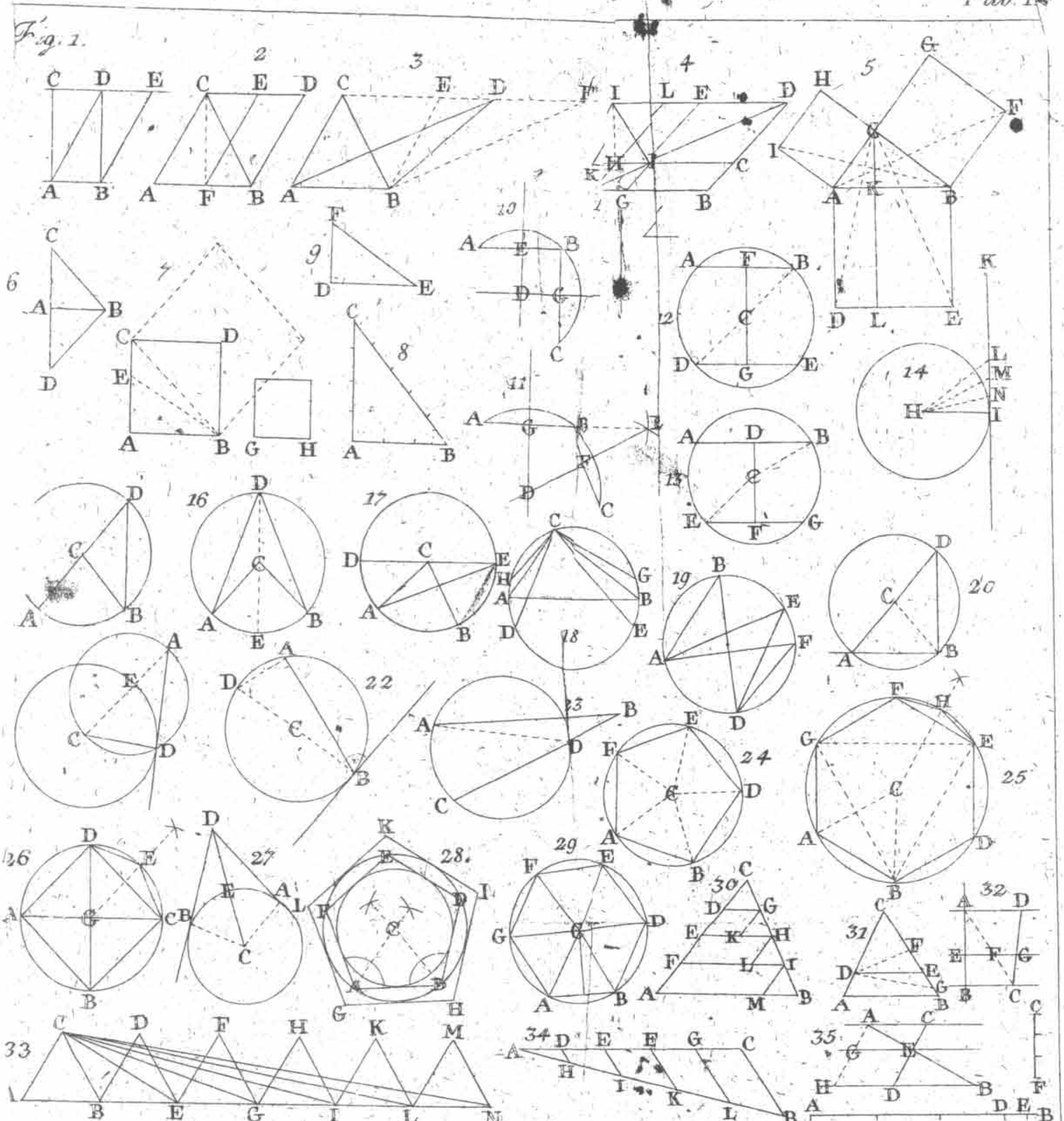


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
16
17
18
19
20
22
23
24
25
26
27
28.
29
30
31
32
33
34
35

Tab. III.

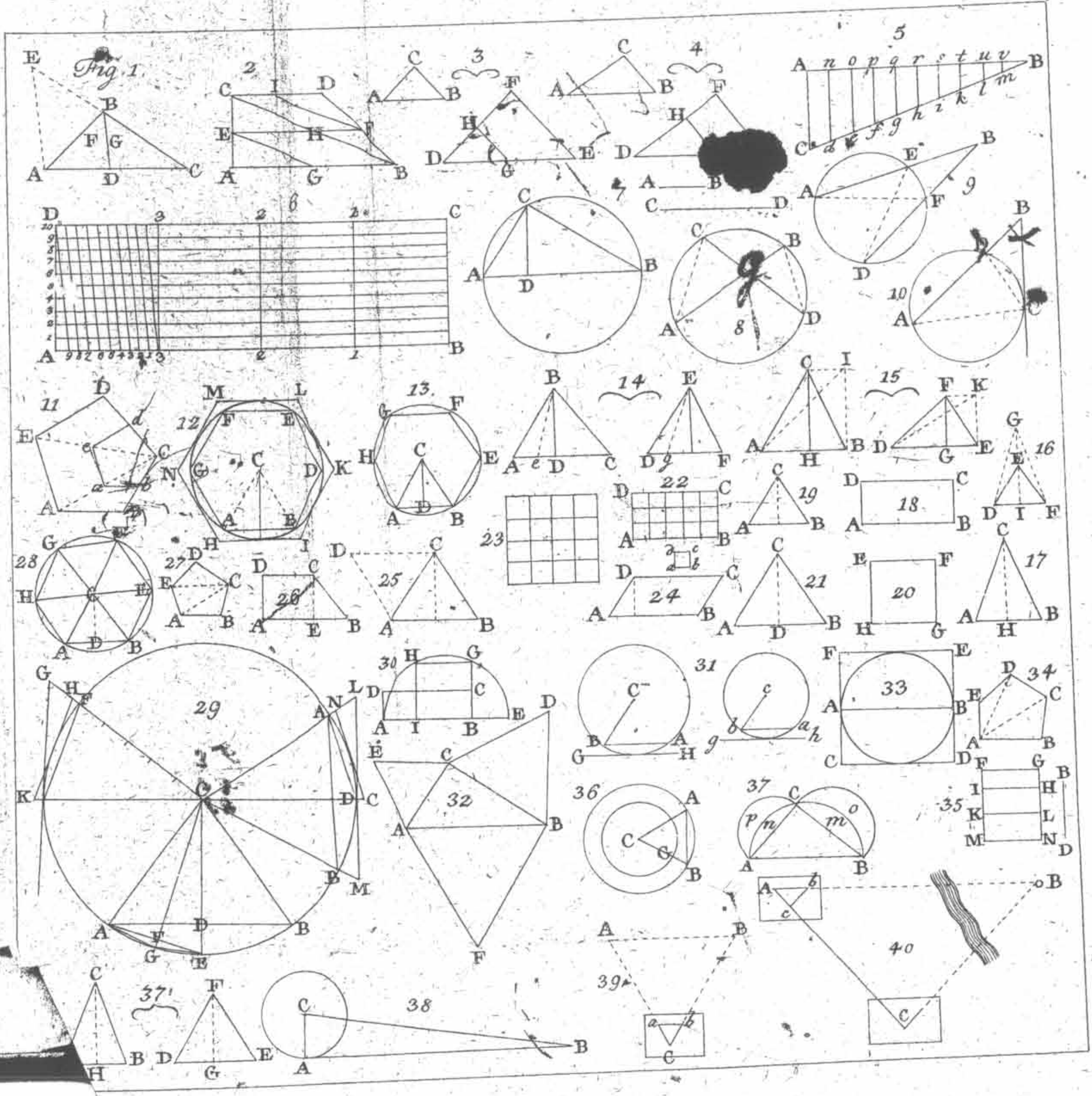


Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13.
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
37'
38
39
40